9. 式の証明の問題 （2014 年度出題）

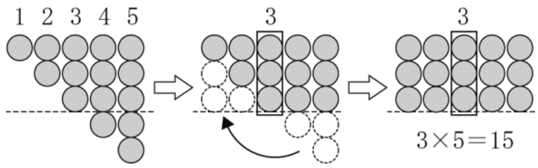
【問 1】

連続する自然数について，次の問1，問2に答えなさい。

（青森県　2014 年度　前期）

問1　下の文章は，としさんとひろさんの会話である。文章中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる数を書きなさい。

としː 奇数個の連続する自然数の和を求めるのは簡単だよ。例えば，1 から 5 までの和は，図のように考えて，真ん中の数 3 に，自然数の個数 5 をかけると 3×5＝15 と計算できるね。



ひろː そうだね。偶数個のときも，一番はしの数をはずして，奇数個の和を求めてから，最後に，はずした数をたせばいいよね。例えば，1 から 16 までの和を，式で表して計算すると，$\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}} = \boxed{\text{エ}}$ になるね。

問2　としさんとひろさんは，自分たちが所属するサッカー部のユニフォームの背番号が1から25までの連続する自然数であったことから，下のように考えた。次の(1)～(3)に答えなさい。

としː 僕の背番号より小さい数をすべてたしたものを3倍すると，僕の背番号の次の数から25までをたしたものと同じ値になるね。

ひろː 1から25までの和は $\boxed{あ}$ だから，としの背番号の数を m として，m より小さい数の和をSとおくと，S＋m＋ $\boxed{い}$ S＝ $\boxed{あ}$ と表すことができるね。

としː この式から，①$\boxed{あ}$ －m は，$\boxed{う}$ の倍数だとわかるね。だから，この条件にあてはまる m の値を探せばいいんだよ。

ひろː そうか，条件にあてはまる m の値に対応するSの値の中で，Sが1から $m-1$ までの自然数の和になっているのは，m＝13のとき，つまり，としの背番号だね。

としː じゃあ，ひろの背番号の数はどうかな。②君の背番号より小さい数をすべてたしたものを6倍すると，君の背番号の次の数から25までをたしたものになるよ。

(1)　$\boxed{あ}$ ～ $\boxed{う}$ にあてはまる数を書きなさい。

(2)　下線部①について，この条件にあてはまる m の値をすべて求めなさい。ただし，$1<m<25$ とする。

(3)　下線部②について，ひろさんの背番号の数を n として，n より小さい数の和をTとおくとき，次の①～③に答えなさい。

①　Tを n を使った式で表しなさい。

②　としさんは，n と T の関係を右のような表にまとめることにした。①の式にあてはまる n の値を求め，小さい順に a ～d に書きなさい。ただし，$1<n<25$ とする。また，それぞれの n の値に対応するTの値を e ～h に書きなさい。

n	a	b	c	d
T	e	f	g	h

③　ひろさんの背番号は何番か，求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="7">ア　　　　×　イ　　　　＋　ウ　　　　＝　エ</td></tr>
<tr><td rowspan="5">問2</td><td>(1)</td><td>ⓐ</td><td></td><td>ⓘ</td><td></td><td>ⓤ</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">(3)</td><td>①</td><td colspan="5">T＝</td></tr>
<tr><td>②</td><td colspan="5"><table><tr><td>n</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr><tr><td>T</td><td>e</td><td>f</td><td>g</td><td>h</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>③</td><td colspan="5">番</td></tr>
</table>

解答
問1
ア　8　　　イ　15　　　ウ　16　　　エ　136
問2
(1)
㋐　325　　　㋑　3　　　㋒　4
(2)　5，9，13，17，21
(3)
①　$T=\dfrac{325-n}{7}$
②

n	a 3	b 10	c 17	d 24
T	e 46	f 45	g 44	h 43

③　10番
解説
問1
1から15の真ん中の数は8だから
1から16までの数の和は $8\times15+16=136$
問2
(1)
1から25までの数の和は $13\times25=325$ だから
としの背番号を m，m より小さい数の和を S とおくと
$S+m+3S=325$
変形して
$325-m=4S$ だから
$325-m$ は4の倍数だとわかる。
(2)
$325-m=4S$ より
$325-m$ が4の倍数になるので
$1<m<25$ より
$m=5, 9, 13, 17, 21$
(3)
①
$T+n+6T=325$
$325-n=7T$ より
$T=\dfrac{325-n}{7}$
②
$T=\dfrac{325-n}{7}$ で $325-n$ は7の倍数になる。
$1<n<25$ だから
$n=3, 10, 17, 24$ のとき
順に $T=46, 45, 44, 43$
③
T が1から $n-1$ までの和になっているのは $T=45$
よって $n=10$

【問 2】

太一さんは，連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えると，どのような数になるかを，次のように調べ，予想した。太一さんの〔予想〕がいつでも成り立つことの［説明］が正しくなるように，ア～ウには式を，エには式をつくって計算の過程を書き，完成させなさい。

