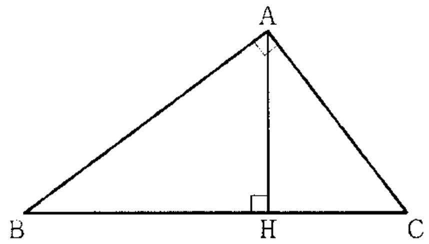
4．相似の証明と長さ･求積などの複合問題 【2010 年度出題】

【問 1】

図のように，正三角形 ABC の辺 BC 上に点 D をとり，AD を 1 辺とする正三角形 ADE をつくる。また，辺 DE と辺 AC の交点を F とする。

次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県 2010 年度 後期）



(1) △ABD と△ACE が合同になることを次のように証明した。

[あ] ～ [え] にあてはまる式やことばや角を入れなさい。

〔証明〕
△ABD と△ACE で
△ABC は正三角形だから
[あ] …①
同様に，△ADE は正三角形だから
AD＝AE …②
また，△ABC，△ADE は正三角形だから
[い] ＝60°
∠BAD ＝60°－ [う] …③
∠CAE ＝60°－ [う] …④
③，④から
∠BAD＝∠CAE …⑤
①，②，⑤から， [え] が等しいので
△ABD≡△ACE

(2) AB＝6 cm，DC＝2 cm のとき，CF の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	あ	
	い	
	う	
	え	
(2)	cm	

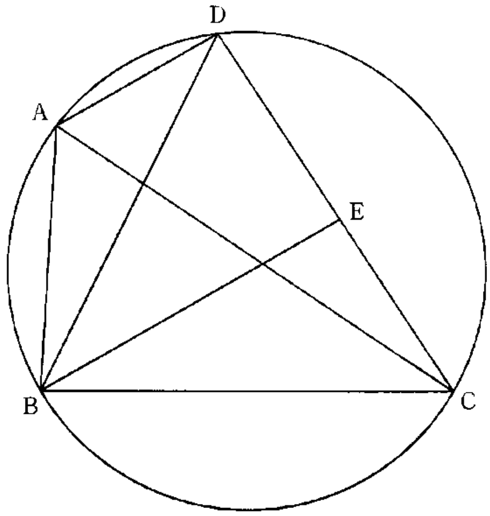
解答
(1)
㋐ AB＝AC
㋑ ∠BAC＝∠DAE
㋒ ∠DAC
㋓ 2 組の辺とそのはさむ角
(2) $\frac{4}{3}$ cm
解説
(2)
△DCF と△AEF において
∠DCF＝∠AEF＝60°
対頂角より∠DFC＝∠AFE だから
2 組の角がそれぞれ等しいので
△DCF∽△AEF
よって∠CDF＝∠EAF
△ABD と△DCF において
∠ABD＝∠DCF＝60°
∠BAD＝∠CAE＝∠EAF＝∠CDF
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABD∽△DCF
よって AB : DC＝BD : CF
6 : 2＝(6－2) : CF
6CF＝2×4
CF＝$\frac{4}{3}$cm

【問 2】

図のように，4 点 A, B, C, D が，この順序で円の周上にあり，AB ＜CD となっています。また，B を通り線分 AD に平行な直線をひき，線分 CD との交点を E とします。

このとき，△ABC∽△DEB であることを証明しなさい。

（岩手県　2010 年度）



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

△ABC と△DEB において

$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角が等しいから

∠BAC＝∠EDB…(1)

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角が等しいから

∠ACB＝∠ADB…(2)

平行線の錯角は等しいから

∠ADB＝∠DBE…(3)

(2), (3)から

∠ACB＝∠DBE…(4)

(1), (4)より

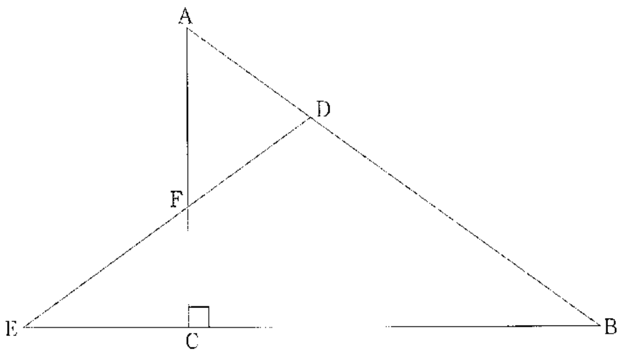
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABC∽△DEB
解説
△ABC と△DEB において
弧 BC に対する円周角より
∠BAC＝∠EDB…①
弧 AB に対する円周角より
∠ACB＝∠ADB
AD // BE より
平行線の錯角は等しいから
∠ADB＝∠DBE
よって∠ACB＝∠DBE…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△DEB

【問 3】

図のような，∠ACB＝90° の直角三角形 ABC があります。AC＝6 cm，BC＝8 cm とし，辺 AB 上に点 D を，AD＝3 cm となるようにとります。また，直線 BC 上に，DB＝DE となる点 E を，点 B と一致しないようにとり，辺 AC と線分 DE との交点を F とします。

あとの(1)～(4)の問いに答えなさい。

（宮城県　2010 年度）



(1) 辺 AB の長さを求めなさい。

(2) △ABC∽△FEC であることを証明しなさい。

(3) 線分 EF の長さを求めなさい。

(4) 点 C と点 D を結ぶ線分をひきます。△CDF の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	〔証明〕
(3)	cm
(4)	cm^2

解答

(1)　10 cm

(2)

〔証明〕

△ABC と△FEC において

∠ACB＝90°　より

∠ACB＝∠FCE＝90°　…①

DB＝DE より

△DEB は二等辺三角形であるから

∠DBE＝∠DEB

つまり∠ABC＝∠FEC…②

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△FEC

(3)　4 cm

(4)　$\frac{72}{25}$ (または 2.88) cm^2

解説

(3)

