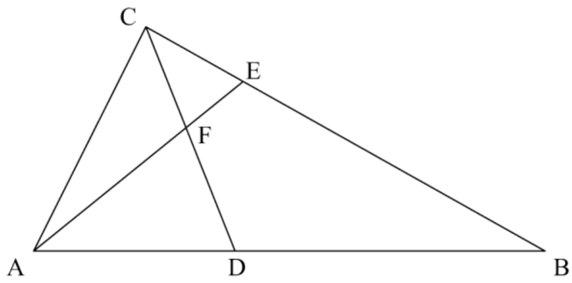
4．相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2020 年度出題】

【問 1】

下の図のように，△ABC の辺 AB 上に点 D，辺 BC 上に点 E があり，∠BAE＝∠BCD＝40°としま す。線分 AE と線分 CD との交点を点 F とします。

次の問いに答えなさい。

（北海道 2020 年度）



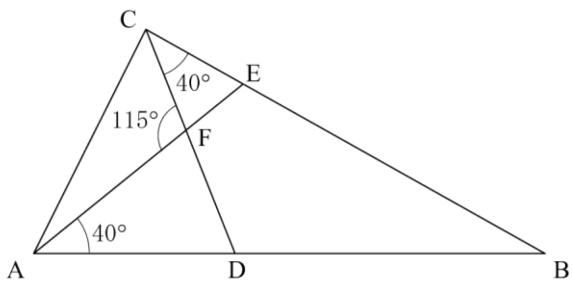
問１　∠AFC＝115°のとき，∠ABC の大きさを求めなさい。

問２　△ABC∽△EBD を証明しなさい。

解答欄

問１	度
問２	〔証明〕

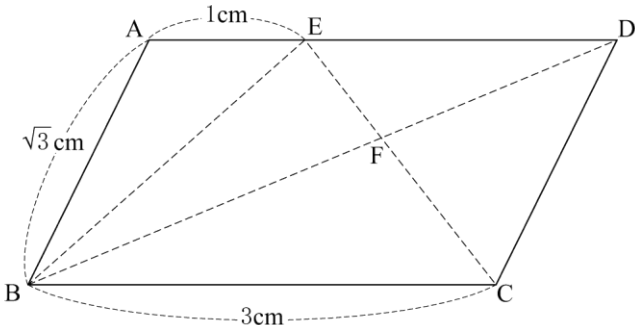
解答
問１35　度
問２
〔証明〕
△ABC と△EBD において
∠ACB＝∠DCE＋∠ACD
∠EDB＝∠DAE＋∠AED…①
仮定より，∠DCE＝∠DAE…②
∠BAE＝∠BCD より 4 点 A，C，D，E は
1 つの円周上にあるので
∠ACD＝∠AED…③
よって，①，②，③より
∠ACB＝∠EDB…④
共通な角なので，∠ABC＝∠EBD…⑤
④，⑤から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△EBD
解説
問１
三角形の外角は，それととなり合わない 2 つの内角の和に等しいことから，
△CFE において
∠CEF＝∠AFC－∠FCE＝115°－40°＝75°
△ABE において
∠ABE＝∠AEC－∠BAE＝75°－40°＝35°



問２
∠DAE＝∠DCE に着目し，4 点 A，D，E，C が同じ円周上にあることを利用して角度の関係を調べていく。

【問 2】

下の図は，AB＝$\sqrt{3}$cm，BC＝3 cm の平行四辺形 ABCD である。辺 AD 上に AE＝1 cm となる点 E をとり，線分 BD と線分 CE の交点を F とするとき，次の(1)，(2)に答えなさい。



（青森県　2020 年度）

(1)　△ABE と△CBD が相似になることを次のように証明した。

$\boxed{あ}$ には角，$\boxed{い}$ には数，$\boxed{う}$ には辺，$\boxed{え}$ にはことばをそれぞれ入れなさい。

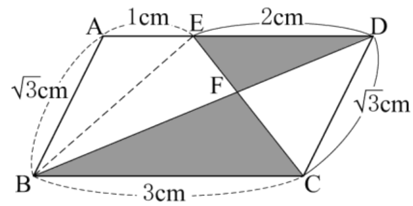
［証明］

△ABE と△CBD について
仮定より
∠BAE＝ $\boxed{あ}$ …①
また
AE：CD＝1： $\boxed{い}$ …②
AB： $\boxed{う}$ ＝ $\sqrt{3}$：3
＝　1： $\boxed{い}$ …③
②，③から
AE：CD＝AB： $\boxed{う}$ …④
①，④から，2 組の辺の $\boxed{え}$ とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABE∽△CBD

(2)　△BCF の面積は△ABE の面積の何倍か，求めなさい。

解答欄

(1)	あ	
	い	
	う	
	え	
(2)	倍	

解答
(1)
ⓐ$\angle$BCD
ⓘ$\sqrt{3}$
ⓤCB
ⓔ比
(2)$\dfrac{9}{5}$　倍
解説
(2)


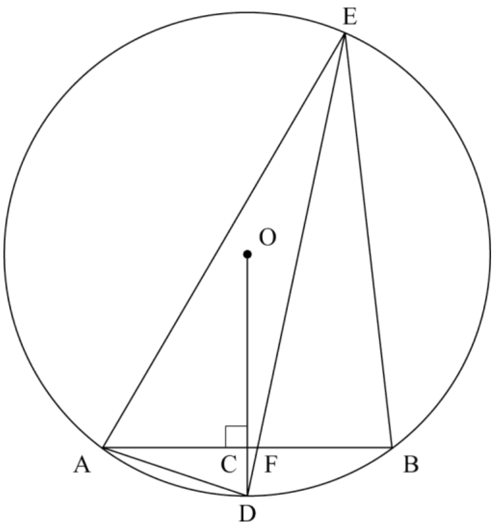
(1)より△ABE∽△CBDだから，その相似比は
AE : CD＝1 : $\sqrt{3}$
よって，その面積比は △ABE : △CBD＝1^2 : $(\sqrt{3})^2$＝1 : 3 … ①
また，ED//BCより平行線と線分の比から
BF : DF＝BC : DE＝3 : 2
よって，△BCF : △DCF＝3 : 2　⇒　△BCF : △CBD＝3 : 5 … ②
①より，△ABE : △CBD＝5 : 15　②より，△BCF : △CBD＝9 : 15　だから，
△ABE : △BCF＝5 : 9　よって，△BCFの面積は△ABEの面積の$\dfrac{9}{5}$倍である。

【問３】

下の図のように，円Ｏの円周上に２点Ａ，Ｂがある。点Ｏから線分ABに垂線をひき，線分ABとの交点をC，円との交点をＤとし，点Ａと点Ｄを結ぶ。また，点Ｄを含まない$\overset{\frown}{AB}$上に，２点Ａ，Ｂとは異なる点Ｅをとり，点Ｅと２点Ａ，Ｂをそれぞれ結ぶ。線分ABと線分DEの交点をＦとする。

このとき，次の**問１**，**問２**に答えなさい。

（千葉県 2020年度 前期）



問１　△EAD∽△EFBとなることの証明を，次ページの ＿＿ の中に途中まで示してある。

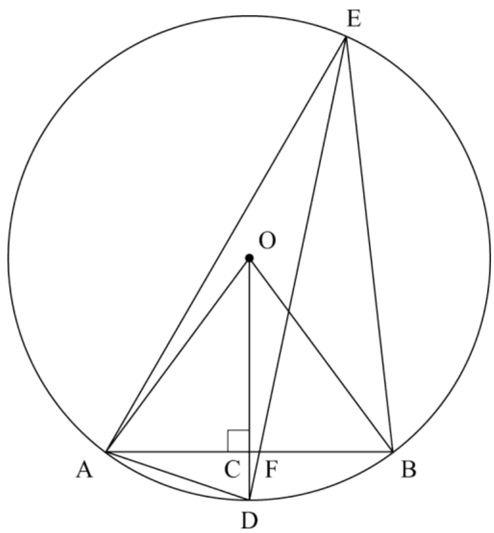
（a），（b） に入る最も適当なものを，次ページの**選択肢**の**ア**～**カ**のうちからそれぞれ１つずつ選び，符号で答えなさい。また，（c） には証明の続きを書き，**証明**を完成させなさい。

ただし， ＿＿ の中の①～④に示されている関係を使う場合，番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

証明

点Ｏと２点Ａ，Ｂをそれぞれ結ぶ。
△OACと△OBCにおいて，
円の半径であるから，
OA＝ （a） …①
仮定より，
∠OCA＝∠OCB＝90° …②
OCは共通…③
①，②，③より，
（b） がそれぞれ等しいから，
△OAC≡△OBC…④

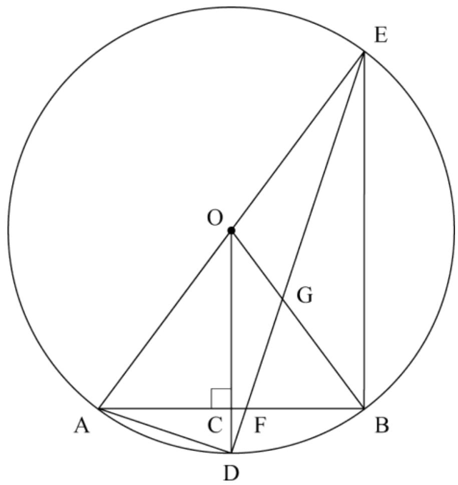
（c）



選択肢

ア	AE	**イ**	BC	**ウ**	OB
エ	２組の辺とその間の角			**オ**	直角三角形の斜辺と１つの鋭角
カ	直角三角形の斜辺と他の１辺				

問２　線分 AE を円 O の直径とし，EB＝6 cm，AD：DE＝1：3，CF：FB＝1：8 とする。
線分 OB と線分 ED の交点を G とするとき，△GFB の面積を求めなさい。



解答欄

問１	（ａ）	
	（ｂ）	
	（ｃ）	
問２	cm^2	

解答
問１
（ａ）ウ
（ｂ）カ
（ｃ）
△EAD と△EFB において
④より
∠AOD＝∠BOD…⑤
１つの弧に対する円周角は，その弧に対する中心角の半分であるから
$\angle AED = \frac{1}{2}\angle AOD$…⑥
$\angle FEB = \frac{1}{2}\angle BOD$…⑦
⑤，⑥，⑦より
∠AED＝∠FEB…⑧
また，$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角は等しいので
∠ADE＝∠FBE…⑨
⑧，⑨より
２組の角がそれぞれ等しいので
△EAD∽△EFB
問２ $\frac{24}{13}$ (cm^2)
解説
問２
問１より△EAD∽△EFB なので，AD : DE＝FB : BE＝1：３より，FB : 6＝1：3　⇒　FB＝2
CF : FB＝1：8 より，CF : 2＝1：8　⇒　$CF=\frac{1}{4}$　⇒　$BC=CF+FB=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$
また，△OAC≡△OBC なので，$AC=BC=\frac{9}{4}$　⇒　$AB=\frac{9}{4}\times 2=\frac{9}{2}$
半円の弧である$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角なので，
∠ABE＝90°… ①より
△EAB は直角三角形だから，三平方の定理より
$AE=\sqrt{AB^2+EB^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+6^2}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$
線分 OD は円 O の半径なので，$OD=\frac{1}{2}AE=\frac{15}{4}$
OD⊥CB, EB⊥CB より，OD//EB なので
平行線と線分の比より

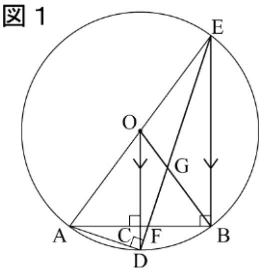
図１


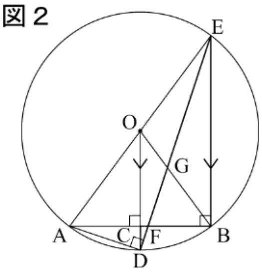
図２


図１　DG : EG＝OD : BE＝$\frac{15}{4}$: 6＝5：8　⇒　DG : EG : DE＝5：8：13 … ②
図２　DF : FE＝CF : BF＝1：8　⇒　DF : FE : DE＝1：8：9 … ③
②，③の DE を基に比を合わせると，DG : EG : DE＝45：72：117，DF : FE : DE＝13：104：117 だから DF : FG : GE＝DF : (DG－DF) : GE＝13：32：72　⇒　FG : FE＝32：104＝4：13
ここで①より，△EFB は直角三角形だから，$\triangle EFB=\frac{1}{2}\times FB\times EB=\frac{1}{2}\times 2\times 6=6$
△GFB : △EFB＝FG : FE＝4：13 より，△GFB : 6＝4：13　⇒　$\triangle GFB=\frac{24}{13}$

【問 4】

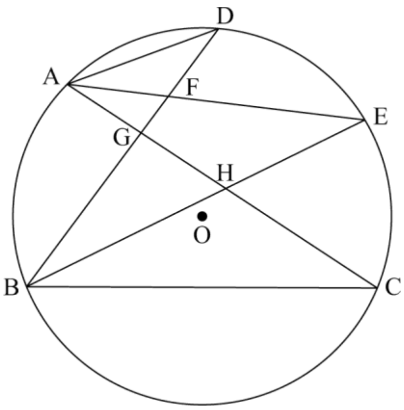
右の**図１**のように，円 O の周上に３点 A，B，C をとる。また，点 B を含まない$\overset{\frown}{AC}$上に，２点 A，C とは異なる点 D をとり，∠CBD の二等分線と円 O との交点のうち，点 B とは異なる点を E とする。

さらに，線分 AE と線分 BD との交点を F とし，線分 AC と線分 BD との交点を G，線分 AC と線分 BE との交点を H とする。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

（神奈川県 2020 年度）

図１



(1) 三角形 AFD と三角形 BHC が相似であることを次のように証明した。$\boxed{\text{(a)}}$，$\boxed{\text{(b)}}$ に最も適するものをそれぞれ選択肢の１～４の中から１つ選び，その番号を答えなさい。