（秋田県　2014 年度）

〔調べたこと〕

連続する 2 つの奇数が，

1，3　のとき　$1\times3+1=4=2^2$

3，5　のとき　$3\times5+1=16=4^2$

5，7　のとき　$5\times7+1=36=6^2$

〔予想〕

これらのことから，連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えると，それら 2 つの奇数の間にある偶数の 2 乗になるだろう。

［説明］

n を整数とすると，連続する 2 つの奇数は $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$ と表すことができ，それら 2 つの奇数の間にある偶数は $\boxed{\text{ウ}}$ と表すことができる。連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えると，

エ

したがって，連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えると，それら 2 つの奇数の間にある偶数の 2 乗になる。

解答欄

ア	
イ	
ウ	
エ	

解答
ア　$2n-1$
イ　$2n+1$
ウ　$2n$
エ　$(2n-\mathrm{l})(2n+1)+1=(2n)^2-1^2+1=(2n)^2$
解説
n を整数とすると連続する奇数は $2n-1$，$2n+1$ と表すことができ
その間にある偶数は $2n$ と表すことができる。
連続する 2 つの奇数に 1 を加えると
$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2-1+1=4n^2=(2n)^2$
したがって連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えるとそれらの奇数の間にある偶数の 2 乗になる。

【問 3】

連続する 3 つの自然数があり，中央の数の 9 倍は，最も小さい数と最も大きい数の積から 9 をひいた数に等しい。このとき，中央の数を求めなさい。

求める過程も書きなさい。

（福島県　2014 年度）

解答欄

〔求める過程〕

答　中央の数

解答

〔求める過程〕例

連続する 3 つの自然数のうち中央の数を n とすると連続する 3 つの自然数は $n-1$，n，$n+1$ と表される。

中央の数の 9 倍は最も小さい数と最も大きい数の積から 9 をひいた数に等しいので

$9n=(n-1)(n+1)-9$

展開して整理すると

$n^2-9n-10=0$

$(n+1)(n-10)=0$

したがって $n=-1$，10

n は自然数であるから $n=-1$ は問題に適していない。

したがって $n=10$

答　中央の数　10

解説

中央の数を n とすると連続する 3 つの自然数は $n-1$，n，$n+1$ と表せる。

中央の数×9＝最も小さい数×最も大きい数－9 より

$9n=(n-1)(n+1)-9$　$n^2-9n-10=0$

$(n-10)(n+1)=0$

$n=-1$，10

n は自然数だから $n=10$

【問 4】

　連続する 5 つの整数がある。最も大きい数と 2 番目に大きい数の積から，最も小さい数と 2 番目に小さい数の積をひくと，中央の数の 6 倍になる。このことを，中央の数を n として証明しなさい。

（栃木県　2014 年度）

解答欄

解答
中央の数が n であるから連続する 5 つの整数は最も小さい数から順に $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ と表される。
よって
$(n+2)(n+1)-(n-2)(n-1)$
$=(n^2+3n+2)-(n^2-3n+2)$
$=6n$
n は中央の数だから
最も大きい数と 2 番目に大きい数の積から
最も小さい数と 2 番目に小さい数の積をひくと
中央の数の 6 倍になる。
解説
中央の数が n のとき
5 つの連続する数は小さい方から $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ と表せる。
よって $(n+2)(n+1)-(n-2)(n-1)$ を計算して $6n$ になることを示す。

