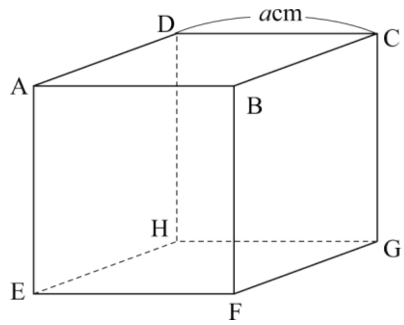
5.空間図形の複合問題（長さ･面積･体積･角度ほか）【2021 年度出題】

【問 1】

図１のように，１辺が a cm の立方体 ABCD－EFGH があります。次の⑴～⑶に答えなさい。

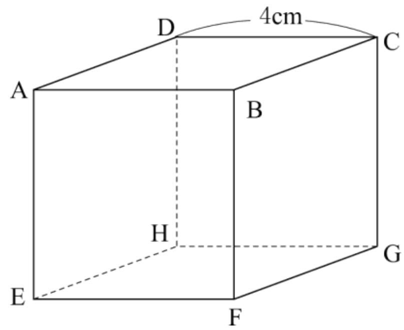
（北海道 2021 年度）

図１



⑴ **図２**は，**図１**の立方体で，a＝4 としたものです。立方体を３点 A，C，G を通る平面で切ります。頂点 F をふくむ立体の体積を求めなさい。

図２



⑵ **図１**の立方体を３点 B，E，G を通る平面で切ります。頂点 F をふくむ立体の体積は，**図１**の立方体の体積の何倍ですか，求めなさい。

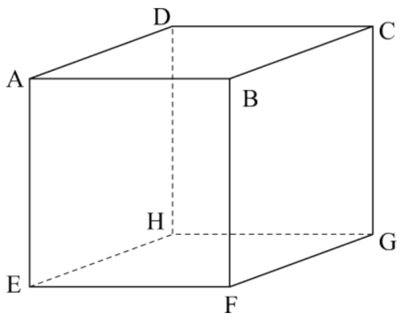
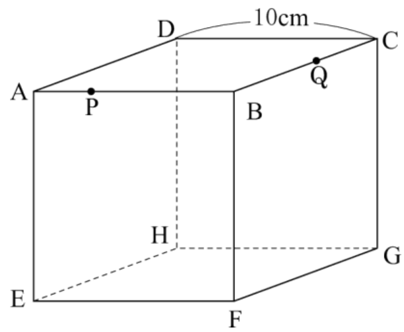


図３



⑶ **図３**は，**図１**の立方体で，a＝10 としたものです。点 P，Q はそれぞれ頂点 A，B を同時に出発し，四角形 ABCD の辺上を，P は毎秒１cm の速さで B を通って C まで，Q は毎秒２cm の速さで C，D，A を通って B まで移動します。２直線 PQ，EG が同じ平面上にある直線となるのは，点 P，Q がそれぞれ頂点 A，B を同時に出発してから，何秒後と何秒後ですか，求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	倍
(3)	〔計算〕 (答)　　　秒後　　　秒後

解答

(1) 32　cm^3

(2) $\frac{1}{6}$　倍

(3)

〔計算〕

点 P，Q が頂点 A，B を出発してからの時間を x 秒とする。

2 直線 PQ，EG が同じ平面上にあるのは，PQ // EG のときである。

P が AB 上，Q が BC 上にある場合，PB＝BQ より，

$10-x=2x$　を解いて，$x=\frac{10}{3}$　……①

また，Q が AB 上，P が BC 上にある場合，

QB＝BP より，

$40-2x=x-10$　を解いて，$x=\frac{50}{3}$ ……②

(答)　$\frac{10}{3}$　秒後，$\frac{50}{3}$　秒後

解説

(1)

立方体を３点A，C，Gを通る平面で切ったとき，頂点Fをふくむ立体は**図３**のような，△EFGを底面とする三角柱になる。

よって，その体積は，△EFG×BF＝$4\times4\times\dfrac{1}{2}\times4=32$(cm^3)

(2)

立方体を３点B，E，Gを通る平面で切ったとき，頂点Fをふくむ立体は**図４**のような，△EFGを底面，点Bを頂点とする三角錐になる。よって，その体積は，

△EFG×BF×$\dfrac{1}{3}=a\times a\times\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}a^3$(cm^3)

立方体の体積が，a^3(cm^3)なので，頂点Fをふくむ立体の体積は，立方体の$\dfrac{1}{6}$倍である。

(3)

点P，Qがそれぞれ頂点A，Bを同時に出発してから経過した時間をx秒とする。

２直線PQ，EGが同じ平面上にあるのは，２直線PQ，EGが平行のときだけである。これは，EG//ACなので，２直線PQ，ACが平行のときである。

２直線PQ，EGが平行になる可能性があるのは，①点Pが辺AB上，点QがBC上をそれぞれ進んでいるとき，②点Pが辺BC上，点QがAB上をそれぞれ進んでいるときである。

①について，点Qが点Bと一致するのが０秒後，点Cと一致するのが５秒後なので，xの変域は，

$0\leqq x\leqq5$

図５において，PQ//ACより，BP：BA＝BQ：BC

⇒　BP：10＝BQ：10　⇒　BP＝BQ

AP＝x cmなので，BP＝$10-x$(cm)であり，BQ＝$2x$ cm

BP＝BQ　⇒　$2x=10-x$　⇒　$x=\dfrac{10}{3}$(秒後)

これは，$0\leqq x\leqq5$を満たす。

②について，点Qが点Aと一致するのが15秒後，点Bと一致するのが20秒後なので，xの変域は，$15\leqq x\leqq20$

図６において，QP//ACより，BQ：BA＝BP：BC

⇒　BQ：10＝BP：10　⇒　BP＝BQ

AB＋BP＝x cmなので，BP＝$x-10$(cm)，

BC＋CD＋DA＋AQ＝$2x$ cmなので，BQ＝$40-2x$(cm)

BP＝BQ　⇒　$x-10=40-2x$　⇒　$x=\dfrac{50}{3}$(秒後)

これは，$15\leqq x\leqq20$を満たす。

よって，$\dfrac{10}{3}$秒後と，$\dfrac{50}{3}$秒後

図３

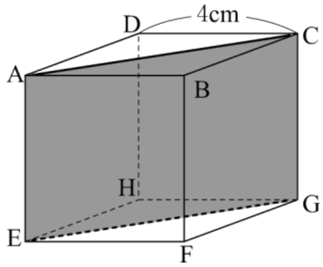


図４

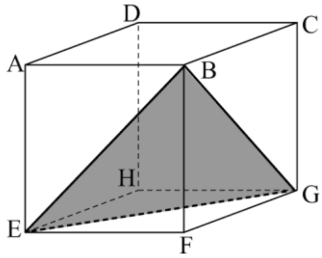


図５

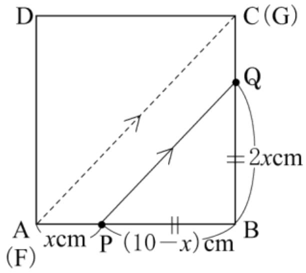
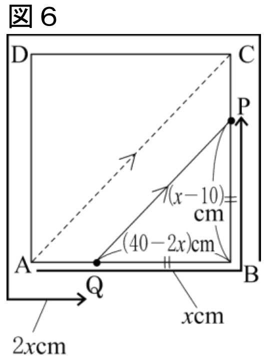


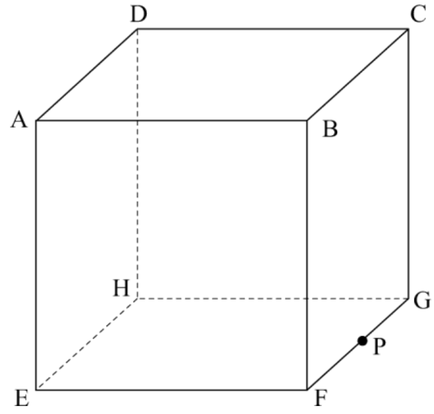
図６



【問 2】

右の図は，1 辺の長さが 6 cm の立方体である。辺 FG の中点を P とするとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県 2021 年度）



(1) 辺 EF 上に QF＝4 cm となる点 Q をとるとき，三角すい BQFP の体積を求めなさい。

(2) 辺 AE の中点を R とするとき，点 R から辺 EF を通って点 P まで糸をかける。この糸の長さが最も短くなるときの，糸の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1) 12 (cm^3)

(2) $6\sqrt{2}$ (cm)

解説

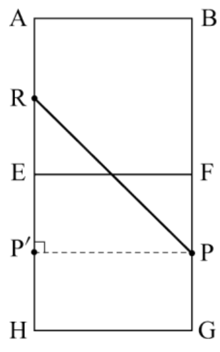
(1)

(三角すい BQFP)$=\frac{1}{3}\times\triangle PQF\times BF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times QF\times PF\times BF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times3\times6=$ 12(cm^3)

(2)

展開図をかいて考える（図 1）。求める糸の長さは線分 RP の長さである。ここで EH の中点を P´とすると，PP´＝RP´＝6cm，∠RP´P＝90° であり，△RP´P は直角二等辺三角形である。したがって，PP´：RP＝1：$\sqrt{2}$となるので，RP＝$6\sqrt{2}$cm

図 1



【問３】

下の**図１**のような直方体 ABCD－EFGH があります。**図２**は，この直方体の展開図です。**図２**において，線分 AG と EF との交点を P とします。

図１

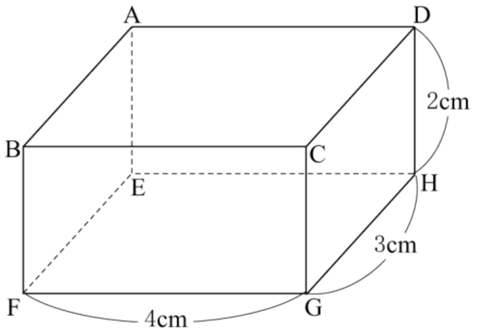
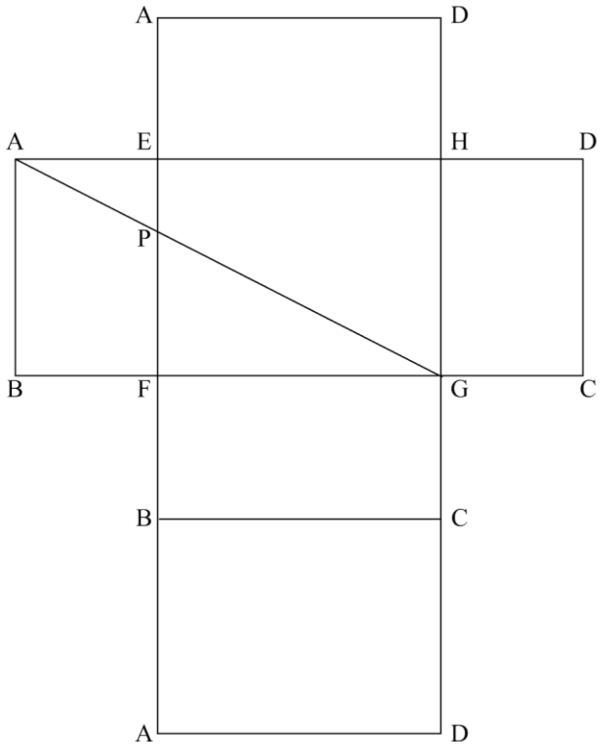


図２



このとき，次の**問１**，**問２**に答えなさい。

（岩手県 2021 年度）

問１　**図２**の線分 AG の**長さ**を求めなさい。

問２　**図２**の展開図を直方体 ABCD－EFGH に組み立てたときにできる三角錐AEPG の**体積**を求めなさい。

解答欄

問１	cm
問２	cm^3

解答

問１ $3\sqrt{5}$　cm

問２ $\frac{4}{3}$　cm^3

解説

問１

図１において，△ABG は，∠ABG＝90°の直角三角形だから，三平方の定理より，$AG^2＝AB^2＋BG^2＝3^2＋6^2＝45$

⇒　AG＞0 より，AG＝$3\sqrt{5}$(cm)

問２

図２より，AE⊥PE，AE⊥GE より，線分 AE と平面 EPG は垂直だから，三角錐 AEPG の体積は，

△EPG×AE×$\frac{1}{3}$で求められる。

図３において，PF//AB より，△GAB において，平行線と線分の比から，PF : AB＝GF : GB⇒　PF : 3＝4 : 6　⇒　PF＝2(cm)

よって，EP＝3－2＝1(cm)

図４において，△EPG の底辺を EP としたときの高さは，FG＝4(cm)なので，△EPG の面積は，

△EPG＝1×4×$\frac{1}{2}$＝2(cm^2)

よって，三角錐 AEPG の体積は，

△EPG×AE×$\frac{1}{3}$＝2×2×$\frac{1}{3}$＝$\frac{4}{3}$(cm^3)

