

9. 式の証明の問題（2012 年度出題）

【問1】

連続する3つの整数の性質について、次のように説明するとき、 ア ～ ウ に当てはまる式を、 エ に当てはまる数を、それぞれ書きなさい。

（北海道 2012年度）

（説明）

連続する 3 つの整数のうち、真ん中の整数を n とすると、

もっとも大きい整数は ア

もっとも小さい整数は イ

と表すことができる。

もっとも大きい整数の 2 乗からもっとも小さい整数の 2 乗をひくと、

$$(\text{ア})^2 - (\text{イ})^2 = \text{ウ}$$

となる。

よって、連続する 3 つの整数には、もっとも大きい整数の 2 乗からもっとも小さい整数の 2 乗をひいた値が、真ん中の整数の エ 倍となる性質がある。

解答欄

ア	
イ	
ウ	
エ	

解答

ア $n+1$

イ $n-1$

ウ $4n$

エ 4

【問2】

図1は、1辺の長さが a の正方形をすきまなくしきつめた平面の一部である。

図2は、1辺の長さが a の正三角形をすきまなくしきつめた平面の一部である。

(福島県 2012年度)

図1

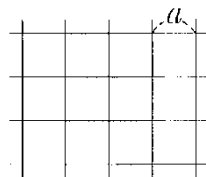
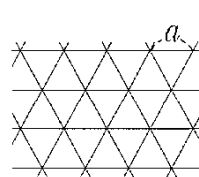


図2



- (1) 図3は、図1の平面上に、正方形の頂点を中心とする半径 a の円を14個かき、各辺が円に接する長方形ABCDをかいたものである。

長方形ABCDの面積を S とすると、 S を a を使って表しなさい。

図3

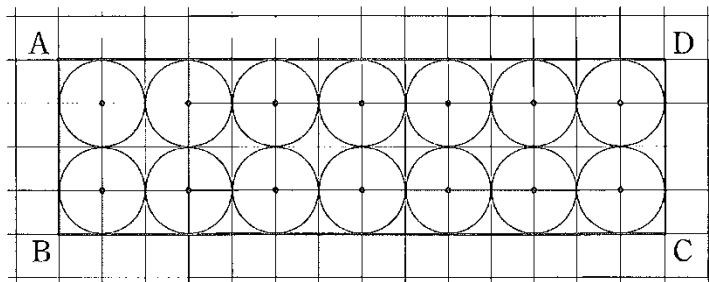
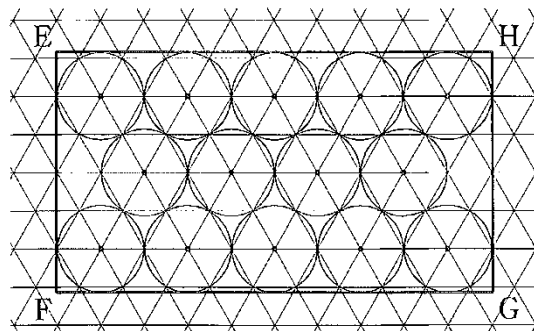


図4



- (2) 図4は、図2の平面上に、正三角形の頂点を中心とする半径 a の円を14個かき、各辺が円に接する長方形EFGHをかいたものである。

長方形EFGHの面積を T とすると、 T と(1)で求めた S を比べると、どのようなことがいえるか。次のア～ウの中から正しいものを1つ選び、解答用紙の()の中にも書きなさい。また、選んだ理由を説明しなさい。

ア T は S より大きい。

イ T は S と等しい。

ウ T は S より小さい。

解答欄

(1)	$S=$
(2)	() [理由]

解答

(1) $S=56a^2$

(2)

(ウ)

[理由]

$T=EF\times EH$

$EF=2a+2\sqrt{3}a$ $EH=10a$ と表されるから

$T=(2a+2\sqrt{3}a)\times 10a$

$=20a^2+20\sqrt{3}a^2$

$S=56a^2=20a^2+36a^2$ だから

$20\sqrt{3}a^2$ と $36a^2$ の大きさを比べればよい。

$(20\sqrt{3})^2=20^2\times 3=1200$ $36^2=1296$

$1200<1296$ であるから

$\sqrt{1200}<\sqrt{1296}$

すなわち $20\sqrt{3}<36$ より $20\sqrt{3}a^2<36a^2$

したがって T は S より小さい。

【問3】

大小2つのさいころを同時に投げて、大きいさいころの出た目の数を m 、小さいさいころの出た目の数を n とする。このとき、 $PQ=m$ cm, $PS=n$ cmである長方形PQRSを作る。

