

9. 式の証明の問題（2013 年度出題）

【問 1】

3 けたの正の整数から、その数の各位の数の和をひくと、9 の倍数になることを次のように証明した。

ア ～ エ にあてはまる数や式を入れなさい。

（青森県 2013 年度 前期）

〔証明〕

3 けたの正の整数の百の位の数を a 、十の位の数を b 、一の位の数を c とすると、この整数は $100a + 10b + c$ と表される。また、この整数の各位の数の和は ア と表される。3 けたの正の整数から、その数の各位の数の和をひくと

$$(100a + 10b + c) - (\text{ア}) = \text{イ}$$

$$= \text{ウ} (\text{エ})$$

エ は整数だから、 ウ (エ) は 9 の倍数である。

したがって、3 けたの正の整数から、その数の各位の数の和をひくと、9 の倍数になる。

解答欄

ア	
イ	
ウ	
エ	

解答

ア $a + b + c$

イ $99a + 9b$

ウ 9

エ $11a + b$

解説

3 けたの整数－各位の整数の和＝9×(整数)になることを示す。

【問 2】

次の文を読んで、あとの問1、問2に答えなさい。

(岩手県 2013 年度)

次の表は、太郎さんが、1, 2, 3 のように差が 1 の 3 つの自然数について、もっとも小さい数と最も大きい数の積と中央の数の平方をくらべるためにつくったものです。

差が 1 の 3 つの自然数	もっとも小さい数と最も大きい数の積	中央の数の平方
1, 2, 3	$1 \times 3 = 3$	$2^2 = 4$
2, 3, 4	$2 \times 4 = 8$	$3^2 = 9$
3, 4, 5	$3 \times 5 = 15$	$4^2 = 16$

これらの結果から、太郎さんは次のようなことに気づきました。

【太郎さんの気づき】

差が 1 の 3 つの自然数では、もっとも小さい数と最も大きい数の積に 1 を加えると、中央の数の平方になる。

太郎さんは、このことが成り立つわけを、次のように文字を使って説明しました。

【太郎さんの説明】

差が 1 の 3 つの自然数では、中央の数を n とすると、もっとも小さい数は $n-1$ 、もっとも大きい数は $n+1$ と表される。もっとも小さい数と最も大きい数の積に 1 を加えると、

ア

したがって、もっとも小さい数と最も大きい数の積に 1 を加えると、中央の数の平方になる。

次に、太郎さんは、1, 3, 5 のように差が 2 の 3 つの自然数について、もっとも小さい数と最も大きい数の積と中央の数の平方を比較しました。

その後、太郎さんは、同様に差が 3 の 3 つの自然数、差が 4 の 3 つの自然数、…のように、順に調べました。

最後に、太郎さんは差が m ($m > 0$) の 3 つの自然数について、もっとも小さい数と最も大きい数の積と中央の数の平方を比較し、次のような規則性を見つけました。

【見つけた規則性】

差が m ($m > 0$) の 3 つの自然数では、中央の数を n とすると、もっとも小さい数は 、もっとも大きい数は と表される。

このとき、もっとも小さい数と最も大きい数の積に を加えると、中央の数の平方になる。

問1 に文字を使った式を書き、その式を計算して、【太郎さんの説明】を完成させなさい。

問2 ～ に文字を使った式を書き入れて、【見つけた規則性】を完成させなさい。

解答欄

問1	ア	
問2	イ	
	ウ	
	エ	

解答

問1

$$\begin{aligned}\text{ア} \quad & (n-1)(n+1)+1=n^2-1+1 \\ & =n^2\end{aligned}$$

問2

$$\text{イ} \quad n-m$$

$$\text{ウ} \quad n+m$$

$$\text{エ} \quad m^2$$

解説

問1

もっとも小さい数ともっとも大きい数の積に 1 を加えた数 $(n-1)(n+1)+1$ が中央の数の 2 乗 n^2 になることを示す。

問2

中央の数を n とする。

差が m より

3 つの数は $n-m, n, n+m$ と表せる。

$$(n-m)(n+m)=n^2-m^2 \text{ と表せるから}$$

もっとも小さい数ともっとも大きい数の積に m^2 を加えると中央の数の平方になる。

【問 3】

一の位が 0 でない 2 けたの自然数 A がある。 A の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる自然数を B とする。
(秋田県 2013 年度)

- (1) $A+B$ が 11 の倍数になることを, A の十の位の数 x , A の一の位の数 y として, 説明しなさい。
- (2) $A-B$ が 7 の倍数になるときの自然数 A をすべて求めなさい。ただし, A の十の位の数 x は, 一の位の数 y より大きいものとする。

解答欄

(1)	〔説明〕
(2)	

解答

(1)