〔証明〕

△AFD と△BHC において，

まず，$\boxed{\text{(a)}}$ に対する円周角は等しいから，

∠ADB＝∠ACB

よって，∠ADF＝∠BCH…①

次に，$\overset{\frown}{DE}$に対する円周角は等しいから，

∠DAE＝∠DBE…②

また，線分 BE は∠CBD の二等分線であるから

$\boxed{\text{(b)}}$ …③

②，③より，∠DAE＝∠CBE

よって，∠DAF＝∠CBH…④

①，④より，２組の角がそれぞれ等しいから，

△AFD∽△BHC

(a)の選択肢

1. $\overset{\frown}{AB}$
2. $\overset{\frown}{AD}$
3. $\overset{\frown}{BC}$
4. $\overset{\frown}{CE}$

(b)の選択肢

1. ∠ACB＝∠AEB
2. ∠AHB＝∠CHE
3. ∠CBE＝∠DBE
4. ∠EAC＝∠EBC

(2) ８つの点 A，B，C，D，E，F，G，H のうちの２点 A，B を含む４つの点が，円 O とは異なる１つの円の周上にある。この円の周上にある４つの点のうち，点 A と点 B 以外の２点を書きなさい。

解答欄

(1)	(a)	
	(b)	
(2)	点　　と点	

解答
(1)
(a) 1
(b) 3
(2)点 F と点 H
解説
(2)
∠AFB＝∠ADB＋∠DAE , ∠BHA＝∠ACB＋∠CBE であり
∠ADB＝∠ACB かつ∠DAE＝∠CBE なので，∠AFB＝∠BHA
したがって，4 点 A，B，F，H は 1 つの円の周上にあるといえる。

【問５】

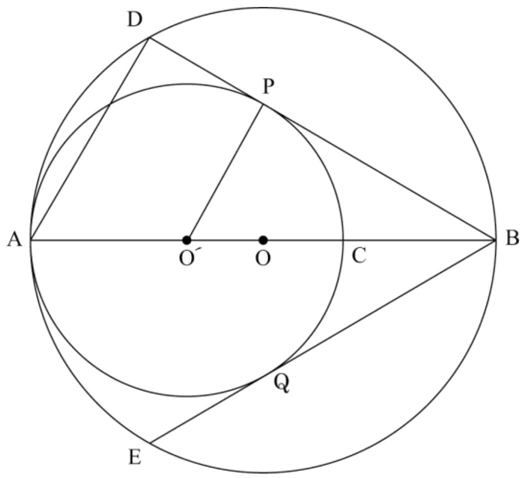
右の**図１**のように，線分 AB を直径とする円 O がある。また，線分 AB 上に点 A，B と異なる点 C をとり，線分 AC を直径とする円を円 O´とする。

点 B から円 O´に２つの接線をひき，接点をそれぞれ P，Q とする。さらに，２つの直線 BP，BQ と円 O との交点で，B 以外の点をそれぞれ D，E とする。

このとき，次の問いに答えなさい。

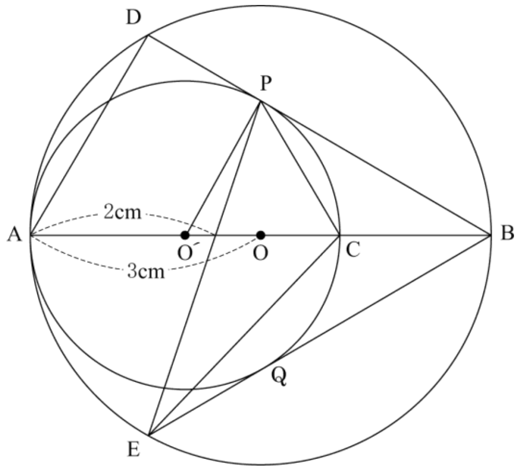
（富山県 2020 年度）

図１



問１　△ABD∽△O´BP を証明しなさい。

図２



問２　右の**図２**のように，円 O の半径を 3 cm，円 O´の半径を 2 cm とするとき，次の問いに答えなさい。

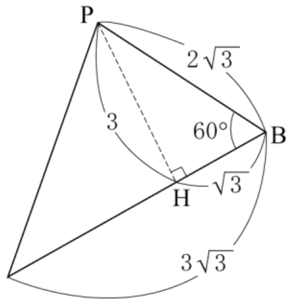
(1)　線分 PE の長さを求めなさい。

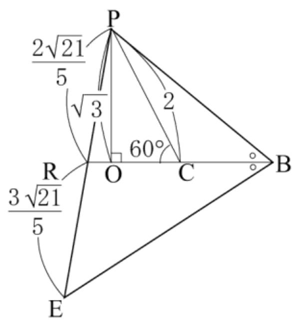
(2)　△CPE の面積を求めなさい。

解答欄

問１	〔証明〕	
問２	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答
問１
〔証明〕
△ABD と△O´BP において
共通な角だから
∠ABD＝∠O´BP…①
半円の弧に対する円周角は 90° なので
∠ADB＝90°　…②
また円の接線は接点を通る半径に垂直なので
∠O´PB＝90°　…③
②，③より　∠ADB＝∠O´PB…④
①，④より
２組の角がそれぞれ等しいので
△ABD∽△O´BP
問２
(1) $\sqrt{21}$　cm
(2) $2\sqrt{3}$　cm^2
解説
問２
(1)





円 O′ の半径なので，O′P＝2 であり，△PO′B において三平方の定理を用いて，$O'B^2=O'P^2+PB^2$　$PB=2\sqrt{3}$　さらに，△PO′B の 3 辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ となっていることから，∠PBO′＝30° であることが分かる。また，図形の対称性を考えると，∠QBO′＝30° である。
△ABD∽△O′BP より対応する辺の比は等しく，BO′：AB＝BP：BD
$BD=3\sqrt{3}$ である。また，$BE=3\sqrt{3}$ でもある。ここで△PBE に注目し，P から BE に垂線 PH を下ろす。∠PBE＝∠PBO′＋∠QBO′＝30°＋30°＝60° であることから，△PHB は辺の比が決まった直角三角形であり，$PB=2\sqrt{3}$ であることから，$BH=\sqrt{3}$，PH＝3 である。次に△PHE に注目する。$EH=BE-BH=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ であり，三平方の定理を用いて，
$PE^2=PH^2+EH^2$　$PE^2=3^2+(2\sqrt{3})^2$　$PE=\sqrt{21}$(cm)
(2)
∠PBO′＝∠QBO′ であることから，直線 AB は∠PBE の二等分線であるといえる。PE と AB の交点を R として，角の二等分線の性質を用いると，
PR：RE＝PB：BE　PR：RE＝2：3 である。
よって，$PR=\dfrac{2}{5}PE=\dfrac{2\sqrt{21}}{5}$ である。ここで P から O′C に垂線を下ろすことを考える。
∠PBO′＝30°，∠O′PB＝90° であるから∠PO′C＝60° で，O′P＝O′C であるから，△PO′C は頂角 60° の二等辺三角形，つまり正三角形であるといえる。したがって，点 P から O′C に下ろした垂線は，O′C の中点である点 O を通ることになり，
PO⊥O′C である。△POC は∠PCO＝60° の直角三角形で辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ であり，$PC:PO=2:\sqrt{3}$
$PO=\sqrt{3}$ である。ここで△POR において三平方の定理を用いて，$PR^2=RO^2+PO^2$
$\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{5}\right)^2=OR^2+(\sqrt{3})^2$　$OR=\dfrac{3}{5}$ となる。よって，$\triangle PRC=\dfrac{1}{2}\times RC\times PO=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{5}+1\right)\times\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$
PR：RE＝2：3 であるから，△PCR：△ECR＝2：3　$\triangle ECR=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$ となり，
$\triangle CPE=\triangle PRC+\triangle ECR=2\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

【問６】

図１～**図３**のように，AB を直径とする円 O と，点 B で接する直線ℓがある。C は円周上の点であり，直線 CO と円周との交点のうち，点 C 以外の交点を D とする。また，直線 CO と直線ℓとの交点を E とする。ただし，$0° < \angle AOC < 90°$ とする。

このとき，次の**問１**～**問３**に答えなさい。ただし，円周率はπとする。

（石川県 2020 年度）

図１

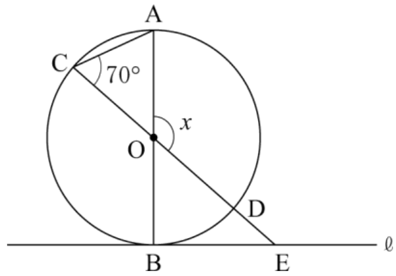
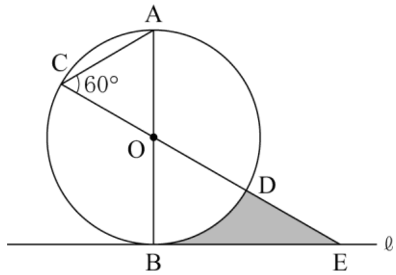


図２

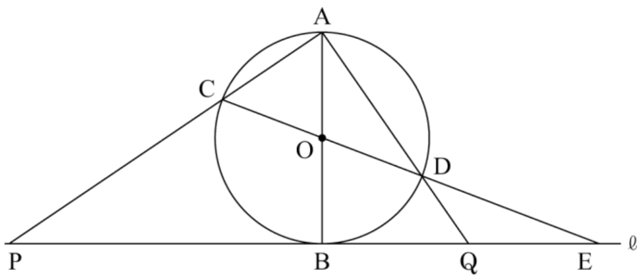


問１　**図１**のように，$\angle ACO = 70°$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

問２　**図２**において，AB＝８ cm，$\angle ACO = 60°$ とする。このとき，$\overset{\frown}{DB}$，線分 BE，ED で囲まれた ▒▒ 部分の面積を求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

問３　**図３**のように，直線 AC と直線ℓとの交点を P，直線 AD と直線ℓとの交点を Q とする。このとき，△CPE∽△QDE を証明しなさい。

図３



解答欄

問１	度
問２	〔計算〕 答　　　　cm^2
問３	〔証明〕

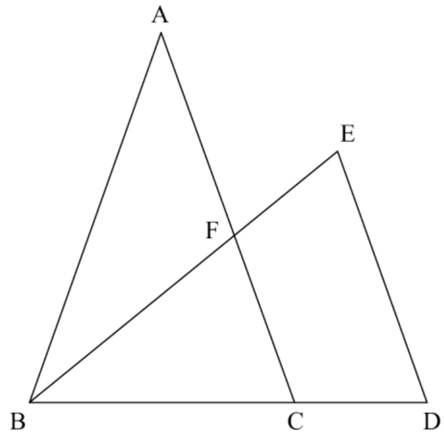
解答
問１140　度
問２
〔計算〕
おうぎ形 OBD の面積は　$\pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} = \frac{8}{3}\pi$
△OBE の面積は　$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$
よって　求める面積は　$8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$
〔答〕$\left(8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)$　cm^2
問３
〔証明〕
△CPE と△QDE において
∠CEP＝∠QED (共通) …①
∠ABP＝∠CAD＝90°より
∠APB＝180°－90°－∠PAB＝90°－∠PAB
∠OAD＝90°－∠CAO＝90°－∠PAB
よって　∠APB＝∠OAD…②
△OAD は二等辺三角形より
∠OAD＝∠ODA…③
対頂角は等しいから　　∠ODA＝∠QDE…④
②，③，④より，∠CPE＝∠QDE…⑤
①，⑤より，２組の角がそれぞれ等しいから
△CPE∽△QDE
解説
問１
∠ACO＝∠CAO＝70°だから，∠x＝70°×2＝140°

【問７】

右の図において，△ABC は AB＝AC＝6 cm, BC＝4 cm の二等辺三角形であり， △BDE は△ABC と合同である。また，点 C は線分 BD 上にあり，点 F は線分 AC と線分 BE の交点である。

このとき，次の問いに答えよ。

（福井県 2020 年度）

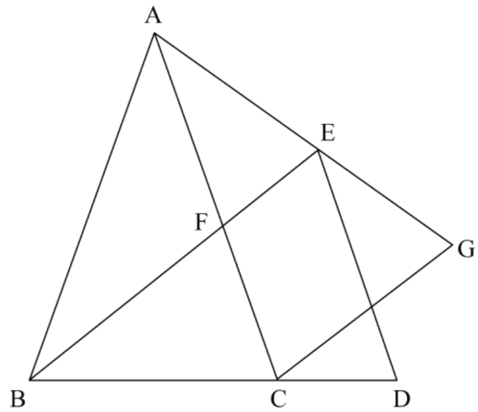


問１　△ABC の面積および，線分 CF の長さを求めよ。

問２　さらに点 A と点 E を結び，線分 AE を E の方に延長した直線上に，AE：AG＝5：9 となる点 G をとり，点 C と点 G を結ぶ。

(1)　△AFE∽△ACG であることを証明せよ。

(2)　△ACG の面積を求めよ。



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問１</td><td colspan="2">△ABC＝　　　　　　(cm²)</td></tr>
<tr><td colspan="2">CF＝　　　　　　(cm)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問２</td><td>(1)</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>△ACG＝　　　　　　(cm²)</td></tr>
</table>

解答

問１

$\triangle ABC=8\sqrt{2}$　(cm^2)

$CF=\dfrac{8}{3}$　(cm)

問２

(1)

〔証明〕

△AFE と△ACG で

∠FAE と∠CAG は共通だから

∠FAE＝∠CAG…①

問１から $CF=\dfrac{8}{3}$cm だから，$AF=6-\dfrac{8}{3}=\dfrac{10}{3}$cm

よって，$AF:AC=\dfrac{10}{3}:6=5:9$…②

また，仮定より，AE：AG＝5：9…③

②，③から

AF：AC＝AE：AG…④

①，④から

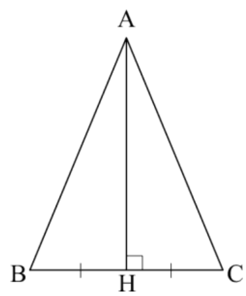
２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

△AFE∽△ACG

(2) $\triangle ACG=\dfrac{36\sqrt{2}}{5}$　(cm^2)

解説

問１



△ABC は AB＝AC の二等辺三角形だから，A から BC に垂線 AH をひくと，H は BC の中点である。よって，BH＝HC＝4÷2＝2(cm)

△ABH に関する三平方の定理より，$AH^2=AB^2-BH^2=6^2-2^2=32$

AH＞0 だから，$AH=4\sqrt{2}$(cm)　$\triangle ABC=BC\times AH\div 2=4\times 4\sqrt{2}\div 2=8\sqrt{2}(cm^2)$