【問 5】

　m と n は連続する正の整数である。次のア～エのうちから，式の値が偶数となるものを一つ選び，符号で答えなさい。ただし，$m<n$ とする。

（千葉県　2014 年度　前期）

ア　$m+n$　　イ　$n-m$　　ウ　$m+n+2$　　エ　mn

解答欄

解答

エ

解説

m と n が連続する正の整数であるから $n=m+1$ とおく。

ア　$m+n=m+m+1=2m+1$ より奇数

イ　$n-m=m+1-m=1$ より奇数

ウ　$m+n+2=2m+1+2=2m+3$ より奇数

エ　$mn=m(m+1)$ は m または $m+1$ のどちらかが偶数だから必ず偶数になる。

よって選択肢はエ

【問 6】

ある中学校で，S さんが作った問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

（東京都　2014 年度）

［S さんが作った問題］

右の図1は，縦と横がともに 4 マスである正方形のそれぞれのマスに，左上から，自然数を 1 から順に 1 つずつ書いた表である。

図1において，1，5，9 のように，連続して縦に並んだ 3 つの数を選び，選んだ 3 つの数の和である P を考える。

P が 4 の倍数になる選び方は全部で何通りあるか考えてみよう。

図1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

問1 ［S さんが作った問題］で，P が 4 の倍数になる選び方は全部で何通りあるか。

先生は，［S さんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

右の図2は，縦と横がともに 5 マスである正方形のそれぞれのマスに，左上から，自然数を 1 から順に 1 つずつ書いた表である。

図1，図2において，連続して縦に並んだ 3 つの数を選び，中央の数の 2 乗から他の 2 つの数の積を引いたときの差である Q を考える。

図2

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

図1において，選んだ 3 つの数が，

1，5，9 の場合，$Q=5^2-1\times9=16=4^2$ となり，

6，10，14 の場合，$Q=10^2-6\times14=16=4^2$ となる。

図2において，選んだ 3 つの数が，

3，8，13 の場合，$Q=8^2-3\times13=25=5^2$ となり，

15，20，25 の場合，$Q=20^2-15\times25=25=5^2$ となる。

n を 3 以上の整数として，縦と横がともに n マスである正方形のそれぞれのマスに，左上から，自然数を 1 から順に 1 つずつ書いた表において，連続して縦に並んだ 3 つの数を選び，中央の数の 2 乗から他の 2 つの数の積を引いたときの差である Q を考えるとき，$Q=n^2$ となることを確かめなさい。

問2 ［先生が作った問題］で，$Q=n^2$ となることを証明せよ。

解答欄

問1	通り
問2	〔証明〕 $\mathrm{Q}=n^2$

解答

問1　2 通り

問2

〔証明〕

連続して縦に並んだ 3 つの数のうち

最も小さい数を a として

他の 2 つの数をそれぞれ a, n を用いて表すと

$a+n$, $a+2n$ となる。

$\mathrm{Q}=(a+n)^2-a\times(a+2n)$

$=a^2+2an+n^2-a^2-2an$

$=n^2$

よって, $\mathrm{Q}=n^2$

解説

問1

P が 4 の倍数になる選び方は 4, 8, 12 と 8, 12, 16 の 2 通り。

問2

縦横 n マスの正方形の中で

連続して縦に並んだ 3 つの数を選ぶとき

最も小さい数を a とすると

中央の数は $a+n$, 最も大きい数は $a+2n$ と表せる。

$\mathrm{Q}=(a+n)^2-a(a+2n)=a^2+2an+n^2-a^2-2an=n^2$

よって $\mathrm{Q}=n^2$

【問 7】

1 から 6 までの目が出る赤と白の 2 個のさいころを同時に投げる。このとき，赤いさいころの目を x，白いさいころの目を y として，次のような 2 つの整数 A，B をつくり，A＋B について考える。

A は，十の位の数を x，一の位の数を y とする 2 けたの整数 B は，十の位の数を y，一の位の数を x とする 2 けたの整数

次の問1～問5に答えなさい。ただし，赤と白の 2 個のさいころはともに，どの目が出ることも同様に確からしいものとする。

（岐阜県　2014 年度）

問1　よしおさんは，赤と白の 2 個のさいころを同時に投げることを 3 回繰り返し，その結果を下の表にまとめた。表中のア，イにあてはまる数を書きなさい。

	x (赤いさいころの目)	y (白いさいころの目)	A	B	A＋B
1 回目	1	4	14	41	55
2 回目	2	5	25	52	77
3 回目	6	4	$\boxed{ア}$	$\boxed{イ}$	100

問2　よしおさんは，問1の結果から，赤と白の 2 個のさいころの目がどんな数になっても「A＋B は 11 の倍数になる。」と予想した。よしおさんの予想が正しいことを証明しなさい。

問3　A＋B = 44 になる確率を求めなさい。

問4　A＋B がいくつになるときの確率が最も大きいか。そのときの A＋B の値と確率をそれぞれ求めなさい。

問5　A＋B の正の約数の個数が 4 個になる確率を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問4</td><td>A＋B の値</td><td></td></tr>
<tr><td>確率</td><td></td></tr>
<tr><td>問5</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

解答

問1

ア　64　　イ　46

問2

〔証明〕例

A＝$10x+y$，B＝$10y+x$と表せる。

A＋B＝$(10x+y)+(10y+x)$

＝$11x+11y$

＝$11(x+y)$

$x+y$は整数だから，$11(x+y)$は11の倍数である。

したがって，A＋Bは11の倍数である。

問3　$\frac{1}{12}$

問4

A＋Bの値　77

確率　$\frac{1}{6}$

問5　$\frac{13}{36}$

解説

問1

ア＝$10\times6+4=64$

イ＝$10\times4+6=46$

問2

A＝$10x+y$，Bは$10y+x$と表せる。

A＋B＝$10x+y+10y+x=11x+11y=11(x+y)$

$x+y$は整数より

$11(x+y)$は11の倍数である。

問3

さいころの目の組み合わせは全部で$6\times6=36$通り。

A＋B＝44より

$11(x+y)=44$

$x+y=4$

このとき$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$の3通り。

よって求める確率は$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

問4

$x+y$の値でいちばん多いのは7で

このときA＋B＝77

$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$の6通り。

よってその確率は$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

問5

A＋Bの約数はA＋B＝$11(x+y)$より

1と11は必ず約数にあるから

$x+y$が11以外の素数のとき約数は1と11と$x+y$と$11(x+y)$の4つになる。

よって$x+y=2,\ 3,\ 5,\ 7$

$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 1),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$