初めに長方形を図1のように頂点Pを原点Oに重ね、辺PQを x 軸、辺PSを y 軸にそれぞれ重ねて置く。この長方形を、図2のように右下の頂点Qを中心に矢印の向きに回転させ、図3のように辺QRを x 軸に重ねる。次に、長方形を右下の頂点Rを中心に同じ向きに回転させ、図4のように辺RSを x 軸に重ねる。以下同じように、長方形を右下の頂点を中心に回転させていく。ただし、座標軸の1目もりを1 cmとする。

また、図1の状態から図3の状態になったとき、長方形を1回「ころがした」ということにする。図4は長方形を2回「ころがした」ときの図である。

このとき、次の問1、問2、問3、問4に答えなさい。

(栃木県 2012年度)

図1

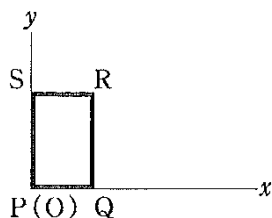


図2

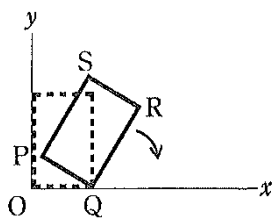


図3

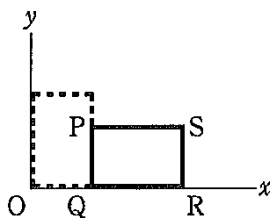
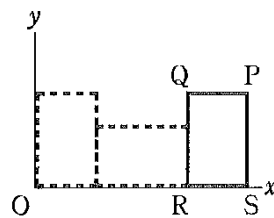


図4

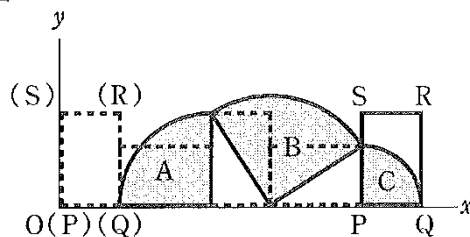


問1 大きいさいころの出た目の数が3、小さいさいころの出た目の数が5のとき、長方形を1回「ころがした」ときの頂点Sの座標を求めなさい。

問2 長方形を2回「ころがした」ときの頂点Pの y 座標が5であるとき、大小2つのさいころの目の出方は何通りあるか。

問3 長方形を4回「ころがした」ときの頂点Qが動いた^{あと}跡は、図5のような3つのおうぎ形A、B、Cの弧になる。このとき、2つのおうぎ形A、Cの面積の和を T cm²、おうぎ形Bの面積を U cm²とすると、 $T=U$ となることを m 、 n を用いて証明なさい。ただし、円周率は π とする。

図5



問4 長方形を40回「ころがした」とき、頂点Qの x 座標が185以上になる確率を求めなさい。

解答欄

問1	(,)
問2	通り
問3	〔証明〕
問4	

解答

問1 (8, 3)

問2 6通り

問3

〔証明〕

おうぎ形 A, B, C の中心角はすべて 90° である。

A の半径は n cm だから A の面積は $\frac{1}{4} \pi n^2 \text{ cm}^2$

C の半径は m cm だから C の面積は $\frac{1}{4} \pi m^2 \text{ cm}^2$

$$\text{よって } T = \frac{1}{4} \pi n^2 + \frac{1}{4} \pi m^2$$

B の半径を r cm とすると $U = \frac{1}{4} \pi r^2$

ここで r は長方形の対角線の長さだから

三平方の定理より $r^2 = m^2 + n^2$

$$\text{よって } U = \frac{1}{4} \pi (m^2 + n^2) = \frac{1}{4} \pi n^2 + \frac{1}{4} \pi m^2$$

したがって $T = U$

問4 $\frac{2}{9}$

解説

問2

長方形を2回ころがしたとき点Pのy座標は n と等しくなるので小さいさいころの出た目の数が5ということになる。
よって6通り。

問3

おうぎ形A, Cの半径はそれぞれ n cm, m cmで中心角は 90° だから

$$T = \pi \times n^2 \times \frac{90}{360} + \pi \times m^2 \times \frac{90}{360} = \frac{1}{4} \pi m^2 + \frac{1}{4} \pi n^2 \text{ cm}^2 \cdots \textcircled{1}$$

