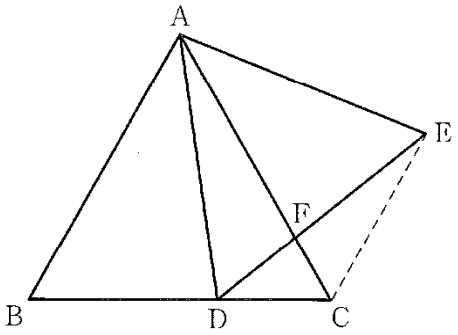
3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2011 年度出題】

【問 1】

図のように，正三角形 ABC の辺 BC 上に点 D をとり，AD を 1 辺とする正三角形 ADE をつくる。また，辺 DE と辺 AC の交点を F とする。次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県　2011 年度　後期）



(1)　△ABD と△ACE が合同になることを次のように証明した。

㋐ ～ ㋔ にあてはまる式やことばや角を入れなさい。

〔証明〕

△ABD と△ACE で

△ABC は正三角形だから

［　㋐　］…①

同様に，△ADE は正三角形だから

AD＝AE　…②

また，△ABC，△ADE は正三角形だから

［　㋑　］＝60°

∠BAD＝60°－［　㋒　］　…③

∠CAE＝60°－［　㋒　］　…④

③，④から

∠BAD＝∠CAE　…⑤

①，②，⑤から，［　㋔　］が等しいので

△ABD≡△ACE

(2)　AB＝6 cm，DC＝2 cm のとき，CF の長さを求めなさい。

解答欄

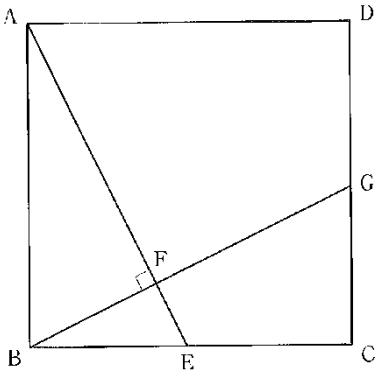
(1)	㋐	
	㋑	
	㋒	
	㋓	
(2)	cm	

解答
(1)
㋐ AB＝AC
㋑ ∠BAC＝∠DAE
㋒ ∠DAC
㋓ 2 組の辺とそのはさむ角
(2) $\frac{4}{3}$ cm
解説
(2)
△DCF と△AEF において,
∠DCF＝∠AEF＝60°,
対頂角より∠DFC＝∠AFE だから,
2 組の角がそれぞれ等しいので,
△DCF∽△AEF
よって, ∠CDF＝∠EAF
△ABD と△DCF において,
∠ABD＝∠DCF＝60°,
∠BAD＝∠CAE＝∠EAF＝∠CDF
2 組の角がそれぞれ等しいので,
△ABD∽△DCF
よって, AB:DC＝BD:CF
6:2＝(6－2):CF
6CF＝2×4
CF＝$\frac{4}{3}$ cm

【問 2】

図のように，正方形 ABCD の辺 BC 上に B と異なる点 E をとります。B から線分 AE に垂線 BF をひき，BF の延長と辺 CD との交点を G とします。このとき，△ABE≡△BCG であることを証明しなさい。

（岩手県　2011 年度）



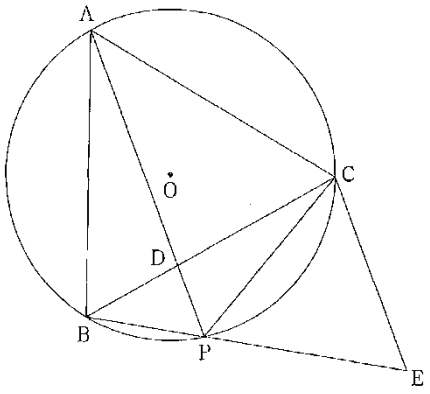
解答欄

〔証明〕

解答
〔証明〕
△ABE と△BCG において
四角形 ABCD は正方形だから
AB＝BC　…(1)
∠ABE＝∠BCG＝90°　…(2)
また
∠BAE＝∠BAF＝90°－∠ABF
∠CBG＝∠EBF＝90°－∠ABF
したがって
∠BAE＝∠CBG　…(3)
(1), (2), (3)より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△BCG
解説
△ABE と△BCG において,
四角形 ABCD は正方形なので,
AB＝BC…①
∠ABE＝∠BCG＝90°…②
AE⊥BG より,
∠BAE＝180°－∠AFB－∠ABF＝90°－∠ABF　∠CBG＝∠ABE－∠ABF＝90°－∠ABF
したがって, ∠BAE＝∠CBG…③
①, ②, ③より,
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,
△ABE≡△BCG

【問 3】

図のように，点 O を中心とする円の周上に 3 点 A，B，C があり，AB＝BC＝CA である。点 A をふくむ弧 BC を除いた円周上に点 P をとり，線分 AP と線分 BC との交点を D，点 C を通り線分 AP に平行な直線と直線 BP との交点を E とする。このとき，あとの問いに答えなさい。



（山形県　2011 年度）

問1　∠PCE＝60° であることを次のように証明したい。 a ， b にあてはまる語を，あとのア～オから 1 つずつ選び，記号で答えなさい。

〔証明〕
仮定より，△ABC は正三角形だから，∠ABC＝60° … ①
弧 AC に対する [a] は等しいから，∠ABC＝∠APC … ②
また，AP // CE で，[b] は等しいから，∠APC＝∠PCE … ③
①，②，③より，∠PCE＝60°

ア　同位角
イ　錯角
ウ　対頂角
エ　円周角
オ　中心角

問2　△APC と△BEC が合同であることを証明しなさい。なお，∠PCE＝60° であることは使ってよい。

問3　AP＝25 cm，BP＝10 cm であるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　PD の長さを求めなさい。

(2)　△ABC と△PEC の面積の比を求めなさい。

解答欄

問1	a		b		
問2	〔証明〕				
問3	(1)	cm			
	(2)	:			

解答
問1
a　エ
b　イ
問2
〔証明〕
△APC と△BEC において
仮定より
AC＝BC … ①
弧 PC に対する円周角は等しいから
∠PAC＝∠EBC … ②
仮定より△ABC は正三角形であり，また，∠PCE＝60°だから
∠BCA＝∠PCE＝60°
∠PCA＝60°＋∠PCB … ③
∠ECB＝60°＋∠PCB … ④
③，④より
∠PCA＝∠ECB … ⑤
①，②，⑤より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△APC≡△BEC
問3
(1)　6cm
(2)　19：9
解説
問3
(1)
△APC≡△BEC より，BE＝AP＝25cm
△PCE は正三角形だから，EC＝PE＝25－10＝15cm
△BEC において，PD // EC より，PD：EC＝BP：BE　PD：15＝10：25　25PD＝15×10　PD＝6cm
(2)
C から BE に垂線をひき，交点を H とする。
△CEH は 60°の角をもつ直角三角形だから，

$$EH=\frac{1}{2}CE=\frac{15}{2}\text{cm}$$

$$CH=\sqrt{3}\,EH=\frac{15\sqrt{3}}{2}\text{cm}$$

△CBH において，三平方の定理より，

$$BC^2=BH^2+CH^2$$

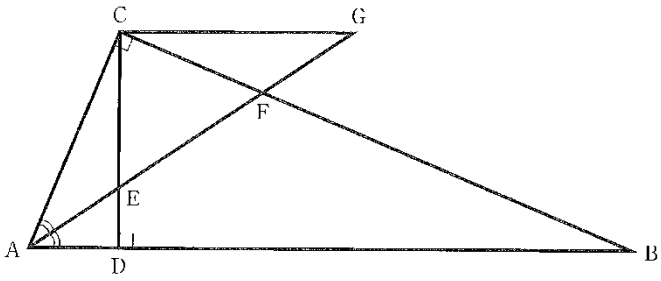
$$=\left(25-\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=475$$

BC＞0 より，$BC=\sqrt{475}=5\sqrt{19}$
△ABC と△PEC は正三角形なので相似である。
相似比は，$5\sqrt{19}:15=\sqrt{19}:3$
よって，面積比は$(\sqrt{19})^2:3^2=19:9$