〔説明〕

$A=10x+y$, $B=10y+x$ と表される。

$$A+B=(10x+y)+(10y+x)$$

$$=11x+11y$$

$$=11(x+y)$$

$x+y$ は整数だから

$11(x+y)$ は 11 の倍数である。

したがって $A+B$ は 11 の倍数である。

(2) 81, 92

解説

(1)

$$A=10x+y, B=10y+x \text{ とおけるので } A+B=(10x+y)+(10y+x)=11x+11y=11(x+y)$$

$x+y$ は整数なので $11(x+y)$ は 11 の倍数といえる。

(2)

$$A-B=(10x+y)-(10y+x)=9x-9y=9(x-y) \quad 9(x-y) \text{ は } 9 \text{ の倍数だから}$$

これが 7 の倍数より $x-y$ は 7 の倍数となる。

x, y は 1 から 9 の自然数で $x > y$ だから $(x, y) = (8, 1), (9, 2)$

よって $A = 81, 92$

【問 4】

下の表は、「かけ算九九の表」の一部である。表中の

8

 の 8 は、かけられる数が 4, かける数が 2 のときの 4×2 の値を表している。

この表中の

6

12

20

 のような 3 つの整数の組

a

b

c

 について考える。

このとき、 $a+c-2b$ の値はつねに 2 になる。このことを、 a は、かけられる数が m , かける数が n であるものとして説明しなさい。

(栃木県 2013 年度)

		かける数				
		1	2	3	4	5
かけられる数	1	1	2	3	4	5
	2	2	4	6	8	10
	3	3	6	9	12	15
	4	4	8	12	16	20
	5	5	10	15	20	25

解答欄

解答

$a=mn$, $b=(m+1)(n+1)$, $c=(m+2)(n+2)$ と表すことができる。

よって $a+c-2b=mn+(m+2)(n+2)-2(m+1)(n+1)$

$=mn+mn+2m+2n+4-2mn-2m-2n-2$

$=2$

したがって $a+c-2b$ の値はつねに 2 になる。

解説

$a=mn$ のとき $b=(m+1)(n+1)$, $c=(m+2)(n+2)$

$a+c-2b=mn+(m+2)(n+2)-2(m+1)(n+1)=mn+mn+2m+2n+4-2(mn+m+n+1)$

$=mn+mn+2m+2n+4-2mn-2m-2n-2=2$

【問 5】

次は、花子さんと太郎さんが数あてⅠ，数あてⅡをしたときの会話です。これを読んで、下の(1)，(2)に答えなさい。

(埼玉県 2013 年度)



なお，考えるときに，表1，表2を利用してもさしつかえありません。

数あてⅠ

花子さん「今から，数あてをします。頭の中で考えてください。」
「好きな自然数を1つ考えて，その数をAとしてください。」
「Aに1を加えて，その数を2倍して，Bとしてください。」
「Bに8を加えて，その数を2でわって，Cとしてください。」
「CからAをひいて，その数をDとしてください。」
「Aを知らなくても，Dは分かります。Dは，① ですね。」
太郎さん「すごい，正解です。」

- (1) ① にあてはまる数を求めなさい。

数あてⅡ

花子さん「次は，太郎さんの考える2けたの自然数をあててみせます。」
「2けたの自然数を1つ考えて，その数をEとしてください。」
「Eの十の位の数を5倍して，その数から2をひいて，Fとしてください。」
「Fを2倍して，その数にEの一の位の数を加えて，Gとしてください。」
「Gは，いくつになりましたか。」
太郎さん「68になりました。」
花子さん「はじめに考えた2けたの自然数Eは，72ですね。」
太郎さん「正解です。なぜ分かったのですか。」
花子さん「計算した答えGに4を加えると，必ず，はじめに考えた自然数Eになるのですぐに分かるのです。」

- (2) なぜ，計算した答えGに4を加えた数が，はじめに考えた自然数Eになるのでしょうか。

はじめに考えた2けたの自然数Eの十の位の数を a ，一の位の数を b として，そのわけを説明しなさい。

解答欄

(1)	
(2)	〔説明〕

解答

(1) 5

(2)

〔説明〕

$E=10a+b$ であり

$G=2F+b$

$=2(5a-2)+b$

$=10a+b-4$

$=E-4$ となるので

$E=G+4$ である。

よって E は G に 4 を加えた数になる。

解説

(1)

$B=2(A+1)$

$C=(B+8) \div 2 = \{2(A+1)+8\} \div 2 = A+5$

$D=C-A=(A+5)-A=5$

(2)

$E=10a+b$ とすると

$F=5a-2$

$G=2F+b=2(5a-2)+b=(10a+b)-4=E-4$

【問 6】

右の図1の A, B, C にそれぞれある数を入れると, 下の規則にしたがった結果が P, Q, R, S に表示される。

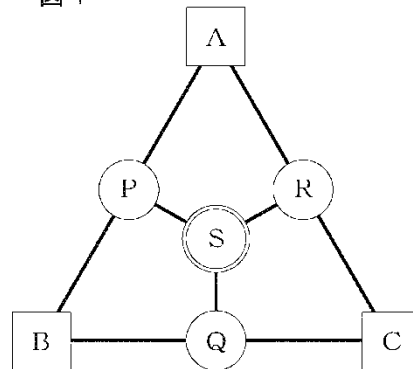
A に a , B に b , C に c を入れることを $[a, b, c]$ と表すとき, あとの問1～問3に答えなさい。

(千葉県 2013 年度 後期)

規則

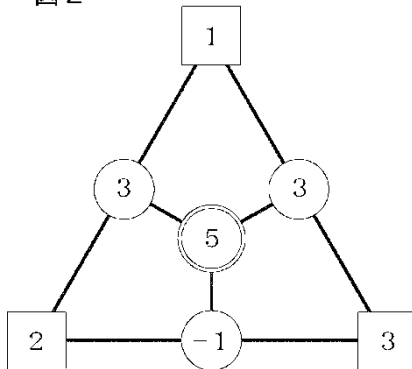
- ① P の値は, A に入れた数と B に入れた数の和となる。
- ② Q の値は, B に入れた数から C に入れた数をひいた値となる。
- ③ R の値は, A に入れた数と C に入れた数の積となる。
- ④ S の値は, P, Q, R に表示された 3 つの数の和となる。