D から BE に垂線 DH をひく。

DB＝DE＝10－3＝7cm

△ABC で DH // AC より

BH : BC＝BD : BA

BH : 8＝7 : 10　BH＝$\frac{28}{5}$ cm

CH＝8－$\frac{28}{5}$＝$\frac{12}{5}$ cm

△DEB は DB＝DE の二等辺三角形だから EH＝BH

よって EC＝$\frac{28}{5}$－$\frac{12}{5}$＝$\frac{16}{5}$ cm

△ABC∽△FEC より

BA : EF＝BC : EC

10 : EF＝8 : $\frac{16}{5}$

8EF＝10×$\frac{16}{5}$

EF＝4 cm

(4)

△ABC で

DH // AC より

DH : AC＝BD : BA

DH : 6＝7 : 10

DH＝$\frac{21}{5}$ cm

DF＝7－4＝3cm

△CDF＝$\frac{3}{7}$△DEC＝$\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}\times$EC×DH

$=\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}\times\frac{21}{5}$

$=\frac{72}{25}$ cm^2

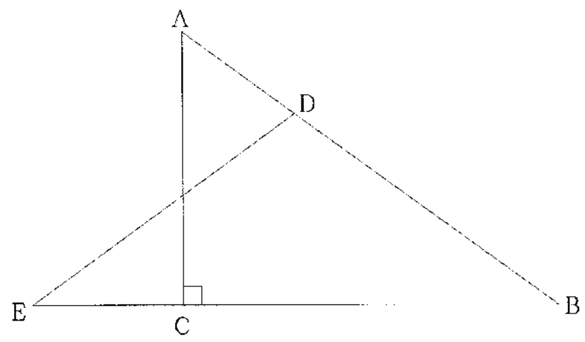
【問 4】

図1のような，AB：BC＝5：4，∠ACB＝90° の直角三角形 ABC があり，辺 AB 上に点 D をとります。また，直線 BC 上に，DB＝DE となる点 E をとります。ただし，点 D，E は，どちらも点 B と一致しないようにとります。

あとの(1)，(2)の問いに答えなさい。

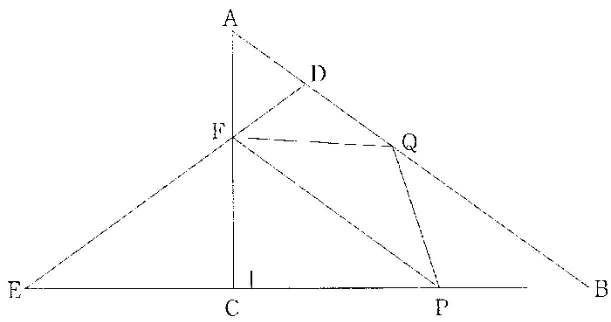
（宮城県 2010 年度）

図1



(1) 線分 BD と線分 BE の長さの比を求めなさい。

図2



(2) 図2は，図1において，AD：DB＝1：4 とし，辺 AC と線分 DE との交点を F としたものです。また，辺 BC 上に点 P を，点 B と一致しないようにとり，辺 AB 上に点 Q を，∠FPQ＝∠ABC となるようにとり，△FPQ をつくります。

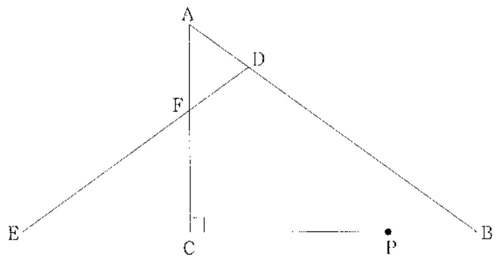
あとの①～③の問いに答えなさい。

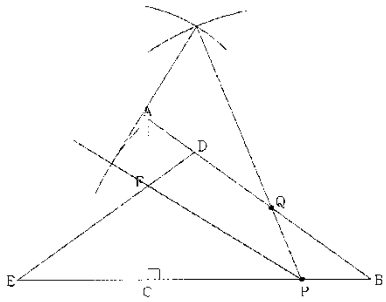
① 点 P が解答用紙の図の位置にあるとき，点 Q を，△ABC と合同な三角形を作図することにより求めなさい。作図は，解答用紙の図に行い，点 Q の位置を示す文字 Q も書きなさい。なお，作図に用いた線は消さずに残しなさい。

② △FEP∽△PBQ であることを証明しなさい。

③ AB＝10 cm とします。PQ＝QF となるとき，線分 BP の長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">BD:BE＝　　　　　:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>①</td><td>〔図〕

</td></tr>
<tr><td>②</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>③</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
(1) BD:BE＝5:8
(2)
①


②
〔証明〕
△FEP と△PBQ において
DB＝DE より△DEB は二等辺三角形であるから
∠DEB＝∠DBE
つまり∠FEP＝∠PBQ…①
三角形の外角は，それととなり合わない 2 つの内角の和に等しいから
∠EPQ＝∠PBQ＋∠BQP
∠EPF＋∠FPQ
＝∠PBQ＋∠BQP
∠FPQ＝∠ABC より
∠FPQ＝∠PBQ
よって∠EPF＝∠BQP…②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△FEP∽△PBQ
③
$\frac{15}{4}$ (または 3.75)cm
解説
(1)
D から BE に垂線 DH をひく。
△ABC∽△DBH になるので BD:BH＝BA:BC＝5:4
また△DBE は DE＝DB だから EH＝BH
よって BD:BE＝5:4×2＝5:8
(2)
③
PQ＝QF より∠PFQ＝∠FPQ＝a° とおくと
∠FPQ＝∠ABC＝∠DEB＝a° だから
△QFP∽△DEB
よって PQ:FP＝BD:EB＝5:8
次に AD:DB＝1:4，AB＝10 cm より BD＝10×$\frac{4}{5}$＝8cm
AB:BC＝5:4 より 10:BC＝5:4　BC＝8 cm
BD:BE＝5:8 より 8:BE＝5:8　BE＝$\frac{64}{5}$ cm
EC＝$\frac{64}{5}$－8＝$\frac{24}{5}$ cm
△ABC∽△FEC だから FE:EC＝AB:BC　FE:$\frac{24}{5}$＝5:4　FE＝6 cm
△FEP∽△PBQ より EF:BP＝FP:PQ　6:BP＝8:5　BP＝$\frac{30}{8}$＝$\frac{15}{4}$ cm