おうぎ形Bの半径を r cmとすると

この半径は長方形PQRSの対角線だから

三平方の定理より $r^2 = m^2 + n^2$

また中心角は90度だから

$$U = \pi \times r^2 \times \frac{90}{360} = \pi \times (m^2 + n^2) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pi m^2 + \frac{1}{4} \pi n^2 \text{ cm}^2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より $T = U$

問4

点 Q は長方形を 4 回ころがすごとに x 軸上にくる。

$40 \div 4 = 10$ より 40 回ころがしたときの x 座標は

$$m + (2m + 2n) \times 10 = 21m + 20n$$

この値が 185 以上より

$21m + 20n \geq 185$ となるのは

$(m, n) = (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$ の 8 通り。

$$\text{よって求める確率は } \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

【問 4】

ある中学校で、Sさんが作った問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

(東京都 2012 年度)

[Sさんが作った問題]

2 けたの自然数 P において、十の位の数 a 、一の位の数 b とする。 a と b を足した数を 9 で割ったときの余りを n とする。

$n=0$ となる 2 けたの自然数 P は、全部で何個あるか考えてみよう。

問1 [Sさんが作った問題]で、 $n=0$ となる 2 けたの自然数 P は、全部で何個あるか。

先生は、[Sさんが作った問題]をもとにして、次の問題を作った。

[先生が作った問題]

2 けたの自然数 P において、十の位の数 a 、一の位の数 b とする。 a と b を足した数を Q とする。

P と Q をそれぞれ 9 で割ったときの余りについて考える。

例えば、 $P=39$ のとき、 39 を 9 で割ったときの商は 4、余りは 3 である。このとき、 $Q=3+9=12$ となるから、 12 を 9 で割ったときの商は 1、余りが 3 となり、 P と Q をそれぞれ 9 で割ったときの余りが等しくなる。

また、 $P=62$ のとき、 62 を 9 で割ったときの商は 6、余りは 8 である。このとき、 $Q=6+2=8$ となるから、 8 を 9 で割ったときの商は 0、余りが 8 となり、 P と Q をそれぞれ 9 で割ったときの余りが等しくなる。

2 けたの自然数 P を 9 で割ったときの商を m 、余りを n とするとき、 Q を 9 で割ったときの余りが n となることを確かめなさい。

問2 [先生が作った問題]で、 P を、 a と b を用いた式と、 m と n を用いた式の 2 通りの方法で表し、 Q を 9 で割ったときの余りが n となることを証明せよ。

解答欄

問1	個
問2	〔証明〕 P を, a と b を用いた式と, m と n を用いた式の 2 通りの方法で表すと, Q を 9 で割ったときの余りは n である。

解答

問1 10 個

問2

〔証明〕

Pを a と b を用いた式と

m と n を用いた式の 2 通りの方法で表すと

$$P = 10a + b$$

$$P = 9m + n$$

これらより $10a+b=9m+n$

よって $b=9m+n-10a\cdots\textcircled{1}$

また Q を a と b を用いて表すと

$$Q = a + b \cdots \textcircled{2}$$

①を②に代入すると

$$Q = a + (9m + n - 10a)$$

$$= 9(m - a) + n$$

よって $9(m-a)$ は, 9 の倍数だから

Q を 9 で割ったときの余りは n である。

解説

問1

1 から 99 までの数のうち 9 で割り切れる数は $99 \div 9 = 11$ 個。

1 から 9 までの数のうち 9 で割り切れる数は $9 \div 9 = 1$ 個

よって求める個数は $11 - 1 = 10$ 個

【問 5】

明子さんと直樹さんは、4 けたの自然数について調べた。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(山梨県 2012 年度)

問1 明子さんは、4 けたの自然数が 2 の倍数であるかどうかを見分ける方法を次のように説明した。説明を読んで、(ア) に当てはまることばを書きなさい。

【明子さんの説明】

4 けたの自然数は、千の位の数 a 、百の位の数 b 、十の位の数 c 、一の位の数 d とすると、 $1000a + 100b + 10c + d$ と表すことができる。