図１

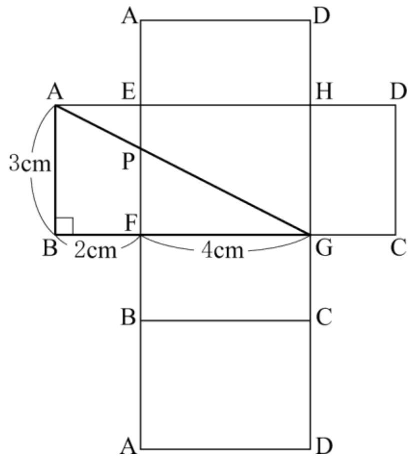


図２

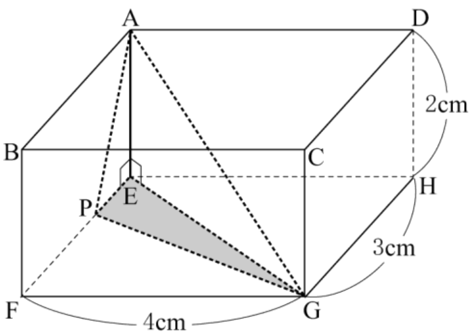


図３

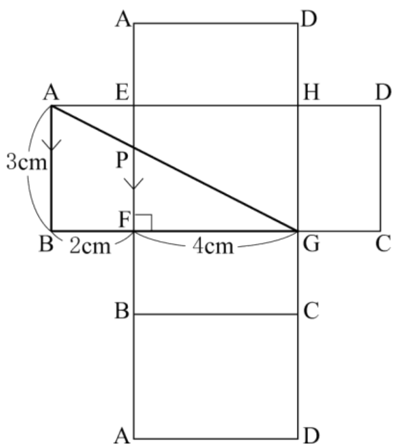
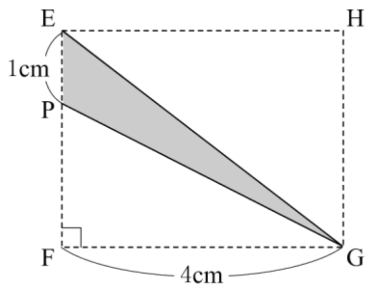


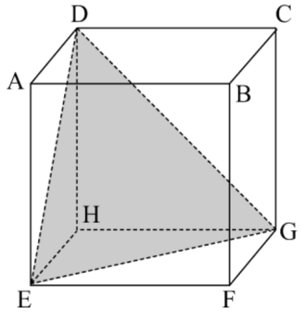
図４



【問 4】

右の図で，立方体 ABCD－EFGH の体積は 1000 cm^3 である。三角錐 H－DEG において，△DEG を底面としたときの高さを求めなさい。

（秋田県 2021 年度）



解答欄

cm

解答

$\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

解説

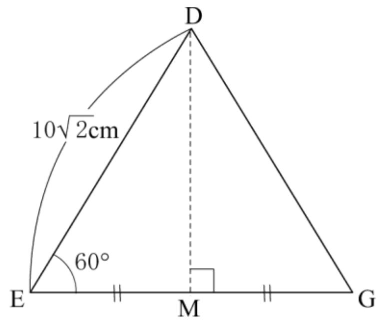
三角錐 H－DEG の体積を求めてから，高さを逆算する方法で考える。立方体の体積が 1000cm^3 なので，一辺の長さが 10cm である。

(AB を回転軸とした円錐)$=\dfrac{1}{3}\times$△HEG$\times$DH$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times10\times10\times10=\dfrac{500}{3}$($cm^3$)

次に△DEG の面積を求める。△ADE が直角二等辺三角形なので辺の比が決まっており，DE$=10\sqrt{2}$cm である。

DG，EG も同様にして，長さは $10\sqrt{2}$cm である。よって，△DEG は一辺が $10\sqrt{2}$cm の正三角形なので，点 D から EG の中点 M におろした垂線を考える（**図２**）。

図２



△DEM は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であり，DE : DM$=2:\sqrt{3}$　$10\sqrt{2}$: DM$=2:\sqrt{3}$　DM$=5\sqrt{6}$cm

よって，△DEG$=\dfrac{1}{2}\times$EG$\times$DM$=\dfrac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times5\sqrt{6}$

$=50\sqrt{3}$(cm^2)　したがって，求める高さを h (cm)とすると，

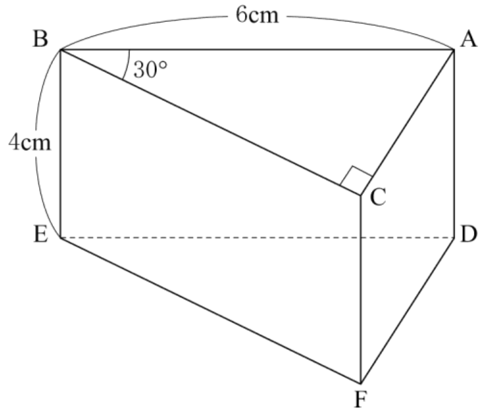
(AB を回転軸とした円錐)$=\dfrac{1}{3}\times$△DEG$\times h$

$\dfrac{500}{3}=\dfrac{1}{3}\times50\sqrt{3}\times h$　$h=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$cm

【問 5】

下の図のように，底面が直角三角形で，側面がすべて長方形の三角柱があり，AB＝6 cm，BE＝4 cm，∠ABC＝30°，∠ACB＝90° である。この三角柱の体積を求めなさい。

（山形県 2021 年度）



解答欄

cm^3

解答

$18\sqrt{3}$　cm^3

解説

△ABC において，∠ABC＝30°，∠ACB＝90°だから，AC：AB：BC＝1：2：$\sqrt{3}$

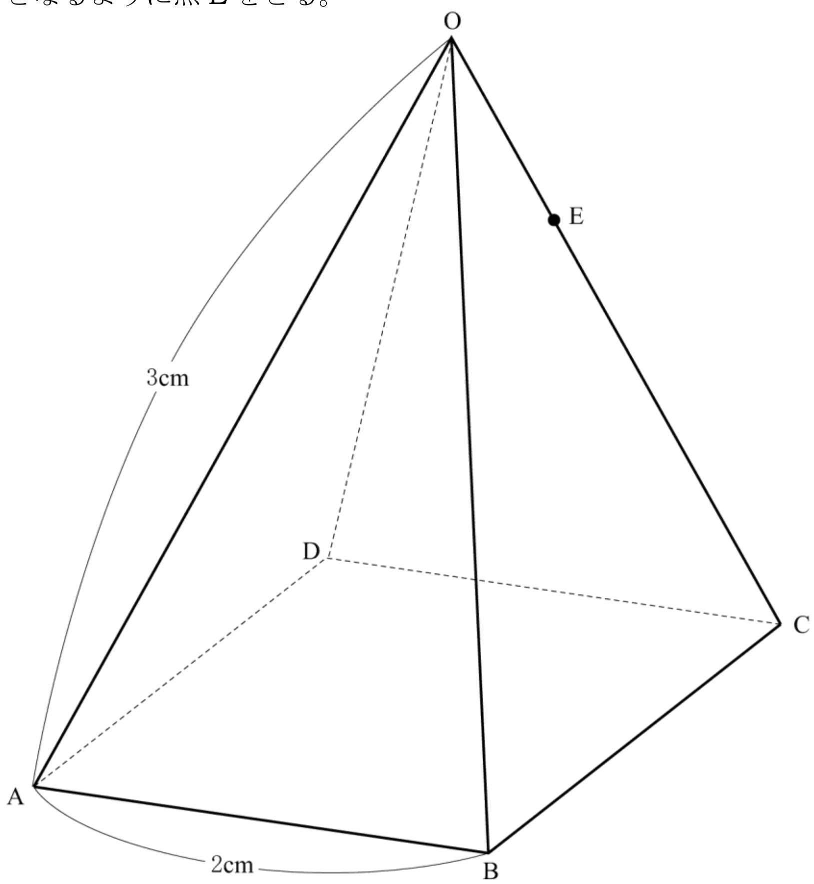
よって，AC：AB＝1：2，AC：6＝1：2，AC＝3（cm）

AB：BC＝2：$\sqrt{3}$，6：BC＝2：$\sqrt{3}$，BC＝$3\sqrt{3}$（cm）

したがって，三角柱の体積は，△ABC×BE＝$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3\times 4=18\sqrt{3}$（$\text{cm}^3$）

【問 6】

下の図のような，底面が 1 辺 2 cm の正方形で，他の辺が 3 cm の正四角錐(すい)がある。
辺 OC 上に AC＝AE となるように点 E をとる。



このとき，次の**問１**～**問３**に答えなさい。

（福島県 2021 年度）

問１　線分 AE の長さを求めなさい。

問２　△OAC の面積を求めなさい。

問３　E を頂点とし，四角形 ABCD を底面とする四角錐の体積を求めなさい。

解答欄

問１	cm
問２	cm^2
問３	cm^3

解答

問１ $2\sqrt{2}$ (cm)

問２ $\sqrt{14}$ (cm^2)

問３ $\dfrac{32\sqrt{7}}{27}$ (cm^3)

解説

問１

線分 AC は，正方形 ABCD の対角線なので，$AC=2\sqrt{2}$ (cm)

よって，$AE=AC=2\sqrt{2}$ (cm)

問２

△OAC において，点 O から辺 AC に垂線 OF をおろすと，△OAC は OA＝OC の二等辺三角形だから，

$AF=CF=\dfrac{1}{2}AC=\sqrt{2}$ (cm)

△OAF において，三平方の定理より，

$OF^2=OA^2-AF^2=3^2-(\sqrt{2})^2=7$

⇒　$OF>0$ より，$OF=\sqrt{7}$ (cm)

よって，$\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\times AC\times OF$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{14}$ (cm^2)

問３

△OAC において，点 A から辺 OC に垂線 AG をおろすと，

$\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\times OC\times AG=\dfrac{3}{2}AG=\sqrt{14}$

より，$AG=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ (cm)

また，△ACE は AC＝AE の二等辺三角形だから，CG＝EG

△ACG において，三平方の定理より，

$CG^2=AC^2-AG^2=(2\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{2\sqrt{14}}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$

⇒　$CG>0$ より，$CG=\dfrac{4}{3}$ (cm)，$CE=2CG=\dfrac{8}{3}$ (cm)

$\triangle ACE=\dfrac{1}{2}\times CE\times AG=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3}\times\dfrac{2\sqrt{14}}{3}=\dfrac{8\sqrt{14}}{9}$ (cm^2)

点 E から辺 AC に垂線 EH をおろすと，

$\triangle ACE=\dfrac{1}{2}\times AC\times EH=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times EH=\sqrt{2}EH=\dfrac{8\sqrt{14}}{9}$ より，

$EH=\dfrac{8\sqrt{7}}{9}$ (cm)

(四角錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(正方形 ABCD)$\times EH=\dfrac{1}{3}\times 2\times 2\times\dfrac{8\sqrt{7}}{9}=\dfrac{32\sqrt{7}}{27}$ (cm^3)

図１

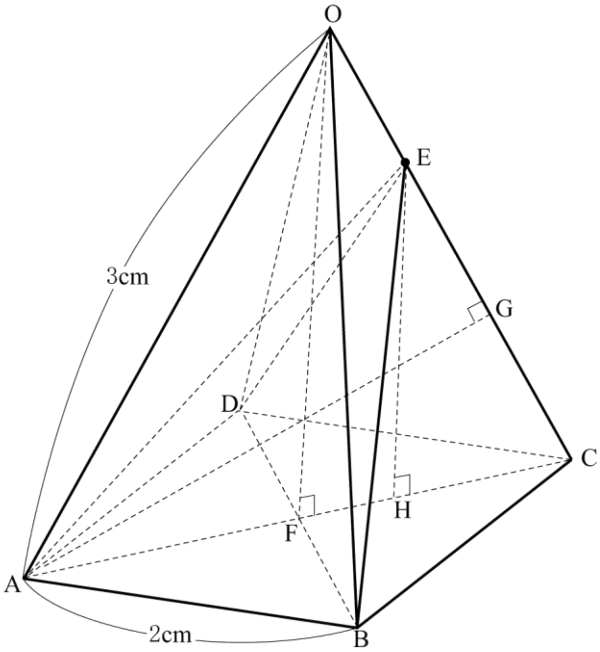


図２

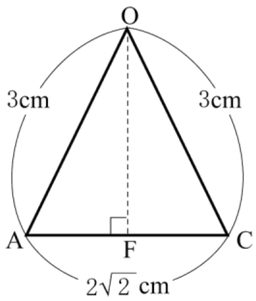
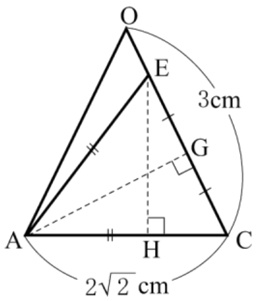


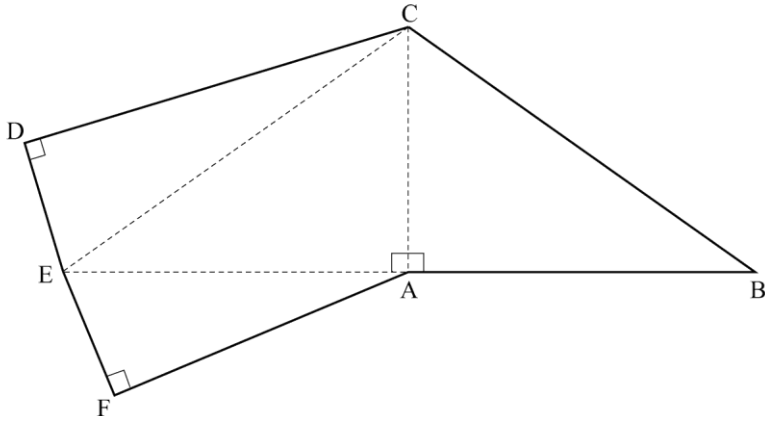
図３



【問 7】

下の**図１**は，三角すいの展開図であり，AB＝12 cm，AC＝9 cm，ED＝5 cm である。

図１



太郎さんと花子さんの次の会話を読んで，あとの**問１**～**問３**に答えなさい。

（茨城県 2021 年度）

(太郎さんと花子さんの会話)