の13通りだから

求める確率は$\frac{13}{36}$

【問 8】

数学の授業で,「図1のように, 半径 a の円形の土地の周囲に幅 h の道がある。この道の面積を S, 道の中央を通る円の周の長さを ℓ とするとき, $S=h\ell$ となる。」ということを学習した花子さんと太郎さんは, 図2のような花だんの周りの歩道についても調べることにした。図2で, 花だんは△ABC の内部で, △ABC の 3 辺の長さは a, b, c である。歩道は ▭ の部分で, △ABC と△PQR は相似であり, その相似比は $1:r$ である。また, 対応する 3 組の辺はそれぞれ平行で, その間の距離は 3 組とも等しく, この距離が歩道の幅 h である。さらに, 歩道の中央を通る線でできる図形は△XYZ である。

歩道の面積を S, △XYZ の周の長さを ℓ として, 各問いに答えよ。

（奈良県　2014 年度）

図1

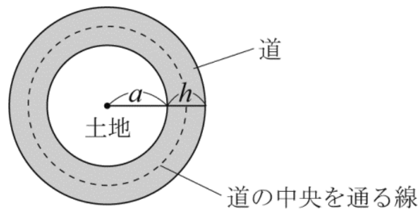
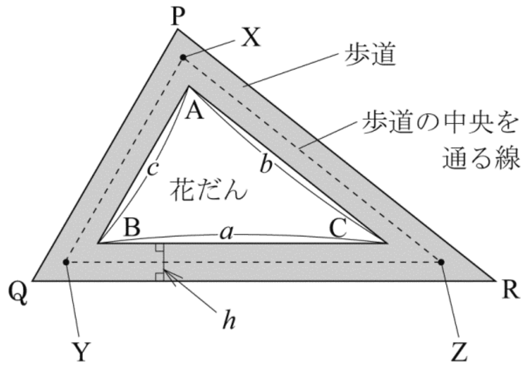


図2



問1　次の ▭ 内は花子さんと太郎さんの会話である。(1), (2)の問いに答えよ。

花子: 図2でも $S=h\ell$ となるのかな。

太郎: ℓ は, 3 つの線分 YZ, ZX, XY の長さの和だよね。線分 YZ は歩道の中央を通る線だから, 点 Y は線分 BQ の中点, 点 Z は線分 CR の中点になるね。

花子: 台形 BQRC に注目すると, 線分 YZ の長さがわかるんじゃないかな。

太郎: 辺 QR の長さが $\boxed{\text{あ}}$ だから, 線分 YZ の長さは $\boxed{\text{い}}$ になるよ。

花子: 線分 ZX と XY についても同様に考えると, ℓ がわかるね。

太郎: 次は, S について考えてみるね。S を求めるには, 歩道を 3 つの台形に分けて考えればいいと思うんだ。

花子: そうね。台形 BQRC は, 上底が辺 BC, 下底が辺 QR, 高さが h だから, 面積は $\boxed{\text{う}}$ になるね。

太郎: 線分 YZ の長さと h の積が, 台形 BQRC の面積と同じになったよ。

花子: 台形 CRPA, 台形 APQB についても同様に考えれば, 図2でも $S=h\ell$ となることが言えるよね。

(1) $\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$ に当てはまる式を, それぞれ a, r を用いて書け。

(2) $\boxed{\text{う}}$ に当てはまる式を, a, r, h を用いて書け。

問2　図2の場合にも $S=h\ell$ となる。図2において, $a=8$ m, $b=7$ m, $c=5$ m, $\angle ABC=60^\circ$ で, △ABC と△PQR の相似比を $2:3$ とするとき, 歩道の幅 h は何 m になるか。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td rowspan="2">(1)</td><td>ⓐ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓘ</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="3">m</td></tr>
</table>

解答
問1
(1)
㋐ ar

㋑ $\dfrac{ar+a}{2}$

(2) $\dfrac{ahr+ah}{2}$

問2 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m

解説
問1
(1)
△ABC∽△PQR より
a:QR＝1:r
QR＝ar
台形 BQRC において
CQ と YZ の交点を M とおくと
BC // QR で BY:YQ＝CZ:ZR＝1:1 より
BC // YZ // QR
よって△QBC において
YM:BC＝1:2

YM＝$\dfrac{1}{2}$BC＝$\dfrac{1}{2}a$

△CQR においても同様に

MZ＝$\dfrac{1}{2}$QR＝$\dfrac{1}{2}ar$

YZ＝$\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}ar=\dfrac{ar+a}{2}$

(2)
台形 BQRC の面積は$(ar+a)\times h\div 2=\dfrac{ahr+ah}{2}$

問2
点 A から BC に垂線をひき，交点を H とする。

△ABH において，AH＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$AB＝$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ m