この式は、

$$1000a + 100b + 10c + d = 2(500a + 50b + 5c) + d$$

と、変形できる。

したがって、4 けたの自然数は、一の位の数 (ア) であれば、2 で割り切れるので 2 の倍数といえる。よって、一の位の数 (ア) であるかどうかを調べればよい。

問2 直樹さんは、明子さんの説明をもとに、 $1000a + 100b + 10c + d$ を次のように変形すると、3 の倍数であるかどうかを見分けることができると考えた。

【直樹さんが考えた式】

$$1000a + 100b + 10c + d = 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)$$

このとき、次の(1)、(2)に答えなさい。

(1) 直樹さんが考えた式から、4 けたの自然数が 3 の倍数であるかどうかを見分ける方法を説明しなさい。

(2) 下の に数を当てはめて 4 けたの自然数をつくるとき、この 4 けたの自然数が 3 の倍数となるためには、どんな数が当てはまるか。 に当てはまる数をすべて書きなさい。

2 12

問3 さらに 2 人は、4 けたの自然数が 4 の倍数であるかどうかを見分ける方法を次のように考えた。

【見分ける方法】	
4 けたの自然数は、1204, 3716, 5580, 9300 のように下 2 けた (04, 16, 80, 00) の数が 4 の倍数であれば、4 で割り切れるので 4 の倍数といえる。よって、下 2 けたの数が 4 の倍数となっているかどうかを調べればよい。	

このとき、次の(1), (2)に答えなさい。

(1) 2 人が考えた見分ける方法を表す式を、 $1000a+100b+10c+d$ を変形して示しなさい。

(2) 1100 以下の 4 けたの自然数のうち、4 の倍数は全部で何個あるか答えなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	
	(2)	
問3	(1)	$1000a+100b+10c+d$ =
	(2)	個

解答

問1 偶数

問2

(1) 各位の数の和が 3 の倍数であるかどうかを調べればよい。

(2) 1, 4, 7

問3

(1)

$$1000a+100b+10c+d$$
$$=4(250a+25b)+10c+d$$

(2) 26 個

解説

問3

(2)

1100 以下の 4 けたの自然数とは 1000 以上 1100 以下の自然数である。

$100 \div 4 = 25$ より 4 の倍数は $25 + 1 = 26$ 個ある。

【問 6】

次の各問いに答えなさい。

(長野県 2012年度)

図

問1 図は、一の位の数が等しく、十の位の数之和が 10 である 2 けたの自然数のかけ算を表したものである。理香さんは、図のような 2 数の積を、簡単に計算できる方法について、次のように考えた。

73	$\begin{array}{ c } \hline \text{い} \\ \hline \end{array}$
$\times 33$	$\times \begin{array}{ c } \hline \text{う} \\ \hline \end{array}$
2409	2349

〔理香さんが考えた方法〕

一の位の数之和が 10 である 2 けたの自然数の積は、次の $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$ ～ $\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}$ の手順で簡単に求めることができる。

$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$ かける数とかけられる数の、一の位の数とかけられる。

$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$ で求めた数を、その末位が一の位にくるように書く。ただし、 $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$ で求めた数が 1 けたの数になる場合は、十の位の数に 0 をする。

$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|c|} \hline \text{あ} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$ で求めた数を、その末位が百の位にくるように書く。

(1) 理香さんが考えた方法が正しくなるように、 $\begin{array}{|c|} \hline \text{あ} \\ \hline \end{array}$ に当てはまる適切なものを、次のア～エから 1 つ選び、記号を書きなさい。

- $\left(\begin{array}{l} \text{ア} \text{ かけられる数の十の位と一の位の数之和に、かける数の一の位の数とかけられる。} \\ \text{イ} \text{ かけられる数の十の位と一の位の数之和に、かける数の十の位の数とかけられる。} \\ \text{ウ} \text{ かける数とかけられる数の、十の位の数之和に、かけられる数の一の位の数とかけられる。} \\ \text{エ} \text{ かける数とかけられる数の、十の位の数之和に、かけられる数の十の位の数とかけられる。} \end{array} \right)$