【問 5】

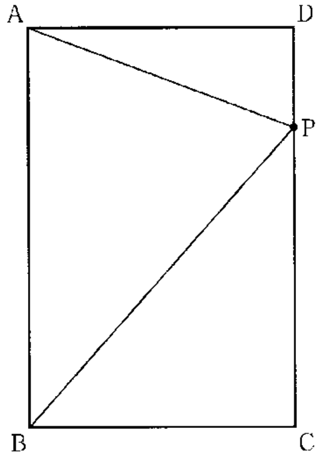
図1で，四角形 ABCD は，AB＞AD の長方形である。点 P は辺 CD 上にある点で，頂点 C，頂点 D のいずれにも一致しない。頂点 A と点 P，頂点 B と点 P をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

（東京都　2010 年度）

問1　図1において，AB＝BP，△BPA の内角である∠BAP の大きさを a° とするとき，△PBC の内角である∠PBC の大きさを a を用いた式で表せ。

図1



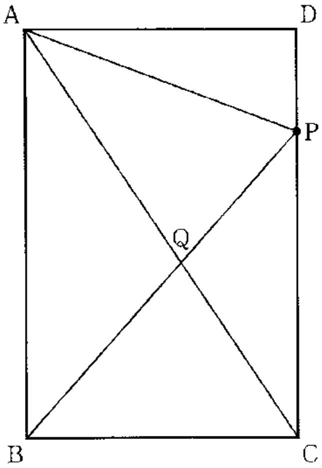
問2　右の図2は，図1において，頂点 A と頂点 C を結び，線分 BP との交点を Q とした場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　△ABQ∽△CPQ　であることを証明せよ。

(2)　図2において，頂点 C を通り線分 AP に平行な直線を引き，線分 BP との交点を R とした場合を考える。CP:PD＝2:1 のとき，線分 QR の長さは，線分 BP の長さの何分のいくつか。

図2



解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">度</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>〔証明〕
△ABQ と△CPQ において，

△ABQ∽△CPQ</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td></td></tr>
</table>

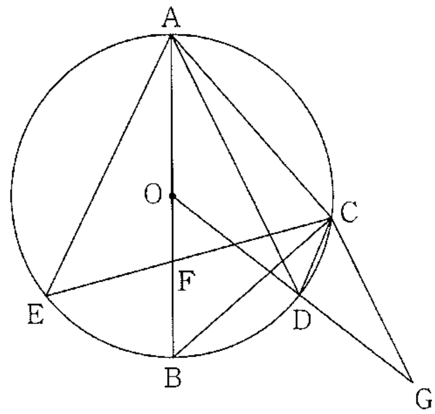
解答
問1　$(2a-90)$度
問2
(1)
〔証明〕
△ABQ と△CPQ において
四角形 ABCD は長方形だから AB // PC
平行線の錯角は等しいから
∠ABQ＝∠CPQ…①
∠BAQ＝∠PCQ…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABQ∽△CPQ
(2)　$\frac{4}{15}$
解説
問1
△BPA は AB＝BP の二等辺三角形より
$\angle BPA=\angle BAP=a^\circ$
よって$\angle ABP=180^\circ-2a^\circ$
$\angle PBC=90^\circ-(180^\circ-2a^\circ)=2a^\circ-90^\circ$
問2
(2)
PC // AB より
$CQ:AQ=CP:AB=\underline{PQ:BQ}=2:3=\underline{6:9}$
CR // PA より
$\underline{QR:QP}=CQ:AQ=2:3=\underline{4:6}$
よって $QR:PQ:BQ=4:6:9$
$QR:BP=4:(6+9)=4:15$
$QR=\frac{4}{15}BP$

【問 6】

図のように，線分 AB を直径とする円 O の周上に，2 点 A, B とは異なる点 C を AC＞BC となるようにとり，点 A をふくまない $\overset{\frown}{BC}$ 上に 2 点 B, C とは異なる点 D をとる。また，点 C をふくまない $\overset{\frown}{AB}$ 上に点 E を∠BAD＝∠BAE となるようにとり，線分 AB と線分 CE との交点を F とする。さらに，線分 OD の延長上に点 G を AD // CG となるようにとる。

このとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県　2010 年度）



問1　三角形 AEF と三角形 GCD が相似であることを次のように証明した。

空欄にあてはまるものとして， (a) には最も適する弧を記号⌒を用いて書き， (b) には最も適する角を記号∠を用いて書き， (あ) ～ (う) には【選択群】から最も適するものをそれぞれ 1 つずつ選び，その番号を書きなさい。

〔証明〕

△AEF と△GCD において，

まず， (a) に対する円周角は等しいから，

∠AEC＝∠ADC

よって，∠AEF＝∠ADC…①

また， (あ) から，

∠ADC＝∠GCD…②

①，②より，∠AEF＝∠GCD…③

次に，仮定より，

∠BAE＝∠BAD

よって，∠EAF＝∠OAD…④

また，△OAD は OA＝OD の二等辺三角形だから，

∠OAD＝ (b) …⑤

さらに， (い) から，

∠ODA＝∠OGC…⑥

④，⑤，⑥より，∠EAF＝∠OGC

よって，∠EAF＝∠CGD…⑦

③，⑦より， (う) から，

△AEF∽△GCD

【選択群】

1　対頂角は等しい

2　平行線の同位角は等しい

3　平行線の錯角は等しい

4　3 組の辺の比が等しい

5　2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しい

6　2 組の角がそれぞれ等しい

問2　∠BAC＝41°，∠BCD＝26°　のとき，∠AFE の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(あ)	
	(b)	
	(い)	
	(う)	
問2	∠AFE＝ °	