【問 4】

図のように，∠ACB＝90°の直角三角形 ABC がある。点 C から辺 AB に垂線をひき，辺 AB との交点を D とする。また，∠BAC の二等分線をひき，線分 CD，辺 BC との交点をそれぞれ E，F とする。さらに，線分 AF の延長上に点 G を AE＝FG となるようにとる。



このとき，△ACE≡△GCF であることを次のように証明した。

〔証明〕
△ADE と△ACF で，
仮定から，∠ADE＝∠ACF …①
線分 AF は∠BAC の二等分線だから，
∠DAE＝∠CAF …②
①，②から，［　ア　］ので
△ADE∽△ACF
対応する角だから，∠AED＝∠AFC …③
［　イ　］だから，∠AED＝∠CEF …④

［　ウ　］

次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県 2011 年度）

問1 ［ア］には当てはまる三角形の相似条件を，［イ］には当てはまる適切なことばをそれぞれ書きなさい。

問2 ［ウ］には証明の続きを書き，△ACE≡△GCF であることの証明を完成させなさい。ただし，〔証明〕の中の①，②，③，④で示されている関係を使う場合は，①，②，③，④の番号を用いてもよい。また，新たな関係に番号をつける場合は，⑤以降の番号を用いなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	ウ	

解答
問1
ア　2 組の角がそれぞれ等しい
イ　対頂角
問2
ウ
③, ④から, ∠CEF＝∠CFE…⑤
したがって, △CEF は二等辺三角形である。
よって, CE＝CF　…⑥
△ACE と△GCF において
仮定から, AE＝GF…⑦
また∠AEC＝180°－∠CEF
∠GFC＝180°－∠CFE
よって, ⑤から,
∠AEC＝∠GFC…⑧
⑥, ⑦, ⑧から,
2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので
△ACE≡△GCF
解説
問2
③, ④より, ∠CEF＝∠CFE…⑤
よって, CE＝CF…⑥
△ACE と△GCF において, 仮定より, AE＝GF…⑦
∠AEC＝180°－∠CEF, ∠GFC＝180°－∠CFE で, ⑤より, ∠AEC＝∠GFC…⑧
⑥, ⑦, ⑧より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので△ACE≡△GCF

【問 5】

鋭角の∠XAY があります。右の図1のように，線分 AY 上に点 B をとり，線分 AB を直径とする半円 O をかき，線分 AX との交点を C とします。線分 AY を A のほうへ延長した線上に OA＝AD となる点 D をとります。

図2のように，線分 CX 上に点 P をとり，この点 P から$\overset{\frown}{CB}$と接するように接線をひき，$\overset{\frown}{CB}$との接点を E，線分 AY との交点を F としたとき，∠DPF＝90°となりました。点 A から線分 PF へ垂線をひいたときの，$\overset{\frown}{CB}$，線分 PF との交点をそれぞれ G，H とします。

このとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県　2011 年度　後期）

図1

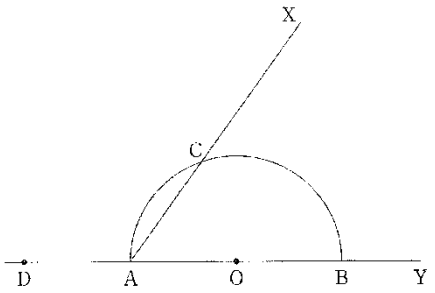
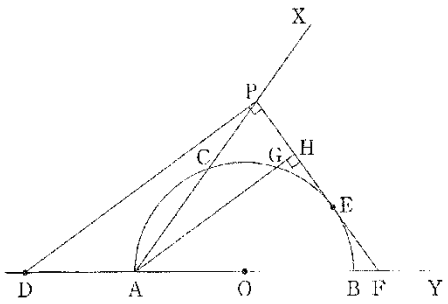


図2



問1　△HAP と△HAE が合同であることを証明しなさい。

問2　$\overset{\frown}{CE}$と$\overset{\frown}{EB}$の長さの比を求めなさい。

問3　OA＝5 cm，AG＝8 cm のとき，四角形 GABE の面積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	$\overset{\frown}{CE}:\overset{\frown}{EB}=$　　:
問3	cm^2

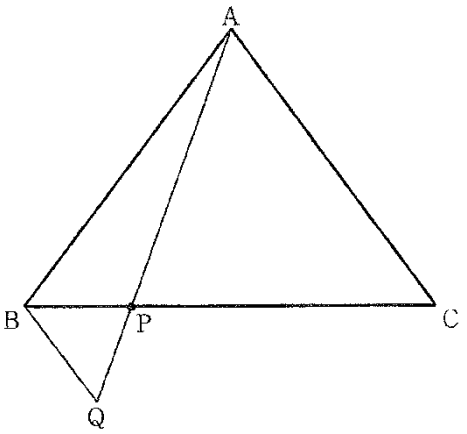
解答
問1
〔証明〕
△HAP と△HAE において,
線分 PF と半円 O は点 E で接しているので, 線分 PF と OE は垂直に交わっている。
つまり, 線分 DP, AH, OE は平行で,
OA＝AD だから,
OA:AD＝EH:HP＝1:1
よって, HP＝HE　…①
また, AH＝AH (共通)　…②
∠PHA＝∠EHA＝90°　…③
よって, ①～③より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので,
△HAP≡△HAE
問2
$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}:\overset{\frown}{\mathrm{EB}}=2:1$
問3
$27\mathrm{cm}^2$
解説
問2
∠EAH＝a とおく。
△HAP≡△HAE より, ∠PAH＝∠EAH＝a
また, ∠AHE＝∠OEF＝90° より, AH // OE だから,
∠OEA＝∠EAH＝a
OE＝OA より, ∠OAE＝∠OEA＝a
よって, 弧 CE:弧 EB＝∠CAE:∠EAB＝$2a:a=2:1$
問3
OE と BG の交点を K とする。
AB は直径より∠AGB＝90°
よって, 三平方の定理より,
$\mathrm{BG}=\sqrt{10^2-8^2}=6\mathrm{cm}$
△ABG において, OK // AG より,
OK:AG＝BO:BA
OK:8＝5:10
OK＝4cm
EK＝5－4＝1cm
∠EKB＝∠HGB＝90°
よって, (四角形 GABE)＝△ABG＋△EGB$=\frac{1}{2}\times8\times6+\frac{1}{2}\times6\times1=24+3=27\mathrm{cm}^2$

【問 6】

図1で，△ABC は AB＝AC，∠BAC が鋭角の二等辺三角形である。点 P は，辺 BC 上にある点で，頂点 B，頂点 C のいずれにも一致しない。頂点 A と点 P を結び，線分 AP を P の方向に延ばした直線と，頂点 B を通り辺 AC に平行な直線との交点を Q とする。
次の各問に答えよ。

（東京都　2011 年度）

図1



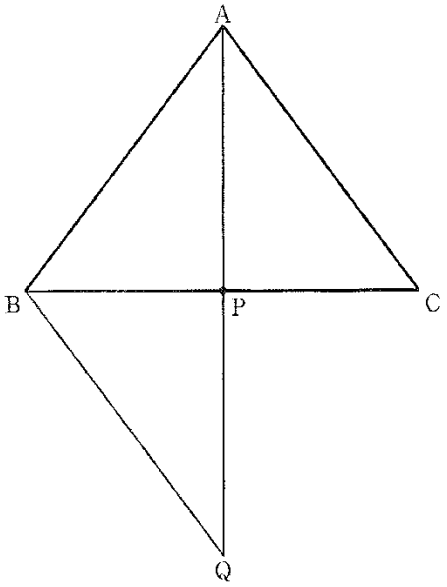
問1　図1において，∠BAC＝70°，△ABP の内角である∠BAP の大きさを a° とするとき，△BQP の内角である∠BPQ の大きさを a を用いた式で表せ。

問2　図2は，図1において，BP＝CP の場合を表している。
次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　△APC≡△QPB であることを証明せよ。

(2)　図2において，点 P を通り辺 AB に平行な直線を引き，辺 AC との交点を R とし，頂点 B と点 R を結んだ線分と，線分 AP との交点を S とした場合を考える。AB＝5 cm，BC＝6 cm のとき，△SBQ の面積は何 cm^2 か。