次に，△ABC≡△BDE より，∠ABC＝∠BDE であり，

△ABC は二等辺三角形だから，∠ACB＝∠ABC

よって∠ACB＝∠BDE より，同位角が等しいから，CF//DE

平行線と線分の比の関係より，CF：DE＝BC：BD　CF：4＝4：6　$CF=\dfrac{8}{3}$(cm)

問２

(2)

(1) より，$CF:DE=\dfrac{8}{3}:4=2:3$　FC//ED だから，BF：BE＝CF：DE＝2：3　よって，

BF：FE＝2：1　これより$\triangle AFE=\dfrac{1}{2}\triangle AFB$　また，$AF:FC=\left(6-\dfrac{8}{3}\right):\dfrac{8}{3}=5:4$ より，

$$\triangle AFE=\frac{1}{2}\triangle AFB=\frac{1}{2}\times\frac{AF}{AF+FC}\times\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}\times 8\sqrt{2}=\frac{20\sqrt{2}}{9}(cm^2)$$

△AFE と△ACG の相似比は 5：9 だから，$\triangle AFE:\triangle ACG=5^2:9^2$　$\triangle ACG=\dfrac{81}{25}\times\dfrac{20\sqrt{2}}{9}=\dfrac{36\sqrt{2}}{5}(cm^2)$

【問８】

AB＝AC である二等辺三角形 ABC において，頂点 A から辺 BC に垂線をひき，その交点を H とする。線分 AH 上の点 O を中心とする円を円 O とし，円 O は辺 BC と点 H で接するものとする。さらに円 O は辺 AB とも接するものとし，その接点を D とする。

このとき，次の**問１**～**問３**に答えなさい。ただし，円周率は π とする。

（山梨県　2020 年度）

図１

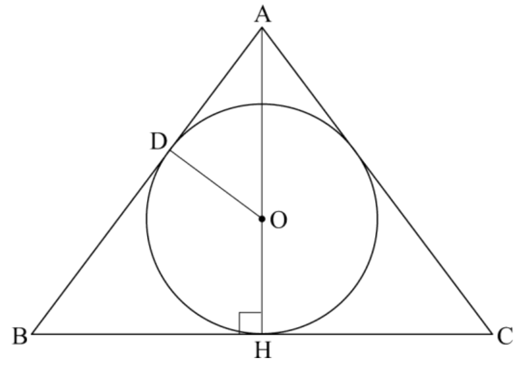
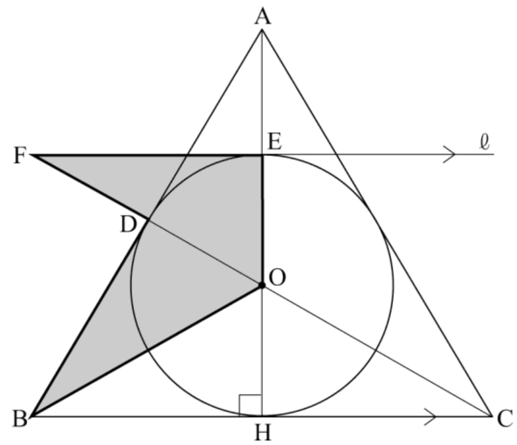


図２



問１　**図１**のように，２点 O，D を結んだとき，△ABH∽△AOD であることを証明しなさい。

問２　AB＝6 cm，BC＝8 cm である場合について考える。

このとき，次の⑴，⑵に答えなさい。

⑴　線分 AH の長さを求めなさい。

⑵　円 O の面積を求めなさい。

問３　AB＝AC＝BC＝6 cm である場合について考える。**図２**のように，辺 BC に平行で円 O に接する直線ℓをひき，円 O との接点を E とし，直線 CO との交点を F とする。また，▭ で示した部分は，５つの線分 EF，FD，DB，BO，OE で囲まれた図形であり，この図形を T とする。

このとき，次の⑴，⑵に答えなさい。

⑴　図形 T の周の長さを求めなさい。

⑵　図形 T を，直線 AH を軸として１回転させてできる立体の体積を求めなさい。

解答欄

問１	〔証明〕		
問２	(1)	cm	
	(2)	cm^2	
問３	(1)	cm	
	(2)	cm^3	

解答

問１

〔証明〕

△ABH と△AOD において

∠BAH と∠OAD は共通…①

仮定より，円の接線は，接点を通る半径に垂直だから

∠AHB＝∠ADO＝90°…②

①，②より，２組の角の大きさがそれぞれ等しいから

△ABH∽△AOD

問２

(1) $2\sqrt{5}$　cm

(2) $\dfrac{16}{5}\pi$　cm^2

問３

(1) $(4\sqrt{3}+6)$　cm

(2) $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\pi$　cm^3

解説

問２

(1)

BH＝4 である。△ABH において三平方の定理より，$36=16+AH^2$　$AH>0$ より，$AH=2\sqrt{5}$

(2)

円 O の半径を r とおくと，$AO=AH-r=2\sqrt{5}-r$ と表される。△ABH∽△AOD より対応する辺の比は等しく，AB：BH＝AO：OD　$6:4=(2\sqrt{5}-r):r$　$r=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$となる。よって，円 O の面積は$\dfrac{16}{5}\pi$

問３

(1)

△ABH は角度が 30°，60°，90°の直角三角形で辺の比が決まっており $AH=3\sqrt{3}$である。

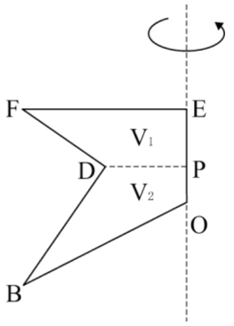
また△AOD も同様に辺の比の決まった直角三角形であり，$AO=2\sqrt{3}$，OD＝円 O の半径＝$\sqrt{3}$である。ここで，∠AOF＝60°より△FEO も角度が 30°，60°，90°の直角三角形で辺の比が決まっており，$OE=\sqrt{3}$であることから，FE＝3，$FO=2\sqrt{3}$である。したがって，BO＝AO であることも考えると，図形 T の周の長さ＝DF＋FE＋EO＋OB＋BD＝$(2\sqrt{3}-\sqrt{3})+3+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3=4\sqrt{3}+6$

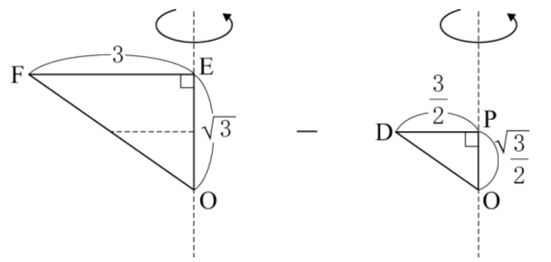
(2)

点 D から直線 AH におろした垂線と AH の交点を点 P とする。

求める立体の体積を，四角形 FDPE を回転させた体積（V_1）と四角形 BDPO を回転させた体積（V_2）の２つの部分に分けて考える。V_1 について，V_1：図２

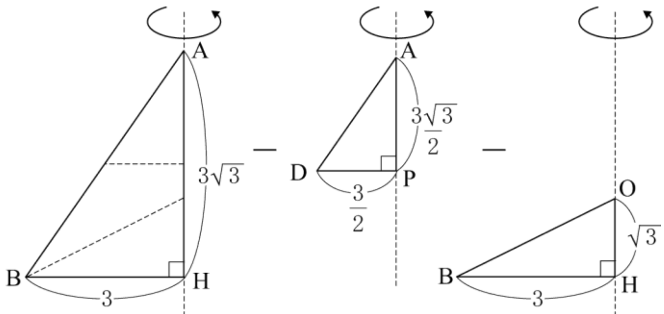
図１





$V_1=\dfrac{1}{3}\times 9\pi\times\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{4}\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\pi=\dfrac{21\sqrt{3}}{8}\pi$ である。V_2 について，

V_1：図３



$V_2=\dfrac{1}{3}\times 9\pi\times 3\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{4}\pi\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{3}\times 9\pi\times\sqrt{3}=9\sqrt{3}\pi-\dfrac{9\sqrt{3}}{8}\pi-3\sqrt{3}\pi=\dfrac{39\sqrt{3}}{8}\pi$ である。

したがって，$V_1+V_2=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\pi$

【問 9】

次の**問１**・**問２**に答えなさい。

（長野県　2020 年度）

問１　**図１**は，２点 A，B で交わる２つの円 O，O′において，円 O 上を動く点 P をとり，直線 PB と円 O′の交点で点 B と異なる点を Q とし，△APQ をつくったものである。

図２は，**図１**の点 P を点 R の位置に動かし，それにともなって，点 Q が点 S の位置に動いたものである。ただし，点 P，R は円 O′の外部にある点であり，点 Q，S は円 O の外部にある点とする。

図１

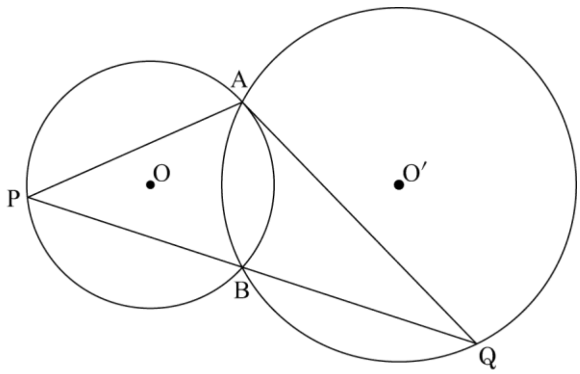
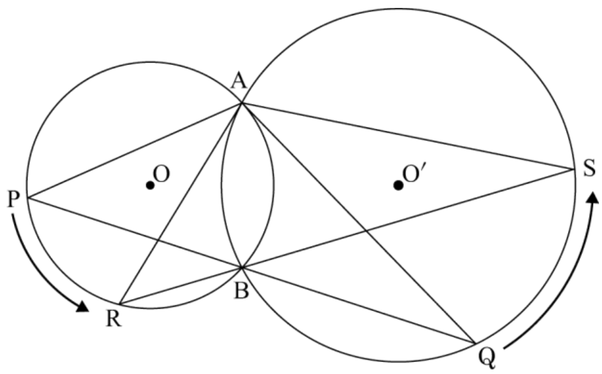


図２



(1)　**図２**で，∠PAQ＝∠RAS は，次のように証明することができる。**証明**の $\boxed{\text{あ}}$ には当てはまる最も適切な弧を，$\boxed{\text{い}}$ には当てはまる最も適切な角を，それぞれ記号を用いて書きなさい。

〔**証明**〕

円 O の $\overset{\frown}{\text{PR}}$ に対する円周角は等しいので，

∠PAR＝∠PBR　…①

また，円 O′の $\overset{\frown}{\boxed{\text{あ}}}$ に対する円周角は等しいので，

∠QAS＝∠QBS　…②

対頂角は等しいから，

∠PBR＝∠QBS　…③

①，②，③から，∠PAR＝∠QAS　…④

④より，∠PAR＋∠ $\boxed{\text{い}}$ ＝∠QAS＋∠ $\boxed{\text{い}}$

したがって，∠PAQ＝∠RAS

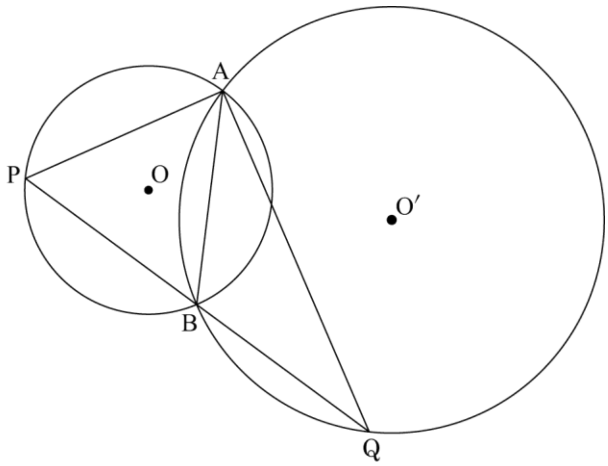
(2)　∠PAQ＝∠RAS は，△PAQ∽△RAS を示すことでも証明することができる。△PAQ∽△RAS を示し，∠PAQ＝∠RAS を証明しなさい。

(3)　(2)の証明の△PAQ∽△RAS から，∠PAQ＝∠RAS のほかにわかることとして正しいものを，次の**ア**～**ウ**から１つ選び，記号を書きなさい。

〔 **ア**　AP : AR＝PQ : AS　　**イ**　AP : AR＝AQ : AS　　**ウ**　AP : AR＝AS : AQ 〕

問２　**図３**は，**図１**の２つの円 O，O′ のそれぞれの半径を変え，AB＝BP＝PA＝BQ＝4 cm としたものである。

図３

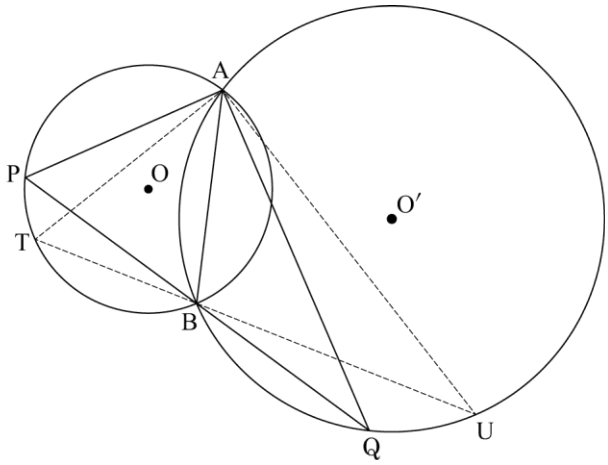


(1)　∠BAQ の大きさを求めなさい。

(2)　円 O の半径を求めなさい。

(3)　**図４**は，**図３**において，点 P 以外に円 O 上の点 T をとり，直線 TB と円 O′ との交点で点 B と異なる点を U とし，△ATU をつくったものである。点 T が円 O 上を動くと，△ATU の面積は変化する。△ATU の面積が最大になるとき，その面積を求めなさい。ただし，点 T は円 O′ の外部にあり，点 U は円 O の外部にある点とする。