図 1



例えば, A に 1, B に 2, C に 3 を入れたとき, $[1, 2, 3]$ と表し, 下の図2のように表示される。

図 2



問1 $[4, \frac{1}{2}, a]$ のとき, S に -1 が表示された。 a の値を求めなさい。

問2 a, b, c は, 連続する 3 つの整数で, $a < b < c$ とする。 $[a, b, c]$ のとき, S に 0 が表示された。 a の値をすべて求めなさい。

問3 $[a, b, c]$ のときと $[a, c, b]$ のとき, S にはそれぞれ同じ数が表示された。 a の値を求めなさい。
ただし, b と c は互いに異なる数とする。

解答欄

問1	$a=$
問2	$a=$
問3	$a=$

解答

問1 $a=-2$

問2 $a=-4, 0$

問3 $a=3$

解説

問1

$\left[4, \frac{1}{2}, a\right]$ のとき

P の値は $4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Q の値は $\frac{1}{2} - a$

R の値は $4 \times a = 4a$

$S = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - a + 4a = 3a + 5$ と表せる。

$S = -1$ より

$3a + 5 = -1$

$3a = -6$

$a = -2$

問2

a, b, c が連続する整数で $a < b < c$ より

$b = a + 1$

$c = a + 2$

$[a, b, c]$ のとき

$[a, a+1, a+2]$ だから

$S = P + Q + R = \{a + (a+1)\} + \{(a+1) - (a+2)\} + a \times (a+2) = 2a + 1 - 1 + a^2 + 2a = a^2 + 4a$

$S = 0$ より

$a^2 + 4a = 0$

$a(a+4) = 0$

$a = 0, -4$

問3

$[a, b, c]$ のとき

$S = (a+b) + (b-c) + ac = a + 2b - c + ac$

$[a, c, b]$ のとき

$S = (a+c) + (c-b) + ab = a + 2c - b + ab$

S の値が同じより

$a + 2b - c + ac = a + 2c - b + ab$

$3b - 3c = ab - ac$

$3(b-c) = a(b-c)$

b と c は異なる数なので

$a = 3$

【問 7】

ある中学校で、S さんが作った問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

(東京都 2013 年度)

[S さんが作った問題]

ℓ を正の数とする。

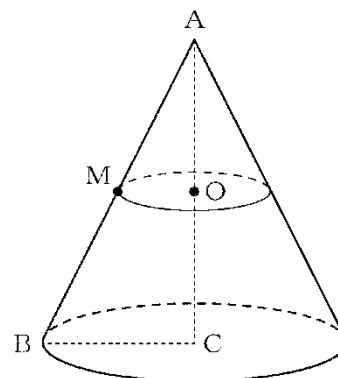
右の図1に示した立体は、 $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形 ABC を、辺 AC を通る直線を軸として 1 回転させたときにできる円すいである。

辺 AB の中点を M とし、点 M を通り底面に平行な平面と円すいが交わってできる円の中心を O とする。

円 O の周の長さを ℓ cm, 線分 AB を母線とする円すいの側面積を P cm² とする。

AB = 9 cm, $\ell = 4\pi$ cm のとき、P の値を求めてみよう。

図 1



問1 [S さんが作った問題]で、P の値を求めよ。

ただし、円周率は π とする。

先生は、[S さんが作った問題]をもとにして、次の問題を作った。

[先生が作った問題]

a, ℓ を正の数とする。

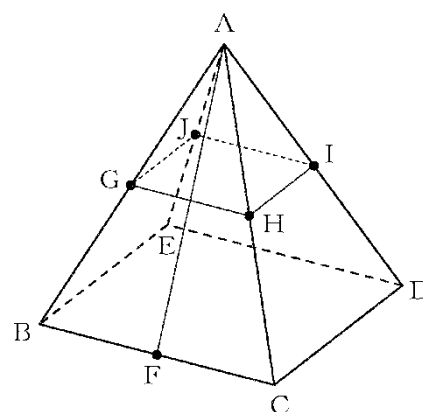
右の図2に示した立体 A-BCDE は、底面 BCDE が正方形で、AB = AC = AD = AE の正四角すいである。

辺 BC の中点を F とし、頂点 A と点 F を結ぶ。

辺 AB, 辺 AC, 辺 AD, 辺 AE の中点をそれぞれ G, H, I, J とし、点 G と点 H, 点 H と点 I, 点 I と点 J, 点 J と点 G をそれぞれ結ぶ。

AF = a cm, $GH + HI + IJ + JG = \ell$ cm, 立体 A-BCDE の側面積を Q cm² とするとき、 $Q = a\ell$ となることを確かめなさい。

図 2



問2 [先生が作った問題]で、 $Q = a\ell$ となることを証明せよ。

解答欄

問1	P=
問2	[証明]
	Q= $a\ell$

解答

問1 $P=36\pi$

問2

〔証明〕

立体 $A-BCDE$ は正四角すいなので

$$\triangle ABC \equiv \triangle ACD \equiv \triangle ADE \equiv \triangle AEB \cdots (1)$$