太郎：辺 AB と辺 AC の長さがわかっているから，三角形 ABC の面積は簡単に求めることができるよ。他の三角形の面積も求めることができるかな。

花子：辺 ED の長さが 5 cm だから，三角形 CDE の面積もわかりそうね。

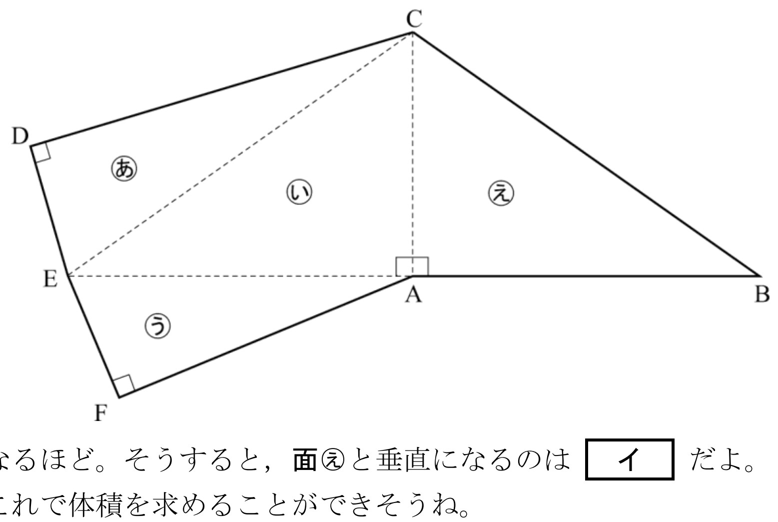
太郎：確かにそうだね。三角形 CDE の面積は $\boxed{\text{ア}}$ cm^2 になるよ。

花子：次は，この展開図を組み立てて体積について考えてみましょう。

太郎：どの面を底面としてみると体積が求めやすいかな。

花子：組み立てたときに頂点が重なるところがあるので，**図２**のように展開図に**面**あ，**面**い，**面**う，**面**えと名前をつけて考えてみると，**面**えを三角すいの底面とするといいかもしれないね。

図２



太郎：なるほど。そうすると，**面**えと垂直になるのは $\boxed{\text{イ}}$ だよ。

花子：これで体積を求めることができそうね。

太郎：計算してみたら，三角すいの体積は $\boxed{\text{ウ}}$ cm^3 になるよ。

花子：ところで，底面とする面を変えてみると，三角すいの高さが変わるわね。

太郎：なるほど。そうすると，三角すいの高さが，一番高くなるのは $\boxed{\text{エ}}$ を底面にしたときで，一番低くなるのは $\boxed{\text{オ}}$ を底面にしたときだよ。

問１　会話中の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる数を求めなさい。

問２　会話中の $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる面を，**面**ⓐ～**面**ⓤの中からすべて選んで，その記号を書きなさい。また，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる数を求めなさい。

問３　会話中の $\boxed{\text{エ}}$ ，$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる面を，**面**ⓐ～**面**ⓔの中から一つ選んで，その記号をそれぞれ書きなさい。

解答欄

問１	ア	cm^2
問２	イ	
	ウ	cm^3
問３	エ	
	オ	

解答

問１

ア$\dfrac{75}{2}$　(cm^2)

問２

イ面㋐，面㋒

ウ 90　(cm^3)

問３

エ面㋒

オ面㋑

解説

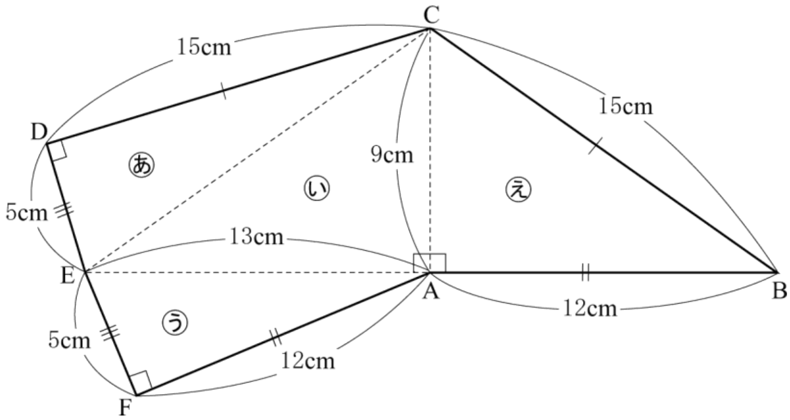
問１

三角すいを組み立てたときに，辺 DC と辺 BC が重なることに注目する。

△ABC において，三平方の定理より，$BC^2=AB^2+AC^2=12^2+9^2=225$

⇒　BC＞0 より，BC＝15(cm)よって，DC＝15(cm)

したがって，$\triangle CDE=ED\times DC\times\dfrac{1}{2}=5\times15\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{75}{2}$($cm^2$)



問２

組み立てた三角すい ABCE で，組み立てるときに点 D，F は B と重なる。展開図で CD⊥DE，AF⊥FE だから，三角すいにおいて BE⊥BA，BE⊥BC だから，辺 BE は底面 ABC(**面㋓**)に垂直で，辺 BE を含む**面㋐**，**㋒**が**面㋓**と垂直である。

また，三角すいの体積は，$\triangle ABC\times ED\times\dfrac{1}{3}=9\times12\times\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{1}{3}=90$($cm^3$)

問３

底面積を S，高さを h とすると，三角すいの体積は，$\dfrac{1}{3}hS$ と表せる。これが 90 cm^3 であるため，

$\dfrac{1}{3}hS=90$ という関係式が成り立つ。これを h について解くと，$h=\dfrac{270}{S}$ となり，h は S に反比例するため，S が大きくなるほど，h は小さくなるということがわかる。

それでは，**面㋐**～**面㋓**の面積を求めていこう。

面㋐の面積は，**問１**より，$\dfrac{75}{2}cm^2$

△AFE において，三平方の定理より，$AE^2=AF^2+EF^2=12^2+5^2=169$

⇒　AE＞0 より，AE＝13(cm)

したがって，**面㋑**の面積は，$\triangle ACE=AE\times AC\times\dfrac{1}{2}=13\times9\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{117}{2}$($cm^2$)

面㋒の面積は，$\triangle AFE=EF\times AF\times\dfrac{1}{2}=5\times12\times\dfrac{1}{2}=30$($cm^2$)

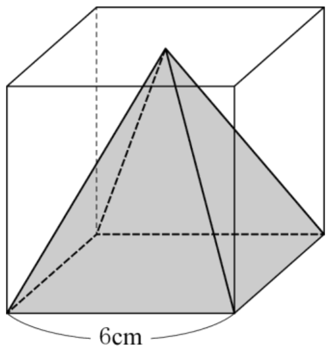
面㋓の面積は，**問２**より，$\triangle ABC=9\times12\times\dfrac{1}{2}=54$($cm^2$)

よって，**面㋐**～**面㋓**の中で，もっとも面積が小さいのは**面㋒**なので，それを底面としたときの高さがもっとも高くなる。逆に，**面㋐**～**面㋓**の中で，もっとも面積が大きいのは**面㋑**なので，それを底面としたときの高さがもっとも低くなる。

【問 8】

　1 辺が 6 cm の立方体と，底面が合同で高さが等しい正四角錐がある。
この正四角錐の体積を求めなさい。

（栃木県 2021 年度）



解答欄

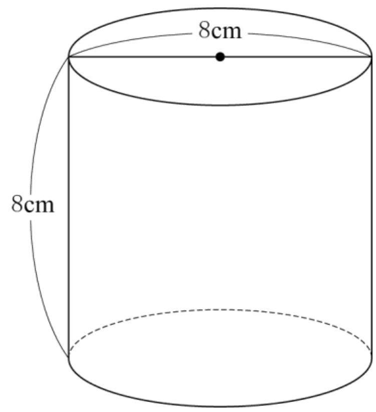
cm^3

解答
72 (cm^3)

【問 9】

下の図のように，底面の直径が 8 cm，高さが 8 cm の円柱がある。この円柱の表面積を求めなさい。ただし，円周率は π を用いることとする。

（千葉県 2021 年度）



解答欄

	cm^2

解答

96π (cm^2)

解説

円柱の展開図は**図 1** のようになる。

側面は長方形であり，その縦の長さは，円柱の高さと同じ 8 cm，横の長さは，円柱の底面の円周と同じ 8π cm である。

よって，側面積は，$8\times 8\pi = 64\pi\ (cm^2)$

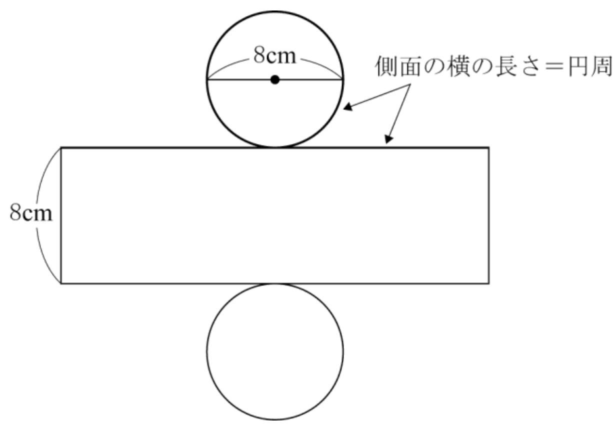
底面は半径 4 cm の円であり

2 つあるので，$\pi\times 4^2\times 2 = 32\pi\ (cm^2)$

よって，円柱の表面積は，

$64\pi + 32\pi = 96\pi\ (cm^2)$

図 1



【問 10】

右の**図１**に示した立体 ABC－DEF は，AB＝4 cm，AC＝3 cm，BC＝5 cm，AD＝6 cm，∠BAC＝∠BAD＝∠CAD＝90° の三角柱である。

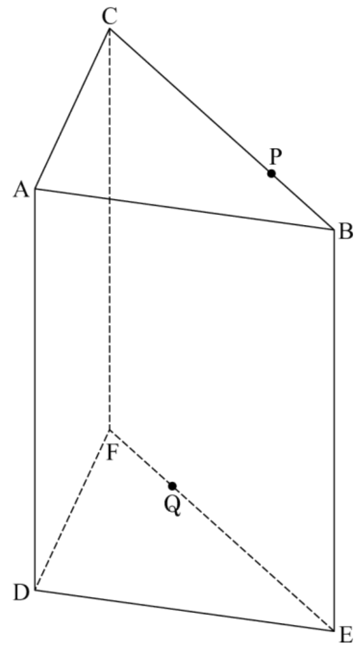
辺 BC 上にあり，頂点 B に一致しない点を P とする。

点 Q は，辺 EF 上にある点で，BP＝FQ である。

次の各問に答えよ。

（東京都 2021 年度）

図 1



問１　次の $\boxed{}$ の中の「く」に当てはまる数字を答えよ。

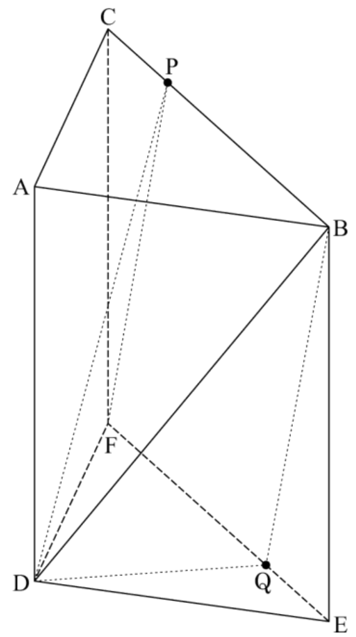
BP＝2 cm のとき，点 P と点 Q を結んでできる直線 PQ とねじれの位置にある辺は全部で $\boxed{\text{く}}$ 本である。

問２　次の $\boxed{}$ の中の「け」「こ」「さ」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の**図２**は，**図１**において，頂点 B と頂点 D，頂点 B と点 Q，頂点 D と点 P，頂点 D と点 Q，頂点 F と点 P をそれぞれ結んだ場合を表している。

BP＝4 cm のとき，立体 D－BPFQ の体積は，$\dfrac{\boxed{\text{けこ}}}{\boxed{\text{さ}}}$ cm^3 である。

図 2



解答欄

問１	く	
問２	け	
	こ	
	さ	

解答
問１
く５
問２
け９
こ６
さ５

解説

問１

交わらず，かつ平行でないというのが，ねじれの位置の条件である。直線PQと交わるのは，**図１**において×印で示した直線BE，CF(今回は特に，辺の延長線上で交わるパターンなので要注意)であり，直線PQと平行な辺はない。よって，それ以外の辺AB，AC，DE，DF，ADが直線PQとねじれの位置にある。よって，５本。

問２

立体D－BPFQの底面を四角形BPFQとしたとき，その高さは点Dと平面 BCFE との距離である(**図２**)。そして，その距離は，△DEF において，点Dから辺EFにおろした垂線DGの長さに等しい(**図３**)。