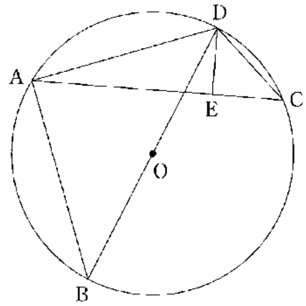
解答
問1
(a) $\overset{\frown}{AC}$
(あ) 3
(b) ∠ODA
(い) 2
(う) 6
問2
∠AFE＝105
解説
問2
AB は直径だから∠ACB＝90°
よって，∠ABC＝180°－41°－90°＝49°
円周角の定理より
∠AEC＝∠ABC＝49°
∠BAE＝∠BAD＝∠BCD＝26°
よって∠AFE＝180°－26°－49°＝105°

【問 7】

図のように，半径 7 cm の円 O の周上に 4 つの点 A，B，C，D がある。BD は円 O の直径，AB＝10 cm，CD＝4 cm である。また，線分 AC 上に，∠BDC＝∠ADE となる点 E をとる。このとき，△ABD∽△ECD であることを用いて，下の解答のように，ア，イ，ウの順で DE の長さを求めた。

次の問1～問3に答えなさい。

（石川県　2010 年度）



問1 ア には，△ABD∽△ECD であることの証明が入る。それを完成させなさい。

問2 イ の（　　）にあてはまる角の大きさを書きなさい。

問3 ウ に解答の続きを書き，DE の長さを求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

〔解答〕

ア　△ABD と△ECD において

△ABD∽△ECD

イ　また，BD は直径であるから，∠BAD＝(　　　　) 度

ウ

解答欄

問1	ア〔証明〕 △ABD と△ECD において △ABD∽△ECD
問2	イ　また，BD は直径であるから，∠BAD＝(　　　　　　) 度
問3	ウ〔解答の続き〕 答　　　　　　cm

解答

問1

〔証明〕

△ABDと△ECDにおいて

∠ADB＝∠ADE－∠BDE…①

∠EDC＝∠BDC－∠BDE…②

また∠BDC＝∠ADE…③

①, ②, ③より

∠ADB＝∠EDC…④

$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角は等しいから

∠ABD＝∠ECD…⑤

④, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいので

△ABD∽△ECD

問2　90度

問3

〔解答の続き〕

$AD^2 = 14^2 - 10^2$

$AD > 0$　だから $AD = 4\sqrt{6}$

△ABD∽△ECDだから

BD : CD＝DA : DE

$14 : 4 = 4\sqrt{6} : DE$

これを解いて $DE = \dfrac{8\sqrt{6}}{7}$

答え　$\dfrac{8\sqrt{6}}{7}$ cm

解説

問3

BD＝7×2＝14cm

△ABDで三平方の定理より $DA = \sqrt{14^2 - 10^2} = 4\sqrt{6}$ cm

△ABD∽△ECDより

DA : DE＝BD : CD

$4\sqrt{6} : DE = 14 : 4$

$14DE = 16\sqrt{6}$

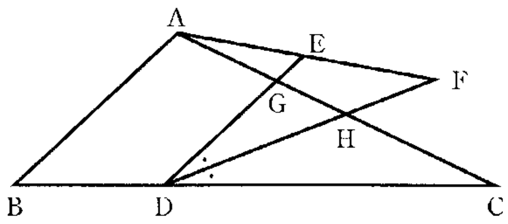
$DE = \dfrac{16\sqrt{6}}{14} = \dfrac{8\sqrt{6}}{7}$ cm

【問 8】

図で，点 D は線分 BC 上の点であり，点 E は D を通り BA に平行な直線上の点である。∠CDE の二等分線と，AE を延長した直線との交点を F とし，線分 AC と DE，線分 AC と DF との交点をそれぞれ G，H とする。

AB＝12 cm，AC＝18 cm，BD＝8 cm，DC＝16 cm とする。

次の問1，問2に答えなさい。



（岐阜県　2010 年度）

問1　DG，AG，GH の長さを，それぞれ求めなさい。

問2　DE＝11 cm のとき，

(1)　△AGE∽△DGH を証明しなさい。

(2)　AF : DF を求めなさい。

解答欄

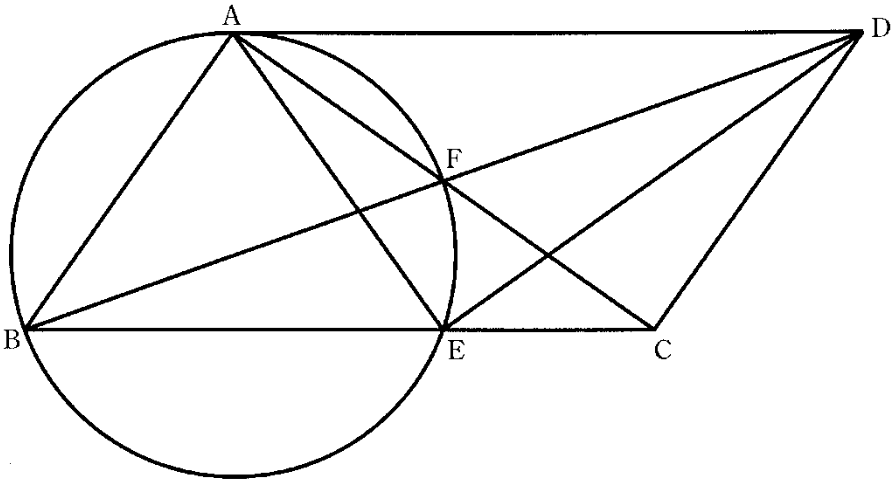
問1	DG の長さ		cm
	AG の長さ		cm
	GH の長さ		cm
問2	(1)	〔証明〕	
	(2)	:	