図2



解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">（　　）度</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>〔証明〕
△APC と△QPB において，

△APC≡△QPB</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1
$(a+55)$ 度
問2
(1)
〔証明〕
△APC と△QPB において,
仮定から, CP＝BP …①
AC // BQ より, 平行線の錯角は等しいから,
∠ACP＝∠QBP …②
対頂角は等しいから,
∠APC＝∠QPB …③
①～③より,
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから,
△APC≡△QPB
(2)
8cm^2
解説
問1
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形より,
$\angle ABP=\angle ABC=(180^\circ-70^\circ)\div 2=55^\circ$
△ABP の内角と外角の関係より,
$\angle BPQ=\angle BAP+\angle ABP=a+55\,(^\circ)$
問2
(2)
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形で, BP＝CP より, $\angle APB=90^\circ$
三平方の定理より, $AP=\sqrt{5^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=4\text{cm}$
PR // AB より, AS:SP＝AB:PR＝BC:PC＝2:1
よって, $SP=\frac{1}{3}AP=\frac{4}{3}\text{cm}$
△APC≡△QPB より, PQ＝PA＝4cm
したがって, $\triangle SBQ=\frac{1}{2}\times QS\times BP=\frac{1}{2}\times\left(4+\frac{4}{3}\right)\times 3=8\text{cm}^2$

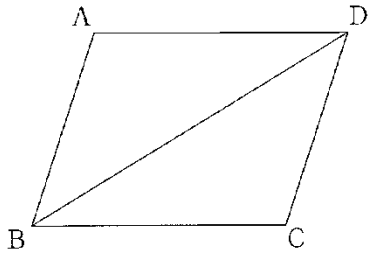
【問 7】

明子さんと直樹さんは，平行四辺形 ABCD について調べた。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（山梨県　2011 年度）

図1



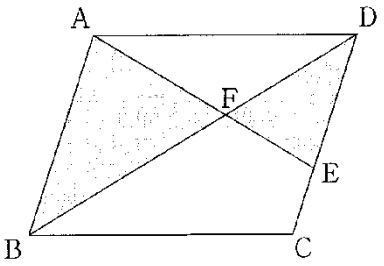
問1　2 人は，図1のように，点 B と D を結んで対角線をひいた。

△ABD≡△CDB となることを証明しなさい。

問2　明子さんは，図2のように，辺 CD 上に，CE:ED＝1:2 となる点 E をとり，線分 AE と対角線 BD の交点を F とした。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

図2



(1)　明子さんは，△FAB∽△FED であることが証明できた。

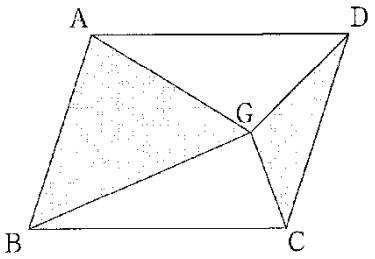
△FAB と△FED の面積の比を求めなさい。

(2)　次に，△FAB の面積を S としたとき，△FDA，四角形 FBCE の面積を，それぞれどのように表すことができるか考えた。△FDA，四角形 FBCE の面積を，それぞれ S を使って表しなさい。

問3　直樹さんは，図3のように，平行四辺形 ABCD の内部にあって辺上にない点 G をとって三角形を作ったとき，次の予想を立てた。

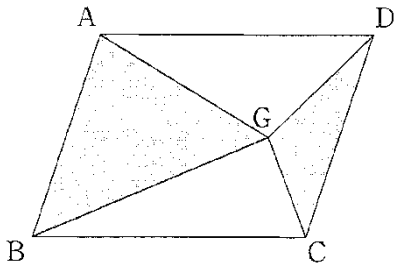
> 【直樹さんの予想】
> 点 G をどこにとっても，△GAB と△GCD の面積の和は，△GDA と△GBC の面積の和に等しい。

図3

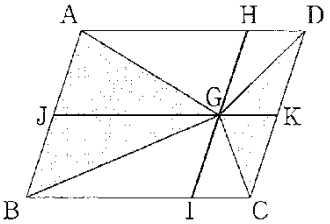


【直樹さんの予想】が正しい理由を説明しなさい。ただし，説明に必要となる点や線分などは，解答用紙の図にかき入れること。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="3">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>:</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>△FDA＝　　，四角形 FBCE＝</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="3">(説明に必要となる点や線分などは，図にかき入れること。)
 
</td></tr>
</table>

解答
問1
〔証明〕
△ABD と△CDB において,
四角形 ABCD は平行四辺形であるから,
AB＝CD (向かい合う辺は等しい)
AD＝CB (向かい合う辺は等しい)
BD＝DB (共通)
3 辺がそれぞれ等しいから,
△ABD≡△CDB
問2
(1) 9:4
(2)
△FDA＝$\frac{2}{3}$S,　　四角形 FBCE＝$\frac{11}{9}$S
問3



(説明に必要となる点や線分などは, 図にかき入れること。)
図のように点 G を通って辺 AB に平行な線分 HI をひき, また点 G を通って辺 AD に平行な線分 JK をひく。
このとき, 2 組の対辺が平行であることから, 四角形 AJGH, JBIG, GICK, HGKD は, 平行四辺形である。
問1の証明から, 平行四辺形の対角線は面積を 2 等分するので,
△GAJ＝△AGH　…①
△GJB＝△BIG　…②
△GCK＝△CGI　…③
△GKD＝△DHG　…④
が, 成り立つ。
①～④のそれぞれの各辺を加えると,
△GAJ＋△GJB＋△GCK＋△GKD
＝△AGH＋△BIG＋△CGI＋△DHG
となる。したがって,
△GAB＋△GCD＝△GDA＋△GBC
解説
問2
(1)
△FAB と△FED の相似比は, AB:ED＝3:2　よって, 面積の比は, △FAB:△FED＝3^2:2^2＝9:4
(2)
BF:DF＝AB:ED＝3:2 より, △AFD＝$\frac{2}{3}$△FAB＝$\frac{2}{3}$S
(1)より, △FED＝$\frac{4}{9}$S
△BCD＝△ABD＝S＋$\frac{2}{3}$S＝$\frac{5}{3}$S
よって四角形 FBCE＝△BCD－△FEC＝$\frac{5}{3}$S－$\frac{4}{9}$S＝$\frac{11}{9}$S

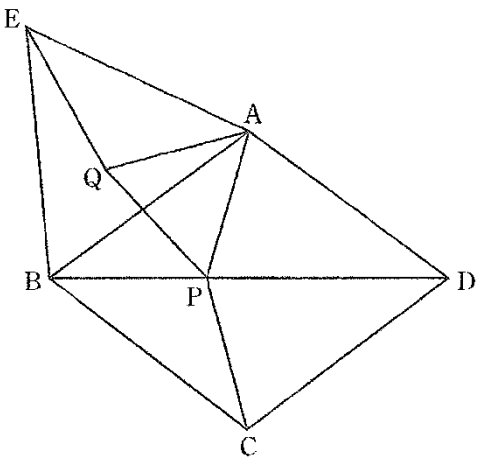
【問 8】

1 辺の長さが 5 cm のひし形 ABCD があり，対角線 BD＝8 cm である。図1のように，辺 AB を 1 辺とする正三角形 EBA をつくる。さらに，点 P を線分 BD 上にとって，PA を 1 辺とする正三角形 QPA をつくり，点 E と Q，点 P と C を直線で結ぶ。ただし，点 P は，点 B，D とは異なる位置にあり，点 Q は直線 PA について点 E と同じ側にあるものとする。