まずは，DGの長さを求めよう。

△DEFと△GDFにおいて，∠FDE＝∠FGD＝90°，

∠EFD＝∠DFGより，２組の角がそれぞれ等しいので，

△DEF∽△GDF

よって，ED：DG＝FE：FD　⇒　4：DG＝5：3

⇒　5DG＝12

⇒　$DG=\dfrac{12}{5}$(cm)

次に，底面BPFQの面積を求めよう。

底面BPFQは，BP＝QF＝4(cm)，BP//QFより，平行四辺形(**図４**)なので，その面積は，

BP×CF＝4×6＝24(cm^2)

よって，立体D－BPFQの体積は，$24\times\dfrac{12}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{96}{5}$($cm^3$)

図１

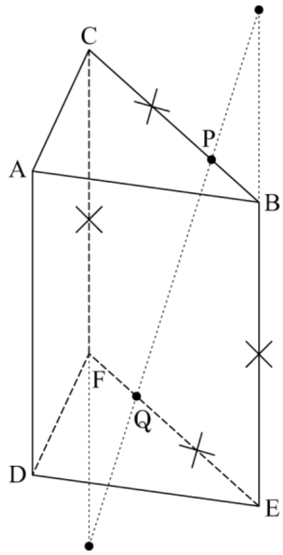


図２

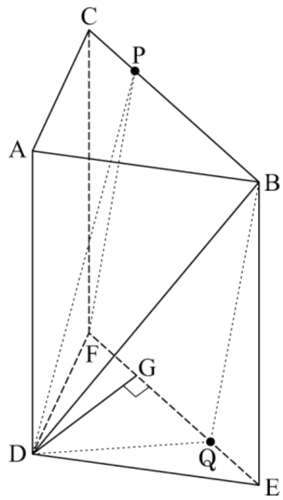


図３

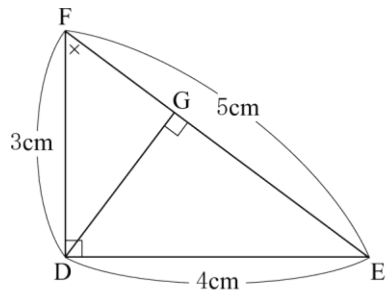
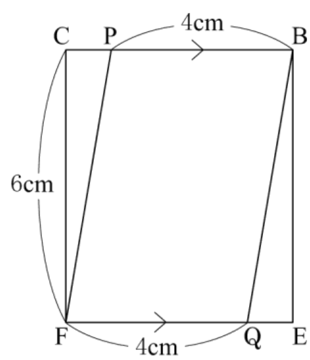


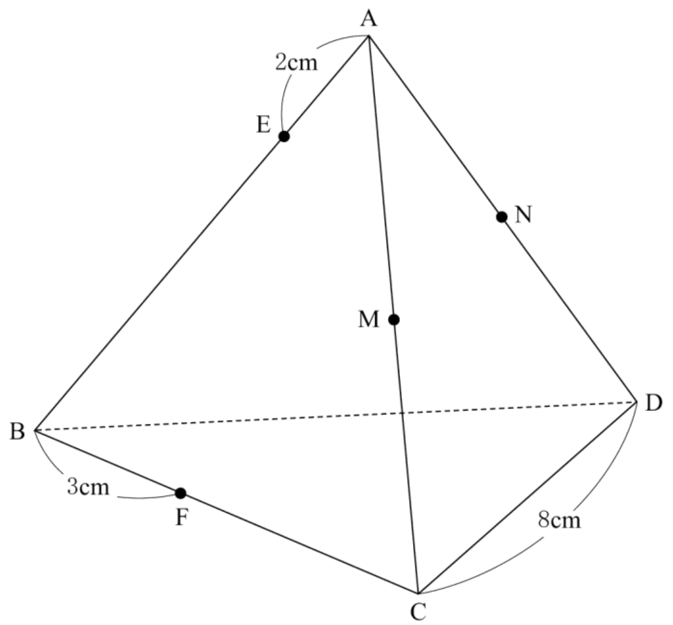
図４



【問 11】

下の図のような 1 辺の長さが 8 cm の正四面体 ABCD があり，辺 AC，AD の中点をそれぞれ M，N とする。また，辺 AB 上に AE＝2 cm となるような点 E をとり，辺 BC 上に BF＝3 cm となるような点 F をとる。このとき，次の**問１**～**問３**に答えなさい。

（新潟県 2021 年度）



問１　線分 MN の長さを答えなさい。

問２　△AEM∽△BFE であることを証明しなさい。

問３　5 点 F，C，D，N，M を結んでできる四角すいの体積は，三角すい EAMN の体積の何倍か，求めなさい。

解答欄

問１	cm
問２	〔証明〕
問３	〔求め方〕 答　　　　　　　倍

解答

問１４　cm

問２

〔証明〕

△AEM と△BFE において，

△ABC は正三角形だから，

∠MAE＝∠EBF＝60°…①

AE＝2 cm で，点 M は AC の中点だから，

AM＝4 cm　また，BF＝3 cm，

BE＝AB－AE＝6 cm

よって，

AE：BF＝AM：BE＝2：3 …②

①，②より

２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから，

△AEM∽△BFE

問３

〔求め方〕

中点連結定理より MN // CD だから，

△AMN∽△ACD であり，相似比は 1：2 で，面積比は 1：4 となる。

よって，△AMN と四角形 CDNM の面積比は 1：3 である。

また，CF＝5 cm だから，

AE：CF＝2：5＝1：$\frac{5}{2}$

したがって，四角すい FCDNM の体積は，

三角すい EAMN の体積の $3\times\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$倍である。

答　$\frac{15}{2}$　倍

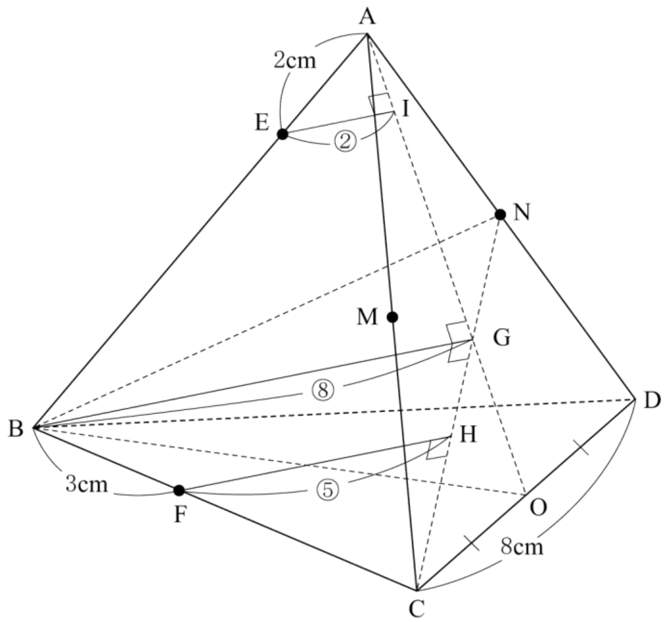
解説

問１

点 M，N は辺 AC，AD の中点だから，△ACD において，中点連結定理より，

$\mathrm{MN}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CD}=\dfrac{1}{2}\times 8=4(\mathrm{cm})$

問３



四角すい FCDNM の底面を四角形 CDNM，三角すい EAMN の底面を△AMN として考える。

問１より，△AMN は 1 辺 4cm の正三角形だから，

△AMN∽△ACD で，相似比は 1：2

よって，四角すい FCDNM と三角すい EAMN の底面積の比は，

四角形 CDNM：△AMN＝(△ACD－△AMN)：△AMN＝$(2^2-1^2):1^2$＝3：1

また，辺 CD の中点を O とし，点 B，F，E から△ACD にひいた垂線と，

△ACD との交点をそれぞれ G，H，I とする。線分 BG，FH は△BCN にふくまれるから，∠BCG＝∠FCH，

∠BGC＝∠FHC＝90° より，

△BCG∽△FCH

線分 BG，EI は△ABO にふくまれるから，∠BAG＝∠EAI，

∠BGA＝∠EIA＝90° より，

△BAG∽△EAI

△BCG と△FCH の相似比は，

BC：FC＝8：(8－3)＝8：5 だから，BG：FH＝8：5

△BAG と△EAI の相似比は，

BA：EA＝8：2 だから，

BG：EI＝8：2

よって，四角すい FCDNM と三角すい EAMN の高さの比は，FH：EI＝5：2

したがって，四角すい FCDNM と三角すい EAMN の体積の比は，(3×5)：(1×2)＝15：2

四角すい FCDNM の体積は，三角すい EAMN の体積の$\dfrac{15}{2}$倍。

【問 12】

図１，**図３**，**図４**の立体 OABCD は正四角錐であり，**図２**は**図１**の展開図である。

このとき，次の**問１**～**問３**に答えなさい。

（石川県 2021 年度）

図１

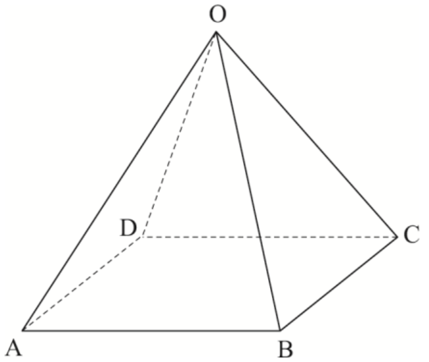
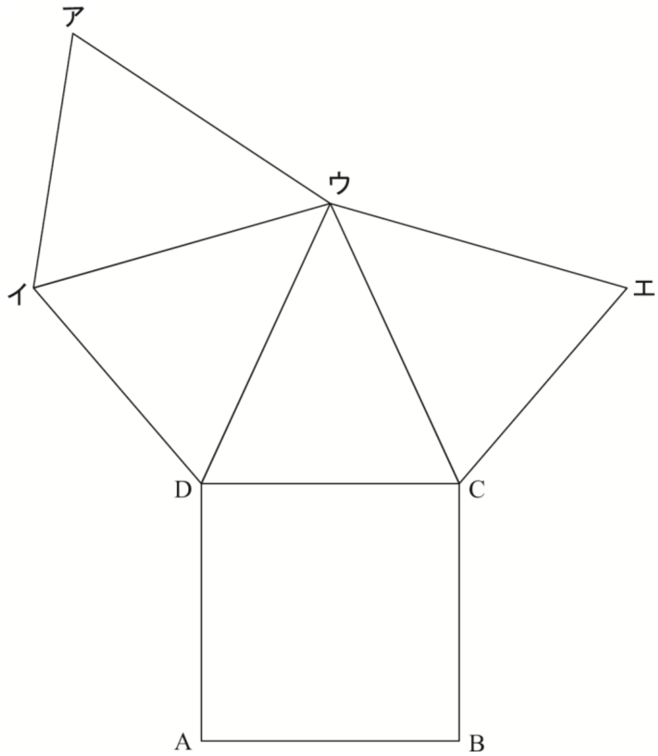


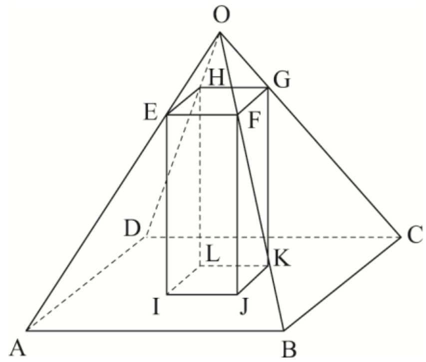
図２



問１　**図２**の展開図を組み立てたとき，点 B と重なる点を**ア**～**エ**からすべて選び，その符号を書きなさい。

問２　**図３**のように，正四角錐 OABCD の中に直方体 EFGH－IJKL が入っている。この直方体の頂点のうち，4 点 E，F，G，H はそれぞれ辺 OA，OB，OC，OD 上にあり，4 点 I，J，K，L は，いずれも底面 ABCD 上にある。OE：EA＝1：3 のとき，正四角錐 OABCD と直方体 EFGH－IJKL の体積比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

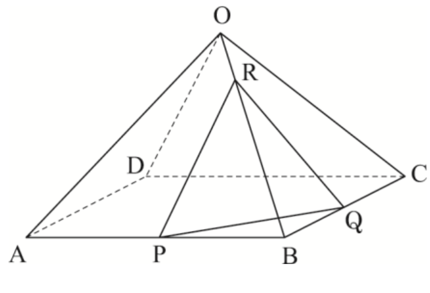
図３



問３　**図４**において，正四角錐 OABCD のすべての辺の長さを 4 cm とする。また，辺 AB，BC の中点をそれぞれ P，Q とし，辺 OB 上に点 R をとる。