(2) 図の $\begin{array}{|c|} \hline \text{い} \\ \hline \end{array}$ と $\begin{array}{|c|} \hline \text{う} \\ \hline \end{array}$ に当てはまる数を求めなさい。ただし、 $\begin{array}{|c|} \hline \text{い} \\ \hline \end{array} > \begin{array}{|c|} \hline \text{う} \\ \hline \end{array}$ とする。

(3) 和也さんは、理香さんが考えた方法が正しいことを、文字を使って次のように説明した。和也さんの説明が正しくなるように、 $\begin{array}{|c|} \hline \text{え} \\ \hline \end{array}$ ～ $\begin{array}{|c|} \hline \text{か} \\ \hline \end{array}$ に当てはまる式を書きなさい。

〔和也さんの説明〕

かけられる数の十の位の数之和を a 、一の位の数之和を b 、かける数の十の位の数之和を c 、一の位の数之和を b とすると、かけられる数とかけられる数は、それぞれ、 $10a+b$ 、 $10c+b$ と表される。

このとき、この 2 数の積は、

$$(10a+b)(10c+b)=100ac+10ab+10bc+b^2$$

また、 $\begin{array}{|c|} \hline \text{え} \\ \hline \end{array} = 10$ なので、

$$(10a+b)(10c+b)=100(\begin{array}{|c|} \hline \text{お} \\ \hline \end{array})+\begin{array}{|c|} \hline \text{か} \\ \hline \end{array}$$

したがって、 $100(\begin{array}{|c|} \hline \text{お} \\ \hline \end{array})$ から、 $\begin{array}{|c|} \hline \text{お} \\ \hline \end{array}$ を計算した数を、その末位が百の位にくるように書けばよいことがわかる。また、 $\begin{array}{|c|} \hline \text{か} \\ \hline \end{array}$ を計算した数は 100 未満なので、その末位が一の位にくるように書けばよいことがわかる。

解答欄

(1)		
(2)	い	
	う	
(3)	え	
	お	
	か	

解答

(1) ウ

(2)

い 87

う 27

(3)

え $a+c$

お $ac+b$

か b^2

解説

(3)

かけられる数の十の位の数をも a 、一の位をも b 、かける数の十の位をも c 、一の位をも b とおくとこの 2 数の十の位の和が 10 より

$$a+c=10$$

よって 2 数の積は

$$(10a+b)(10c+b)$$

$$=100ac+10ab+10bc+b^2$$

$$=100ac+10b(a+c)+b^2$$

$$=100ac+10b\times 10+b^2$$

$$=100ac+100b+b^2$$

$$=100(ac+b)+b^2$$

【問7】

3つの円A, B, Cがあり, それぞれの円の半径は a cm, b cm, $(a+b)$ cmである。円Aの面積と円Bの面積との和が, 円Cの面積の $\frac{1}{2}$ となるときの, $a=b$ であることを証明しなさい。(円周率は π を用いなさい。)

(岐阜県 2012年度)

解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\pi a^2 + \pi b^2 = \frac{1}{2} \pi (a+b)^2$ であるとき

$2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ となるから

$a^2 - 2ab + b^2 = 0$ となり

$(a-b)^2 = 0$ となる。

したがって $a=b$ である。

【問 8】

先生から次の課題が出された。

〔課題〕 連続する 3 つの自然数について、3 つの数の和を x とし、3 つの数の積を y とする。
 x や y はどんな数になるか調べてみよう。

花子さんと太郎さんは、この課題について 内のように話し合った。この会話を読んで、次の(1)、(2)の問いに答えよ。

(奈良県 2012 年度)

1, 2, 3 のとき $x=1+2+3=6$, $y=1\times 2\times 3=6$
2, 3, 4 のとき $x=2+3+4=9$, $y=2\times 3\times 4=24$
3, 4, 5 のとき $x=3+4+5=12$, $y=3\times 4\times 5=60$
4, 5, 6 のとき $x=4+5+6=15$, $y=4\times 5\times 6=120$

花子：連続する 3 つの自然数が 1, 2, 3 のとき、真ん中の数は 2, x は 6 で、6 は 2 の 3 倍だね。

太郎： 内の 4 つの例では、どの x も真ん中の数の 3 倍になっているよ。

花子：連続する 3 つの自然数を文字を使って表せば、 x はいつも真ん中の数の 3 倍に等しいことが証明できそうだね。

太郎： y は 2 の倍数になっているよ。

花子：3, 4, 5 や 4, 5, 6 のときは、 y は 10 の倍数にもなっているね。

(1) 連続する 3 つの自然数の和は、真ん中の数の 3 倍に等しい。このことがいつも成り立つことを、真ん中の数を n として証明せよ。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。