次の各問いに答えなさい。

（長野県　2011 年度）

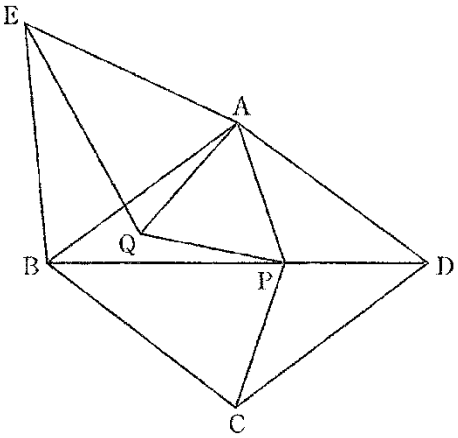
図1



問1　点 A と C を結んだ線分 AC の長さを求めなさい。

問2　図2のように，点 Q が，線分 AB 上になく，直線 AB について点 C と同じ側にあるとき，△AEQ≡△ABP を証明しなさい。

図2



問3　点 P を，∠BAP＝90° となるようにとるとき，△AEQ の面積を求めなさい。

問4　点 P を，EQ＋QP＋PC の長さが最小になるようにとるとき，EQ＋QP＋PC の長さを求めなさい。

解答欄

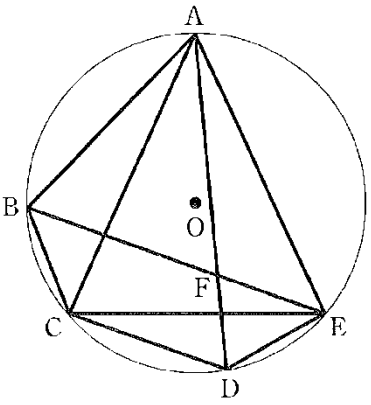
問1	cm
問2	
問3	cm^2
問4	cm

解答
問1　6cm
問2
△AEQ と△ABP において,
△EBA と△QPA は正三角形だから,
AE＝AB …①
AQ＝AP …②
また, ∠EAQ＝60° ＋∠BAQ
∠BAP＝60° ＋∠BAQ
であるから,
∠EAQ＝∠BAP…③
①, ②, ③より,
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので,
△AEQ≡△ABP
問3　$\frac{75}{8}$ cm^2
問4　$4+3\sqrt{3}$ cm
解説
問3
AC と BD の交点を H とする。ひし形の対角線の交点になるので,
AH⊥BD, BH＝DH＝$\frac{8}{2}$ ＝4cm
AH＝CH＝$\frac{6}{2}$ ＝3cm
HP＝x cm とおく。
三平方の定理より,
AP^2＝BP^2－AB^2＝$(4+x)^2-5^2$
AP^2＝AH^2＋HP^2＝3^2+x^2
これより, $(4+x)^2-5^2=3^2+x^2$
これを解いて, $x=\frac{9}{4}$ cm
よって, $\triangle AEQ=\triangle ABP=\frac{1}{2}\times BP\times AH=\frac{1}{2}\times\left(4+\frac{9}{4}\right)\times 3=\frac{75}{8}$ cm^2
問4
EQ＋QP＋PC が最短になるのは, 線分 EC 上に P と Q がくるとき。
このとき, PC＝PA＝QA＝QP, ∠AQP＝60° なので
△AQC は, ∠AQC＝60°
AQ:QC＝1:2 より, AQ:QC:CA＝1:2:$\sqrt{3}$ の直角三角形。
CA＝6 cm より, AQ＝$\frac{6}{\sqrt{3}}$ ＝$2\sqrt{3}$ cm
QP＋PC＝QC＝2AQ＝$2\times 2\sqrt{3}$ ＝$4\sqrt{3}$ cm
∠QAH＝∠AHD＝90° より, QA // BD
よって, ∠APH＝∠PAQ＝60°
よって, PH＝$\frac{AH}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ cm
△AEQ≡△ABP より EQ＝BP＝BH－PH＝$4-\sqrt{3}$ cm
したがって EQ＋QP＋PC＝$4-\sqrt{3}+4\sqrt{3}$ ＝$4+3\sqrt{3}$ cm

【問 9】

図で，5 点 A，B，C，D，E は円 O の円周上の点である。△ACE は AC＝AE の二等辺三角形であり，BE // CD である。また，線分 AD と BE との交点を F とする。

次の問1，問2に答えなさい。



（岐阜県　2011 年度）

問1　△ABC≡△AFE を証明しなさい。

問2　AB＝6 cm，BC＝4 cm，∠ABC＝120° のとき，四角形 BCDE の面積を求めなさい。

解答欄

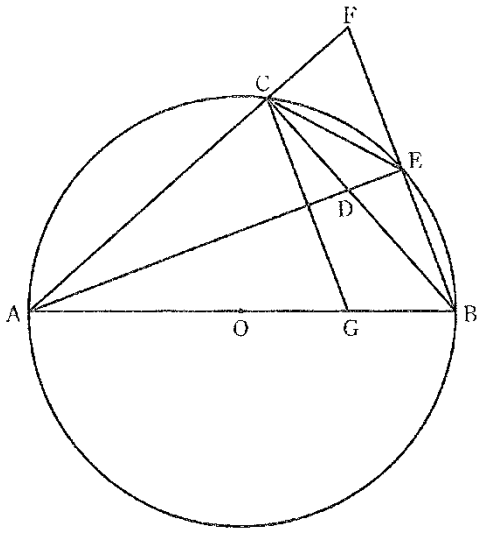
問1	〔証明〕
問2	cm^2

解答
問1
〔証明〕
△ABC と△AFE で,
仮定から,
AC＝AE　…①
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角だから,
∠ACB＝∠AEF　…②
$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角だから,
∠BAC＝∠BEC　…③
平行線の錯角だから,
∠BEC＝∠DCE　…④
$\overset{\frown}{DE}$に対する円周角だから,
∠DCE＝∠FAE　…⑤
③, ④, ⑤から,
∠BAC＝∠FAE　…⑥
①, ②, ⑥から,
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,
△ABC≡△AFE
問2　$16\sqrt{3}$ cm^2
解説
問1
△ABC と△AFE において,
仮定より, AC＝AE…①
弧 AB の円周角より, ∠ACB＝∠AEB＝∠AEF…②
弧 BC の円周角より, ∠BAC＝∠BEC　弧 DE の円周角より, ∠FAE＝∠DAE＝∠DCE
また, BE // CD より, 平行線の錯角は等しいので, ∠BEC＝∠DCE
よって, ∠BAC＝∠FAE…③
①, ②, ③より,
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ABC≡△AFE
問2
△ABC≡△AFE より, ∠AFE＝∠ABC＝120°
よって, ∠DFE＝180°－120°＝60°
CD// BE より, ∠CDA＝∠DFE＝60°
弧 CA に対する円周角より, ∠AEC＝∠ADC＝60°
よって, ∠ACE＝∠AEC＝60°
弧 AE に対する円周角より, ∠ABE＝∠ACE＝60°, ∠BCE＝120°－60°＝60°　△ACE は正三角形となる。
また, ∠ADE＝∠ABE＝60°, ∠DEF＝60°より,
△DEF は正三角形なので, DF＝FE＝BC＝4cm
同様に, ∠ABF＝60°, ∠AFB＝∠DFE＝60°より,
△ABF も正三角形なので, BF＝AF＝AB＝6cm　BE＝BF＋FE＝6＋4＝10cm
C, D から BE に垂線をひき, 交点をそれぞれ H, K とする。
$BH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times4=2$cm, $CH=\sqrt{3}\,BH=2\sqrt{3}$ cm
同様に, KF＝2 cm なので, CD＝HK＝10－2×2＝6cm
よって, 四角形 BCDE の面積は,
△CBE＋△ECD
$=\frac{1}{2}\times10\times2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}$
$=10\sqrt{3}+6\sqrt{3}$
$=16\sqrt{3}$ cm^2

【問 10】

図のように，線分 AB を直径とする円 O の円周上に点 C をとり，△ABC をつくる。∠CAB の二等分線と線分 BC，円 O との交点をそれぞれ D，E とする。線分 BE を延長した直線と線分 AC を延長した直線の交点を F とする。点 C を通り，線分 BE に平行な直線と線分 AB の交点を G とする。

このとき，あとの問いに答えなさい。ただし，点 E は点 A と異なる点とする。



（三重県　2011 年度）

問い　△ABE≡△AFE であることの証明を，次の [(ア)] ～ [(ウ)] のそれぞれにあてはまる適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