図４



(4)　(3)で求めた△ATU の面積は，△APQ の面積の何倍か，求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="4">問１</td><td rowspan="2">(1)</td><td>あ</td><td>⌒</td></tr>
<tr><td>い</td><td>∠</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">問２</td><td>(1)</td><td colspan="2">°</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="2">倍</td></tr>
</table>

解答

問１

⑴

あ($\overset{\frown}{QS}$)

い(∠)　RAQ

⑵

△PAQ と△RAS について

円 O の$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいので

∠APQ＝∠ARS…①

円 O′ の$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいので

∠AQP＝∠ASR…②

①，②より，２組の角が，それぞれ等しいので

△PAQ∽△RAS

相似な図形では，対応する角の大きさは等しいので

∠PAQ＝∠RAS

⑶イ

問２

⑴30　(°)

⑵$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　(cm)

⑶$\frac{32\sqrt{3}}{3}$　(cm^2)

⑷$\frac{4}{3}$　(倍)

解説

問２

(1)

AB＝BP＝PA より△ABP は正三角形だから，∠ABP＝60°

よって，∠ABQ＝180°－∠ABP＝120° であり，AB＝BQ より△ABQ は二等辺三角形だから

$\angle \mathrm{BAQ}=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-\angle \mathrm{ABQ})=30^\circ$

(2)

図５

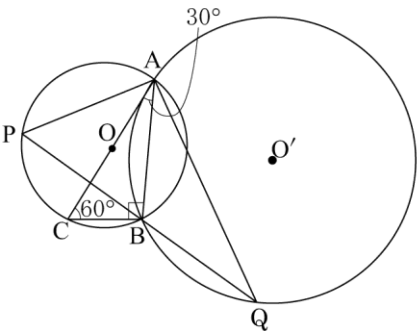


図５のように，線分 AC が円 O の直径となるように円 O 上に C をとる。

円 O において，半円の弧に対する円周角は 90° なので，∠ABC＝90°

また，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$に対する円周角なので，∠APB＝∠ACB＝60°

よって，△ABC の辺の長さの比から，AB：AC＝$\sqrt{3}$：2

⇒　4：AC＝$\sqrt{3}$：2　⇒　AC＝$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$(cm)

したがって，円 O の半径は，$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(cm)

(3)

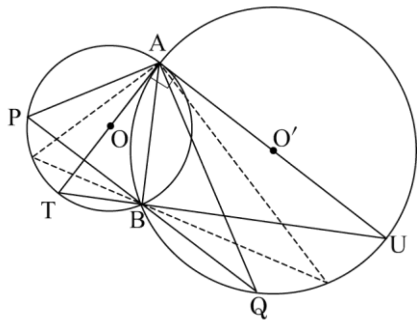
(1) より∠BAQ＝30° であり，また正三角形 ABP において∠PAB＝60° だから，

∠PAQ＝∠PAB＋∠BAQ＝90° である。

問１ (1) (2) で証明されたとおり，T，U がどの位置にいても，つねに ∠PAQ＝∠TAU＝90°

となり，△ATU の面積はつねに $\dfrac{1}{2}$×AT×AU と表すことができる。

図６



よって，△ATU の面積が最大になるには，線分 AT，AU の長さが最大になればよい。

線分 AT の長さが最大になるのは, 円 O の直径になるときである。

円 O において，半円の弧に対する円周角は 90° なので，

∠ABT＝90°　 よって，∠ABU＝180° －∠ABT＝90° だから，**図６**のように線分 AU は円 O´の直径となることがわかる。

つまり，線分 AT の長さが最大になるとき，線分 AU の長さも最大になる。

線分 AT は円 O の直径なので，AT＝$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$(cm)

また，△ATU の辺の長さの比から，AT：AU＝1：$\sqrt{3}$　⇒

$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$：AU＝1：$\sqrt{3}$

⇒　AU＝8(cm)　なので，△ATU の面積は，$\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AT}\times\mathrm{AU}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\times8=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$(cm²)

(4)

問１ (2) で証明されたとおり，△APQ∽△ATU だから，その相似比は AP：AT＝4：$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$＝3：2$\sqrt{3}$

よって，△APQ と△ATU の面積比は，3^2：$(2\sqrt{3})^2$＝9：12＝3：4

よって，△ATU の面積は，△APQ の面積の $\dfrac{4}{3}$ 倍である。

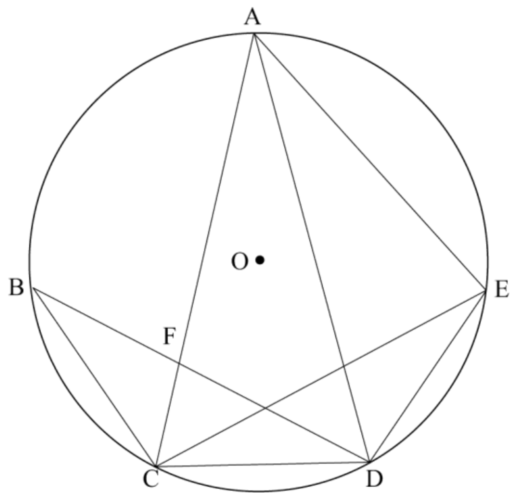
【問 10】

図８において，４点 A，B，C，D は円 O の円周上の点であり，△ACD は AC＝AD の二等辺三角形である。また，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$＝$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$である。$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$上に∠ACB＝∠ACE となる点 E をとる。AC と BD との交点を F とする。

このとき，次の**問１**，**問２**に答えなさい。

（静岡県 2020 年度）

図８



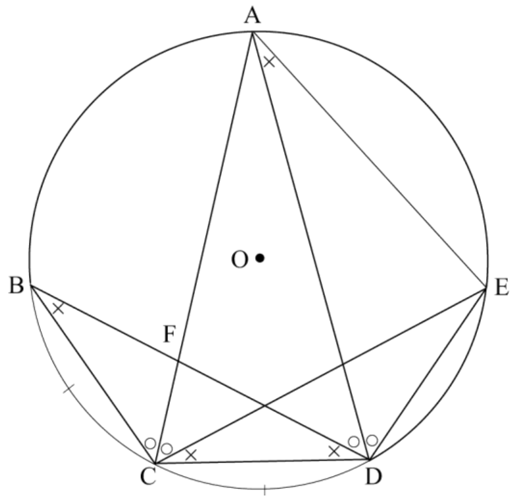
問１　△BCF∽△ADE であることを証明しなさい。

問２　AD＝6 cm，BC＝3 cm のとき，BF の長さを求めなさい。

解答欄

問１	〔証明〕
問２	cm

解答
問１
〔証明〕
△BCF と△ADE で
仮定より，∠ACB＝∠ACE　…①
$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$の円周角は等しいから，∠ACE＝∠ADE　…②
①，②より，∠ACB＝∠ADE だから，
∠BCF＝∠ADE　…③
仮定より，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$＝$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$だから，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$と$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$の円周角は等しいため，
∠CDF＝∠CBF　…④
また，仮定より，AC＝AD だから
∠ACD＝∠ADC　…⑤
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$の円周角は等しいから，∠ACB＝∠ADB　…⑥
①，⑥より，∠ACE＝∠ADB　…⑦
また，∠DCE＝∠ACD－∠ACE　…⑧
∠CDF＝∠ADC－∠ADB　…⑨
⑤，⑦，⑧，⑨より，∠DCE＝∠CDF　…⑩
$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$の円周角は等しいから，∠DCE＝∠DAE　…⑪
④，⑩，⑪より，∠CBF＝∠DAE　…⑫
③，⑫より，２組の角がそれぞれ等しいから
△BCF∽△ADE
問２$\frac{9}{4}$　cm
解説
問１
△BCF と△ADE で
仮定より∠ACB=∠ACE…①
$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$の円周角は等しいから∠ACE＝∠ADE…②
①，②より，∠ACB＝∠ADE だから∠BCF＝∠ADE…③
仮定より，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$＝$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$だから
$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$と$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$の円周角は等しいため∠CDF＝∠CBF…④
また，仮定より，AC=AD だから∠ACD＝∠ADC…⑤
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$の円周角は等しいから∠ACB＝∠ADB…⑥
①，⑥より，∠ACE＝∠ADB…⑦
また，∠DCE＝∠ACD－∠ACE…⑧
∠CDF＝∠ADC－∠ADB…⑨
⑤，⑦，⑧，⑨より，∠DCE＝∠CDF…⑩
$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$の円周角は等しいから，∠DCE＝∠DAE…⑪
④，⑩，⑪より，∠CBF＝∠DAE…⑫
③，⑫より，２組の角がそれぞれ等しいから
△BCF∽△ADE

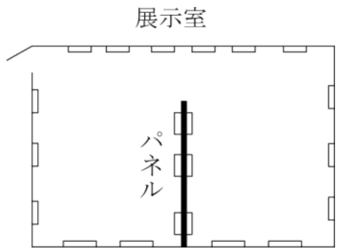


問２
問１より∠CBF＝∠DAE であるから，$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$＝$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$で，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$＝$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$より$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$＝$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$　よって，BC＝DE＝3
また**問１**より BC∶CF＝AD : DE＝2 : 1 より，CF＝$\frac{3}{2}$
ここで AF＝AC－CF＝6－$\frac{3}{2}$＝$\frac{9}{2}$
△BCF と△ADF は２組の角がそれぞれ等しいので相似であり，
BC : AD＝BF : AF＝1 : 2 であるので，AF＝$\frac{9}{4}$

【問 11】

花子さんは，美術館へ行きました。**図１**は展示室を真上から見たもので，壁やパネルに作品が展示されています。花子さんは，展示室の中を移動したとき，パネルで隠れて見えなくなる壁面があることに気がつき，下のような**考え方**をもとに，見えない壁面の範囲がどのように変化するかを考えました。後の**問１**から**問３**に答えなさい。ただし，パネルの厚さは考えないものとします。

図１



（滋賀県 2020 年度）

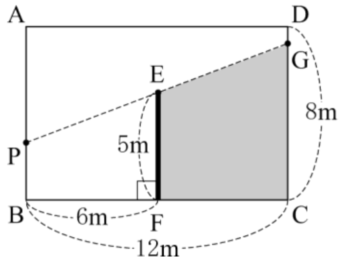
考え方

○ **図２**のように，展示室を長方形 ABCD，パネルを線分 EF とします。

○ 長方形 ABCD の辺上に点 P をとり，半直線 PE と長方形 ABCD の各辺との交点を G とします。

○ **図２**のように，点 P にいる人からパネルを見た場合，パネルで隠れて見えない部分を，塗りつぶして（ ）表します。

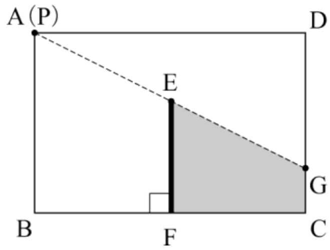
図２



問１ **図３**のように，点 P が点 A にあるときの線分 CG の長さを求めなさい。

また，点 P は辺 AB 上を点 A から点 B まで移動します。点 G が点 D に重なったときの線分 AP の長さを求めなさい。

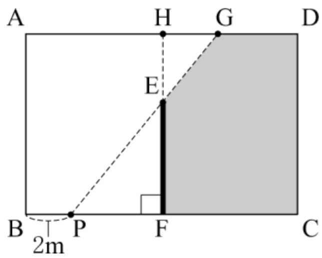
図３



問２ **図４**は，点 P が線分 BF 上を点 B から２ m 移動したときを示したものです。

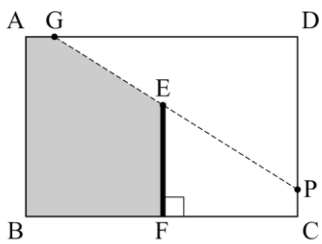
半直線 FE と辺 AD の交点を H としたとき，△PFE と△GHE が相似であることを証明し，線分 DG の長さを求めなさい。

図４



問３ **図５**は，点 P が辺 CD 上を点 C から点 D まで移動するときを示したものです。線分 CP の長さが，線分 AG の長さと等しくなるとき，線分 CP の長さを求めなさい。

図５



解答欄

問１	線分 CG	m
	線分 AP	m
問２	〔証明〕	
	線分 DG	m
問３		m

解答

問１

線分 CG　2　m

線分 AP　6　m

問２

〔証明〕

△PFE と△GHE について，対頂角は等しいので，

∠FEP＝∠HEG…①

辺 AD と辺 BC は平行であるから，平行線の錯角は等しいので

∠EPF＝∠EGH…②

①，②から　２組の角がそれぞれ等しいので

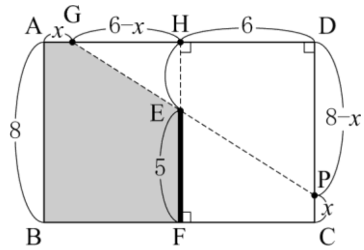
△PFE∽△GHE といえる。

線分 DG　$\frac{18}{5}$　m

問３ $\frac{11-\sqrt{73}}{2}$　m

解説

問３



図のように半直線 FE と辺 AD の交点を H，CP＝AG＝x(m)とすると，

DP＝8－x(m)，GH＝6－x(m)，EH＝3(m)

△GEH∽△GPD より，対応する辺の比は等しいので GH : GD＝EH : PD

すなわち，(6－x) : (12－x)＝3 : (8－x)

整理すると，$x^2-11x+12=0$

これを解くと，$\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\times1\times12}}{2\times1}=\frac{11\pm\sqrt{73}}{2}$

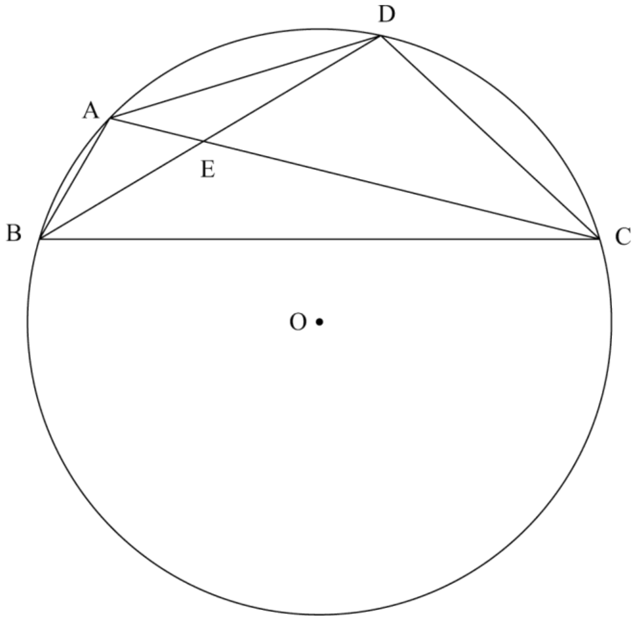
0＜x＜8 より，$x=\frac{11-\sqrt{73}}{2}$　よって，CP＝$\frac{11-\sqrt{73}}{2}$(m)