(2) 10 の倍数となる y のうち、小さい方から 17 番目の数を書け。

解答欄

(1)	〔証明〕 連続する 3 つの自然数のうち、真ん中の数を n とすると	
(2)		

解答

(1)

〔証明〕

連続する3つの自然数のうち真ん中の数を n とすると

連続する3つの自然数は $n-1, n, n+1$ と表すことができる。

連続する3つの自然数の和は

$$(n-1)+n+(n+1)=3n$$

したがって連続する3つの自然数の和は真ん中の数の3倍に等しい。

(2) 26970

解説

(2)

連続する3つの自然数を $n-1, n, n+1$ とすると

$y=(n-1) \times n \times (n+1)$ において

n が奇数なら $n-1, n+1$ は偶数になるので

偶数 $\times$ 奇数 $\times$ 偶数 = 偶数

n が偶数なら $n-1, n+1$ は奇数になるので

奇数 $\times$ 偶数 $\times$ 奇数 = 偶数となる。

よって y は必ず2の倍数になる。

よって y が10の倍数になるのは $n-1, n, n+1$ のどれかが5の倍数になるとき。

$17 \div 3 = 5 \cdots 2$ より

連続する3つの自然数の積を小さい順に並べたとき17番目にくる3つの数には

$5 \times (5+1) = 30$ が含まれ

30が真ん中の数になるとき。

よって $y = 29 \times 30 \times 31 = 26970$

【問9】

2つの続いた偶数4, 6について, $6^2 - 4^2$ を計算すると20となり, 4と6の和10の2倍に等しくなる。このように, 「2つの続いた偶数では, 大きい偶数の平方から小さい偶数の平方をひいた差は, はじめの2つの偶数の和の2倍に等しくなる。」ことを, 文字 n を使って証明せよ。ただし, 証明は解答用紙の「 n を整数とし, 小さい偶数を $2n$ とする。」に続けて完成させよ。

(長崎県 2012年度)

解答欄

n を整数とし, 小さい偶数を $2n$ とする。

解答

n を整数とし小さい偶数を $2n$ とする。

2つの続いた偶数は $2n, 2n+2$ と表されるので

大きい偶数の平方から小さい偶数の平方をひいた差は

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = 8n + 4$$

$$= 2(4n + 2)$$

$$= 2\{2n + (2n + 2)\}$$

したがって2つの続いた偶数では

大きい偶数の平方から小さい偶数の平方をひいた差は

はじめの2つの偶数の和の2倍に等しくなる。

【問 10】

図1のような、縦が 3 cm、横が 1 cm の長方形のタイルAと、1 辺が 2 cm の正方形のタイルBがたくさんある。雄太さんは、図2のように、タイルAを、重ならないようにすき間なく、1 枚ずつ横に並べていく。春子さんは、図3のように、タイルAとタイルBを、重ならないようにすき間なく、交互に横に並べていく。2 人が並べて作った図形について、タイルを n 枚並べたものを、それぞれ「 n 番目の図形」と呼ぶことにする。また、図2、図3の太線（——）はそれぞれの図形の周を表しており、表1は図形の周の長さについて、表2はタイルAの枚数について、2 人が 1 番目の図形から順にまとめたものである。