解答
問1
DGの長さ 8
AGの長さ 6
GHの長さ 4
問2
(1)
△AGEと△DGHで
対頂角だから
∠AGE＝∠DGH…①
問1から，AG＝6 cm，DG＝8 cmだから
AG:DG＝3:4…②
問1と仮定からGE＝3 cm，GH＝4 cmだから
GE:GH＝3:4…③
②，③から
AG:DG＝GE:GH…④
①，④から
2組の辺の比が等しくそのはさむ角が等しいので
△AGE∽△DGH
(2) 10:11
解説
問1
△CABでDG // BAより
DG:BA＝CD:CB
DG:12＝16:(16＋8)
24DG＝12×16
DG＝8 cm
AG:AC＝BD:BC
AG:18＝8:24
24AG＝18×8
AG＝6 cm
BGを結ぶ。
BD＝DG＝8 cmより∠DBG＝∠DGB
DG // ABより∠DGB＝∠GBA
よって∠GBA＝∠DBG＝$\frac{1}{2}$∠CBA
また∠CDG＝∠CBA，∠HDG＝$\frac{1}{2}$∠CDGより，∠HDG＝∠DGB
平行線の錯角が等しいのでDH // BG
したがってCH:HG＝CD:DB＝16:8＝2:1
GH＝$\frac{1}{3}$CG＝$\frac{1}{3}$×(18－6)＝4 cm
問2
(1)
△AGEと△DGHにおいて
AG:DG＝6:8＝3:4…①
GE:GH＝(11－8):4＝3:4…②
対頂角より∠AGE＝∠DGH…③
①，②，③より2組の辺の比とそのはさむ角がそれぞれ等しいので△AGE∽△DGH
(2)
△AFHと△DFEにおいて共通なので∠AFH＝∠DFE…①
△AGE∽△DGHより∠FAH＝∠FDE…②
①，②より2組の角がそれぞれ等しいので
△AFH∽△DFE
よってAF:DF＝AH:DE＝(6＋4)÷11＝10:11

【問 9】

図のように，平行四辺形 ABCD の辺 BC 上に AB＝AE となる点 E をとる。3 点 A，B，E を通る円が，平行四辺形 ABCD の対角線の交点 F を通るとき，あとの各問いに答えなさい。ただし，点 E は点 B と異なる点とする。

（三重県　2010 年度）



問1　△ABC∽△AFB であることの証明を，次の $\boxed{(ア)}$ ～ $\boxed{(ウ)}$ のそれぞれにあてはまる適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

〔証　明〕
△ABC と△AFB において，
共通だから，
∠BAC＝∠FAB　…①
AB＝AE より，△ABE は二等辺三角形だから，
∠ABC＝ $\boxed{(ア)}$ 　…②
また，同じ弧に対する $\boxed{(イ)}$ の大きさは等しいので，
$\boxed{(ア)}$ ＝ $\boxed{(ウ)}$ …③
②，③より，
∠ABC＝ $\boxed{(ウ)}$ …④
①，④より，2 組の角がそれぞれ等しいので，
△ABC∽△AFB

問2　△AED≡△DCA であることを証明しなさい。

問3　AB＝6 cm のとき，次の各問いに答えなさい。なお，各問いにおいて，答えに $\sqrt{}$ がふくまれるときは，$\sqrt{}$ の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

(1)　線分 AF の長さを求めなさい。

(2)　線分 BE の中点を M とする。△AEC の面積が平行四辺形 ABCD の面積の $\frac{1}{6}$ となるとき，線分 AM の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問2	〔証明〕	
問3	(1)	AF＝　　　　cm
	(2)	AM＝　　　　cm

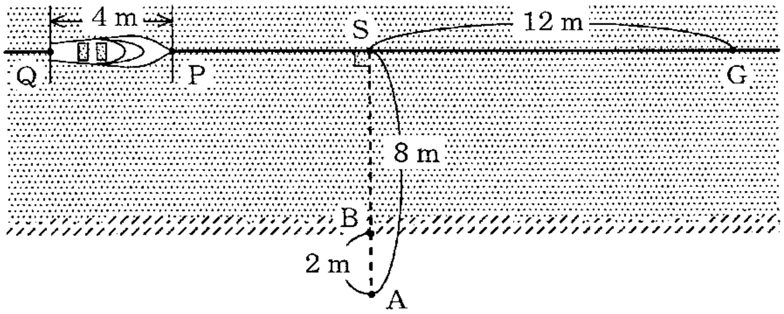
解答
問1
(ア)　∠AEB
(イ)　円周角
(ウ)　∠AFB
問2
〔証明〕
△AED と△DCA において
共通だから
AD＝DA…①
仮定より
AB＝AE…②
平行四辺形の対辺は等しいから
AB＝DC…③
②，③より
AE＝DC　…④
また平行線の錯角は等しいから
∠EAD＝∠AEB…⑤
AB＝AE より△ABE は二等辺三角形だから
∠AEB＝∠ABC…⑥
⑤，⑥より
∠EAD＝∠ABC…⑦
平行四辺形の対角は等しいから
∠ABC＝∠CDA…⑧
⑦，⑧より
∠EAD＝∠CDA…⑨
①，④，⑨より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△AED≡△DCA
問3
(1)　$AF=3\sqrt{2}$ cm
(2)　$AM=2\sqrt{6}$ cm
解説
問3
(1)
△ABC∽△AFB より
AB：AF＝AC：AB
AB＝6 cm，AC＝2AF より
6：AF＝2AF：6
$2AF^2=36$
$AF^2=18$
AF＞0 より $AF=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ cm
(2)
$\triangle AEC=\frac{1}{6}$(平行四辺形 ABCD)$=\frac{1}{6}\times 2\triangle ABC=\frac{1}{3}\triangle ABC$　よって，$BC:EC=1:\frac{1}{3}=3:1$
BE：EC＝2：1　M は BE の中点なので BM＝ME＝EC
AB＝AE より AM⊥BC
$BM=x$ cm とおくと $CM=2x$ cm とおける。
三平方の定理を利用して $AB^2-BM^2=AC^2-CM^2$ より
$6^2-x^2=(6\sqrt{2})^2-(2x)^2$
$3x^2=36$
$x^2=12$　$x>0$ より $x=2\sqrt{3}$ cm
よって $AM=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ cm

【問 10】

図1は，直線 SG 上を進むボートを，点 A から見ているときの位置関係を表した図である。ボートの船首 P，船尾 Q は直線 SG 上を動き，PQ＝4 m とする。また，SG＝12 m，AS＝8 m，SG⊥AS であり，B は線分 AS 上の点で，AB＝2 m である。後の問1～問4に答えなさい。