〔証　明〕

△ABE と△AFE において，

共通だから，

AE ＝AE …①

線分 AE は∠CAB の二等分線だから，

[(ア)] ＝∠FAE …②

∠AEB は半円の弧に対する円周角だから，

∠AEB ＝ [(イ)] °…③

3 点 B，E，F は一直線上にあるから，∠BEF ＝180° …④

③，④より，

∠AEF ＝ [(イ)] °…⑤

③，⑤より，

∠AEB ＝ ∠AEF …⑥

①，②，⑥より，

[(ウ)] がそれぞれ等しいので，

△ABE ≡△AFE

解答欄

(ア)	
(イ)	
(ウ)	

解答
(ア) ∠BAE
(イ) 90
(ウ) 1 辺とその両端の角

【問 11】

AB が直径で，点 O を中心とする半径 5 cm の円を M とし，点 P が円 M の上側の弧 AB 上を図1，図2，図3のように A から B まで移動する。弦 AP 上に AP⊥OT となる点 T をとり，点 O を中心とする半径 OT の円を N とすると，2 つの円で囲まれた図形 (◎の部分) ができる。

後の問1～問4に答えなさい。

（滋賀県　2011 年度）

問1　△OAT の面積が 5 cm^2 であるとき，△BAP の面積を求めなさい。

問2　円 N の面積と◎の部分の面積が等しくなるとき，∠APO の大きさを求めなさい。

問3　図2において，△OAT≡△OPT を証明しなさい。

問4　∠AOQ＝90°となる点 Q を円 M の下側の弧 AB 上にとる。図3のように，点 P が B に近づいて PQ＝8 cm になったとき，円 N の半径は何 cm か。求めなさい。

図1

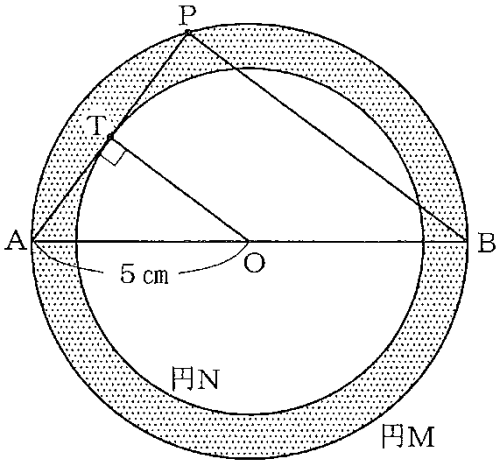


図2

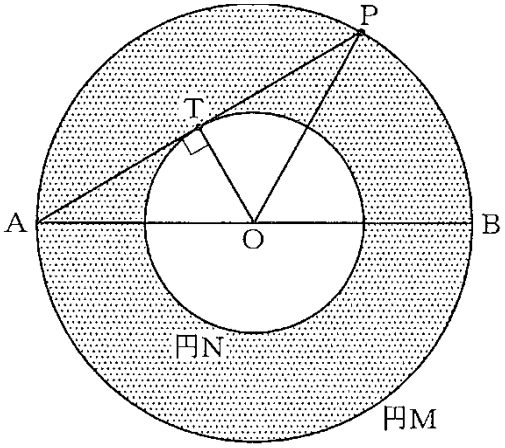
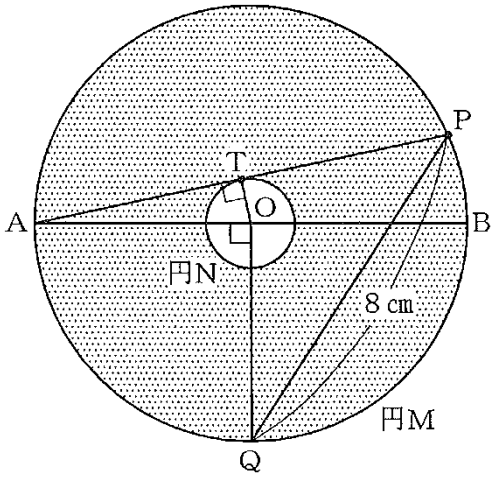


図3



解答欄

問1	cm^2
問2	度
問3	〔証明〕
問4	cm

解答

問1　20cm^2

問2　45 度

問3

〔証明〕

△OAT と△OPT で,

仮定から,

$\angle\text{OTA}=\angle\text{OTP}=90^\circ$　…①

OA＝OP　…②

共通な辺だから,

OT＝OT　…③

①, ②, ③から,

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので,

△OAT≡△OPT

問4　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{cm}$

解説

問1

△OAT と△BAP において, ∠A は共通で, $\angle\text{ATO}=\angle\text{APB}=90^\circ$ より,

2 組の角がそれぞれ等しいので, △OAT∽△BAP

AO:AB＝1:2 だから, $\triangle\text{OAT}:\triangle\text{BAP}=1^2:2^2$

よって, 5:△BAP＝1:4

$\triangle\text{BAP}=5\times4=20\text{cm}^2$

問2

OT＝r cm とすると, 円 N の面積と色のついた部分の面積が等しいことから,

$\pi\times5^2-\pi r^2=\pi r^2$　$2\pi r^2=25\pi$　$r^2=\dfrac{25}{2}$　$r>0$ より, $r=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\text{cm}$

△OPT で, $\angle\text{OTP}=90^\circ$, $\text{OT}:\text{OP}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}:5=1:\sqrt{2}$より

△OPT は辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ である直角二等辺三角形とわかるから, $\angle\text{APO}=\angle\text{TPO}=45^\circ$

問4

Q から AP に垂線をひき, 交点を H とする。

円周角の定理より, $\angle\text{APQ}=\dfrac{1}{2}\angle\text{AOQ}=\dfrac{1}{2}\times90^\circ=45^\circ$

△PQH は, $\text{QH}:\text{PH}:\text{QP}=1:1:\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形になるから

$\text{QH}=\text{PH}=\dfrac{\text{PQ}}{\sqrt{2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ cm

△AOH も直角二等辺三角形だから $\text{AQ}=\sqrt{2}\ \text{OA}=5\sqrt{2}$ cm

△AQH で三平方の定理より $\text{AH}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(4\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$ cm

よって $\text{AP}=\text{AH}+\text{PH}=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$ cm

△OAT≡△OPT より $\text{AT}=\text{PT}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\text{cm}$

△AOT で三平方の定理より $\text{OT}=\sqrt{5^2-\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{cm}$

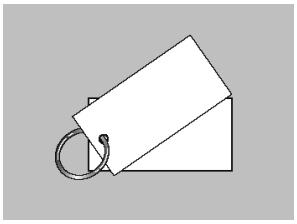
【問 12】

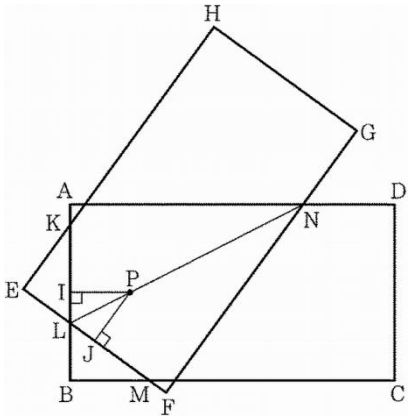
図1において，四角形 ABCD は AB＝6 cm，AD＝11 cm の長方形である。I は，辺 AB の中点である。P は，長方形 ABCD の内部の点であって，I を通り辺 AB に垂直な直線上にあり，PI＝2 cm である。このとき，AD // IP である。線分 PJ と四角形 EFGH とは，それぞれ線分 PI と長方形 ABCD とを点 P を中心として同じ向きに同じ角度だけ回転させたものである。このとき，PI＝PJ，長方形 ABCD≡長方形 EFGH である。G は，直線 EH について A と反対側にあって，直線 AD について C と反対側にある。K，L，M，N は，それぞれ辺 AB と辺 EH，辺 AB と辺 EF，辺 BC と辺 EF，辺 AD と辺 FG との交点である。このとき，P は直線 LN 上にある。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 2011 年度 後期）

図1





問1　P と C とを結んでできる線分 PC の長さを求めなさい。

問2　次の【証明】は，まず，△PIL≡△PJL であることを証明してから，IL＝JL であることを示し，その後，IL＝JL であることを用いて△KEL≡△MBL であることを証明したものである。次の【証　明】における⓪〔　〕から適しているものを一つ選び，記号を書きなさい。また，【証明】における ⓑ の部分に△KEL≡△MBL であることの証明を書き加え，【証明】を完成させなさい。