点 G, H, I, J はそれぞれ辺 AB, AC, AD, AE の中点であるから

中点連結定理より $GH=HI=IJ=JG$

$$\text{また } GH+HI+IJ+JG=\ell \text{ であるから } GH=\frac{1}{4}\ell$$

$$\text{よって } BC=2GH=2\times\frac{1}{4}\ell=\frac{1}{2}\ell$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times BC\times AF=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ell\times a=\frac{1}{4}a\ell \cdots (2)$$

(1), (2)より

$$Q=4\times\triangle ABC=4\times\frac{1}{4}a\ell$$

$$Q=a\ell$$

解説

問1

側面の展開図のおうぎ形において

中心角を x° とすると

$$AM=\frac{9}{2}\text{ cm であるから}$$

$$\ell=4\pi\text{ cm より}$$

$$2\pi\times\frac{9}{2}\times\frac{x}{360}=4\pi$$

$$x=160^\circ$$

$$\text{よって } P=\pi\times 9^2\times\frac{160}{360}=36\pi\text{ cm}^2$$

問2

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形で

G, H は AB, AC の中点だから

中点連結定理より

$$BC=2GH$$

$$GH=HI=IJ=JG=\frac{\ell}{4}\text{ cm であるから}$$

$$BC=CD=DE=EB=\frac{\ell}{2}\text{ cm}$$

$AB=AC$ より

$AF\perp BC$ であるから

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{\ell}{2}\times a=\frac{a\ell}{4}$$

$$\text{よって } Q=4\times\frac{a\ell}{4}=a\ell$$

【問 8】

AさんとBさんは、連続する5つの自然数について、その中で最も大きい自然数の2乗から最も小さい自然数の2乗を引いた差について調べた。次はそのときの会話文である。

会話文

Aさん「連続する5つの自然数が1, 2, 3, 4, 5のとき、最も小さい自然数は1, 最も大きい自然数は5だから、最も大きい自然数の2乗から最も小さい自然数の2乗を引いた差は $5^2 - 1^2 = 24$ となるね。」

Bさん「連続する5つの自然数が2, 3, 4, 5, 6のときは、最も小さい自然数は2, 最も大きい自然数は6だから、同じ計算をすると $6^2 - 2^2 = 32$ だね。」

Aさん「考えてみると、 $24 = 8 \times 3$ だから、連続する5つの自然数が1, 2, 3, 4, 5のとき、計算した結果の24は、中央の自然数3の8倍になっているね。」

Bさん「ほんとうだ。連続する5つの自然数が2, 3, 4, 5, 6のときも、計算した結果の32は、中央の自然数4の8倍だよ。」

このことから、2人は、「連続する5つの自然数について、最も大きい自然数の2乗から最も小さい自然数の2乗を引いた差は、中央の自然数の8倍になる。」と予想し、先生に相談したところ、先生から「その予想は正しいです。その理由を説明してください。」と言われた。

2人は、予想が正しいことを次のように説明した。解答用紙の の中に続きを書き、説明を完成させなさい。
(神奈川県 2013 年度)

説明

解答欄

解答は上の問題文中の説明欄に書きなさい。

解答

説明

(連続する 5 つの自然数のうち、最も小さい自然数を n とすると、)

連続する 5 つの自然数は $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ と表されるから

最も大きい自然数は $n+4$ である。

よって最も大きい自然数の 2 乗から最も小さい自然数の 2 乗を引いた差は

$$(n+4)^2 - n^2 = n^2 + 8n + 16 - n^2$$

$$= 8n + 16$$

$$= 8(n+2)$$

$n+2$ は中央の自然数だから

$8(n+2)$ は中央の自然数の 8 倍である。

よって連続する 5 つの自然数について

最も大きい自然数の 2 乗から最も小さい自然数の 2 乗を引いた差は中央の自然数の 8 倍になる。

解説

連続する 5 つの自然数を $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ と表して

最も大きい自然数 $n+4$ の 2 乗から最も小さい自然数 n の 2 乗をひくと中央の数 $n+2$ の 8 倍になることを示す。

【問 9】

連続する整数の和について、次の問いに答えなさい。

(富山県 2013 年度)

- (1) 次の文は、連続する 3 つの整数の和が必ず 3 の倍数になることを説明したものである。ア～ウにあてはまる式をそれぞれ答えなさい。

n を整数として、連続する 3 つの整数を小さい方から順に ア , n , イ と表すと、それらの和が ウ となるので、連続する 3 つの整数の和は、必ず 3 の倍数になる。

- (2) 連続する 5 つの整数の和が 555 になるとき、この 5 つの整数のうち最も小さいものを求めなさい。

解答欄

(1)	ア	
	イ	
	ウ	
(2)		

解答

(1)

ア $n-1$

イ $n+1$

ウ $3n$

(2) 109

解説

(1)

連続する 3 つの整数は n が整数のとき $n-1$, n , $n+1$ と表せるので

その和は $(n-1)+n+(n+1)=3n$ より

$3 \times (\text{整数})$ となるので必ず 3 の倍数になる。

(2)