△RPQ が正三角形になるとき，線分 RB の長さを求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

図４



解答欄

問１	
問２	正四角錐 OABCD の体積：直方体 EFGH－IJKL の体積　＝　　　　　　：
問３	〔計算〕 答　　　　　　　　cm

解答

問１ア，エ

問２

正四角錐 OABCD の体積：直方体 EFGH－IJKL の体積＝64：9

問３

〔計算〕

PQ＝QR＝RP＝$2\sqrt{2}$

P から辺 OB に垂線をひき，その交点を S とすると

△PSB は，PB＝2，BS＝1，PS＝$\sqrt{3}$

RS＝$\sqrt{PR^2-PS^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$

よって　RB＝BS＋RS＝$1+\sqrt{5}$

〔答〕　$(1+\sqrt{5})$　cm

解説

問２

正四角錐 OABCD … ① と直方体 EFGH－IJKL … ② の体積比は，底面積の比と高さの比で求めることができる。

図１のように，△OAB において，EF//AB より，

EF：AB＝OE：OA＝1：4　⇒　IJ：AB＝1：4

よって，立体①，②の底面は，それぞれ AB，IJ を 1 辺とする正方形なので，その面積比は，$4^2:1^2=16:1$ である。

図２のように，立体①の頂点 O から底面 ABCD に垂線 OM をおろす。**図３**のように，△OAM において，EI//OM より，EI：OM＝AE：AO＝3：4 だから，立体①，②の高さの比は，4：3 である。

したがって，立体①，②の体積比は，

$\left(16\times4\times\frac{1}{3}\right):(1\times3)=64:9$

問３

図４のように，△BPQ は，BP＝BQ＝2cm，∠PBQ＝90°の直角二等辺三角形だから，

BP：PQ＝1：$\sqrt{2}$　⇒　PQ＝$2\sqrt{2}$(cm)

△RPQ は正三角形だから，PR＝PQ＝$2\sqrt{2}$(cm)

図５のように，△BPR において，点 P から辺 BR に垂線 PS をおろす。

△OAB は，正三角形なので，∠PBR＝60°だから，

△BPS は 1：2：$\sqrt{3}$の辺の比をもつ直角三角形である。

よって，BS：BP：PS＝1：2：$\sqrt{3}$より，BS＝1(cm)，PS＝$\sqrt{3}$(cm)

また，△PRS において，三平方の定理より，

$RS^2=PR^2-PS^2=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=5$　⇒　RS＞0 より，RS＝$\sqrt{5}$(cm)

したがって，RB＝BS＋RS＝$1+\sqrt{5}$(cm)

図１

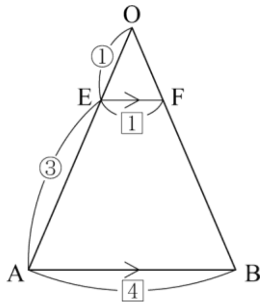


図２

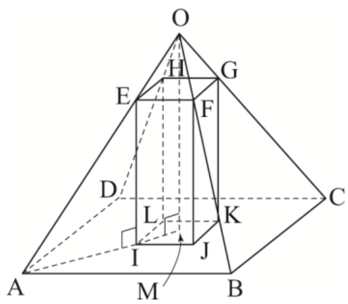


図３

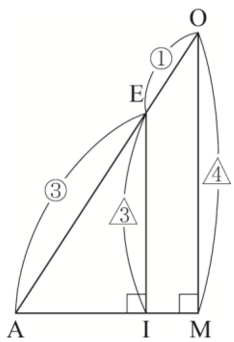


図４

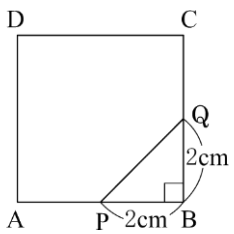
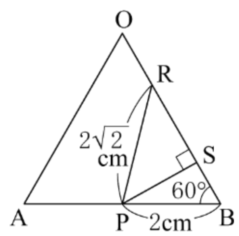


図５



【問 13】

図１のように，１辺の長さが９cm の立方体状の容器に，水面が頂点 A，B，C を通る平面となるように水を入れた。次に，この容器を水平な台の上に置いたところ，図２のように，容器の底面から水面までの高さが x cm になった。x の値を求めなさい。

（岐阜県 2021 年度）

図１

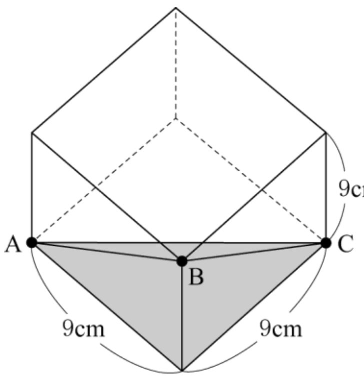
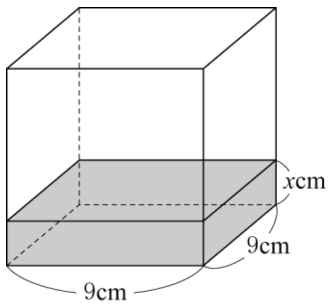


図２



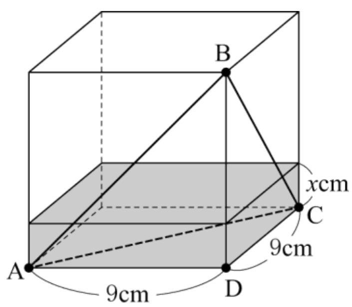
解答欄

解答
1.5
解説
水面が頂点 A，B，C を通る平面となるように水を入れたときの立体は，右の図の△ACD を底面，点 B を頂点とする三角錐となる。よって，その体積は，

$$\triangle ACD \times BD \times \frac{1}{3} = 9 \times 9 \times \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{1}{3} = \frac{243}{2} (\mathrm{cm}^3)$$

それが，１辺の長さが９cm の正方形を底面とし，高さ x cm の直方体の体積と一致すればよいので，

$$9 \times 9 \times x = \frac{243}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} (\mathrm{cm})$$



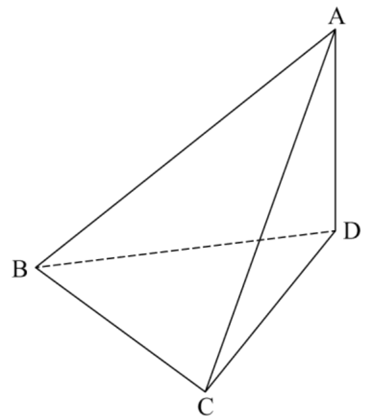
【問 14】

図３の立体は，点 A を頂点とし，正三角形 BCD を底面とする三角すいである。この三角すいにおいて，底面 BCD と辺 AD は垂直であり，AD＝8 cm，BD＝12 cm である。

このとき，次の問１～問３に答えなさい。

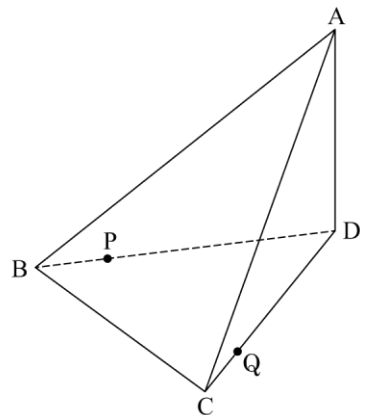
（静岡県 2021 年度）

図３



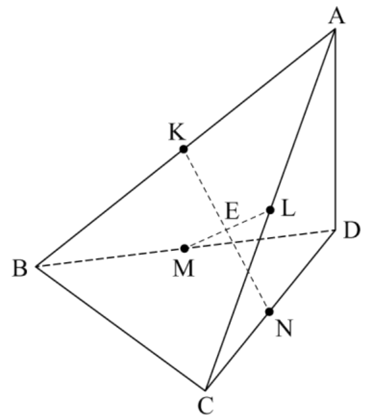
問１　この三角すいにおいて，直角である角はどれか。すべて答えなさい。

図４



問２　この三角すいにおいて，図４のように，辺 BD，CD 上に DP＝DQ＝9 cm となる点 P，Q をそれぞれとる。四角形 BCQP の面積は，△BCD の面積の何倍か，答えなさい。

図５



問３　この三角すいにおいて，図５のように，辺 AB，AC，BD，CD の中点をそれぞれ K，L，M，N とし，KN と LM の交点を E とする。線分 BE の長さを求めなさい。

解答欄

問１	
問２	倍
問３	cm

解答

問１ ∠ADB，∠ADC

問２ $\dfrac{7}{16}$　(倍)

問３ $\sqrt{67}$　(cm)

解説

問２

△PQD と△BCD において，DP : DB＝DQ : DC＝9 : 12＝3 : 4，∠PDQ＝∠BDC より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので，△PQD∽△BCD

相似比が，3 : 4 なので，△PQD : △BCD＝9 : 16 より，

(四角形 BCQP) : △BCD＝7 : 16

よって，四角形 BCQP の面積は，△BCD の面積の$\dfrac{7}{16}$倍である。

問３

△ABC において，点 K，L は辺 AB，AC の中点だから，

中点連結定理より，KL//BC，KL＝$\dfrac{1}{2}$BC

△DBC，△BAD，△CAD において同様にして，MN//BC，

MN＝$\dfrac{1}{2}$BC，

KM//AD，KM＝$\dfrac{1}{2}$AD，LN//AD，LN＝$\dfrac{1}{2}$AD より，KL//MN，

KL＝MN，KM//LN，KM＝LN，LN⊥MN だから，

四角形 KMNL は長方形である。

長方形 KMNL において，点 E から辺 MN に垂線 EH を引くと，ME＝EL，また，LN⊥MN より，EH//LN だから，EH : LN＝1 : 2

よって，EH : 4＝1 : 2　，　EH＝2(cm)

また，△BCD において，直線 DH と辺 BC との交点を I とすると，

BI＝$\dfrac{1}{2}$BC＝6(cm)

BI : DI＝1 : $\sqrt{3}$　，　6 : DI＝1 : $\sqrt{3}$　，　DI＝$6\sqrt{3}$(cm)

したがって，HI＝$\dfrac{1}{2}$DI＝$3\sqrt{3}$(cm)

△HBI において，三平方の定理より，$BH^2＝BI^2＋HI^2＝6^2＋(3\sqrt{3})^2＝63$

BH＞0 より，BH＝$3\sqrt{7}$(cm)

△EBH において，三平方の定理より，

$BE^2＝BH^2＋EH^2＝(3\sqrt{7})^2＋2^2＝67$

BE＞0 より，BE＝$\sqrt{67}$(cm)

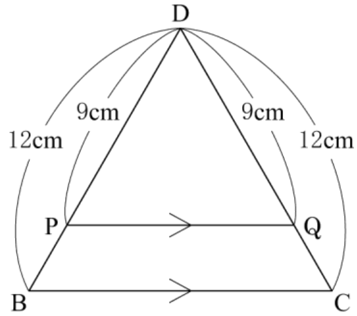


図１

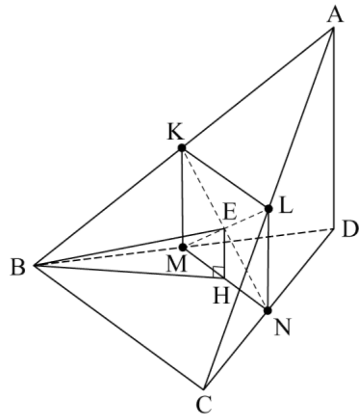


図２

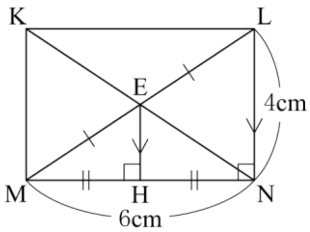
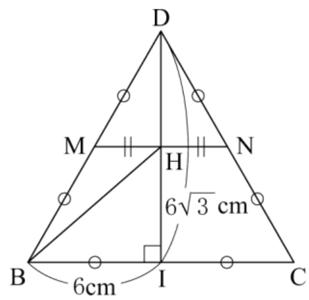


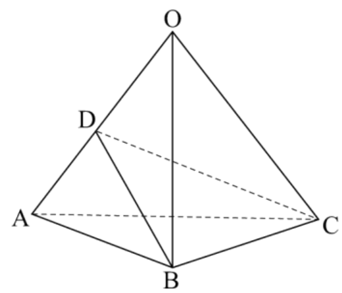
図３



【問 15】

図で，立体 OABC は△ABC を底面とする正三角すいであり，D は辺 OA 上の点で，△DBC は正三角形である。

OA＝OB＝OC＝6 cm，AB＝4 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。



（愛知県 B 2021 年度）

(1)　線分 DA の長さは何 cm か，求めなさい。

(2)　立体 ODBC の体積は正三角すい OABC の体積の何倍か，求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	倍

解答

(1)$\frac{8}{3}$　cm

(2)$\frac{5}{9}$　倍

解説

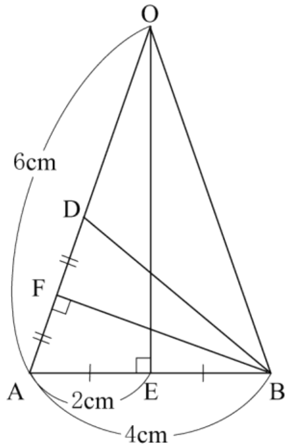
(1)

△ABC は正三角形なので，AB＝BC＝CA＝4(cm)
また，△DBC も正三角形なので，DB＝BC＝CD＝4(cm)
ここで，**図３**のように，△OAB を取り出して考える。
点 O から辺 AB に垂線 OE をおろすと，OA＝OB＝6(cm)より，
△OAB は二等辺三角形なので，AE＝BE＝2(cm)
また，点 B から辺 OA に垂線 BF をおろすと，BA＝BD＝4(cm)より，
△BAD は二等辺三角形なので，AF＝DF
△OAE と△BAF において，∠OEA＝∠BFA＝90°，共通な角だから，∠OAE＝∠BAF
よって，２組の角がそれぞれ等しいので，△OAE∽△BAF