△ABC＝$\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ m^2

△ABC:△PQR＝$2^2:3^2$＝4:9
よって$10\sqrt{3}$:△PQR＝4:9

△PQR＝$\dfrac{45\sqrt{3}}{2}$ m^2

$S=\dfrac{45\sqrt{3}}{2}-10\sqrt{3}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ m^2

また 2:3＝1:$\dfrac{3}{2}$ より $r=\dfrac{3}{2}$

$\ell=\dfrac{a(1+r)}{2}+\dfrac{b(1+r)}{2}+\dfrac{c(1+r)}{2}=\dfrac{1+r}{2}\times(a+b+c)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times 20=25\mathrm{m}$

$S=h\ell$ より $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}=25h$

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m

【問 9】

自然数には，連続する 2 つ以上の自然数の和で表される式にできるものがある。

表1は，そのように表すことができるものをまとめたものの一部である。

次の問1～問4に答えなさい。

（和歌山県　2014 年度）

表1

自然数	連続する 2 つ以上の自然数の和で表される式
3	1＋2
5	2＋3
6	1＋2＋3
7	3＋4
9	4＋5
	2＋3＋4
10	ア
11	5＋6
12	3＋4＋5
13	6＋7
14	2＋3＋4＋5
15	7＋8
	4＋5＋6
	1＋2＋3＋4＋5
17	8＋9
⋮	⋮

問1　右の表1の ア には 1 つの式が入る。

このとき，あてはまる式をかきなさい。

問2　表2は，表1の中から，自然数が奇数で，連続する 2 つの自然数の和で表される式を抜き出したものの一部である。また，表2中の $2n+1$ は，自然数 n を使って奇数を表している。

このとき，表2の イ にあてはまる n の式をかきなさい。

表2

自然数	連続する 2 つの自然数の和で表される式
3	1＋2
5	2＋3
7	3＋4
9	4＋5
⋮	⋮
$2n+1$	イ
⋮	⋮

問3　表3は，表1の中から，自然数が 6 以上の 3 の倍数で，連続する 3 つの自然数の和で表される式を抜き出したものの一部である。

自然数が 6 以上の 3 の倍数を $3n$（n は 2 以上の自然数）として，連続する 3 つの自然数の和で表される式にできることを，証明しなさい。

表3

自然数	連続する 3 つの自然数の和で表される式
6	1＋2＋3
9	2＋3＋4
12	3＋4＋5
15	4＋5＋6
⋮	⋮

問4　表1から，自然数の 9 と 15 は，連続する 2 つ以上の自然数の和で表される式が，2 通り以上あることがわかる。

例えば，15 は，7＋8，4＋5＋6，1＋2＋3＋4＋5 の 3 通りの式に表されている。このうち，7＋8 は，15 が奇数であることから，連続する 2 つの自然数の和で表され，また，4＋5＋6 は，15 が 3 の倍数であることから，連続する 3 つの自然数の和で表される式になる。

もう一つの式 1＋2＋3＋4＋5 については，15 が 5 の倍数であることから，連続する 5 つの自然数の和で表される式になることがわかる。このように，倍数に着目することによって求められる場合がある。

このことをもとにして，自然数の 35 について，連続する 2 つ以上の自然数の和で表される式を 3 通りかきなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	〔証明〕
問4	

解答
問1　$1+2+3+4$
問2　$n+(n+1)$
問3
〔証明〕
自然数が6以上の3の倍数は$3n$ (nは2以上の自然数)より
$3n=n+n+n$
$=(n-1)+n+(n+1)$
ここでnは2以上の自然数だから
$(n-1)+n+(n+1)$は連続する3つの自然数の和で表される式を示している。
したがって自然数が6以上の3の倍数は
連続する3つの自然数の和で表される式にできる。
問4
$17+18$
$5+6+7+8+9$
$2+3+4+5+6+7+8$
解説
問1
$10=1+2+3+4$
問2
$2n+1=n+(n+1)$
問3
自然数が6以上の3の倍数を$3n$ (nは2以上の自然数)とすると
$3n=(n-1)+n+(n+1)$ より
連続する3つの自然数の和で表せる。
問4
35は奇数だから連続する2つの自然数の和で表せるので
$17+18$
また35は5の倍数より連続する5つの自然数の和で表せるので
$5+6+7+8+9$
さらに35は7の倍数より連続する7つの自然数の和で表せるので
$2+3+4+5+6+7+8$

【問 10】

次は，大地さんと先生の会話の一部と，大地さんのメモである。問1～問3に答えなさい。

（岡山県　2014 年度　特別）

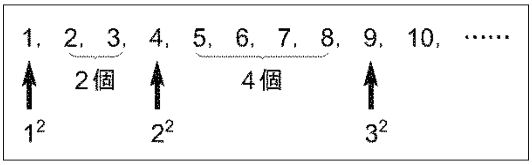
先生：ある整数の 2 乗で表すことができる数を「平方数」といいます。

大地：例えば，1^2，2^2，3^2，…つまり，1，4，9，…という数のことですか。

先生：そのとおりです。実は，この平方数は，自然数を 1 から順に並べたときにある規則で出現します。その規則を探るために，連続する平方数の間にある自然数の個数を調べてみましょう。