連続する 5 つの整数は n が整数のとき $n-2$, $n-1$, n , $n+1$, $n+2$ と表せるので

その和は $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n$

$5n=555$

$n=111$

よって 5 つの整数のうち最も小さいものは $111-2=109$

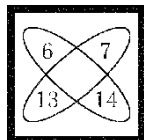
【問 10】

太郎さんは、右のカレンダーにおいて、 のように四角形で囲んだ 4 つの数について、次のような予想をした。

カレンダー

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

〔予想〕



カレンダーの 4 つの数を四角形で囲むと、例えば $6+14=20$, $7+13=20$ であるように、左上と右下の数の和と、右上と左下の数の和は、いつも等しくなる。

次の各問いに答えなさい。

(長野県 2013 年度)

(1) 太郎さんは、予想が正しいことを、文字を使って次のように説明した。

～ に当てはまる式を書きなさい。ただし、同類項はまとめて簡単にすること。

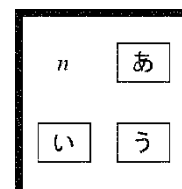
〔太郎さんの説明〕

右のように四角形で囲んだ 4 つの数のうち、左上の数を n で表すと、右上の数は , 左下の数は , 右下の数は と表せる。

左上と右下の数の和は、 $n + \text{う} = \text{え}$

右上と左下の数の和は、 $\text{あ} + \text{い} = \text{え}$

となり、計算すると同じ式になるので、左上と右下の数の和と、右上と左下の数の和は、いつも等しくなる。



(2) 太郎さんの説明の の式を変形して読みとれることを、次のア～エの中からすべて選び、記号を書きなさい。

- ☐ ア 左上と右下の数の和 (右上と左下の数の和) は、いつも 10 の倍数になる。
☐ イ 左上と右下の数の和 (右上と左下の数の和) は、いつも 4 で割り切れる。
☐ ウ 左上と右下の数の和 (右上と左下の数の和) は、いつも左上の数と 4 の和の 2 倍になる。
☐ エ 左上と右下の数の和 (右上と左下の数の和) は、いつも右上の数の 2 倍と 6 の和になる。

解答欄

(1)	あ	
	い	
	う	
	え	
(2)		

解答

(1)

あ $n+1$

い $n+7$

う $n+8$

え $2n+8$

(2) ウ, エ

解説

(1)

あ は n より 1 大きいので $n+1$

い は n より 7 大きいので $n+7$

う は い の $n+7$ より 1 大きいので $n+8$ と表せる。

$n + \text{う} = n + n + 8 = 2n + 8$ で あ + い $= n + 1 + n + 7 = 2n + 8$ より

え $= 2n + 8$

(2)

$2n + 8 = 2(n + 4)$ だからウは正しい。

また $2n + 8 = 2(n + 1) + 6$ だからエも正しい。

【問 11】

数学の授業で、先生から次の問題が出された。

問題 6 でわったとき 2 余る正の整数と、6 でわったとき 3 余る正の整数との積は、どんな数になるだろうか。

次の問1～問3に答えなさい。

(岐阜県 2013 年度)

問1 みほさんは、どんな数になるかを調べるために右の表をつくった。表中のア、イにあてはまる数の組を 1 つ書きなさい。ただし、アにあてはまる数は 8 より大きい数とする。

$\left(\begin{array}{c} 6 \text{ でわったとき} \\ 2 \text{ 余る正の整数} \end{array} \right)$	×	$\left(\begin{array}{c} 6 \text{ でわったとき} \\ 3 \text{ 余る正の整数} \end{array} \right)$	=	(積)
2	×	3	=	6
2	×	9	=	18
8	×	3	=	24
8	×	9	=	72
ア	×	3	=	イ

問2 みほさんは、問1で調べたことから、「6 でわったとき 2 余る正の整数と、6 でわったとき 3 余る正の整数との積は、いつも 6 の倍数である。」と予想し、その予想が正しいことを次のように証明した。みほさんの証明を完成させなさい。

証明

6 でわったとき 2 余る正の整数を、 $6m+2$ と表す。
ただし、 m は 0 以上の整数とする。

したがって、6 でわったとき 2 余る正の整数と、6 でわったとき 3 余る正の整数との積は、いつも 6 の倍数である。

問3 よし子さんは、みほさんが問2で証明した数の性質をもとに、正の整数 a , b , c について、次の 内のことがらが成り立つかどうかを考えた。

a でわったとき b 余る正の整数と、a でわったとき c 余る正の整数との積は、いつも a の倍数である。

よし子さんが考えたことについて、

- (1) b が 4, c が 6 のとき、 内のことがらが成り立つような a にあてはまる数は 3 つある。そのうちの 1 つが 24 である。 a にあてはまるほかの 2 つの数を求めなさい。
- (2) a が 7 のときは、その余りである b と c にどんな数をあてはめても、 内のことがらが成り立たない。このように 内のことがらが成り立たない a のうち、20 以下の 2 けたの数をすべて求めなさい。

[illegible][illegible]