【問 12】

右の図のように，円 O の周上に４点 A，B，C，D がこの順にある。線分 AC と線分 BD の交点を E とする。また，AD＝CD＝12 cm，DE＝9 cm である。

このとき，次の**問１**～**問３**に答えよ。

（京都府 2020 年度 前期）



問１　△ABD∽△EAD であることを証明せよ。

問２　線分 BE の長さを求めよ。

問３　∠ACD＝30° のとき，線分 AC の長さを求めよ。また，このときの△ABC の面積を求めよ。

解答欄

問１		
問２	cm	
問３	AC＝　cm	
	面積　cm^2	

解答

問１

△ABD と△EAD で

共通な角だから，∠ADB＝∠EDA…①

仮定より，△DAC は二等辺三角形だから

∠ACD＝∠EAD

$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいから，

∠ACD＝∠ABD

よって，∠ABD＝∠EAD…②

①，②から，２組の角が，それぞれ等しいので，

△ABD∽△EAD

問２７　cm

問３

AC＝$12\sqrt{3}$　cm

面積　$28\sqrt{3}$　cm^2

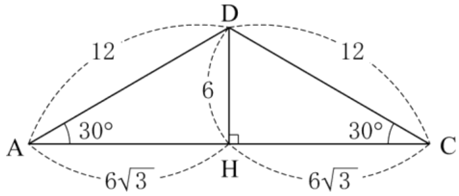
解説

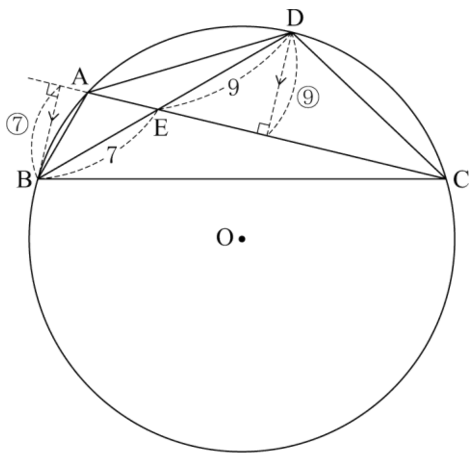
問２

問１より△ABD∽△EAD だから，対応する辺の比は等しいので，BD：AD＝AD：ED　すなわち，BE＝x とすると，$(x+9)$：12＝12：9　これを解いて，x＝7　よって，線分 BE は 7cm。

問３

AD＝CD＝12cm より，△DAC は二等辺三角形となり，∠ACD＝∠CAD＝30°　よって，右図のように，頂点 D から線分 AC に垂線 DH を引くと，△DAH≡△DCH となり，ともに 1：2：$\sqrt{3}$の 3 辺の比を持つ直角三角形とわかる。





したがって，AD＝CD＝12cm より，DH＝6cm，AH＝CH＝$6\sqrt{3}$ cm となり，AC＝$12\sqrt{3}$cm

また，△DAC の面積は，$\frac{1}{2}\times12\sqrt{3}\times6=36\sqrt{3}$cm²

△ABC は△DAC と底辺 AC が共通で，高さの比が 9：7 である。

よって，△DAC：△ABC＝9：7＝$36\sqrt{3}$：△ABC

△ABC＝$28\sqrt{3}$（cm^2）

【問 13】

図１，**図２**において，△ABC は BA＝BC＝6 cm の二等辺三角形であり，頂角∠ABC は鋭角である。円 O は，辺 BC を直径とする円である。

円周率をπとして，次の問いに答えなさい。

（大阪府 B 2020 年度）

図１

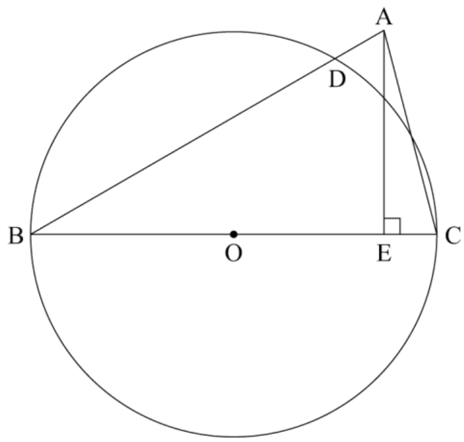
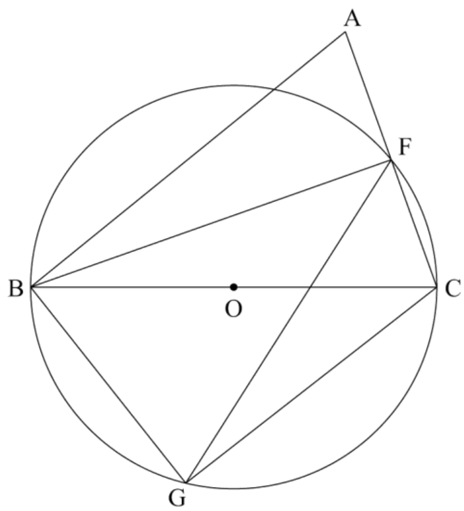


図２



問１　**図１**は，二等辺三角形△ABC の頂角∠ABC の大きさが 30°であるときの状態を示している。

図１において，D は辺 AB と円 O との交点のうち B と異なる点である。E は，A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。

(1)　線分 BE の長さを求めなさい。

(2)　半周より短い弧$\overset{\frown}{BD}$の長さを求めなさい。

問２　**図２**において，F は辺 AC と円 O との交点のうち C と異なる点である。F と B とを結ぶ。G は，C を通り辺 AB に平行な直線と円 O との交点のうち C と異なる点である。G と B，G と F とをそれぞれ結ぶ。

(1)　△ABC∽△BFG であることを証明しなさい。

(2)　FC＝2 cm であるとき，

①　線分 BG の長さを求めなさい。

②　△FGC の面積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問１</td><td>(1)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問２</td><td>(1)</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>①</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>②</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

解答

問１

⑴ $3\sqrt{3}$　cm

⑵ 2π　cm

問２

⑴

〔証　明〕

△ABC と△BFG において

同じ弧に対する円周角は等しいから

∠ACB＝∠BGF…㋐

AB // CG であり，平行線の錯角は等しいから

∠ABC＝∠BCG… ㋑

同じ弧に対する円周角は等しいから

∠BFG＝∠BCG… ㋒

㋑，㋒より　∠ABC＝∠BFG… ㋓

㋐，㋓より，２組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△BFG

⑵

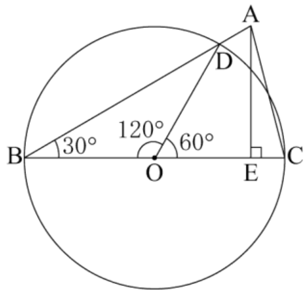
① $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$　cm

② $\dfrac{28\sqrt{2}}{9}$　cm^2

解説

問１

(1)



$\angle ABC = 30°$，$\angle AEB = 90°$より，$\triangle ABE$ において辺の比に着目すると，

$AB : BE = 2 : \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 6 : BE = 2 : \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad BE = 3\sqrt{3}$(cm)

(2)

$\overset{\frown}{BD}$の長さを求めるには，おうぎ形 OBD の中心角$\angle BOD$の大きさを求める必要がある。

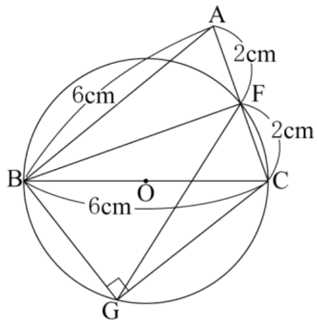
O と D を結ぶと，$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角と中心角の関係より，$\angle COD = 2\angle CBD = 2\angle ABC = 60°$

よって，$\angle BOD = 180° - \angle COD = 120°$だから，円 O の直径が $BC = 6$(cm)であることに注意して，

$\overset{\frown}{BD} = (6 \times \pi) \times \dfrac{120}{360} = 2\pi$(cm)

問２

(2)



①

半円の弧に対する円周角より$\angle BFC = 90°$だから，

$\triangle BCF$ において三平方の定理により，

また，$\triangle ABC$ は二等辺三角形なので$\angle BFC = 90°$より，

$AF = CF = 2$(cm) $\quad \Rightarrow \quad AC = 4$(cm)

(1)より$\triangle ABC \backsim \triangle BFG$ だから，$AB : BF = AC : BG$

$\Rightarrow \quad 6 : 4\sqrt{2} = 4 : BG \quad \Rightarrow \quad BG = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$(cm)

②

$\triangle FGC + \triangle BFG = \triangle BCF + \triangle BCG$ であることに注目して$\triangle FGC$ の面積を求めていく。

まずは，$\triangle BFG$ の面積を求める。$\triangle ABC \backsim \triangle BFG$ であり，その相似比は $AB : BF = 6 : 4\sqrt{2} = 3 : 2\sqrt{2}$

よって面積比は，$3^2 : (2\sqrt{2})^2 = 9 : 8$　すなわち，$\triangle BFG = \dfrac{8}{9}\triangle ABC$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times AC \times BF = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$(cm^2)より，$\triangle BFG = \dfrac{8}{9} \times 8\sqrt{2} = \dfrac{64\sqrt{2}}{9}$(cm^2)

次に，$\triangle BCF$ の面積を求める。①より$\angle BFC = 90°$だから，

$\triangle BCF = \dfrac{1}{2} \times FC \times BF = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$(cm^2)

次に，$\triangle BCG$ の面積を求める。

半円の弧に対する円周角より$\angle BGC = 90°$だから，$\triangle BCG$ において三平方の定理により，

$CG^2 = BC^2 - BG^2 = 6^2 - \left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \dfrac{196}{9} \quad \Rightarrow \quad CG > 0$ より，$CG = \dfrac{14}{3}$(cm)

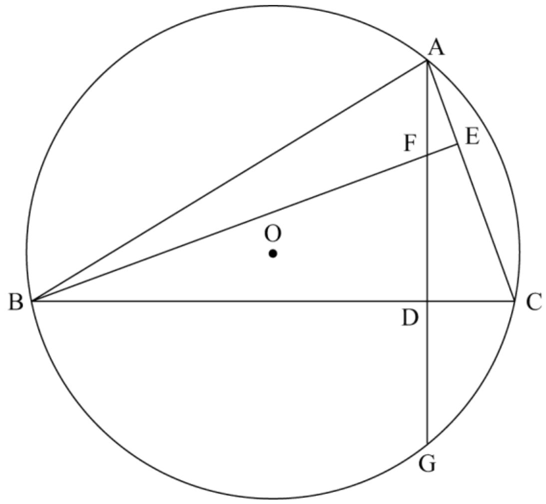
$\triangle BCG = \dfrac{1}{2} \times BG \times CG = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{14}{3} = \dfrac{56\sqrt{2}}{9}$(cm^2)

$\triangle FGC + \triangle BFG = \triangle BCF + \triangle BCG$ より，

$\triangle FGC = \triangle BCF + \triangle BCG - \triangle BFG = 4\sqrt{2} + \dfrac{56\sqrt{2}}{9} - \dfrac{64\sqrt{2}}{9} = \dfrac{28\sqrt{2}}{9}$(cm^2)

【問 14】

右の図で，3 点 A，B，C は円 O の周上にある。点 D は線分 BC 上の点であり，∠ADB＝90°である。点 E は線分 AC 上の点であり，∠AEB＝90°である。また，点 F は線分 AD と線分 BE との交点であり，点 G は，直線 AD と円 O との交点のうち点 A 以外の点である。各問いに答えよ。



（奈良県 2020 年度）

問１　△AFE∽△BCE を証明せよ。

問２　∠AFE＝a°のとき，∠OAB の大きさを a を用いて表せ。

問３　BC＝10 cm，AF＝2 cm，DF＝3 cm のとき，(1)，(2)の問いに答えよ。

(1)　線分 AG の長さを求めよ。

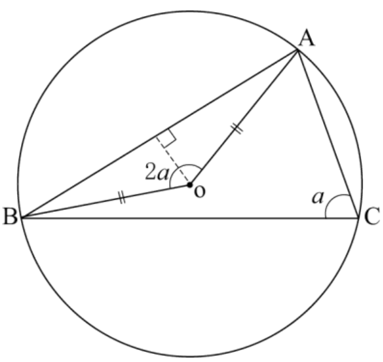
(2)　円 O の面積を求めよ。ただし，円周率はπとする。

解答欄

問１	〔証明〕	
問２		
問３	(1)	cm
	(2)	cm^2

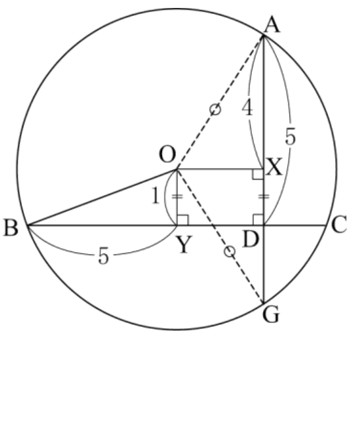
解答
問１
〔証明〕
△AFE と△BCE において
仮定から　∠AEF＝∠BEC＝90°…①
△ACD において，仮定から
∠CAD＝180°－90°－∠ACD…②
△BCE において，仮定から
∠CBE＝180°－90°－∠BCE
よって，
∠CBE＝180°－90°－∠ACD…③
②，③より
∠CAD＝∠CBE
よって，∠FAE＝∠CBE…④
①，④より
２組の角がそれぞれ等しいから
△AFE∽△BCE
問２ 90°－a°
問３
(1) 8　cm
(2) 26π　cm^2
解説
問２
問１より，△AFE∽△BCE だから，∠AFE＝∠BCE＝a°
中心角∠AOB を考えると(**図６**)，円周角と中心角の関係性より，∠AOB＝2∠BCE＝2a°である。ここで，△OAB は二等辺三角形だから，∠OAB＝(180°－2a°)÷2＝90°－a°