（滋賀県　2010 年度）

図1



問1　PS＝6 m のとき，2 点 A，P 間の距離は何 m か。求めなさい。

問2　図2のように，∠PAG＝90°となったとき，△PAS∽△AGS であることを証明しなさい。

図2

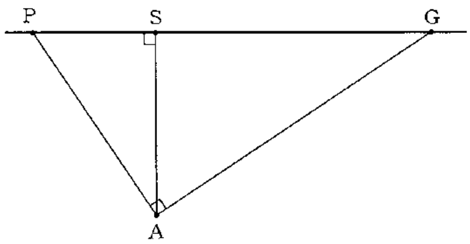
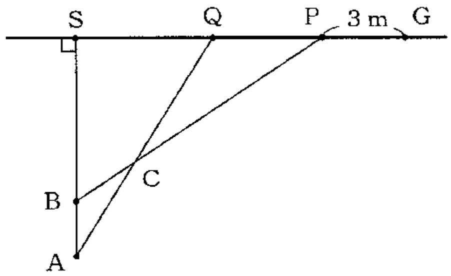


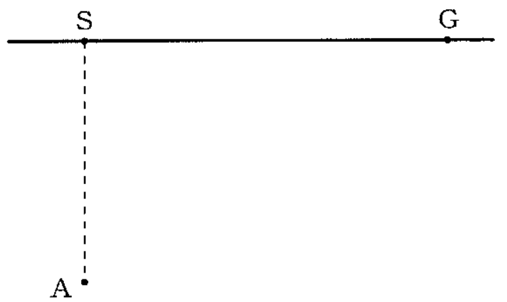
図3

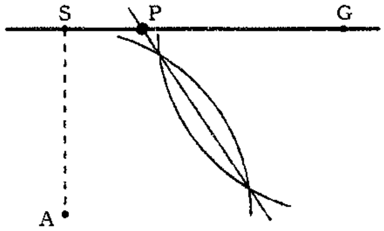


問3　PA＝PG となる直線 SG 上の点 P を，コンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図に使った線は消さないこと。

問4　図3のように，ボートが点 G の手前にあり，PG＝3 m のとき，AQ と BP の交点を C とし，BC：CP を求めなさい。

解答欄

問1	m
問2	〔証明〕
問3	
問4	:

解答
問1　10 m
問2
〔証明〕
△PAS と△AGS で
仮定から
∠ASP＝∠GSA…①
三角形の内角の和は 180°だから
∠SPA＝180°－∠ASP－∠PAS
＝90°－∠PAS
＝∠SAG…②
①, ②から,
2 組の角がそれぞれ等しいので
△PAS∽△AGS
問3


問4　5:16
解説
問1
△APS において∠ASP＝90°より
三平方の定理を利用して AP＝$\sqrt{6^2+8^2}$ ＝$\sqrt{100}$ ＝10 m
問2
△PAS と△AGS において
仮定より∠PSA＝∠ASG＝90°…①
∠SPA＝180°－90°－∠SAP　∠SAG＝90°－∠SAP
よって∠SPA＝∠SAG…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△PAS∽△AGS
問3
PA＝PG より点 P は AG の垂直二等分線上にある。
よって AG の垂直二等分線と直線 SG との交点が求める点 P となる。
問4
Q を通り SA に平行な直線と PB との交点を R とする。
QR // SB より
PR:RB＝PQ:QS＝4:(12－3－4)＝4:5…①
また, QR:SB＝PQ:PS
QR:6＝4:(4＋5)
QR＝6×$\frac{4}{9}$＝$\frac{8}{3}$ m
AB // QR より BC:CR＝AB:QR＝2:$\frac{8}{3}$＝3:4…②
①, ②より
BR を 1 として比を考えると
BC:CR:RP＝$\frac{3}{7}$：$\frac{4}{7}$：$\frac{4}{5}$
35 倍して BC:CR:RP＝15:20:28
BC:CP＝15:(20＋28)＝15:48＝5:16

【問 11】

図1, 図2において, 四角形 ABCD は 1 辺の長さが 5 cm の正方形であり, △EFG は∠EFG＝90°, EF＝6 cm, FG＝4 cm の直角三角形である。A, D は, それぞれ辺 EF, FG 上にあって, F は正方形 ABCD の内部にあり, E, G は正方形 ABCD の外部にある。

図1

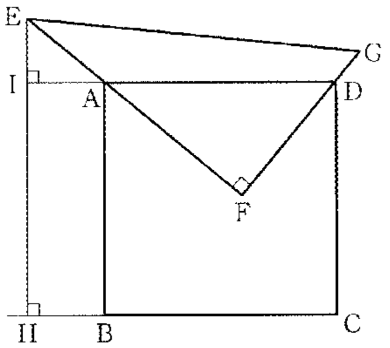
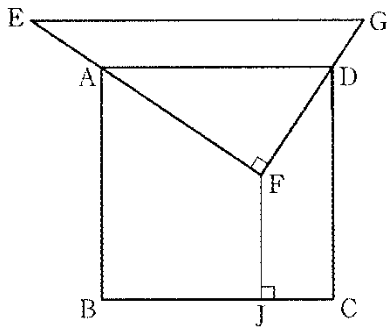


図2



次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

（大阪府 2010 年度 前期）

問1 図1において, H は E から直線 BC にひいた垂線と直線 BC との交点である。I は直線 EH と直線 AD との交点である。このとき, EH⊥ID である。

(1) 正方形 ABCD の対角線 BD の長さを求めなさい。

(2) △AIE∽△AFD であることを証明しなさい。

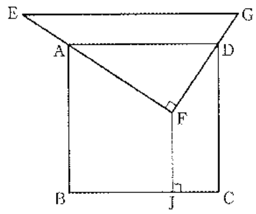
(3) AF＝x cm とし, $3<x<5$ とするとき, 線分 BH の長さを x を用いて表しなさい。

問2 図2は, EG // AD であるときの状態を示している。図2において, J は F から直線 BC にひいた垂線と直線 BC との交点である。

(1) 線分 AE の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

(2) 線分 FJ の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	〔証明〕
	(3)	cm
問2	(1)	〔求め方〕  cm
	(2)	cm