解答

問1

ア 14

イ 42

問2

証明

6 でわったとき 2 余る正の整数を $6m+2$ と表す。

ただし m は 0 以上の整数とする。

6 でわったとき 3 余る正の整数を $6n+3$ と表す。

ただし n は 0 以上の整数とする。

$$(6m+2)(6n+3)$$

$$=36mn+18m+12n+6$$

$$=6(6mn+3m+2n+1)$$

$6mn+3m+2n+1$ は整数だから

$6(6mn+3m+2n+1)$ は 6 の倍数である。

したがって 6 でわったとき 2 余る正の整数と

6 でわったとき 3 余る正の整数との積は

いつも 6 の倍数である。

問3

(1) 8, 12

(2) 11, 13, 17, 19

解説

問1

6 で割ったときに 2 余る整数は $6 \times \text{商} + 2$ で表せる。

商が 1 のとき $6 \times 1 + 2 = 8$ だからそれより大きい数になるので商に 2 以上の整数を入れる。

例えば商が 2 のときア $= 6 \times 2 + 2 = 14$, イ $= 14 \times 3 = 42$

問2

6 で割ったときに 2 余る整数を $6m+2$

6 で割ったときに 3 余る整数を $6n+3$ と表すと

その積は $(6m+2)(6n+3) = 36mn + 18m + 12n + 6 = 6(6mn + 3m + 2n + 1)$ と表せる。

よって 2 つの数の積は $6 \times (\text{整数})$ となるので 6 の倍数である。

問3

(1)

$b=4$, $c=6$ のとき a でわったときのあまりが 4 になる数を $am+4$, a で

わったときあまりが 6 になる数を $an+6$ とすると

その積は

$$(am+4)(an+6) = a^2mn + 6am + 4an + 24 = a \left(amn + 6m + 4n + \frac{24}{a} \right)$$

$amn + 6m + 4n + \frac{24}{a}$ が整数であるとき積が a の倍数となる。

$amn + 6m + 4n$ は整数だから $\frac{24}{a}$ が整数のときとなる。

$a > 6$ だから $a = 8, 12, 24$

よって 24 以外の $a = 8, 12$

(2)

2 つの積 $(am+b)(an+c) = a^2mn + acm + abn + bc = a \left(amn + cm + bn + \frac{bc}{a} \right)$ が a の倍数になるのは

$\frac{bc}{a}$ が整数になるとき。

よって a の倍数にならないのは $\frac{bc}{a}$ が整数にならないとき。

つまり $a > b$, $a > c$ だから a が a より小さい 2 数 b と c の因数の積でつくれる数であるとき。

a は 20 以下の 2 けたの整数より $a = 11, 13, 17, 19$

【問 12】

図4のように並べられた 6 つの○の中に、次の 中の手順にしたがって数字を書く。

- [1] 一段目の 3 つの○の中に、連続する 3 つの整数を左から小さい順に書く。

[2] 二段目の 2 つの○の中に、一段目の隣り合う 2 つの整数の和をそれぞれ書く。

[3] 三段目の○の中に、二段目の整数の和を書く。

図 4

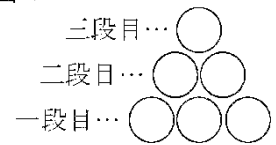


図 5

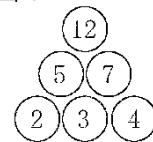


図5は、一段目の○の中に 2, 3, 4 を書いた場合の例である。

Sさんは、一段目に書く整数を変えて、この手順を何回か行ったところ、次のことに気がついた。

「三段目に書く整数は、いつも一段目のまん中に書いた整数の 4 倍になる。」

このことを文字式を使って証明したい。 の中に、証明の続きを書きなさい。

(静岡県 2013 年度)

〔証明〕

一段目のまん中の整数を n とすると、一段目の整数は左から小さい順に、

解答欄

解答は問題文中の枠に書きなさい。

解答

〔証明〕

一段目のまん中の整数を n とすると一段目の整数は左から小さい順に

一段目のまん中の整数を n とすると一段目の整数は左から小さい順に

$n-1, n, n+1$ と表せる。

また二段目は左から小さい順に

$(n-1)+n=2n-1, n+(n+1)=2n+1$ と表せる。

よって三段目の数は

$$(2n-1)+(2n+1)=4n$$

よって三段目に書く整数は

いつも一段目のまん中に書いた整数の 4 倍になる。

【問 13】

連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、偶数の 2 乗になることを次のように証明したい。

I , II にあてはまる最も適当な式を書きなさい。

(愛知県 2013 年度 B)

〔証明〕

整数 n を使って、連続する 2 つの奇数のうち小さい方の奇数を $2n-1$ と表すと、大きい方の奇数は、

I

と表される。

それらの積に 1 をたした数は、

$(2n-1)(\text{ I }) + 1$

である。

これを計算すると、

$(\text{ II })^2$

となり、偶数 II の 2 乗になる。

解答欄

I	
II	

解答

I $2n+1$

II $2n$

解説

奇数は偶数より 1 小さい数で

奇数は 2 ずつ大きくなっているので

連続する方の奇数の小さい方を $2n-1$ とすると、大きい方の奇数は $2n-1+2=2n+1$

この 2 数の積に 1 をたした数は

$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2-1+1=4n^2=(2n)^2$

よって偶数の 2 乗となる。

【問 14】

n を自然数とすると、次のア～オの式のうち、その値がつねに 3 の倍数になるものをすべて選び、記号を書きなさい。

(大阪府 2013 年度 後期)

ア $n+3$ イ $3(n+1)$ ウ $\frac{1}{3}n$ エ $6n$ オ $2n^2+1$

解答欄

--

解答

イ, エ

解説

$3 \times (\text{自然数})$ になるものを選ぶ。

イとエ

【問 15】

$23+32=55$, $81+18=99$ のように, 2 けたの正の整数と, その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は, 11 の倍数になる。2 けたの正の整数の十の位を a , 一の位を b として, そのわけを説明しなさい。