OA：BA＝AE：AF　⇒　6：4＝2：AF　⇒　AF＝$\frac{4}{3}$(cm)

⇒　AD＝2AF＝$\frac{8}{3}$(cm)

図３



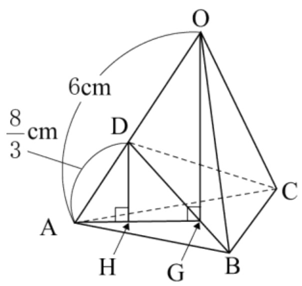
(2)

図４のように，正三角すい OABC において，点 O から底面 ABC に垂線 OG をおろす。また，正三角すい DABC において，点 D から底面 ABC に垂線 DH をおろす。DH//OG より，△AOG において，平行線と線分の比から，

DH：OG＝AD：AO＝$\frac{8}{3}$：6＝4：9

よって，正三角すい DABC と正三角すい OABC は，底面がともに△ABC で共通なので，高さの比が，体積比となる。
よって，その体積比は，DH：OG＝4：9
正三角すい ODBC は，正三角すい OABC から正三角すい DABC を取り除いたものなので，正三角すい ODBC と正三角すい OABC の体積
比は，(9−4)：9＝5：9 より，$\frac{5}{9}$倍である。

図４



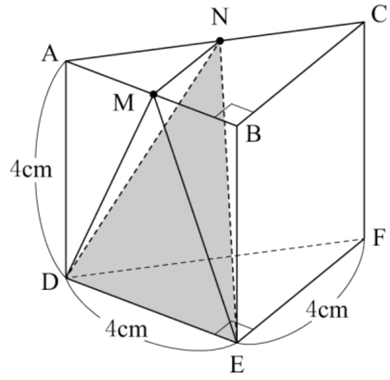
【問 16】

右の図のように，点 A，B，C，D，E，F を頂点とし，AD＝DE＝EF＝4 cm，∠DEF＝90°の三角柱がある。辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

なお，各問いにおいて，答えの分母に√がふくまれるときは，分母を有理化しなさい。また，√の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。

（三重県 2021 年度）



(1) 線分 DM の長さを求めなさい。

(2) 点 M から△NDE をふくむ平面にひいた垂線と△NDE との交点を H とする。このとき，線分 MH の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm

解答

(1) $2\sqrt{5}$ cm

(2) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ cm

解説

(1)

△ADM は，∠DAM＝90°である直角三角形だから，三平方の定理より，

$DM^2 = AD^2 + AM^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

DM＞0 より，$DM = 2\sqrt{5}$(cm)

(2)

図１のように，辺 DE の中点を G とする。三角錐 M－NDE に着目すると，面 MGN について対称な立体だから，点 H は線分 NG 上にある。

また，**図２**のように，△ABC に着目すると，点 M，N が，それぞれ辺 AB，AC の中点であることから，中点連結定理より，

$MN = \dfrac{1}{2}BC = 2$(cm)

次に，**図３**のように，△MGN は，∠GMN＝90°である直角三角形だから

三平方の定理より，$GN^2 = MG^2 + MN^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ ⇒ GN＞0 より，$GN = 2\sqrt{5}$(cm)

さらに，△MGN と△HGM において，∠GMN＝∠GHM＝90°，

共通な角だから，∠MGN＝∠HGM より，２組の角がそれぞれ等しいので，

△MGN∽△HGM

よって，NM：MH＝GN：GM

$2 : MH = 2\sqrt{5} : 4$

$MH = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$(cm)

図１

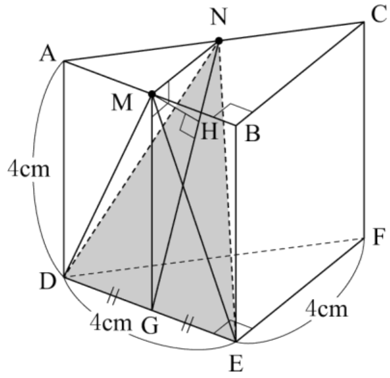


図２

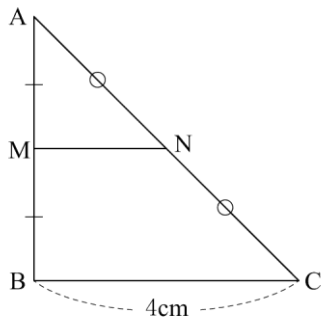
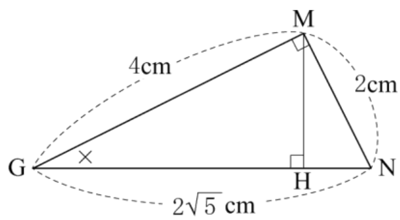


図３

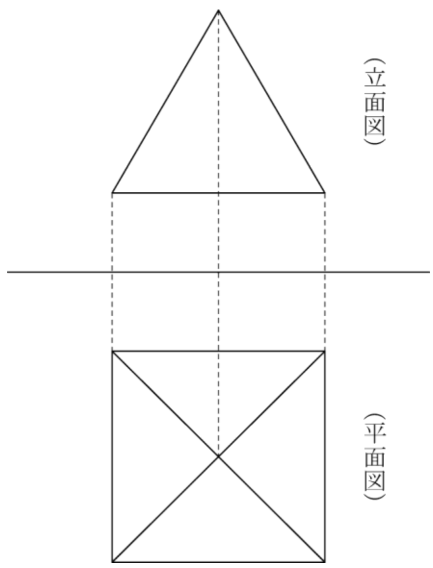


【問 17】

右の図のような，正四角錐の投影図がある。この投影図において，立面図は 1 辺が 6 cm，高さが $3\sqrt{3}$cm の正三角形である。

このとき，次の**問１**・**問２**に答えよ。

（京都府 2021 年度 中期）



問１　この正四角錐の体積を求めよ。

問２　この正四角錐の表面積を求めよ。

解答欄

問１	cm^3
問２	cm^2

解答

問１ $36\sqrt{3}$　cm^3

問２ 108　cm^2

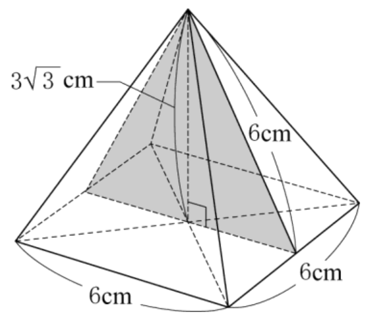
解説

問１

立面図の三角形は，右の投影図中の影をつけた部分にあたる。

よって，正四角錐の高さは $3\sqrt{3}$ cm であり，

求める体積は，$\frac{1}{3}\times6\times6\times3\sqrt{3}=36\sqrt{3}(cm^3)$



問２

問１と同様に，正四角錐の側面の三角形において，長さが 6cm の辺を底辺としたときの高さは 6cm であるとわかる。

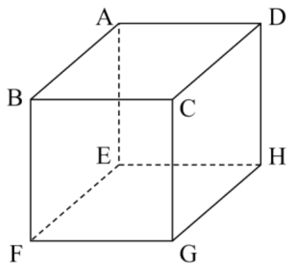
よって，側面積が $\frac{1}{2}\times6\times6\times4=72(cm^2)$ であり，

底面積が，$6\times6=36(cm^2)$ なので，表面積は，$72+36=108(cm^2)$

【問 18】

右の図は，1 辺が 5 cm の立方体である。
次の (1) ～ (3) に答えなさい。

（和歌山県 2021 年度）



(1) 辺 AB と垂直な面を 1 つ答えなさい。

(2) 辺 AD とねじれの位置にある辺はいくつあるか，答えなさい。

(3) ２点 G，H を結んでできる直線 GH と，点 A との距離を求めなさい。

解答欄

(1)	面
(2)	本
(3)	cm

解答

(1) 面 AEHD

(2) 4　(本)

(3) $5\sqrt{2}$　(cm)

解説

(2)

交わらず，かつ平行でないというのが，ねじれの位置の条件である。辺 AD と交わるのは，**図１**において×印で示した辺 AB，AE，CD，DH であり，辺 AD と平行なのは，**図１**において＞印で示した辺 BC，FG，EH である。よって，それ以外の辺 BF，CG，EF，GH が辺 AD とねじれの位置にある。よって，辺 AD とねじれの位置にある辺の数は４つである。

(3)

直線 GH と点 A の距離は，点 A から直線 GH におろした垂線の長さである（**図２**）。その垂線は AH であるから，△ADH において，三平方の定理より，$AH^2 = AD^2 + DH^2 = 5^2 + 5^2 = 50$　⇒　$AH > 0$ より，$AH = 5\sqrt{2}$（cm）

図１

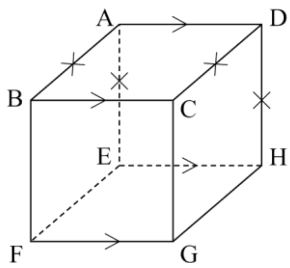
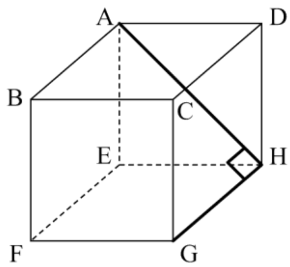


図２



【問 19】

右の**図**のような 1 辺の長さが 3 cm の立方体がある。辺 AB 上に点 P を，辺 AD 上に点 Q を，辺 AE 上に点 R をそれぞれ AP＝AQ＝AR＝1 cm となるようにとる。

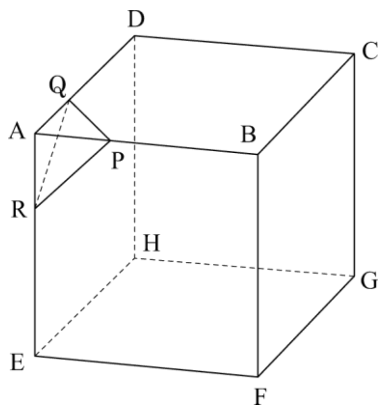
その 3 点 P，Q，R を通る平面で立方体を切断し，頂点 A を含んだ立体を切り取る。

立方体の頂点 B～H に対しても，同様の操作を行う。

次の**会話**は，**花子さん**と**太郎さん**が，各頂点を切り取ったあと，残った立体の辺の数，頂点の数，面の数が，それぞれどうなるかについて話し合ったものである。

会話の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ケ}$ にあてはまる数を答えなさい。

図



（鳥取県 2021 年度）

会話

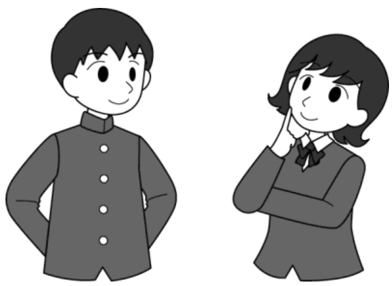
花子さん：「頂点 A を含んだ立体を切り取る」という操作によって，残った立体の辺，頂点，面のそれぞれの数はどうなるかな。

太郎さん：切り取る前の立方体の辺の数は $\boxed{ア}$ 本，頂点の数は $\boxed{イ}$ 個，面の数は $\boxed{ウ}$ 個だね。

花子さん：3 点 P，Q，R を通る平面で立方体を切断した場合，立体 APQR は三角錐になったね。残った立体の辺の数，頂点の数，面の数はどうなったかな。

太郎さん：残った立体の辺の数は $\boxed{エ}$ 本，頂点の数は $\boxed{オ}$ 個，面の数は $\boxed{カ}$ 個だよ。辺について考えてみると，切り取ることによって，新しくできた切り口に新たに辺ができているよ。

花子さん：確かにそうだね。では，これを参考にして「頂点を含んだ立体を切り取る」という操作を頂点 B～H に行い，同じように立体を切り取るとき，残った立体の辺の数，頂点の数，面の数が，それぞれどうなるか考えてみようよ。



太郎さん：わかったよ。立方体のすべての頂点 A～H を同じように切り取るとき，残った立体の辺の数は $\boxed{キ}$ 本，頂点の数は $\boxed{ク}$ 個，面の数は $\boxed{ケ}$ 個だね。

解答欄

ア		イ		ウ	
エ		オ		カ	
キ		ク		ケ	

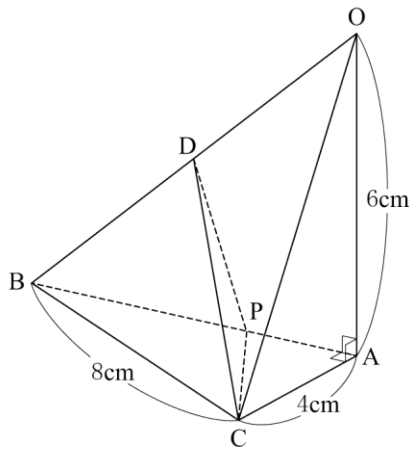
解答
ア 12
イ 8
ウ 6
エ 15
オ 10
カ 7
キ 36
ク 24
ケ 14
解説
ア～カ：問題の図を参考に数えるとよい。
キ：切り取る前の辺の数は 12 本で，頂点 A を切り取った後の辺の数は 15 本である。頂点を 1 つ切り取ると，3 本の辺が増えることがわかる。よって，12＋3×8＝36 (本)
ク：切り取る前の頂点の数は 6 個で，頂点 A を切り取った後の頂点の数は 8 個である。頂点を 1 つ切り取ると，切り取った頂点 1 個がなくなり，新たに 3 個の頂点ができる。よって，頂点を 1 つ切り取ると，2 個の頂点が増える。よって，8＋2×8＝24 (個)
ケ：頂点を 1 つ切り取ると，面が 1 個増えることがわかる。よって，6＋1×8＝14 (個)