大地：実際に書いて調べてみたら，1 と 4 の間には 2，3 の 2 個，4 と 9 の間には 5，6，7，8 の 4 個の自然数がありました。他の場合についても調べてみます。

大地さんのメモ



問1　大地さんは次のことを確認した。（ア），（イ）に適当な数を書き入れなさい。

大地さん

3^2 と 4^2 の間には（ア）個，4^2 と 5^2 の間には（イ）個の自然数がある。

問2　問1で確認した結果から，大地さんは次のことを予想した。

＜大地さんの予想＞

自然数を 1 から順に並べたとき，連続する平方数の間にある自然数の個数は偶数である。

＜大地さんの予想＞は次のように説明できる。（ウ）には適当な式を書き入れなさい。また，（エ）には，文字を使った式を用いて連続する 2 つの平方数の間にある自然数の個数を求め，＜説明＞を完成させなさい。

＜説明＞

n は自然数とし，連続する 2 つの平方数のうち，小さい方の平方数を n^2 とおく。

このとき，大きい方の平方数は（ウ）と表すことができる。

したがって，これら 2 つの平方数の間にある自然数の個数は，

（エ）

n は自然数だから，連続する平方数の間にある自然数の個数は偶数である。

問3　大地さんは，問2の予想から次の事実に気づき，先生に伝えた。（オ），（カ）に適当な自然数を書き入れなさい。

連続する平方数の間にある自然数の個数が1000個になるのは（オ）^{2}と（カ）^{2}の間である。

解答欄

問1	(ア)	個
	(イ)	個
問2	(ウ)	
	(エ)	
問3	(オ)　　　^{2}　と　(カ)　　　^{2}	

解答
問1
(ア)　6 個　　(イ)　8 個
問2
(ウ)　$(n+1)^2$
(エ)　$(n+1)^2-n^2-1=n^2+2n+1-n^2-1=2n$
問3　500^2と501^2
解説
問1
3^2と4^2の間には $4^2-3^2-1=16-9-1=6$ 個
4^2と5^2の間には $5^2-4^2-1=25-16-1=8$ 個
問2
小さい方の平方数を n^2 と表すと大きい方の平方数は$(n+1)^2$と表せる。
よってその間にある自然数の数は
$(n+1)^2-n^2-1=n^2+2n+1-n^2-1=2n$
n は自然数だから $2n$ は偶数である。
問3
$2n=1000$ より $n=500$
よって連続する平方数の間にある自然数の個数が 1000 個のとき
2 つの平方数は 500^2 と 501^2

【問 11】

2 けたの正の整数があります。この整数の十の位の数と一の位の数を入れかえた整数をつくります。このとき，入れかえた整数の 2 倍ともとの整数の和は，3 の倍数になります。このわけを，もとの整数の十の位の数を x，一の位の数を y として，x と y を使った式を用いて説明しなさい。

（広島県　2014 年度）

解答欄

解答
十の位の数が x，一の位の数が y の 2 けたの整数は $10x+y$
十の位の数と一の位の数を入れかえた整数は $10y+x$ と表すことができる。
入れかえた整数の 2 倍ともとの整数の和は
$2(10y+x)+(10x+y)=12x+21y=3(4x+7y)$である。
$4x+7y$ は整数だから
$3(4x+7y)$ は 3 の倍数である。
解説
もとの整数の十の位を x，一の位を y とすると
もとの整数は $10x+y$，十の位と一の位を入れかえた数は $10y+x$ と表せる。
よって入れかえた整数の 2 倍ともとの整数の和は
$2(10y+x)+(10x+y)=20y+2x+10x+y=12x+21y=3(4x+7y)$
$4x+7y$ は整数なので $3(4x+7y)$ は 3 の倍数である。

【問 12】

S さんと T さんは，下のかけ算の九九の表を見て，並んでいる数についてどのような関係があるか，それぞれ考察している。

		かける数									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
かけられる数	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…1の段
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	…2の段
	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	…3の段
	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	…4の段
	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	…5の段
	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	…6の段
	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	…7の段
	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	…8の段
	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	…9の段

次の問1，問2に答えなさい。

（山口県　2014 年度）

問1　S さんは，2 の段に並んでいる 9 つの数の和と 6 の段に並んでいる 9 つの数の和の関係について考察し，次のことに気づいた。

S さんの気づき

> 2 の段に並んでいる 9 つの数の和を k とするとき，6 の段に並んでいる 9 つの数の和は $\boxed{}\,k$ と表せる。

$\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。

問2　T さんは，表の中で縦，横 2 つずつ並んでいる 4 つの数の組 $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$ のうち，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}$ のように，a，d がそれぞれ自然数の 2 乗で表せる組について，$a+b+c+d$ の値を求め，次のように考察した。