(和歌山県 2013 年度)

解答欄

〔説明〕

2 けたの正の整数の十の位を a , 一の位を b とする。

解答

〔説明〕

2 けたの正の整数の十の位を a , 一の位を b とする。

この数は $10a+b$ と表される。

また十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数は $10b+a$ となる。

このときこの 2 数の和は

$$(10a+b)+(10b+a)$$

$$=11a+11b$$

$$=11(a+b)$$

$11 \times$ 整数となるのでこれは 11 の倍数である。

解説

もとの整数の十の位を a , 一の位を b とすると

もとの整数は $10a+b$

十の位と一の位の数を入れかえてできる数は $10b+a$ とおけるので

$$\text{その和は } (10a+b)+(10b+a)=11a+11b=11(a+b)$$

$a+b$ は整数なので $11(a+b)$ は 11 の倍数といえる。

【問 16】

次の表のように、自然数を 1 から順に 1 段に 7 個ずつ並べた。

表

1 段目	1	2	3	4	5	6	7
2 段目	8	9	10	11	12	13	14
3 段目	15	16	17	18	19	20	21
4 段目	22	23	24	25	26	27	28
5 段目	29	30	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・

次の(1), (2)に答えなさい。

(島根県 2013 年度)

(1) 上の表から次のことがわかる。ア ～ ウ にあてはまる数を答えなさい。

- ・18 は上から 3 段目で左から 4 番目の数である。
- ・47 は上から ア 段目で左から イ 番目の数である。
- ・上から 100 段目で左から 1 番目の数は ウ である。

(2) 次は、A さんと B さんが、表を見ながら交わした会話である。

これを読んで、次の①, ②に答えなさい。

A さん： 下のように、縦 2 つ、横 2 つの 4 つの数を で囲んでみたら、あることに気づいたんだ。

表

1 段目	1	2	3	4	5	6	7
2 段目	8	9	10	11	12	13	14
3 段目	15	16	17	18	19	20	21
4 段目	22	23	24	25	26	27	28
5 段目	29	30	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・

B さん： それはどんなこと？

A さん： で囲んだ 4 つの数について、 $6 \times 14 - 7 \times 13$ や $9 \times 17 - 10 \times 16$ のように、左上の数と右下の数の積から右上の数と左下の数の積をひくと、そのときの値は エ になるんだ。

B さん： どこを囲んでもそうなるの？

A さん： そうだよ。そのわけは次のように説明することができるよ。

【説明】

中の左上の数を n とすると、残り 3 つの数は n を用いて $n+1$, オ, カ と表すことができる。

このとき、左上の数と右下の数の積から右上の数と左下の数の積をひくと、

キ

B さん： なるほど。

①

エ

 ~

カ

 にあてはまる数または式を答えなさい。

② 空欄

キ

 をうめて,【説明】を完成させなさい。

解答欄

(1)	ア		
	イ		
	ウ		
(2)	①	エ	
		オ	
		カ	
	②	キ	

解答

(1)

ア 7

イ 5

ウ 694

(2)

①

エ -7

オ $n+7$

カ $n+8$

②

キ

$$\begin{aligned} & n(n+8) - (n+1)(n+7) \\ &= (n^2+8n) - (n^2+8n+7) \\ &= n^2+8n - n^2 - 8n - 7 \\ &= -7 \end{aligned}$$

したがってその値はつねに-7になる。

解説

(1)

$47 \div 7 = 6 \cdots 5$ より 47 は 7 段目の左から 5 番目の数である。

100 段目の左から 1 番目の数は $7 \times (100-1) + 1 = 694$

(2)

①

左上の数と右下の数の積から右上の数と左下の数の積をひくと-7。

左上の数を n とすると

右上の数は $n+1$

左下の数は $n+7$

右下の数は $n+8$ と表せる。

②

左上の数と右下の数の積から右上の数と左下の数の積をひくと

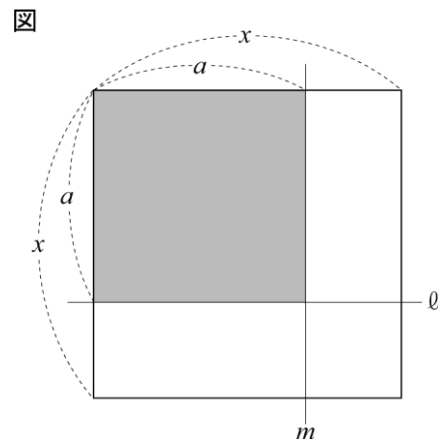
$$\begin{aligned} & n(n+8) - (n+1)(n+7) \\ &= n^2+8n - (n^2+8n+7) \\ &= n^2+8n - n^2 - 8n - 7 \\ &= -7 \end{aligned}$$

よってその値はつねに-7になる。

【問 17】

図のように、1 辺の長さが x の正方形を 2 つの直線 ℓ , m で 4 つの四角形に分けて、1 辺の長さが a の正方形をつくる。この図を利用して、問1の公式が成り立つことを説明せよ。

(長崎県 2013 年度)