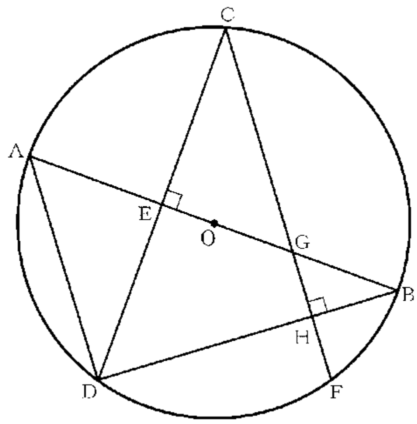
解答
問1
(1)　$5\sqrt{2}$ cm
(2)
〔証明〕
△AIE と△AFD において
EH⊥ID，∠AFD＝90°　だから
∠AIE＝∠AFD…㋐
∠EAI＝∠DAF (対頂角)…㋑
㋐，㋑より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△AIE∽△AFD
(3)　$-\frac{1}{5}x^2+\frac{6}{5}x$　cm
問2
(1)
〔求め方〕
∠EFG＝90°　だから
$EG^2=EF^2+FG^2$
EG＝y cm とすると
$y^2=6^2+4^2=52$
これを解くと $y>0$ より $y=2\sqrt{13}$
EG // AD だから
FA : FE＝AD : EG＝5 : $2\sqrt{13}$
よって FA＝$\frac{5}{2\sqrt{13}}$ FE＝$\frac{15}{13}\sqrt{13}$ cm
したがって AE＝FE－FA＝$6-\frac{15}{13}\sqrt{13}$ cm
$6-\frac{15}{13}\sqrt{13}$ cm
(2)　$\frac{35}{13}$ cm

解説
問1
(3)
$\triangle$AIE∽$\triangle$AFDより
AI:AF＝EA:DA
AI:x＝$(6-x)$:5
5AI＝$x(6-x)$
$\mathrm{AI}=\dfrac{x(6-x)}{5}=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{6}{5}x$ cm
四角形IHBAは長方形だから$\mathrm{BH}=\mathrm{AI}=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{6}{5}x$ cm
問2
(1)
$\triangle$EFGにおいて
$\angle$EFG＝90°より$\mathrm{EG}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$ cm
EG // ADより
FA:FE＝AD:EG＝5: $2\sqrt{13}$
よって$\mathrm{FA}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}\times 6=\dfrac{15}{13}\sqrt{13}$ cm
$\mathrm{AE}=6-\dfrac{15}{13}\sqrt{13}$ cm
(2)
FからABに垂線をひき, ABとの交点をKとする。
$\triangle$EFGと$\triangle$FKAにおいて
$\angle$EFG＝$\angle$FKA＝90°…(ⅰ)
$\angle$DAK＝$\angle$FKB＝90°より同位角が等しいのでAD // KF
またEG // ADだからEG // KF
したがって平行線の錯角は等しいので
$\angle$FEG＝$\angle$KFA…(ⅱ)
(ⅰ), (ⅱ)より
2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle$EFG∽$\triangle$FKA
GF:AK＝EG:FA
$4:\mathrm{AK}=2\sqrt{13}:\dfrac{15}{13}\sqrt{13}$
$2\sqrt{13}\,\mathrm{AK}=4\times\dfrac{15}{13}\sqrt{13}$
$\mathrm{AK}=\dfrac{30}{13}$ cm
よって$\mathrm{FJ}=5-\dfrac{30}{13}=\dfrac{35}{13}$ cm

【問 12】

図で，円 O は線分 AB を直径とする半径 5 cm の円である。2 点 C，D は円 O の周上の点であり，AD＝6 cm で，線分 CD と線分 AB は，線分 OA 上の点 E で垂直に交わっている。また，点 C を通り線分 BD に垂直な直線と円 O の交点のうち，C 以外の点を F とし，線分 CF と線分 AB，線分 BD との交点をそれぞれ G，H とする。各問いに答えよ。

（奈良県　2010 年度）



問1　△CEG∽△BDA であることを証明せよ。

問2　∠ABD＝a°　のとき，∠OCG の大きさを a を用いて表せ。

問3　線分 FG の長さを求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	
問3	cm

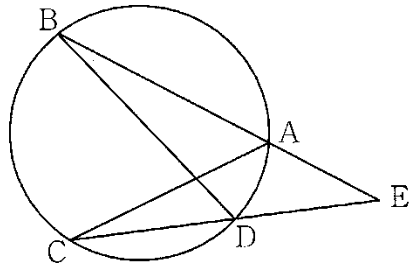
解答
問1
〔証明〕
△CEG と△BDA において
仮定から
$\angle CEG = 90^\circ$ …①
半円の弧に対する円周角は直角であることから
$\angle BDA = 90^\circ$ …②
①, ②より$\angle CEG = \angle BDA$…③
また$\angle ECG = 90^\circ - \angle CGE$…④
△HBG で$\angle HBG = 90^\circ - \angle BGH$
すなわち$\angle DBA = 90^\circ - \angle BGH$…⑤
対頂角は等しいから$\angle CGE = \angle BGH$…⑥
④, ⑤, ⑥より$\angle ECG = \angle DBA$…⑦
③, ⑦より
2 組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle CEG \backsim \triangle BDA$
問2　$3a^\circ - 90^\circ$
問3　$\dfrac{84}{25}$ cm
解説
問2
$\triangle CEG \backsim \triangle BDA$ より
$\angle GCE = \angle ABD = a^\circ$　$\angle CHB = \angle ADB = 90^\circ$ なので同位角が等しいから CF // AD
よって錯角なので$\angle ADC = \angle DCF = \angle GCE = a^\circ$
弧 AC の円周角と中心角の関係より$\angle AOC = 2\angle ADC = 2a^\circ$
△COE において, $\angle OCE = 180^\circ - 90^\circ - 2a^\circ = 90^\circ - 2a^\circ$
よって$\angle OCG = a^\circ - (90^\circ - 2a^\circ) = 3a^\circ - 90^\circ$
問3
△ABD で三平方の定理より $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm
$\triangle ABD \backsim \triangle ADE$ より
$AB : AD = BD : DE$
$10 : 6 = 8 : DE$
$10DE = 48$
$DE = \dfrac{24}{5}$ cm
$AB : AD = AD : AE$
$10 : 6 = 6 : AE$
$10AE = 36$
$AE = \dfrac{18}{5}$ cm
△OCD は OC＝OD の二等辺三角形で
$OE \perp CD$ より
$CE = DE$　$\angle EDA = \angle ECG$　$\angle AED = \angle GEC$
よって$\triangle ADE \equiv \triangle GCE$　$EG = EA = \dfrac{18}{5}$ cm
よって $BG = 10 - \dfrac{18}{5} \times 2 = \dfrac{14}{5}$ cm
$\triangle BGH \backsim \triangle BAD$ だから $BG : BA = GH : AD$　$\dfrac{14}{5} : 10 = GH : 6$　$GH = \dfrac{42}{25}$ cm
ここで BF を結ぶと $BH = BH$, $\angle BHG = \angle BHF$, $\angle GBH = \angle GCE = \angle FBH$ より$\triangle BGH \equiv \triangle BFH$
よって $FG = 2GH = 2 \times \dfrac{42}{25} = \dfrac{84}{25}$ cm