Tさんの考察

> $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}$ のとき，$a+b+c+d=1+2+2+4=9$
>
> $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 6 \\ \hline 6 & 9 \\ \hline\end{array}$ のとき，$a+b+c+d=4+6+6+9=25$
>
> $\begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 12 \\ \hline 12 & 16 \\ \hline\end{array}$ のとき，$a+b+c+d=9+12+12+16=49$
>
> $9=3^2$，$25=5^2$，$49=7^2$ より，これらはいずれも奇数の 2 乗となっている。
> だから，他の場合も「$a+b+c+d$ の値は奇数の 2 乗となる」のではないだろうか。

自然数 n を使って，$a=n^2$ と表すとき，b，c，d を n を使った式で表して，T さんの予想「$a+b+c+d$ の値は奇数の 2 乗となる」が正しいことを説明しなさい。

解答欄

問1	
問2	〔説明〕

解答

問1　3

問2

〔説明〕

$b=n(n+1)$, $c=n(n+1)$, $d=(n+1)^2$　と表せるから

$a+b+c+d=n^2+n(n+1)+n(n+1)+(n+1)^2$

$=n^2+n^2+n+n^2+n+n^2+2n+1$

$=4n^2+4n+1$

$=(2n+1)^2$

n が自然数のとき $2n+1$ は奇数となるから

$a+b+c+d$ の値は奇数の 2 乗となる。

よって T さんの予想は正しい。

解説

問1

6 の段の数はそれぞれ 2 の段の 3 倍になっているから

6 の段の数の和は 3×(2 の段の数の和)より $3k$ と表せる。

問2

$a=n^2$ のとき $b=n(n+1)$, $c=n(n+1)$, $d=(n+1)^2$ と表せる。

$a+b+c+d=n^2+n(n+1)+n(n+1)+(n+1)^2=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$

n が自然数のとき $2n+1$ は奇数だから $a+b+c+d$ は奇数の 2 乗になる。

【問 13】

2 けたの正の整数 M がある。この整数の十の位の数と一の位の数との和を N とする。このとき，M^2-N^2 は 9 の倍数であることを，文字式を使って証明せよ。

（香川県　2014 年度）

解答欄

〔証明〕

解答
〔証明〕例
整数 M の十の位の数を x，一の位の数を y とすると
$M=10x+y$，$N=x+y$ と表せる。
したがって $M^2-N^2=(10x+y)^2-(x+y)^2$
$=100x^2+20xy+y^2-x^2-2xy-y^2$
$=99x^2+18xy$
$=9(11x^2+2xy)$
$11x^2+2xy$ は整数だから
M^2-N^2 は 9 の倍数である。
解説
M の十の位を x，一の位を y とすると $M=10x+y$，$N=x+y$ と表せる。
$M^2-N^2=(10x+y)^2-(x+y)^2=100x^2+20xy+y^2-(x^2+2xy+y^2)=99x^2+18xy=9(11x^2+2xy)$
$11x^2+2xy$ は整数より M^2-N^2 は 9 の倍数である。

【問 14】

右の表は，2 から 50 までの偶数を順に並べたものである。

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
22	24	26	28	30
32	34	36	38	40
42	44	46	48	50

表の $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 6 \\ \hline 14 & 16 \\ \hline\end{array}$ に位置している 4，6，14，16 や，$\begin{array}{|c|c|}\hline 16 & 18 \\ \hline 26 & 28 \\ \hline\end{array}$ に位置している 16，18，26，28 のように，表の $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline\end{array}$ に位置している 4 つの偶数において，最も大きい数と 2 番目に小さい数の和の 2 乗から，2 番目に大きい数と最も小さい数の和の 2 乗をひいた差は，32 でわりきれることの証明を，文字を使って $\boxed{}$ の中に完成せよ。

（福岡県 2014 年度）

〔証明〕

したがって，4 つの偶数において，最も大きい数と 2 番目に小さい数の和の 2 乗から，2 番目に大きい数と最も小さい数の和の 2 乗をひいた差は，32 でわりきれる。

解答欄
証明の解答は問題文中の枠に書きなさい。
解答
〔証明〕例
n を整数とし最も小さい偶数を $2n$ と表すと残りの 3 つの偶数は
小さい方から順に，$2n+2$，$2n+10$，$2n+12$ と表される。
最も大きい数と 2 番目に小さい数の和の 2 乗から 2 番目に大きい数と最も小さい数の和の 2 乗をひいた差は
$\{(2n+12)+(2n+2)\}^2-\{(2n+10)+2n\}^2$
$=(4n+14)^2-(4n+10)^2$
$=16n^2+112n+196-(16n^2+80n+100)$
$=32n+96$
$=32(n+3)$
$n+3$ は整数だから $32(n+3)$ は 32 でわりきれる。
解説
n を整数とすると 4 つの数は小さい数から順に $2n$，$2n+2$，$2n+10$，$2n+12$ と表せる。
最も大きい数と 2 番目に小さい数の和の 2 乗から 2 番目に大きい数と最も小さい数の和の 2 乗をひいた差は
$\{(2n+12)+(2n+2)\}^2-\{(2n+10)+2n\}^2$
$=(4n+14)^2-(4n+10)^2$
$=(16n^2+112n+196)-(16n^2+80n+100)$
$=32n+96=32(n+3)$
$n+3$ は整数だから $32(n+3)$は 32 の倍数である。
よって最も大きい数と 2 番目に小さい数の和の 2 乗から 2 番目に大きい数と最も小さい数の和の 2 乗をひいた差は 32 の倍数になる。