図６



問３
(1)
問２より，∠AFE＝a°であり，対頂角は等しいので，∠BFD＝a°である。
ここで，円周角∠AGB を考える。同じ弧$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$に対する円周角は等しく，∠AGB＝∠ACB＝$a$°である。よって，∠AGB＝∠BFD より，△BGF は BG＝BF の二等辺三角形である。また，GF⊥BD より，BD は二等辺三角形の底辺 GF の垂直二等分線である。
よって，GD＝DF＝3(cm)であり，AG＝AF＋FD＋DG＝8(cm)
(2)
O から AG に垂線 OX を下ろすと(**図７**)，△OAG は OA＝OG の二等辺三角形であることから，X は AG の中点なので，AX＝4(cm)である。
同様に，O から BC に垂線 OY を下ろすと，BY＝BC÷2＝5(cm)である。
ここで，四角形 OXDY に注目すると，∠OXD，∠OYD，∠XDY の３つが 90°であることから，∠XOY も 90°である。すなわち，４つの角がすべて 90°であるから，四角形 OXDY は長方形である。よって，OY＝XD＝AD－AX＝5－4＝1(cm)であり，
△BYO で三平方の定理を用いると，$\mathrm{OB}^2＝\mathrm{OY}^2＋\mathrm{BY}^2$　$\mathrm{OB}^2＝1＋25$
OB＞0 より OB＝$\sqrt{26}$であり，これが円の半径である。よって，円 O の面積は，$\pi\times(\sqrt{26})^2＝26\pi$ (cm^2)

図７



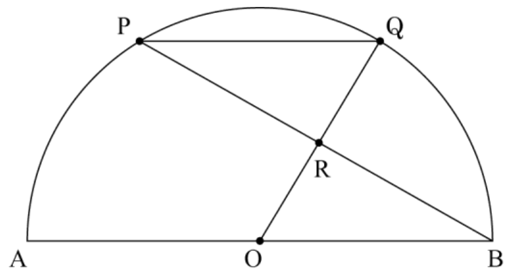
【問 15】

図１のように，点 O を中心とし線分 AB を直径とする半径 3 cm の半円がある。$\overset{\frown}{AB}$上に２点 P，Q があり，A に近い方を P，B に近い方を Q とする。また，線分 BP と線分 OQ の交点を R とする。

次の問１～問３に答えなさい。

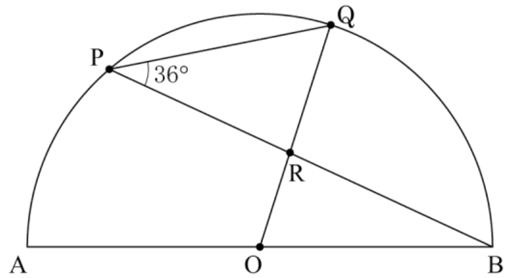
（和歌山県 2020 年度）

図１



問１　PQ＝3 cm，PQ // AB のとき，線分 QR の長さを求めなさい。

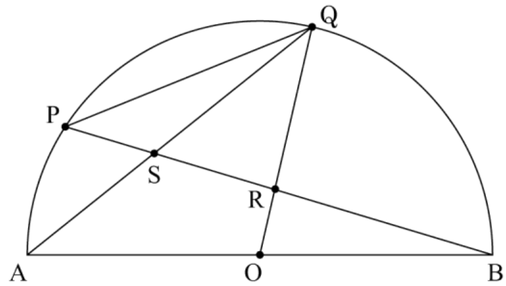
図２



問２　図２のように，∠QPB＝36°のとき，おうぎ形 OBQ の面積を求めなさい。

ただし，円周率はπとする。

図３

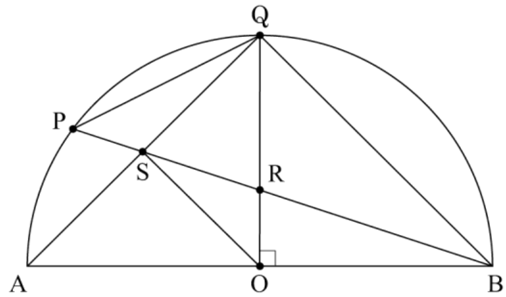


問３　図３のように，線分 AQ と線分 BP の交点を S とする。

次の(1)，(2)に答えなさい。

(1)　△RQS∽△RPQ を証明しなさい。

図４



(2)　図４のように，∠QOB＝90°，OS // BQ となるとき，線分 BR の長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問１</td><td colspan="2">QR＝　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td>問２</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問３</td><td>(1)</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>BR＝　　　　　　cm</td></tr>
</table>

解答

問１QR＝$\dfrac{3}{2}$　(cm)

問２$\dfrac{9}{5}\pi$　(cm^2)

問３

(1)

〔証明〕

△RQS と△RPQ で

∠QRS＝∠PRQ…①

$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}$に対する円周角の定理より

∠RPQ＝∠OAQ…②

△OAQ は OA＝OQ の二等辺三角形だから

∠OAQ＝∠RQS…③

②，③より

∠RQS＝∠RPQ…④

①，④から

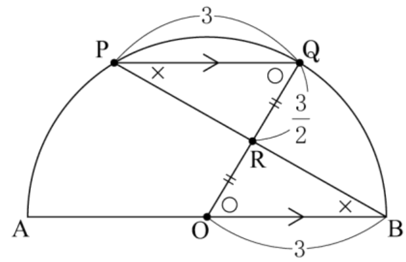
２組の角が，それぞれ等しいので

△RQS∽△RPQ

(2) BR＝$\sqrt{10}$　(cm)

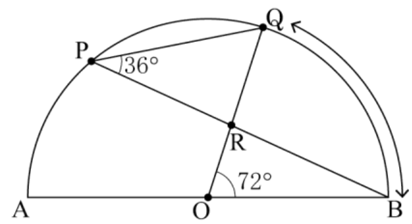
解説

問１



△ROB≡△RQP より，QR＝$\dfrac{1}{2}$×OQ＝$\dfrac{1}{2}$×3＝$\dfrac{3}{2}$

問２



$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}$に対する円周角である∠BPQ＝36° より

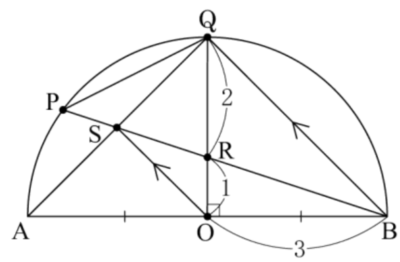
$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}$に対する中心角である∠BOQ＝72°

よって，おうぎ形 OBQ の面積は

$\pi\times 3^2\times\dfrac{72}{360}=\dfrac{9}{5}\pi$

問３

(2)



△ABQ において

OS//BQ より，OS：BQ＝AO：AB＝１：２

△ROS∽△RQB より，OS：QB＝OR：QR＝１：２であるので

OR＝$\dfrac{1}{3}$×OQ＝$\dfrac{1}{3}$×3＝1

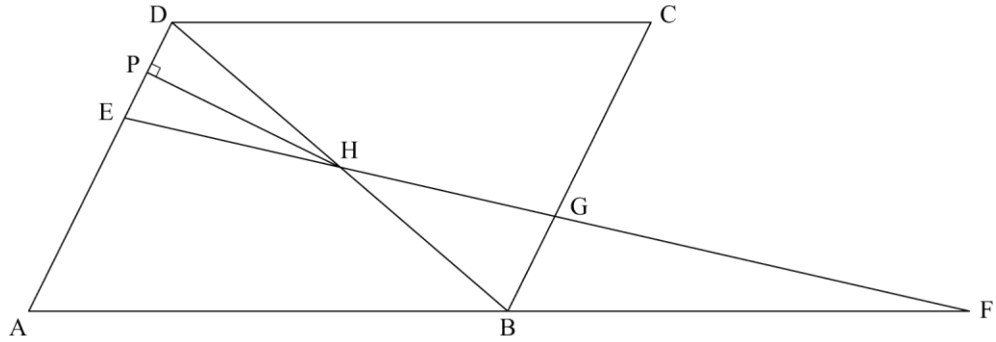
ゆえに，三平方の定理より

BR＝$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

【問 16】

次の図のように，∠DAB が鋭角の平行四辺形 ABCD について，線分 AD を２：１に分ける点を E とする。線分 AB の延長線上に，点 A とは異なる点 F を AB＝BF となるようにとり，点 B と点 F，点 E と点 F をそれぞれ結ぶ。線分 EF と線分 BC の交点を G，線分 EF と平行四辺形 ABCD の対角線 BD の交点を H とする。また，点 H から線分 AD にひいた垂線と線分 AD との交点を P とする。**問１**，**問２**は指示に従って答えなさい。**問３**は □ に適当な数を書きなさい。

（岡山県 2020 年度 一般）



問１　四角形が平行四辺形にならない場合があるのは，**ア**～**エ**のうちではどれですか。一つ答えなさい。

ア　１組の向かいあう辺が，長さが等しくて平行であるとき。

イ　２本の対角線が，それぞれの中点で交わるとき。

ウ　２本の対角線が，長さが等しくて垂直に交わるとき。

エ　２組の向かいあう角が，それぞれ等しいとき。

問２　BG＝ED は，次のように導くことができる。 (1) には，△AFE∽△BFG の証明の過程を書きなさい。また， (2) には適当な数を書きなさい。

△AFE と△BFG において，

(1)

△AFE∽△BFG である。

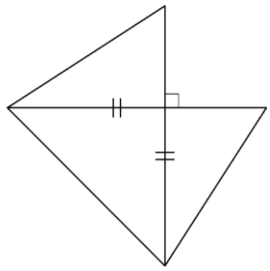
よって，この結果より，BG＝ (2) AE　となるので，BG＝ED　である。

問３　AD＝15 cm，DH＝EH，△BFG の面積が $20\sqrt{6}\text{cm}^2$ のとき，線分 HP の長さは (1) cm であり，線分 AB の長さは (2) cm である。

解答欄

問１			
問２	(1)		
	(2)		
問３	(1)	(cm)	
	(2)	(cm)	

解答
問１ウ
問２
⑴
AE // BG から，平行線の同位角は等しいので
∠EAF＝∠GBF　…(ⅰ)
∠F は共通な角なので
∠AFE＝∠BFG　…(ⅱ)
(ⅰ)，(ⅱ) から
２組の角がそれぞれ等しいので
⑵$\frac{1}{2}$
問３
⑴$4\sqrt{6}$　(cm)
⑵22　(cm)
解説
問１
たとえば右の図形は，**ウ**を満たすが平行四辺形にはならない。
平行四辺形になるためには，対角線が互いの中点で交わっていることが必要。



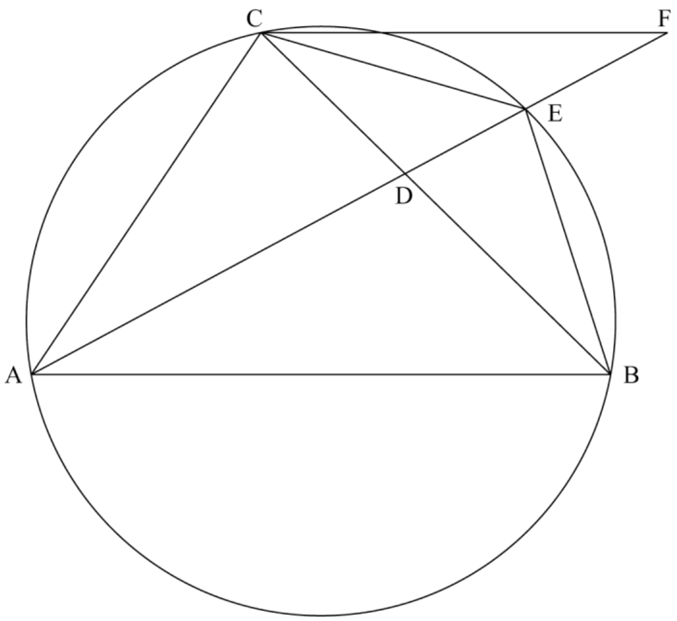
問３
⑴
△HDE と△HBG において，AD//BD より，錯角は等しいから
∠DEH＝∠BGH，∠EDH＝∠GBH
問２より，DE＝BG　１辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△HDE≡△HBG　よって，HE＝HG
△FAE において，GB//EA より，FG：GE＝FB：BA＝1：1 だから
GH：GF＝1：2　△FGB＝2△HBG＝2△HDE
よって，△HDE＝$20\sqrt{6}$÷2＝$10\sqrt{6}$ (cm^2)
DE：EA＝1：2 より，DE＝DA÷(1＋2)＝15÷3＝5 (cm)　DE⊥HP だから
△HDE＝DE×HP÷2＝5×HP÷2＝$10\sqrt{6}$ (cm^2)　よって，HP＝$10\sqrt{6}$÷5×2＝$4\sqrt{6}$ (cm)
⑵
直線 PH と辺 BC の交点を Q とすると，PQ＝2HP＝$4\sqrt{6}$×2＝$8\sqrt{6}$ (cm)
△HDE は，HD＝HE の二等辺三角形，かつ HP⊥DE だから，P は DE の中点である。
よって，DP＝PE＝QB＝2.5 (cm)
線分 PQ を，Q が B に重なるように平行移動させると，線分 EB と一致する。
よって，AE⊥EB　AE＝DA－DE＝10(cm)
△AEB に関する三平方の定理より，$AB^2＝AE^2＋EB^2$＝100＋384＝484
AB＞0 より，AB＝22 cm

【問 17】

下の図のように，AB＝7 cm，BC＝6 cm，CA＝5 cm である三角形 ABC があり，3 つの頂点 A，B，C は同じ円周上にある。∠A の二等分線が，辺 BC，円周と交わる点を，それぞれ D，E とし，点 C を通り辺 AB に平行な直線と直線 AD との交点を F とする。