【問 20】

右の図のような，$\angle OAB = \angle OAC = \angle BAC = 90°$ の三角すい OABC がある。辺 OB の中点を D とし，辺 AB 上に 2 点 A，B と異なる点 P をとる。点 C と点 D，点 D と点 P，点 P と点 C をそれぞれ結ぶ。

OA＝6 cm，AC＝4 cm，BC＝8 cm であるとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。

（香川県 2021 年度）



(1) 次の㋐～㋓のうち，この三角すいに関して正しく述べたものはどれか。1 つ選んで，その記号を書け。

㋐ $\angle OCA = 60°$ である

㋑ 面 OAB と面 OAC は垂直である

㋒ 辺 OC と面 ABC は垂直である

㋓ 辺 OA と線分 CD は平行である

(2) 三角すい DBCP の体積が，三角すい OABC の体積の$\frac{1}{3}$倍であるとき，線分 BP の長さは何 cm か。

解答欄

(1)	
(2)	cm

解答

(1)㋑

(2)$\frac{8\sqrt{3}}{3}$　cm

解説

(1)

㋐　△OCA は直角三角形である。もし，∠OCA＝60°ならば，AC : OA＝1 : $\sqrt{3}$であるはずだが，AC : OA＝4 : 6＝2 : 3≠1 : $\sqrt{3}$より，∠OCA≠60°

㋑　OA⊥AB，OA⊥AC，AB⊥AC より，面 OAB と面 OAC は垂直である。

㋒　∠OCA≠90°なので，辺 OC と面 ABC は垂直でない。

㋓　辺 OA と線分 CD は，ねじれの位置にある。

(2)

BP＝x cm とする。

△ABC において，三平方の定理より，

$AB^2＝BC^2－AC^2＝8^2－4^2＝48$

AB＞0 より，AB＝$4\sqrt{3}$(cm)

よって，三角すい OABC の体積は，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}\right)\times 6$

＝$16\sqrt{3}$(cm^3)

また，図２のように，点 D から辺 AB に垂線 DQ をおろすと，DQ⊥AB，OA⊥AB より，DQ//OA

よって，△BOA において，平行線と線分の比から，

DQ : OA＝BD : BO，DQ : 6＝1 : 2，DQ＝3(cm)

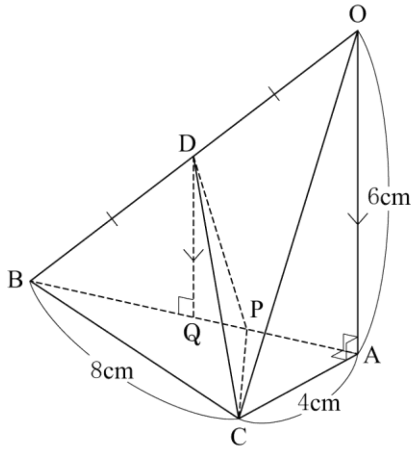
DQ//OA より，線分 DQ と面 PBC は垂直である。

よって，三角すい DBCP の体積は，

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times x\right)\times 3＝2x$($cm^3$)

したがって，$2x＝16\sqrt{3}\times\frac{1}{3}$　⇒　$x＝\frac{8\sqrt{3}}{3}$(cm)

図２



【問 21】

図１は，正四角すいと直方体をあわせた形で，点 A，B，C，D，E，F，G，H，I を頂点とする立体を表している。BC＝6 cm，BF＝5 cm である。

図２は，**図１**に示す立体において，辺 BF 上に点 P を，BP＝2 cm となるようにとり，点 P，H，E，C を頂点とする四面体 PHEC をつくったものである。

図１

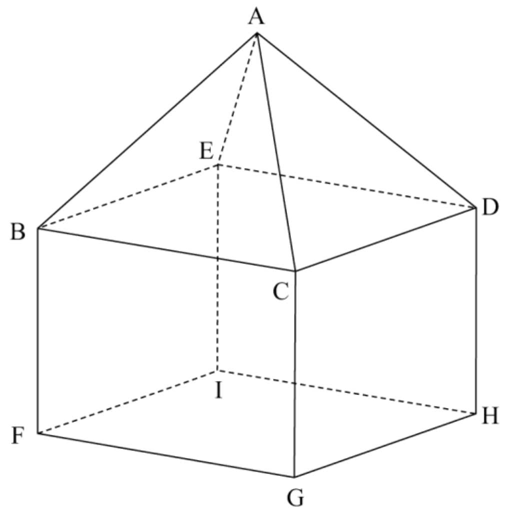
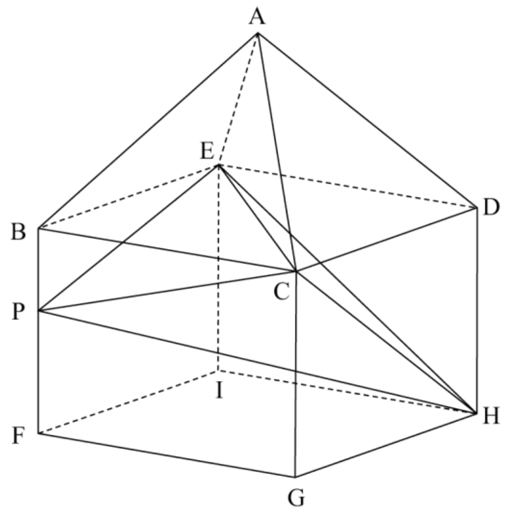


図２



次の**問１**～**問３**に答えよ。

（福岡県 2021 年度）

問１　**図１**に示す立体において，次の $\boxed{}$ の中の①～③の全てにあてはまる辺を答えよ。

①　辺 AB とねじれの位置にある辺
②　面 BFIE と垂直である辺
③　面 FGHI と平行である辺

問２　**図１**に示す立体において，辺 AD，AE 上にそれぞれ点 J，K を，AJ : JD＝1 : 2，AK : KE＝1 : 2 となるようにとる。点 J から辺 FG に垂線をひき，辺 FG との交点を L とする。
四角形 KFGJ の面積が $16\sqrt{5}\text{cm}^2$ のとき，線分 JL の長さを求めよ。

問３　**図２**に示す立体において，四面体 PHEC の体積を求めよ。

解答欄

問１	辺
問２	cm
問３	cm^3

解答

問１辺　DE

問２$4\sqrt{5}$　cm

問３42　cm^3

解説

問１

条件①より，辺 AB とねじれの位置にある辺は，辺 AB と交わらない，かつ，平行でない辺である。よって，**図１**の×印をつけた辺は条件①を満たさない。なお，辺 DH，FG は，その延長線と，辺 AB の延長線が交わるので，ねじれの位置ではないことに注意しよう。

図１の×印をつけた辺以外の辺で，条件②，③を満たすのは，辺 DE である。

問２

問題文の条件を図示すると，**図２**のようになる。

ここで，**図３**のように，△AED を取り出して考えると，

AJ : JD＝AK : KE＝1 : 2 より，

平行線と線分の比の逆から，KJ//ED

よって，KJ : ED＝1 : 3

⇒　KJ : 6＝1 : 3　⇒　KJ＝2(cm)

また，KJ//ED，ED//FG より，KJ//FG だから，四角形 KFGJ は台形である。よって，その面積は，

$(KJ+FG)\times JL\times\frac{1}{2}=(2+6)\times JL\times\frac{1}{2}=4JL=16\sqrt{5}$　⇒　$JL=4\sqrt{5}$(cm)

問３

図４のように，四面体 PHEC の体積は，

直方体 BCDE－FGHI の体積から，三角錐 BPCE，三角錐 DHCE，四角錐 HPFGC ２つ分の体積をひいたものと考えることができる。

よって，四面体 PHEC の体積は，

$$6^2\times5-\frac{6^2}{2}\times2\times\frac{1}{3}-\frac{6^2}{2}\times5\times\frac{1}{3}-2\left\{\frac{(3+5)\times6}{2}\times6\times\frac{1}{3}\right\}$$

$=180-138=42(cm^3)$

図１

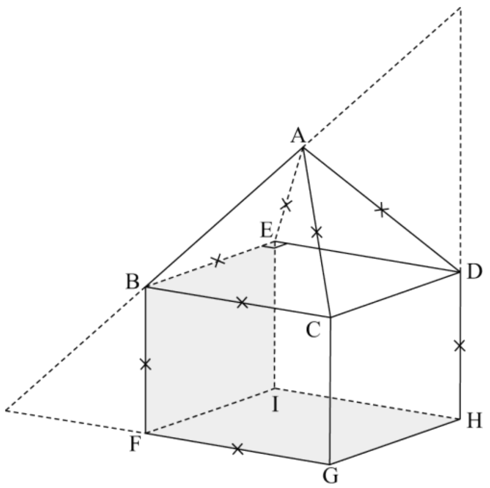


図２

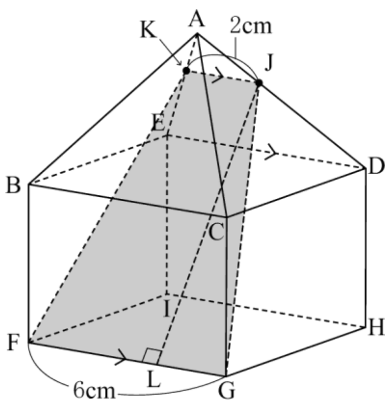


図３

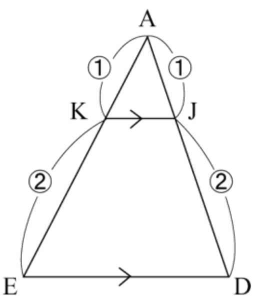
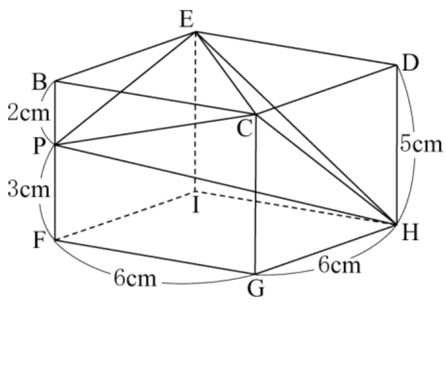


図４

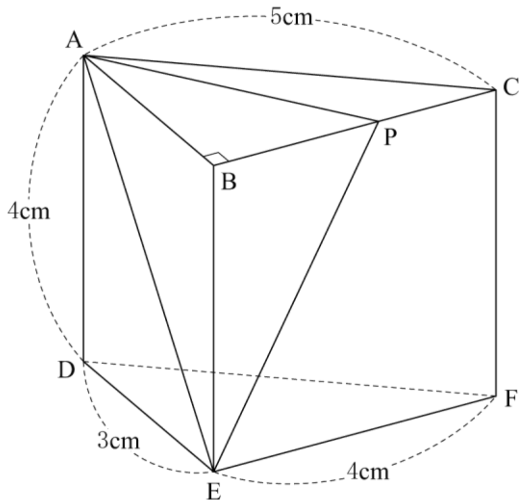


【問 22】

右の図は，点 A，B，C，D，E，F を頂点とし，３つの側面がそれぞれ長方形である三角柱で，AC＝5 cm，AD＝4 cm，DE＝3 cm，EF＝4 cm，∠ABC＝90° である。辺 BC 上に点 P を，△ABP∽△CBA となるようにとる。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2021 年度）



問１　線分 BP の長さを求めなさい。

問２　△ABP を底面とする三角すい EABP の体積を求めなさい。

問３　線分 AP 上に点 Q を，三角すい EABQ の体積が，三角柱 ABC－DEF の体積の$\frac{1}{20}$となるようにとる。このとき，線分 AQ と線分 QP の長さの比 AQ：QP を求めなさい。答えは最も簡単な整数比で表すこと。

解答欄

問１	cm
問２	cm^3
問３	AQ：QP＝　　：

解答

問１$\dfrac{9}{4}$　cm

問２$\dfrac{9}{2}$　cm^3

問３AQ：QP＝４：11

解説

問１

図１

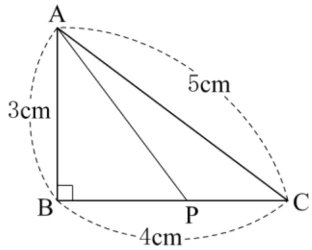


図１のように，△ABC を取り出して考えると，△ABP∽△CBA より，AB：CB＝BP：BA

$\Rightarrow$　$3:4 = BP:3$　$\Rightarrow$　$BP = \dfrac{9}{4}$(cm)

問２

$\triangle ABP = \dfrac{1}{2} \times AB \times BP = \dfrac{1}{2} \times 3 \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{27}{8}$$(cm^2)$ より，

三角すい EABP の体積は，

$\dfrac{1}{3} \times \triangle ABP \times BE = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{27}{8} \times 4 = \dfrac{9}{2}$$(cm^3)$

問３

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times AB \times BC = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$(cm^2)$ より，三角柱 ABC－DEF の体積は，

$\triangle ABC \times AD = 6 \times 4 = 24$$(cm^3)$

よって，三角すい EABQ の体積は，$24 \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{6}{5}$$(cm^3)$