【問 15】

右の表は，1 行目から 50 行目まであり，1 行目には，自然数を 1 から 50 まで左から順に並べ，2 行目以降には，その 1 つ上の行に並べられた数に 3 ずつ加えた数を並べたものである。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2014 年度）

1行目	1	2	3	4	5	・	・	・	・	50
2行目	4	5	6	7	8	・	・	・	・	53
3行目	7	8	9	10	11	・	・	・	・	56
4行目	10	11	12	13	14	・	・	・	・	・
5行目	13	14	15	16	17	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
50行目	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・

問1　次の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる数を入れて，文章を完成しなさい。

> 4 行目で，左から 3 番目の数は 12 であり，7 行目で，
> 左から 1 番目の数は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，11 は表の中に 4 個あり，35 は表の中に $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。

問2　表の中で，縦，横に 2 つずつ並んでいる 4 つの数の組 $\begin{array}{|cc|}\hline a & b \\ c & d \\ \hline\end{array}$ について考える。

例えば，表の $\begin{array}{|cc|}\hline 6 & 7 \\ 9 & 10 \\ \hline\end{array}$ では，$a=6$，$b=7$，$c=9$，$d=10$ である。

(1)　4 つの数の組 $\begin{array}{|cc|}\hline a & b \\ c & d \\ \hline\end{array}$ をどこに選んでも，$cd-ab$ の値は，つねに 6 の倍数になることを，次のように説明した。次の $\boxed{\text{ウ}}$ ，$\boxed{\text{エ}}$ ，$\boxed{\text{オ}}$ には a を使った式を入れ，$\boxed{\text{カ}}$ には説明の続きを書いて，説明を完成しなさい。

〔説明〕

> b，c，d をそれぞれ a を使った式で表すと，
> $b=$ $\boxed{\text{ウ}}$ ，$c=$ $\boxed{\text{エ}}$ ，$d=$ $\boxed{\text{オ}}$ となるので，
>
> カ
>
> したがって，$cd-ab$ の値はつねに 6 の倍数になる。

(2)　ある 4 つの数の組 $\begin{array}{|cc|}\hline a & b \\ c & d \\ \hline\end{array}$ を選んだところ，$cd-ab$ の値は 450 であった。このとき，a に当てはまる数を求めなさい。また，a に当てはまる数は，表の何行目から何行目までにあるか求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>ア</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>イ</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">問2</td><td rowspan="4">(1)</td><td>ウ</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>エ</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>オ</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>カ</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">$a=$</td><td>〔　　　〕行目から〔　　　〕行目まで</td></tr>
</table>

解答
問1
ア　19
イ　12
問2
(1)
ウ　$a+1$
エ　$a+3$
オ　$a+4$
カ
$cd-ab=(a+3)(a+4)-a(a+1)$
$=a^2+7a+12-a^2-a$
$=6a+12$
$=6(a+2)$
$a+2$ は自然数だから $6(a+2)$ は 6 の倍数である。
(2)
$a=73$
〔9〕行目から〔25〕行目まで
解説
問1
7 行目の左から 1 番目の数は $1+3\times6=19$　ア
12 行目の左から 1 番目は $1+3\times11=34$,
13 行目の左から 1 番目の数は $1+3\times12=37$ より
35 は 1 行目から 12 行目までに各 1 個あるので 12 個　イ
問2
(1)
$b=a+1$, $c=a+3$, $d=a+4$ となっている。
$cd-ab=(a+3)(a+4)-a(a+1)=a^2+7a+12-(a^2+a)=a^2+7a+12-a^2-a=6a+12=6(a+2)$
$a+2$ は整数なので $6(a+2)$は 6 の倍数である。
(2)
$cd-ab=6(a+2)$より
$6(a+2)=450$
$a+2=75$
$a=73$
n 行目の 1 番右の数は
$50+3(n-1)=3n+47$　$3n+47=73$ より
$3n=26$
$n=\dfrac{26}{3}=8.66\cdots$
よって 9 行目ではじめて出てくる。
また n 行目の左から 1 番目の数は $1+3(n-1)=3n-2$ と表せる。
$3n-2=73$
$3n=75$
$n=25$
よって 73 は 9 行目から 25 行目まである。