このとき，次の(1)～(4)の各問いに答えなさい。

（佐賀県 2020 年度 特色）



(1) 線分 CF の長さを求めなさい。

(2) 線分 BD の長さを求めなさい。

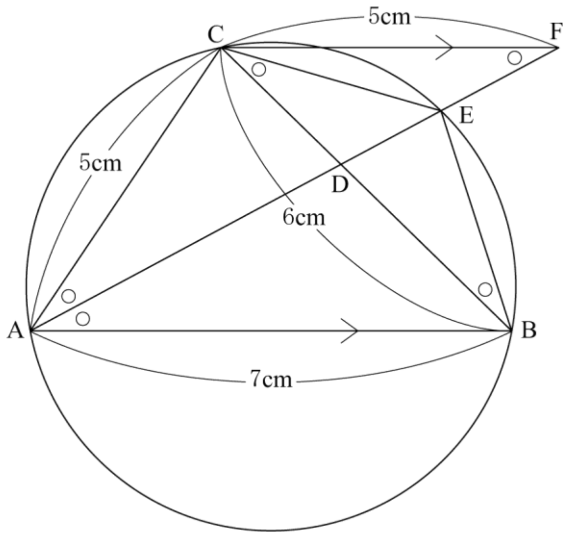
(3) △BED∽△AEB であることを証明しなさい。

(4) AD：DE を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm
(3)	
(4)	AD：DE＝　　：

解答
(1) 5　cm
(2) $\frac{7}{2}$　cm
(3)
△BEDと△AEBにおいて
共通な角だから
∠BED＝∠AEB…①
弧CEに対する円周角は等しいから
∠EBD＝∠EAC
線分AEは，∠Aの二等分線より
∠EAC＝∠EAB
つまり　∠EBD＝∠EAB…②
①，②から
2組の角がそれぞれ等しいので
△BED∽△AEB
(4) AD：DE＝3：1
解説
(1)
線分AEは∠Aの二等分線より
∠FAC＝∠FAB。平行線の錯角は等しいので
∠FAB＝∠AFC。よって∠FAC＝∠AFC となるので，△CAFは二等辺三角形である。ゆえにCA＝CF＝5。



(2)
平行線の錯角は等しいので
∠DAB＝∠DFC
∠DBA＝∠DCFであり，2組の角がそれぞれ等しいので
△DAB∽△DFC
よってAB：FC＝BD：CD＝7：5。
ゆえに
BD＝$6\times\frac{5}{12}=\frac{7}{2}$
(4)
(3)より，△AEB∽△BEDより相似比はAB：BD＝7：$\frac{7}{2}$＝2：1であるので，
面積比は△AEB：△BED＝4：1
よって，△ABD：△EBD＝3：1
ゆえに三角形の底辺の比AD：DE＝3：1

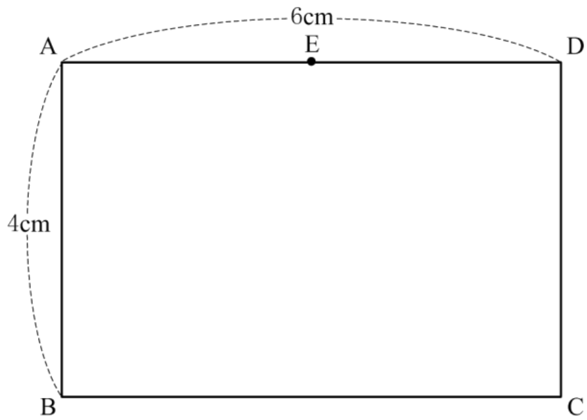
【問 18】

図１～図３のように，長方形 ABCD があり，AB＝4 cm，AD＝6 cm である。辺 AD の中点を E とするとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県 2020 年度）

問１　線分 BE の長さは何 cm か。

図１

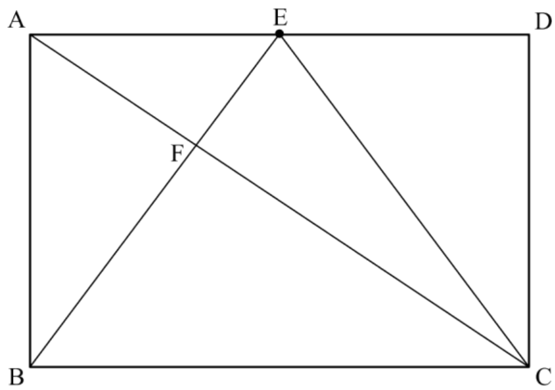


問２　図２のように，線分 AC と線分 BE との交点を F とする。このとき，次の(1)～(3)に答えよ。

(1)　△AEF∽△CBF を示せ。

(2)　△BCF の面積は何 cm^2 か。

図２



(3)　△ABF と面積が等しい三角形を，次の①～④の中から 1 つ選び，その番号を書け。

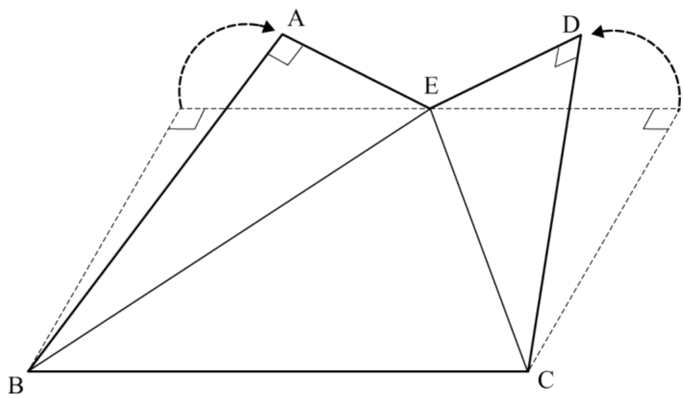
①　△CDE

②　△AEF

③　△ACE

④　△CEF

図３



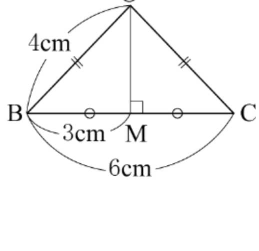
問３　図３のように，図１の長方形 ABCD を線分 BE と線分 CE を折り目として，線分 AE と線分 DE が重なるように折る。そして，点 A と点 D が重なった点を O とするとき，4 つの点 O，B，C，E を頂点とする三角錐 OBCE の表面積は何 cm^2 か。

解答欄

問１		cm
問２	(1)	
	(2)	cm^2
	(3)	
問３		cm^2

解答
問１５　〔cm〕
問２
(1)
△AEF と△CBF において
∠AEF＝∠CBF (平行線の錯角) …①
∠AFE＝∠CFB (対頂角) …②
①，②より
２組の角がそれぞれ等しいので
△AEF∽△CBF
(2)８　〔cm^2〕
(3)④
問３ $24+3\sqrt{7}$　〔cm^2〕
解説
問２
(2) AE//BC より，AF : CF＝AE : CB＝1 : 2 である。△ABC＝$\frac{1}{2}\times6\times4=12$($cm^2$)であり，線分比と面積比の関係性を考えると，AF : CF＝1 : 2 より，△BCF＝$\frac{2}{3}$×△ABC＝8(cm^2)
(3) AE//BC より，△ABE＝△ACE　また，△ABE＝△ABF＋△AFE，△ACE＝△CEF＋△AFE より，△ABF＝△CEF　よって，正解は④である。
問３
三角錐 OBCE の表面積は 4 つの三角形，△OBE，△EBC，△OEC，△OBC の面積を合計したものである。長方形 ABCD を折り曲げたことを考えると，(長方形 ABCD の面積)＝△OBE＋△EBC＋△OEC となるので，これら 3 つの三角形の面積の合計は 24(cm^2)である。次に，残る△OBC の面積について考える。△OBC は OB＝OC＝4(cm)の二等辺三角形である。点 O から BC に垂線 OM を下ろす(図４)。二等辺三角形の性質より，BM＝BC÷2＝3(cm)であり，△OBM で三平方の定理を使うと，$4^2=3^2+OM^2$　OM＞0 より，OM＝$\sqrt{7}$(cm)である。

図４



よって，△OBC＝$\frac{1}{2}$×BC×OM＝$3\sqrt{7}$(cm^2)であり，三角錐 OBCE の表面積は $24+3\sqrt{7}$(cm^2)

【問 19】

図１のように，１辺の長さが８cm の正方形 ABCD の折り紙がある。図２のように，この折り紙の頂点 B を辺 AD の中点と重なるように折ったとき，頂点 B，C が移動した点をそれぞれ P，Q とする。また，折り目となる直線と辺 AB，辺 CD との交点をそれぞれ E，F とし，線分 PQ と線分 DF との交点を G とする。このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県 2020 年度）

図１

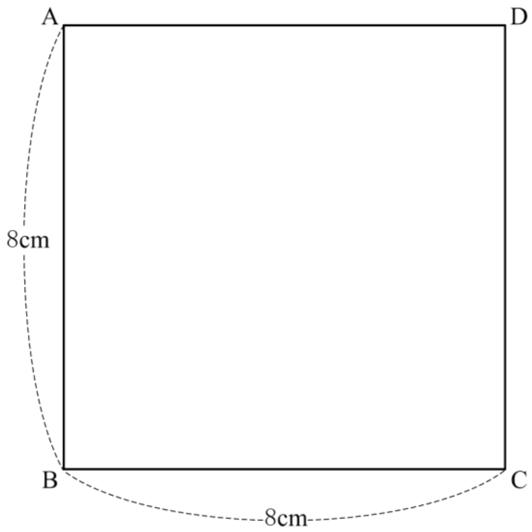
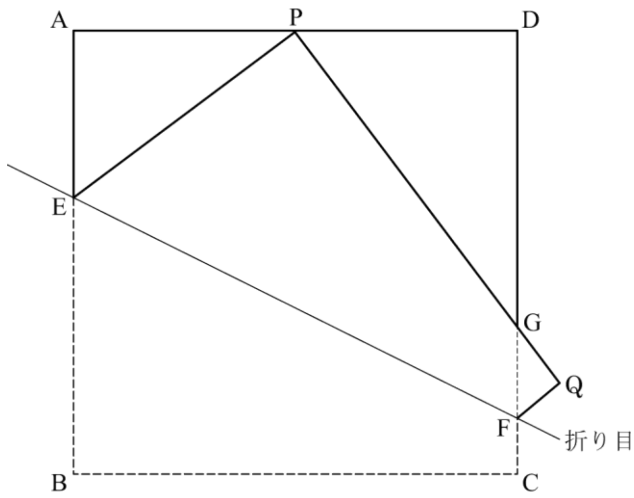


図２



問１　AE＝x cm とするとき，次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　BE の長さを x を用いて表せ。

(2)　EB＝EP となることを利用して，x の値を求めよ。

問２　△APE∽△DGP であることを証明せよ。

問３　線分 FQ の長さは何 cm か。

問４　△CFQ の面積は何 cm^2 か。

解答欄

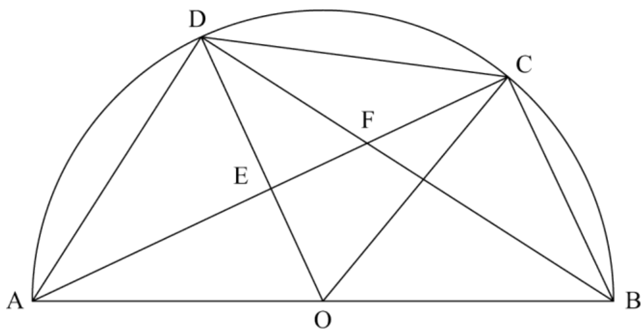
問１	(1)	cm
	(2)	$x=$
問２		
問３	cm	
問４	cm^2	

解答
問１
(1)８－x　〔cm〕
(2)x＝３
問２
△APE と△DGP において
∠EAP＝∠PDG＝90°（正方形の内角）…①
∠EPG＝90° より
∠APE＝180°－(90°＋∠DPG)
＝90°－∠DPG …②
△DGP において
∠DGP＝90°－∠DPG …③
②，③より
∠APE＝∠DGP …④
①，④より
２組の角がそれぞれ等しいので
△APE∽△DGP
問３１　〔cm〕
問４$\frac{2}{5}$　〔cm^2〕
解説
問１
(1)
AE＋BE＝８より，BE＝８－AE＝８－x(㎝)
(2)
AP＝4，PE＝BE＝８－x であり，△APE で三平方の定理より，$PE^2=AE^2+AP^2$　$(8-x)^2=x^2+4^2$　$x>0$ より，x＝３
問２
△APE と△DGP において，∠PAE＝∠GDP＝90°　また，∠APE＋∠AEP＋90°＝180°，
∠APE＋∠DPG＋90°＝180°より，∠AEP＝∠DPG だから，２組の角がそれぞれ等しいので，
△APE∽△DGP
問３
AE：DP＝EP：PG より，PG＝$\frac{20}{3}$であり，PG＋GQ＝８より，GQ＝$\frac{4}{3}$である。
次に，△DGP と△QGF において，∠GDP＝∠GQF＝90°，対頂角は等しいので∠DGP＝∠QGF だから，
△DGP∽△QGF であり，△APE∽△QGF である。よって，AE：QF＝PA：GQ より，FQ＝1(cm)
問４
△GFQ と△CFQ に注目すると，△GFQ：△CFQ＝GF：CF となることがわかる。
CF＝FQ＝1(cm)　また，問３より△APE∽△QGF だから，PE：GF＝EA：FQ より，GF＝$\frac{5}{3}$(cm)
PA：GQ＝EA：FQ より，GQ＝$\frac{4}{3}$(cm)　さらに，△GFQ＝$\frac{1}{2}$×FQ×GQ＝$\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$($cm^2$)
△GFQ：△CFQ＝GF：CF　$\frac{2}{3}$：△CFQ＝$\frac{5}{3}$：1 より，△CFQ＝$\frac{2}{5}$(cm^2)

【問 20】

右の図は，線分 AB を直径とする半円で，点 O は AB の中点である。点 C は $\overset{\frown}{AB}$ 上にあり，点 D は $\overset{\frown}{AC}$ 上にあって，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$ である。また，線分 AC と線分 OD，線分 BD との交点をそれぞれ E，F とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。



（熊本県 2020 年度）

問１ 美咲（みさき）さんは，△AFD∽△CDE であることを証明するため，次のように，最初に△OAE≡△OCE を示し，それをもとにして証明した。$\boxed{\text{ア}}$ には当てはまる言葉を書き，$\boxed{\text{イ}}$ には証明の続きを書いて，証明を完成しなさい。