三角すい EABP と三角すい EABQ の高さは等しいので，その体積比は，底面積の比と等しい。

このことから，$\triangle ABP : \triangle ABQ = \dfrac{9}{2} : \dfrac{6}{5} = 15 : 4$

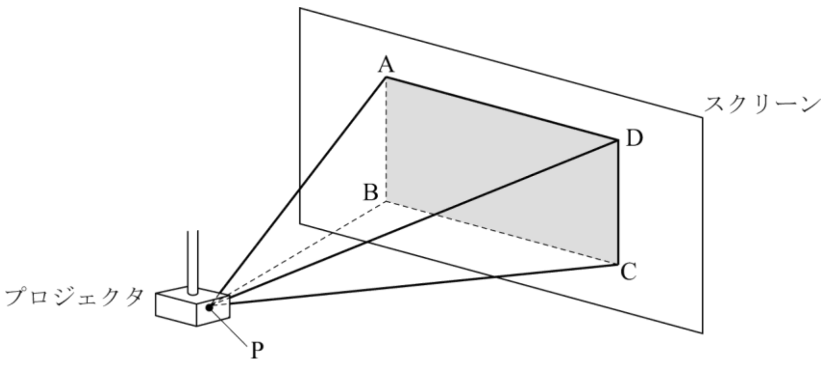
また，△ABP：△ABQ＝AP：AQ＝15：4 より，AQ：QP＝４：11

【問 23】

和恵（かずえ）さんの学校のプロジェクタは，電源を入れると，**図１**のように，水平な床に対して垂直なスクリーンに，四角形の映像を映し出す。

プロジェクタの光源を P，四角形の映像を長方形 ABCD とするとき，プロジェクタから出る光によってできる空間図形は，点 P を頂点とし，長方形 ABCD を底面とする四角錐（すい）になるものとする。

図１



このとき，下の**問１**～**問３**に答えなさい。

ただし，PA＝PB＝PC＝PD＝13 m，AB＝6 m，AD＝8 m とする。また，直線 AB は水平な床に対して垂直であり，スクリーンは平面であるものとする。

（宮崎県 2021 年度）

問１　長方形 ABCD の対角線 AC の長さを求めなさい。

問２　四角錐 PABCD の体積を求めなさい。

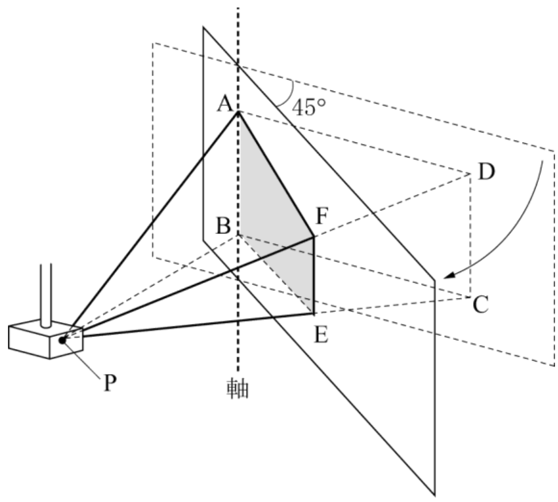
問３　**図２**のように，**図１**のスクリーンを，直線 AB を回転の軸として矢印の向きに 45° 回転させたところ，スクリーンに映し出された長方形 ABCD の映像が，台形 ABEF に変わった。

このとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

⑴　台形 ABEF の面積を求めなさい。

⑵　四角錐 PABEF の体積を求めなさい。

図２



解答欄

問１	m	
問２	m^3	
問３	(1)	m^2
	(2)	m^3

解答
問１ 10　m
問２ 192　m^3
問３
(1) $27\sqrt{2}$　m^2
(2) 72　m^3

解説

問１

$\triangle ACB$ で三平方の定理より，$AC^2=AB^2+BC^2=100$　$AC>0$ より，$AC=10(m)$

問２

長方形 ABCD の対角線の交点を O とする。PO はスクリーンに対して垂直である。

$\triangle APO$ で三平方の定理より，

$AP^2=AO^2+PO^2$　　$AP^2=\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+PO^2$　$169=25-PO^2$　$PO^2=144$

$PO>0$ より，$PO=12(m)$

よって(四角錐 PABCD)$=\frac{1}{3}\times$(長方形 ABCD)$\times PO=\frac{1}{3}\times 6\times 8\times 12=192(m^3)$

問３

(1)

AB，CD，EF の中点をそれぞれ，L，M，N とおく（**図１**）。台形 ABEF の面積を求めるために必要な，NL と EF の長さを求める。まず，NL の長さを求める。$\triangle PAB$ は二等辺三角形なので，$PL\perp AB$ で L は AB の中点である。$\triangle PAL$ で三平方の定理より，$PL^2=PA^2-AL^2=160$　$PL>0$ より，$PL=4\sqrt{10}(m)(=PM)$　LN と PO の交点を G として，二等辺三角形 PML を切り取って考える（**図２**）。スクリーンとのなす角が 45° なので，$\angle NLM=45°$ である。さらに $PO\perp ML$ なので $\angle POL=90°$ であり，$\triangle OGL$ は直角二等辺三角形である。よって，OG＝4m，$GL=\sqrt{2}OG=4\sqrt{2}(m)$である。さらに，PG＝PO－GO＝8(m)となり，PG : GO＝2 : 1 である。ここで，点 G を通り ML に平行な直線と PM との交点を G′ とすると，　$\triangle PGG'\backsim\triangle POM$ で

相似比は 2 : 3 なので，GG′ : OM＝2 : 3　$GG'=\frac{8}{3}(m)$

次に，$\triangle NGG'\backsim\triangle NLM$ に注目すると，その相似比は

$GG' : LM=\frac{8}{3} : 8=1 : 3$ なので，NG : NL＝1 : 3

つまり，LG : GN＝2 : 1 である。$GL=4\sqrt{2}m$ なので，$NG=2\sqrt{2}m$ となり，台形 ABEF の高さである $NL=6\sqrt{2}m$ である。次に，EF の長さを求める。N から ML に垂線 NH をおろすと，$\triangle NHL$ は直角二等辺三角形となり，$NL=6\sqrt{2}m$ から，NH＝6m となる。さらに NH//GO で LG : GN＝2 : 1 なので，OH＝2m

よって，MH＝MO－OH＝2(m)である。$\triangle NHM$ で三平方の定理より，

$NM^2=MH^2+NH^2=40$　$NM>0$ より，$NM=2\sqrt{10}(m)$　これは PM の長さの半分なので，N は PM の中点である。よって，EF//CD なので，

中点連結定理を用いて，$EF=\frac{1}{2}CD=3(m)$

したがって，(台形 ABEF)$=\frac{1}{2}\times(AB+EF)\times NL=\frac{1}{2}\times(6+3)\times 6\sqrt{2}=27\sqrt{2}(m^2)$

図１

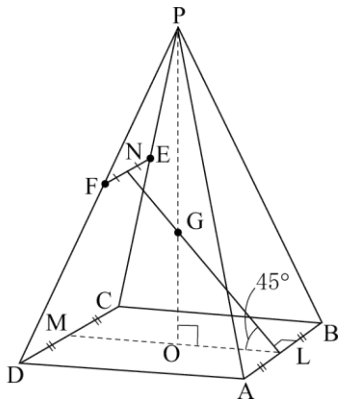


図２

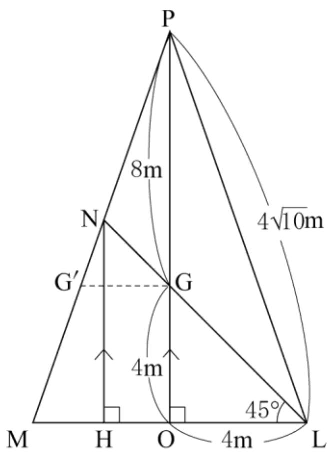
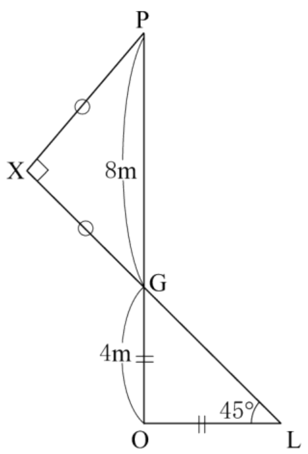


図３



(2)

スクリーンを 45° 回転させた平面に点 P から垂線 PX をおろすと，点 X は直線 GL 上にある（**図３**）。$\triangle OLG\backsim\triangle XPG$ なので，$\triangle XPG$ も直角二等辺三角形である。さらに，PG＝8m なので，

$PG : PX=\sqrt{2} : 1$　$PX=4\sqrt{2}(m)$

(四角錐 PABEF)$=\frac{1}{3}\times$(台形 ABEF)$\times PX=\frac{1}{3}\times 27\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=72(m^3)$

【問 24】

図１のように，頂点が O，底面が正方形 ABCD の四角錐がある。ただし，正方形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を H とすると，線分 OH は底面に垂直である。

AC＝BD＝6 cm，OH＝4 cm で，辺 OB，辺 OD の中点をそれぞれ M，N とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（沖縄県　2021 年度）

図１

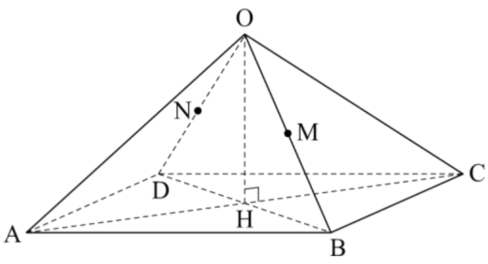


図２

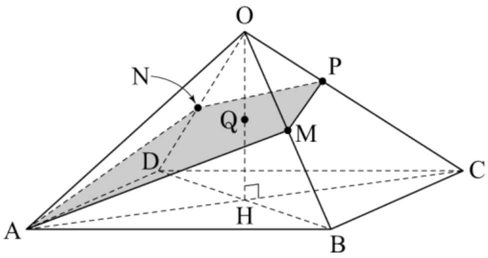
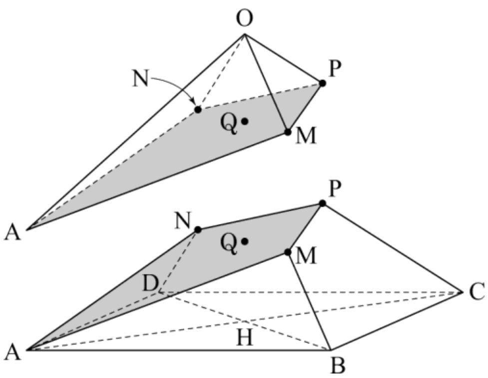


図３



問１　線分 MN の長さを求めなさい。

問２　図２のように，図１の四角錐を３点 A，M，N を通る平面で切るとき，この平面が辺OC，線分OH と交わる点をそれぞれ P，Q とする。
次の問いに答えなさい。

(1)　線分 OQ の長さを求めなさい。

(2)　OP : PC を求めなさい。

(3)　図３のように，図２の四角錐は２つの立体に分かれた。このとき，O を含む立体の体積を求めなさい。

解答欄

問１		cm
問２	(1)	cm
	(2)	OP : PC＝　　　　:
	(3)	cm^3

解答

問１ 3　cm

問２

(1) 2　cm

(2) OP：PC＝1：2

(3) 4　cm^3

解説

問１

点 M，N は，それぞれ辺 OB，OD の中点なので，**図１**のように，

△OBD で中点連結定理より，$MN=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 6=3$(cm)

問２

(1)

点 Q は線分 MN 上にあるので，**図２**のように，MN//BD より，

$OQ:QH=OM:MB=1:1 \quad \Rightarrow \quad OQ=\frac{1}{2}OH=\frac{1}{2}\times 4=2$(cm)

(2)

図３のように，△OAC において，直線 AP 上に OR//AC となる点 R をとる。

△OQR と△HQA において，平行線と線分の比から，

OR：HA＝OQ：HQ＝1：1

CA＝2AH より，OR：CA＝1：2 だから，△OPR と△CPA において，平行線と線分の比から，OP：CP＝OR：CA＝1：2

(3)

求める立体は，三角錐 M－OAP の 2 つ分であることから求める。

(2) より OP：PC＝1：2 だから，$\triangle OAP=\frac{1}{3}\triangle OAC=\frac{1}{3}\times 6\times 4\times\frac{1}{2}=4$($cm^2$)

(1) より OQ⊥QM，**図４**より PQ⊥QM だから，三角錐 M－OAP の底面を△OAP とすると，

高さは $QM=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$(cm)

よって，四角錐 O－AMPN の体積は，（三角錐 M－OAP）×2＝$4\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\times 2=4$($cm^3$)

図１

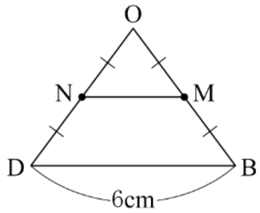


図２

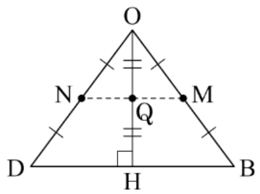


図３

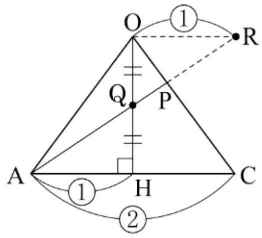


図４