【証　明】
△PIL と△PJL において
PL＝PL (共通)　…㋐
PI＝PJ (仮定)　…㋑
∠PIL＝∠PJL＝90°　(仮定)　…㋒
㋐，㋑，㋒より，
⓪〔 ア　直角三角形の斜辺と他の 1 辺　　イ　直角三角形の斜辺と一つの鋭角　　ウ　2 辺とその間の角 〕
がそれぞれ等しいから
△PIL≡△PJL
よって　IL＝JL

ⓑ

問3　EL＝2 cm であるときの線分 AN の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

解答欄

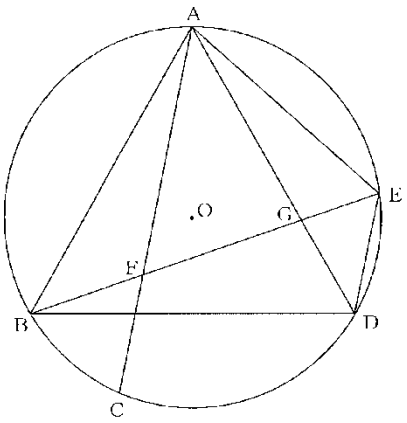
問1	cm	
問2	ⓐ	
	ⓑ	〔証明〕
問3	〔求め方〕 cm	

解答
問1　$3\sqrt{10}$ cm
問2
ⓐ ア
ⓑ
〔証明〕
△KEL と△MBL において
∠ELK＝∠BLM (対頂角)…㋐
長方形 ABCD≡長方形 EFGH だから
∠KEL＝∠MBL＝90° …㋑
$EJ=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}AB=BI$…㋒
IL＝JL だから, ㋒より
EL＝EJ－JL＝BI－IL＝BL…㋓
㋐, ㋑, ㋓より, 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△KEL≡△MBL
問3
〔求め方〕
EL＝2 (cm) だから　IL＝JL＝EJ－EL＝1cm
AN // IP だから　IP:AN＝LI:LA＝1:4
よって　AN＝4IP＝8cm
8cm
解説
問1
P から BC に垂線をひき, 交点を H とする。
$PM=\frac{6}{2}=3$cm　HC＝11－2＝9cm
△PHC で三平方の定理より $PC=\sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10}$ cm
問3
EL＝2 cm のとき, BL＝EL＝2 cm　LA＝6－2＝4 (cm), LI＝3－2＝1cm
IP // AN だから, 平行線と線分の比の定理より,
IP:AN＝LI:LA
2:AN＝1:4
AN＝8cm

【問 13】

図で，5 点 A，B，C，D，E は円 O の周上の点である。AB＝BD＝DA であり，$\overset{\frown}{BC}$と$\overset{\frown}{DE}$の長さは等しい。また，線分 BE と線分 AC，AD との交点をそれぞれ F，G とする。

各問いに答えよ。



（奈良県　2011 年度）

問1　△ABF≡△ADE であることを証明せよ。

問2　∠DBE＝a° とするとき，∠AGE の大きさを a を用いて表せ。

問3　AB＝6 cm，∠ABE＝45° のとき，線分 AE と線分 DE の長さの和を求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	
問3	cm

解答
問1
〔証明〕
△ABF と△ADE において
仮定から
AB＝AD　…①
1 つの円で, 等しい弧に対する円周角は等しいから
∠BAC＝∠DAE
すなわち　∠BAF＝∠DAE　…②
1 つの弧に対する円周角は等しいから
∠ABE＝∠ADE
すなわち　∠ABF＝∠ADE　…③
①, ②, ③より,
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABF≡△ADE
問2　$120^\circ - a^\circ$
問3　$3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ cm
解説
問2
AB＝BD＝DA より, △ABC は正三角形なので∠ADB＝60°
△ADG において, 内角と外角の関係より,
∠AGB＝∠DBE＋∠BDG＝$a^\circ + 60^\circ$
∠AGE＝$180^\circ - \angle AGB = 180^\circ - (a^\circ + 60^\circ) = 120^\circ - a^\circ$
問3
円周角の定理より,
∠AEF＝∠AEB＝∠ADB＝60°
∠ABE＝45° のとき, ∠DBE＝60－45°＝15°　∠DAE＝∠DBE＝15°
△ABF≡△ADE より,
∠BAF＝∠DAE＝15°　∠CAE＝$60^\circ - 15^\circ + 15^\circ = 60^\circ$
よって, △AFE は正三角形だから, AE＝FE
また, △ABF≡△ADE より, DE＝BF
よって AE＋DE＝FE＋BF＝BE
A から BE に垂線をひき, 交点を H とすると
∠AHB＝90°, ∠ABH＝45° より,
△ABH において $AH = BH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ cm
また∠AHE＝90°, ∠AEH＝60° より,
△AEH において $EH = \frac{AH}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ cm
これより $AE + DE = BE = BH + EH = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ cm

【問 14】

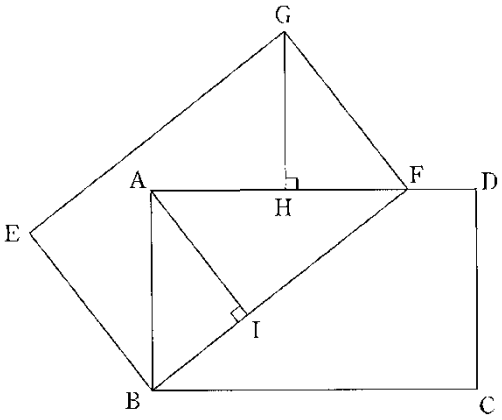
長方形 ABCD と，その長方形を点 B を中心として反時計回りに回転させてできる合同な長方形 EBFG を考える。ただし，その長方形 ABCD は辺 BC が辺 AB よりも長いものとする。

次の問1～問3に答えなさい。

（島根県 2011 年度）

問1 図1のように，点 F が辺 AD 上にあるときを考える。辺 AD 上に点 H を，辺 BF 上に点 I を，それぞれ GH⊥AD，AI⊥BF となるようにとる。このとき，△ABI≡△GFH であることを証明しなさい。

図1



問2 図2のように，辺 BF 上に点 J を AJ⊥BF となるようにとる。さらに，図3のように，AB＝3 cm，∠CBF＝60° とし，辺 AB 上に点 K を JK⊥AB となるようにとる。このとき，JK の長さを求めなさい。

図2

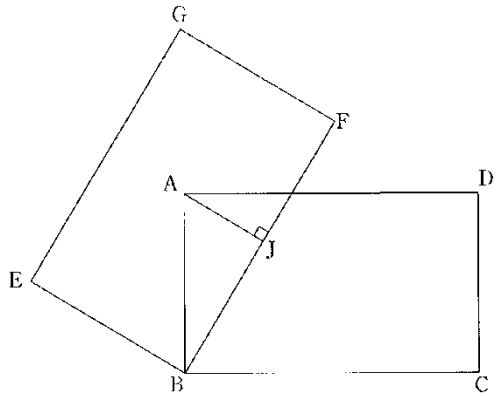
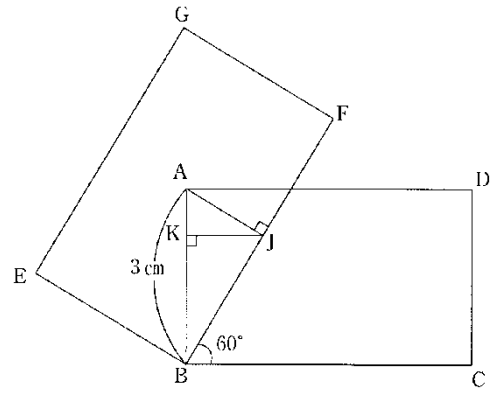
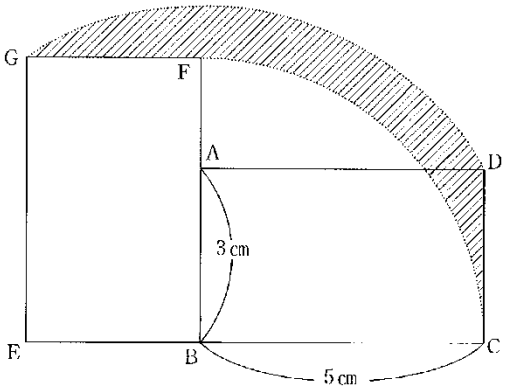