解答欄

解答

1 辺の長さが x の正方形の面積は
4 つの四角形の面積の和に等しいから

$$x^2 = a^2 + a(x-a) + a(x-a) + (x-a)^2$$

$$(x-a)^2 = x^2 - a^2 - a(x-a) - a(x-a)$$

$$= x^2 - a^2 - ax + a^2 - ax + a^2$$

$$= x^2 - 2ax + a^2$$

したがって $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ が成り立つ。

解説

正方形の面積を 2 通りの式で表してから $(x-a)^2$ が $x^2 - 2ax + a^2$ と等しくなることを導く。

【問 18】

次の(1), (2)に答えよ。

(長崎県 2013 年度)

- (1) 2, 4 や, 6, 8 のような, 2つの続いた正の偶数の平方の和から2をひくと, 奇数の平方の2倍になる。このことを, 文字 n を使って証明せよ。ただし, 証明は解答用紙の「 n を 2 以上の整数とし, 2 つの続いた正の偶数のうち, 大きいほうを $2n$ とする。」に続けて完成させよ。
- (2) ある 2 つの続いた正の偶数の平方の和から 2 をひいた数は, 3 けたの 7 の倍数になる。このとき, 2 つの続いた正の偶数を求めよ。

解答欄

(1)	n を 2 以上の整数とし, 2 つの続いた正の偶数のうち, 大きいほうを $2n$ とする。	
(2)		

解答

(1)

n を 2 以上の整数とし, 2 つの続いた正の偶数のうち, 大きいほうを $2n$ とする。

小さいほうは $2n-2$ と表されるので

2 つの続いた正の偶数の平方の和から 2 をひくと,

$$(2n-2)^2 + (2n)^2 - 2 = 8n^2 - 8n + 2$$

$$= 2(4n^2 - 4n + 1)$$

$$= 2(2n-1)^2$$

$2n-1$ は奇数なので

2 つの続いた正の偶数の平方の和から 2 をひくと奇数の平方の 2 倍になる。

(2) 20, 22

解説

(1)

偶数は 2 ずつ大きくなっているので

2 つの続いた偶数において大きい方の偶数が $2n$ のとき小さい方は $2n-2$ と表せる。

(2)

$$(2n-2)^2 + (2n)^2 - 2 = 2(2n-1)^2 \text{ より}$$

2 つの偶数の間の数の奇数の平方の 2 倍になる。

これが 7 の倍数より

$$2n-1 = 7 \times (\text{奇数})$$

$$2(2n-1)^2 \text{ が 3 けただから}$$

$$2n-1 = 7 \times 3$$

$$n = 11$$

よって求める偶数は 20 と 22

【問 19】

太郎君は、図1のように、何も書かれていないカードを並べています。1 行目には 1 枚、2 行目には 2 枚と並べていき、10 行目までカードを並べました。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(宮崎県 2013 年度)

- (1) 太郎君は、1 行目から 10 行目までのすべてのカードの枚数を、次のようにして求めました。

【求め方】

求める枚数を S 枚とすると、

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \cdots \textcircled{1}$$

右辺の項を逆の順番に並べて、

$$S = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$

$$2S = \boxed{\text{ア}} \times 10$$

$$S = \boxed{\text{イ}}$$

したがって、 $\boxed{\text{イ}}$ 枚となる。

このとき、【求め方】の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる数を答えなさい。

- (2) 太郎君は、図2のように、図1のカードの行ごとに、1 から小さい順番に奇数を書き、行ごとの奇数の和がどんな数になるかを調べています。1 行目の奇数の和が 1、2 行目の奇数の和が 4、3 行目の奇数の和が 9 になることから、太郎君は、次のことを予想しました。

太郎君の予想「 n 行目の奇数の和は、 n の2乗になる」

太郎君の予想が、10 行目でも成り立つことを説明します。(1)の【求め方】を利用して、次の【説明】を完成させなさい。

【説明】

10 行目の奇数の和を T とすると、

図 1

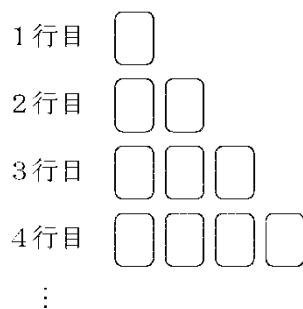
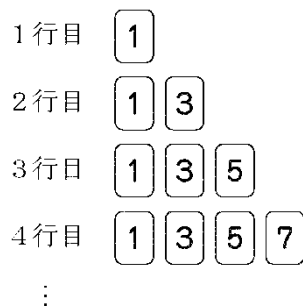


図 2



解答欄

(1)	ア		イ	
(2)	【説明】 10 行目の奇数の和を T とすると,			

解答

(1)

ア 11

イ 55

(2)

〔説明〕

10 行目の奇数の和を T とすると

$$T=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19\cdots\textcircled{1}$$

右辺の項を逆の順番に並べて

$$T=19+17+15+13+11+9+7+5+3+1\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}$$

$$2T=20\times 10$$

$$T=100$$

$$=10^2$$

したがって 10 行目の奇数の和は 10 の 2 乗になる。

解説

(1)

$$2S=(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)+(6+5)+(7+4)+(8+3)+(9+2)+(10+1)$$

$$=11\times 10$$

$$S=11\times 10\div 2=55$$

(2)

$$T=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \text{ より}$$

$$2T=20\times 10 \quad T=100=10^2$$

よって 10 行目の奇数の和は 10 の 2 乗になる。