証明

△OAE と△OCE において

共通な辺だから

OE＝OE …………①

OA，OC はともに円の半径だから

OA＝OC …………②

∠AOE と∠COE は，それぞれ $\overset{\frown}{AD}$ と $\overset{\frown}{DC}$ に対する中心角で，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$ だから

∠AOE＝∠COE …………③

①，②，③より，$\boxed{\quad\text{ア}\quad}$ がそれぞれ等しいから

△OAE≡△OCE …………④

よって，∠AEO＝∠CEO であり，∠AEO＋∠CEO＝180° だから

∠AEO＝∠CEO＝90° …………⑤

ここで，△AFD と△CDE において

$\boxed{\quad\text{イ}\quad}$

よって，△AFD∽△CDE

問２ AB＝7 cm，BC＝3 cm のとき，△AFD の面積は，△CDE の面積の何倍であるか，求めなさい。

解答欄

問１	ア	
	イ	
問２	倍	

解答

問１

ア

２組の辺とその間の角

イ

AB は半円の直径だから

∠ADF＝90°…⑥

⑤より，∠CED は∠AEO の対頂角だから

∠CED＝90°…⑦

⑥，⑦より

∠ADF＝∠CED…⑧

∠DAF と∠ECD は，それぞれ$\overset{\frown}{DC}$と$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角で，$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{AD}$だから

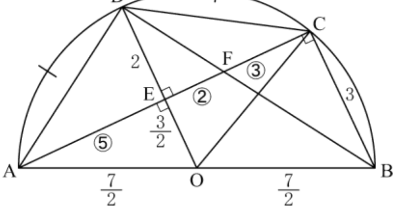
∠DAF＝∠ECD…⑨

⑧，⑨より，２組の角がそれぞれ等しい。

問２ $\frac{7}{5}$ 倍

解説

問２



△AOE∽△ABC より，OE:BC＝AO:AB＝1:2 であるので

OE＝$\frac{3}{2}$　よって，DE＝OD－OE＝$\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$

また△DEF∽△BCF より，EF：CF＝DE：BC＝２：３

ここで△OAE≡△OCE より，AE＝CE であるので，

AE：EF：CF＝５：２：３

ゆえに，△AFD と△CDE は底辺の比が７：５で，高さが等しいので，

面積の比も７：５

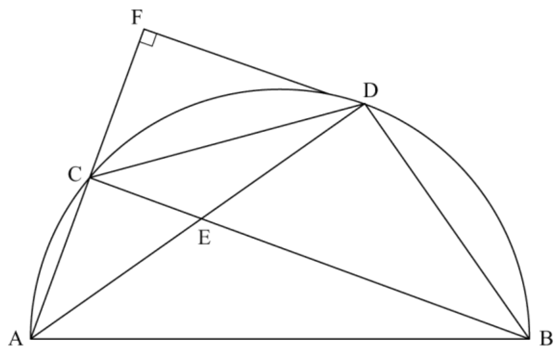
いいかえると，△AFD の面積は△CDE の面積の$\frac{7}{5}$倍

【問 21】

右の図は，線分 AB を直径とする半円で，点 C は$\overset{\frown}{AB}$上にある。$\overset{\frown}{BC}$上に点 D を，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$となるようにとり，線分 AD と線分 BC との交点を E とする。また，D から直線 AC にひいた垂線と直線 AC との交点を F とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2020 年度）



問１　△CDF∽△EAC であることを証明しなさい。

問２　図において，△CDF と相似な三角形を，△EAC 以外に 3 つ答えなさい。

問３　AB＝9 cm，AC＝3 cm のとき，点 C が線分 AF の中点になることを，次のように説明した。次の $\boxed{}$ に説明の続きを書いて，説明を完成しなさい。

〔説明〕

△ABC で三平方の定理を利用すると，

BC＝$6\sqrt{2}$cm となる。

ここで，線分 AE は∠BAC の二等分線だから，

$\boxed{}$

よって，AC＝CF である。

つまり，点 C は線分 AF の中点である。

解答欄

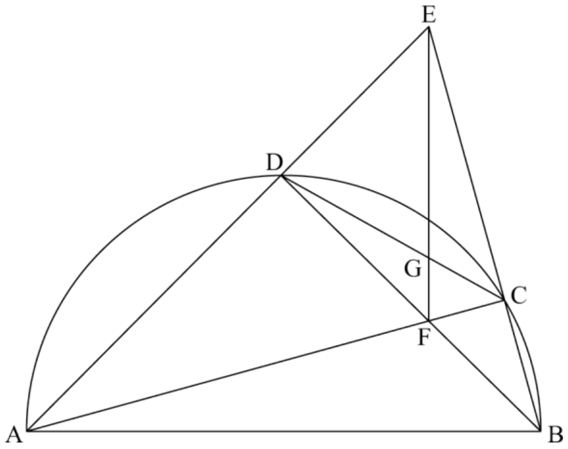
問１	〔証明〕		
問２			
問３			

解答
問１
〔証明〕
△CDF と△EAC において
AF⊥DF だから
∠DFC＝90°…①
AB は半円の直径だから
∠ACE＝90°…②
①，②より
∠DFC＝∠ACE…③
また，∠ACE＝90°だから
∠DCF＝90°－∠DCE…④
∠AEC＝90°－∠CAE…⑤
∠DCE と∠CAE は，それぞれ$\overset{\frown}{BD}$と$\overset{\frown}{DC}$に
対する円周角で，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$だから
∠DCE＝∠CAE…⑥
④，⑤，⑥より
∠DCF＝∠AEC…⑦
③，⑦より
２組の角がそれぞれ等しいから
△CDF∽△EAC
問２△DAF・△BAD・△EBD
問３
AB：AC＝BE：EC＝３：１であり，EC＝$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$cm
よって，△EAC において，三平方の定理から
AE＝$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$cm
△EAC∽△BAD だから AE：AB＝AC：AD
よって，AD＝$3\sqrt{6}$cm
△EAC∽△DAF だから
AC：AF＝AE：AD＝１：２
解説
問２
△CDF と△DAF において，問１より∠CDF＝∠DAF, ∠DFC＝∠AFD となるので,
△CDF∽△DAF
△CDF と△BAD において, AB は半円の直径だから，∠DFC＝90°＝∠ADB，問１と$\overset{\frown}{DC}$の円周角と$\overset{\frown}{BD}$の円周角が等しいことより，∠FDC＝∠CAD＝∠DAB となるので,
△CDF∽△BAD
△CDF と△EBD において，AB は半円の直径だから，∠DFC＝90°＝∠BDE，問１と$\overset{\frown}{DC}$の円周角と$\overset{\frown}{BD}$の円周角が等しいことより，∠FDC＝∠CAD＝∠DBE となるので,
△CDF∽△EBD

【問 22】

下の**図**のように，線分 AB を直径とする半円の弧の上に点 C，D をとり，直線 AD と直線 BC の交点を E とする。また，線分 BD と線分 AC の交点を F とし，線分 EF と線分 CD の交点を G とする。

図



次の**問１**，**問２**に答えなさい。

（大分県 2020 年度）

問１　△ADF∽△BCF であることを証明しなさい。

問２　AD＝5 cm，DE＝3 cm，BC＝2 cm とする。
次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

⑴　線分 CE の長さを求めなさい。

⑵　線分 EG の長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問１</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問２</td><td>⑴</td><td>(cm)</td></tr>
<tr><td>⑵</td><td>(cm)</td></tr>
</table>

解答

問１

〔証明〕

△ADF と△BCF において

対頂角は等しいので

∠AFD＝∠BFC…①

半円の弧に対する円周角は 90°であるので

∠ADF＝∠BCF＝90°…②

①，②から

２組の角がそれぞれ等しいので

△ADF∽△BCF

問２

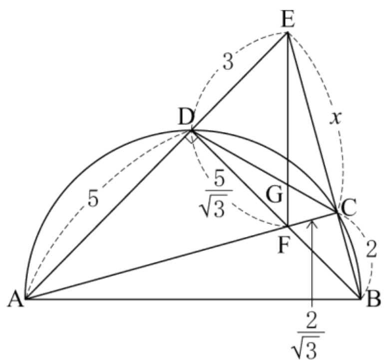
⑴ 4　(cm)

⑵ $\dfrac{12\sqrt{39}}{23}$　(cm)

解説

問２

⑴



CE＝x cmとおく。半円の弧に対する円周角は 90°だから，∠ADB＝∠ACB＝90°より，∠ACE＝∠BDE＝90°

$\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$に対する円周角より，∠EAC＝∠EBD

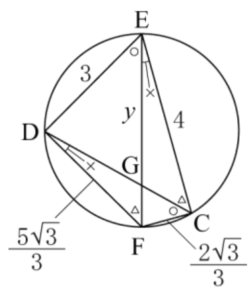
２組の角がそれぞれ等しいので△ACE∽△BDE

CE：DE＝AE：BE　⇒　$x：3＝8：(x+2)$

⇒　$x(x+2)=24$　⇒　$x^2+2x-24=0$　⇒　$x>0$ より

$x=4$(cm)

⑵



⑴より△ACE は AE：EC＝8：4＝2：1，∠ACE＝90°の直角三角形なので，辺の比の性質から∠EAC＝30°であることがわかる。

直角三角形 ADF に注目して，

AD：DF＝$\sqrt{3}$：1　⇒　DF＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$×AD＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times 5=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$(cm)

△ACE∽△BDE より，∠EAC＝∠EBD＝30°だから，同様にして，直角三角形 BCF に注目して，

BC：CF＝$\sqrt{3}$：1　⇒　CF＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$×BC＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times 2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$(cm)

ここで四角形 CEDF に注目すると，∠EDF＝∠ECF＝90°なので，４点 C，E，D，F は同一円周上にあり，その円の直径は EF となることがわかる。

ここで，EG＝y(cm)とおく。**問１**と同様にして，△GED∽△GCF，△GEC∽△GDF である。

△GED∽△GCF より，EG：CG＝ED：CF＝3：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$＝$3\sqrt{3}$：2 であり，

y：CG＝$3\sqrt{3}$：2　⇒　CG＝$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\times y=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}y$(cm)

また，△GEC∽△GDF より，CG：FG＝CE：FD＝4：$\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$＝$4\sqrt{3}$：5

であり，$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}y$：FG＝$4\sqrt{3}$：5　⇒　FG＝$\dfrac{5}{4\sqrt{3}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{9}y=\dfrac{5}{18}y$(cm)

よって，EF＝EG＋FG＝$y+\dfrac{5}{18}y=\dfrac{23}{18}y$

半円の弧に対する円周角は 90°なので，∠ECF＝90°

△EFC において，三平方の定理より，$\left(\dfrac{23}{18}y\right)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+4^2=\dfrac{52}{3}$

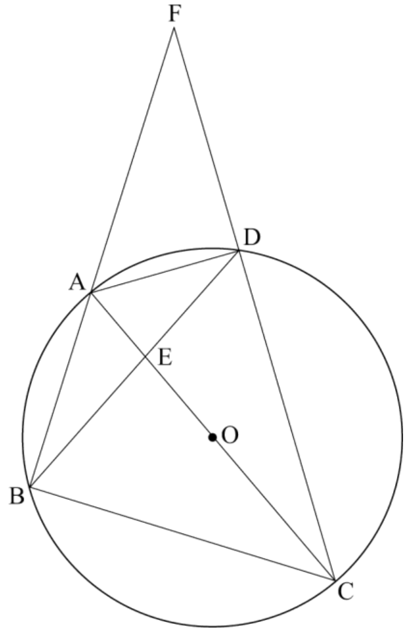
$y>0$ すなわち，$\dfrac{23}{18}y>0$ より，$\dfrac{23}{18}y=\sqrt{\dfrac{52}{3}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$　⇒　$y=\dfrac{12\sqrt{39}}{23}$(cm)

【問 23】

右の図のように，四角形 ABCD の４点 A，B，C，D が円 O の円周上にあり，対角線 AC は円 O の直径である。点 E は，線分 AC と線分 BD の交点であり，点 F は，直線 AB と直線 CD の交点である。また，AB＝4 cm，CD＝7 cm，DF＝5 cm とする。

このとき，次の**問１**～**問４**に答えなさい。

（宮崎県 2020 年度）



問１　∠ABD＝24°，∠CED＝100°のとき，∠ACB の大きさを求めなさい。

問２　△FBD∽△FCA であることを証明しなさい。

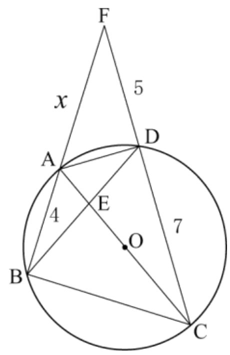
問３　線分 AF の長さを求めなさい。

問４　△ADE の面積は，△ADF の面積の何倍になりますか。

解答欄

問１	∠ACB＝　　　　　度
問２	〔証明〕 △FBD と△FCA で，
問３	cm
問４	倍

解答
問１ $\angle$ACB＝34　度
問２
〔証明〕
△FBD と△FCA で
$\angle$F は共通であるから
$\angle$BFD＝$\angle$CFA　…①
$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角は等しいから
$\angle$FBD＝$\angle$FCA　…②
①，②から
２組の角が，それぞれ等しいので
△FBD∽△FCA
問３ 6　cm
問４ $\dfrac{14}{45}$　倍
解説
問３
AF＝x とおく。
△FAD∽△FCB より，AF：CF＝DF：BF であるので
$x：12＝5：(4+x)$
$x(4+x)=60$
$x^2+4x-60=0$
$(x-6)(x+10)=0$
$x>0$ より，AF＝6



問４
問３より
△FAD∽△FCB であり
相似比 AD：CB＝1：2
また△EAD∽△EBC であり
相似比 EA：EB＝AD：CB＝1：2＝4：8
また△EAB∽△EDC であり
相似比 EA：ED＝AB：DC＝4：7
以上より，EB：ED：BD＝8：7：15
ゆえに，△ADE＝△ABD$\times\dfrac{7}{15}$
＝△ADF$\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{7}{15}$
＝△ADF$\times\dfrac{14}{45}$