図3



問3 図4の長方形 EBFG は，長方形 ABCD を点 B を中心として反時計回りに 90° 回転させてできたものである。AB＝3 cm，BC＝5 cm のとき，線分 CD が通過してできる部分（図4の斜線部分）の面積を求めなさい。

図4



解答欄

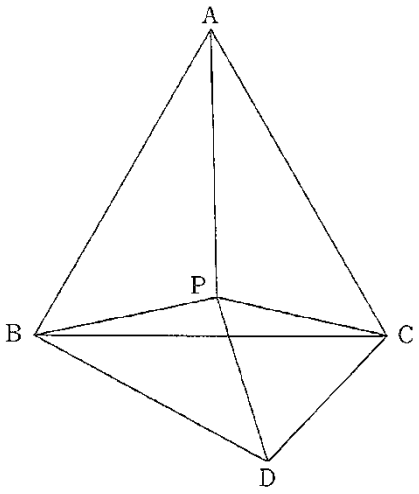
問1	〔証明〕
問2	cm
問3	cm^2

解答
問1
〔証明〕
△ABI と△GFH において
仮定より
∠AIB＝∠GHF＝90°　…①
四角形 ABCD と四角形 EBFG は合同な長方形であるから
AB＝GF　…②
AD // BC より
∠CBF＝∠AFB　…③
また,
∠ABI＝90°－∠CBF　…④
∠GFH＝90°－∠AFB　…⑤
③, ④, ⑤より∠ABI＝∠GFH…⑥
①, ②, ⑥より
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので
△ABI≡△GFH
問2　$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm
問3　$\frac{9}{4}\pi$ cm^2
解説
問2
(2)
BF と AD の交点を P とする。
AD // BC より, 錯角が等しいので, ∠APB＝∠CBF＝60°
∠BAP＝90°より, AP＝$\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ (cm), BP＝2AP＝$2\sqrt{3}$ cm
∠AJP＝90°, ∠APJ＝60°より, JP＝$\frac{AP}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
BJ＝$2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$
JK // PA だから,
JK:PA＝BJ:BP
JK: $\sqrt{3}$ ＝$\frac{3\sqrt{3}}{2}:2\sqrt{3}$
$2\sqrt{3}$ JK＝$\frac{9}{2}$
JK＝$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm
問3
斜線部分の面積は, おうぎ形 BGD＋△BCD－おうぎ形 BCF－△BFG
△BCD≡△BFG だから
求める面積は, おうぎ形 BGD－おうぎ形 BCF
三平方の定理より BD＝$\sqrt{5^2+3^2}$ ＝$\sqrt{34}$ cm
よって面積は$\pi\times(\sqrt{34})^2\times\frac{90}{360}-\pi\times5^2\times\frac{90}{360}=\frac{34\pi}{4}-\frac{25\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$ cm^2

【問 15】

図のように，正三角形 ABC の内部に点 P をとり，線分 CP を 1 辺とする正三角形 CPD を辺 PD が辺 BC と交わるようにつくる。点 A と点 P，点 B と点 D，点 B と点 P をそれぞれ結ぶ。このとき，次の問1，問2では指示に従って答え，問3では［　　］に適当な数を書き入れなさい。

（岡山県　2011 年度）



問1　△APC≡△BDC　を証明しなさい。

問2　$PB^2+PC^2=PA^2$ が成り立つとき，∠BPD＝90° であることを次のように証明した。［　　］に当てはまる最も適当な記号または式は，次の(1)～(7)のうちではどれですか。

証明

△APC ≡ △BDC なので

PA＝ (ア) …[Ⅰ]

△CPD は正三角形なので

PC＝ (イ) …[Ⅱ]

[Ⅰ]，[Ⅱ]と $PB^2+PC^2=PA^2$ から，

(ウ)

したがって，三平方の定理の逆から，

∠BPD＝90°

(1)　BC
(2)　PD
(3)　DB
(4)　BA
(5)　$PB^2=PD^2+DB^2$
(6)　$PB^2+PD^2=DB^2$
(7)　$PB^2+BA^2=PA^2$

問3　$PB^2+PC^2=PA^2$ が成り立ち，さらに PB＝PC＝2 cm であるとき，

PA＝ (エ) cm，∠DCB＝ (オ) °　であり，BC＝ (カ) cm である。

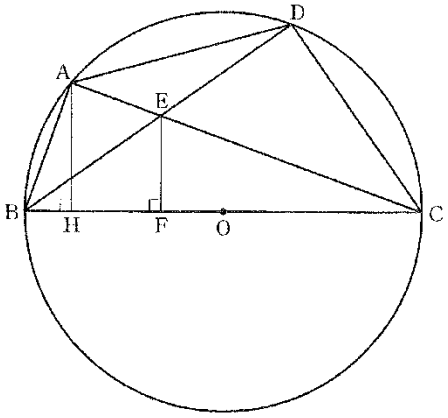
解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問3	(エ)	cm
	(オ)	°
	(カ)	cm

解答
問1
〔証明〕
△APC と△BDC において
△ABC と△CPD は正三角形であるから
AC＝BC …(1)
CP＝CD …(2)
∠ACB＝∠PCD＝60° …(3)
(3)から,
∠ACP＝∠ACB－∠PCB
＝60° －∠PCB …(4)
∠BCD＝∠PCD－∠PCB
＝60° －∠PCB …(5)
(4), (5)から, ∠ACP＝∠BCD …(6)
(1), (2), (6)から,
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△APC≡△BDC
問2
(ア) 3　(イ) 2　(ウ) 6
問3
(エ) $2\sqrt{2}$ cm　(オ) 45°　(カ) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ cm
解説
問3
$PB^2+PC^2=PA^2$ のとき,
∠BPD＝90° PB＝PC＝PD より, △BPD は PB＝PD の直角二等辺三角形になるから
BD＝$\sqrt{2}$ PB＝$2\sqrt{2}$ cm
△APC≡△BDC より,
PA＝DB＝$2\sqrt{2}$ cm…(エ)
PB＝PC, ∠BPC＝90° ＋60° ＝150° より, ∠PCB＝(180° －150°)÷2＝15°
よって, ∠DCB＝60° —15° ＝45° …(オ)
D から BC に垂線をひき, 交点を H とすると, ∠DCH＝45° , ∠DHC＝90° より,
$CH=DH=\frac{CD}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ cm
∠BDH＝∠BDP＋∠PDC－∠CDH＝45° ＋60° －45° ＝60° ,
∠DHB＝90° より BH＝$\sqrt{3}$ DH＝$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$ cm
よって BC＝CH＋BH＝$\sqrt{2}+\sqrt{6}$ cm…(カ)

【問 16】

図のように，円 O の周上に 4 点 A，B，C，D があり，AD＝CD とする。また，線分 AC と線分 BD の交点を E とし，2 点 A，E から線分 BC にひいた垂線と線分 BC との交点をそれぞれ H，F とする。



このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（佐賀県 2011 年度 後期）

問1　∠BAC の大きさを求めなさい。

問2　△ABE≡△FBE であることを証明しなさい。

問3　AB＝$3\sqrt{2}$ cm，AC＝12 cm，BH＝$\sqrt{2}$ cm とする。

このとき，次の(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(1)　AH の長さを求めなさい。

(2)　AE の長さを求めなさい。

(3)　四角形 ABCD の面積は，△ABE の面積の何倍か，求めなさい。

解答欄

問1	度	
問2		
問3	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	倍

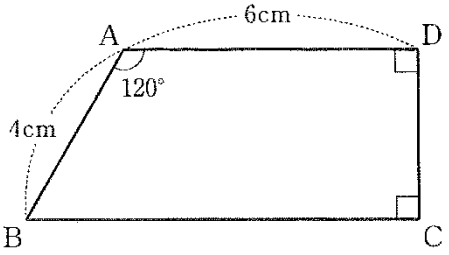
解答
問1 90 度
問2
△ABE と△FBE において,
BE は共通だから
BE＝BE …①
BC は円 O の直径で,
BC⊥EF だから
∠BAE＝∠BFE＝90° …②
さらに, AD＝CD より$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$となり, 等しい弧に対する円周角の大きさは等しいので
∠ABE＝∠FBE …③
①, ②, ③より,
直角三角形の, 斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△FBE
問3
(1) 4cm (2) 3cm (3) 8 倍
解説
問3
(3)
BE＝$\sqrt{3^2+(3\sqrt{2})^2}$ ＝$3\sqrt{3}$ cm
△ABE∽△DCE で
BE:CE＝$3\sqrt{3}$:9＝$\sqrt{3}$:3
△ABE:△DCE＝$(\sqrt{3})^2$:3^2＝3:9＝1:3 より
△DCE＝3△ABE
AE:EC＝3:9＝1:3 より, △BCE＝3△ABE
よって, △DCE＝△BCE より, BE＝DE
△AED:△ABE＝DE:BE＝1:1
△AED＝△ABE
よって, 四角形 ABCD＝(1＋1＋3＋3)△ABE
＝8△ABE
よって 8 倍

【問 17】

図1のように, AD // BC の台形 ABCD がある。AB＝4 cm, AD＝6 cm, ∠BAD＝120°, ∠BCD＝∠ADC＝90°のとき, 次の問いに答えなさい。

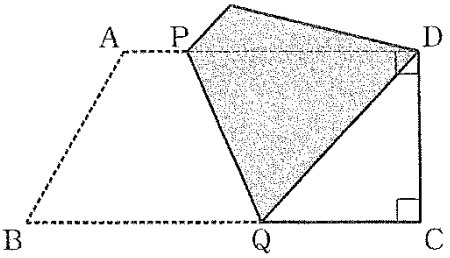
（長崎県　2011 年度）

図1



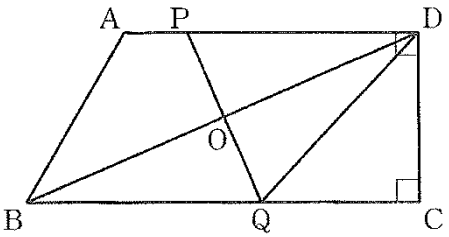
問1　∠ABC の大きさは何度か。

図2



問2　辺 BC の長さは何 cm か。

図3



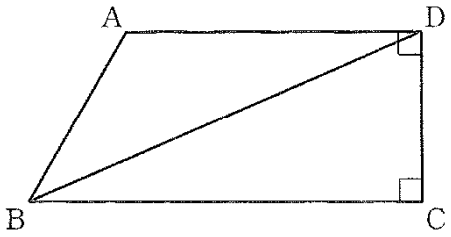
問3　図2のように, 図1の台形 ABCD を頂点 B が頂点 D に重なるように折り返すと, 折り目は辺 AD 上の点 P と辺 BC 上の点 Q とを結ぶ線分 PQ となった。この折り返しをもとにもどして, 図3のように線分 BD と線分 PQ との交点を O とする。このとき, 次の(1)～(3)に答えよ。

(1)　直線 PQ を定規とコンパスを用いて解答用紙の図に作図せよ。ただし, 作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

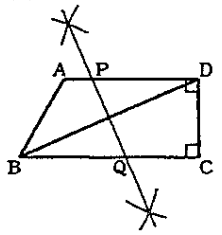
(2)　△ODP≡△OBQ であることを証明せよ。

(3)　三角形 DPQ の面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	∠ABC＝　　°	
問2	cm	
問3	(1)	図 
	(2)	
	(3)	cm^2

解答
問1　∠ABC＝60°
問2　8 cm
問3
(1)



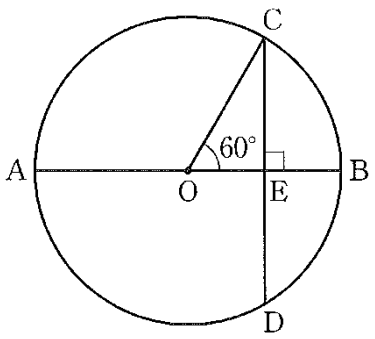
(2)
△ODP と△OBQ において,
OD＝OB (点 O は線分 BD の中点)　…①
∠DOP＝∠BOQ (対項角)　…②
∠ODP＝∠OBQ (平行線の錯角)　…③
①, ②, ③より,
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,
△ODP≡△OBQ
(3)　$\frac{19\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$
解説
問3
(3)
DP＝BQ＝DQ＝x cm とする。
QC＝BC－BQ＝8－x cm
$\text{DC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{AB}=2\sqrt{3}\text{ cm}$
△DQC において, 三平方の定理より
$\text{DQ}^2=\text{QC}^2+\text{DC}^2$
$x^2=(8-x)^2+(2\sqrt{3})^2$
$x=\frac{19}{4}\text{cm}$
よって, $\triangle\text{DPQ}=\frac{1}{2}\times\text{DP}\times\text{DC}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{19}{4}\times2\sqrt{3}$
$=\frac{19\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$

【問 18】

図1のように，線分 AB を直径とする円 O がある。この円周上に点 C をとり，弦 CD は点 E で直径 AB と垂直に交わっている。AB＝8 cm，∠COB＝60°とするとき，次の問1～問3に答えなさい。

（宮崎県　2011 年度）

図1

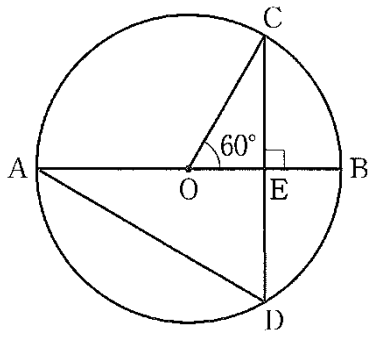


問1　図1において，弦 AC，BC をひく。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　∠CAB の大きさを求めなさい。

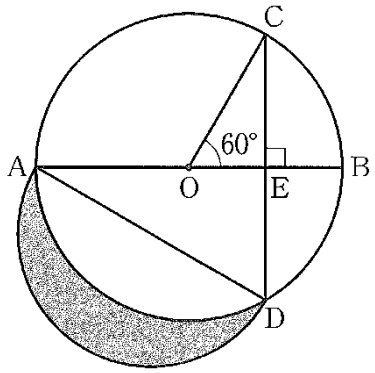
図2



(2)　△COE≡△CBE であることを証明しなさい。

問2　図2は，図1において，弦 AD をひいたものである。このとき，弦 AD の長さを求めなさい。

図3



問3　図3は，図2において，弦 AD を直径とする半円をかいたものである。このとき，色をつけた部分（　　）の面積を求めなさい。ただし，円周率はπとする。

解答欄

問1	(1)	∠CAB＝　　度
	(2)	〔証明〕
問2		cm
問3		cm^2

解答
問1
(1) ∠CAB＝30 度
(2)
〔証明〕
△COE と△CBE で
CE＝CE (共通) …①
∠CEO＝∠CEB＝90° …②
∠COB＝60° から
∠COA＝120° なので
$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角から
∠CBA＝∠CBE＝60°
よって∠COE＝∠CBE …③
三角形の 3 つの内角の和が
180° であることと, ②, ③から
∠OCE＝∠BCE …④
①, ②, ④から
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△COE≡△CBE
問2 $4\sqrt{3}$ cm
問3 $4\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\,\mathrm{cm}^2$
解説
問3
色をつけた部分の面積は
直径を AD＝ $4\sqrt{3}$ cm, 半径を $2\sqrt{3}$ cm とする半円と
底辺を OA＝4 cm, 高さを ED＝ $\frac{AD}{2}=2\sqrt{3}$ cm とする△OAD をたしたものから,
中心角∠AOD＝120° , 半径 OA＝4 cm のおうぎ形の面積をひいたものになる。
よって, 求める面積は

$$\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}-\pi\times4^2\times\frac{120}{360}$$

$$=6\pi+4\sqrt{3}-\frac{16}{3}\pi$$

$$=4\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\,\mathrm{cm}^2$$