このとき、次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2012 年度）

図1

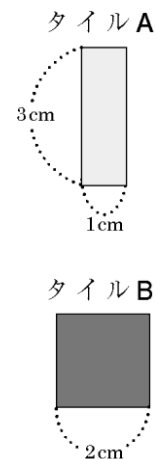


図2 【雄太さんの並べ方】

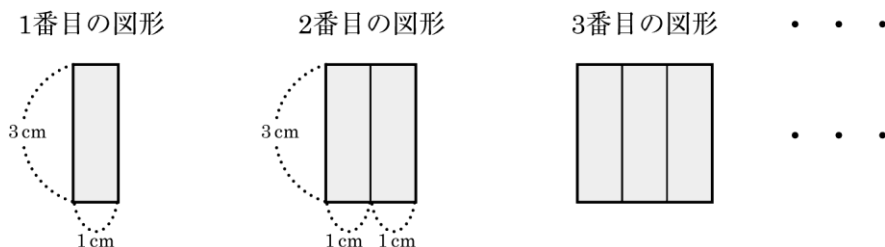
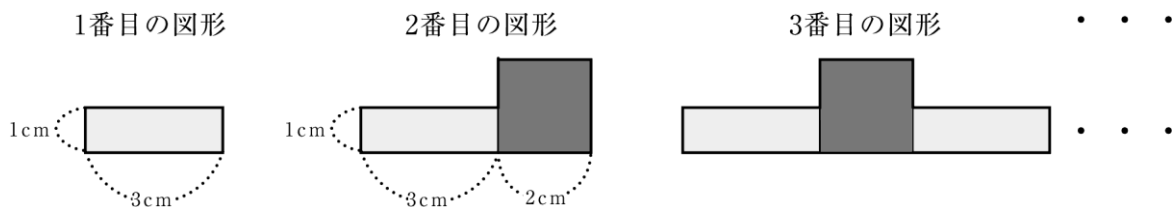


図3 【春子さんの並べ方】



問1 表1のア、表2のイに当てはまる数を求めなさい。

表1 【図形の周の長さについて】

図形の番号 (番目)	1	2	3	4	...
雄太さんが作った図形 (cm)	8	10	12	ア	...
春子さんが作った図形 (cm)	8	14	20	26	...

表2 【タイルAの枚数について】

図形の番号 (番目)	1	2	3	4	...
雄太さんが作った図形 (枚)	1	2	3	4	...
春子さんが作った図形 (枚)	1	1	2	イ	...

問2 雄太さんと春子さんは、表1から、それぞれが作った 1 番目の図形の周の長さの和は 16, 2 番目の図形の周の長さの和は 24, 3 番目の図形の周の長さの和は 32 であることが分かった。このことから、それぞれが作った n 番目の図形の周の長さの和は 8 の倍数になると予想し、この予想が正しいことを次のように説明した。次の ウ , エ には n を使った式を入れ、オ には説明の続きを書いて、説明を完成しなさい。

〔説明〕
雄太さんが作った n 番目の図形の周の長さは (ウ) cm, 春子さんが作った n 番目の図形の周の長さは (エ) cm と表されるので, オ したがって、それぞれが作った n 番目の図形の周の長さの和は 8 の倍数になる。

問3 雄太さんが作った a 番目の図形と春子さんが作った b 番目の図形について、それぞれの図形の周の長さは等しかった。また、雄太さんが作った a 番目の図形に並べられたタイルAの枚数は、春子さんが作った b 番目の図形に並べられたタイルAの枚数の 5 倍より 7 枚多かった。このような a, b の値の組は 2 つある。その 2 つの組を求めなさい。

解答欄

問1	ア		イ	
問2	ウ		エ	
	オ			
問3	$a=$, $b=$		$a=$, $b=$	

解答

問1

ア 14

イ 2

問2

ウ $2n+6$

エ $6n+2$

オ

n 番目の図形の周の長さの和は

$$(2n+6)+(6n+2)$$

$$=8n+8$$

$$=8(n+1)$$

$n+1$ は自然数だから $8(n+1)$ は 8 の倍数である。

問3

$$a=52, b=18$$

$$a=67, b=23$$

解説

問3

雄太さんの a 番目の図形の周の長さは $2a+6\text{cm}$, タイル A の枚数は a 枚と表せる。

また春子さんの b 番目の図形の周の長さは $6b+2\text{cm}$

タイル A の枚数は b が奇数のとき $\frac{b+1}{2}$ 枚, 偶数のとき $\frac{b}{2}$ 枚と表せる。

周の長さが等しいことから

$$2a+6=6b+2$$

整理して

$$a-3b=-2\cdots\textcircled{1}$$

タイルの枚数の関係より

$$b \text{ が奇数のとき } a = \frac{b+1}{2} \times 5 + 7$$

整理して

$$2a-5b=19\cdots\textcircled{2}$$

$$b \text{ が偶数のとき } a = \frac{b}{2} \times 5 + 7$$

整理して

$$2a-5b=14\cdots\textcircled{3}$$

①, ②を連立方程式として解くと $(a, b) = (67, 23)$

①, ③を連立方程式として解くと $(a, b) = (52, 18)$