【問 13】

図のように，同一円周上に 4 点 A，B，C，D があり，A，B を通る直線と，C，D を通る直線が，点 E で交わっている。

このとき，△BDE∽△CAE であることを証明しなさい。

（鳥取県　2010 年度）



解答欄

〔証明〕

△ BDEと△CAEにおいて

△BDE∽△CAE

解答

〔証明〕

△BDE と△CAE において

∠BED＝∠CEA (共通)…①

$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいので

∠ABD＝∠ACD

よって

∠EBD＝∠ECA…②

①②より

対応する 2 組の角の大きさがそれぞれ等しいので

△BDE∽△CAE

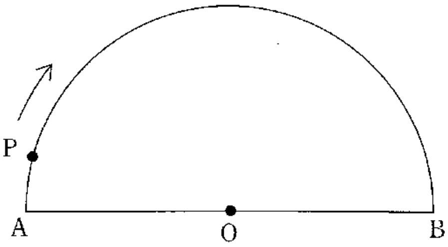
【問 14】

図1のように，AB を直径とする半円 O の周上に点 P をとる。点 P は点 A を出発して，時計回りに周上を一定の速さで移動し，点 B まで進むものとする。

下の問1，問2に答えなさい。

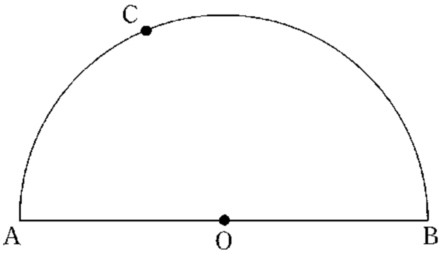
（島根県　2010 年度）

図1



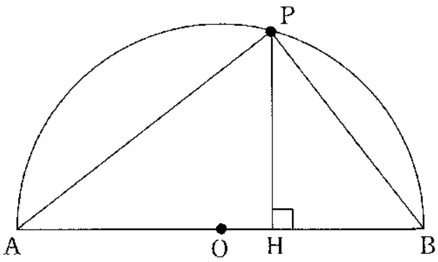
問1　図2のように，点 P が点 A を出発してから 2 秒後に点 C の位置にきたとする。このとき，点 A を出発してから 1 秒後の点 P の位置を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図2



問2　図3のように，点 P から直径 AB に垂線 PH をひく。次の(1)，(2)に答えなさい。

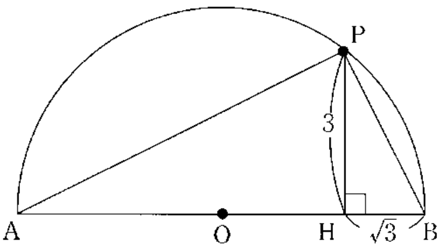
図3



(1)　△APH∽△PBH を証明しなさい。

(2)　図4のように，ある時刻において，PH＝3，BH＝$\sqrt{3}$ となった。このとき，次の①，②に答えなさい。

図4



①　直径 AB の長さを求めなさい。

②　おうぎ形 OBP を切り取り，図5のように直線 ℓ 上におく。次に，図6のように，このおうぎ形を直線 ℓ 上をすべることなく右に回転させる。線分 OP が直線の ℓ に重なるまで回転させたとき，点 O が動いてできる線の長さを求めなさい。

図5

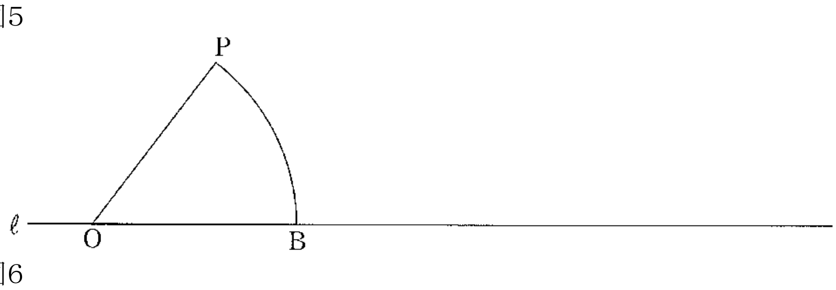
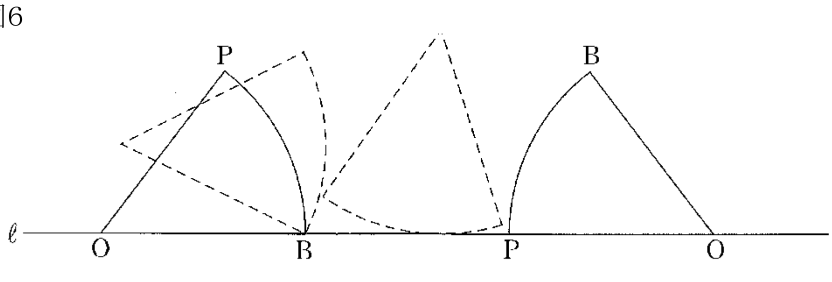
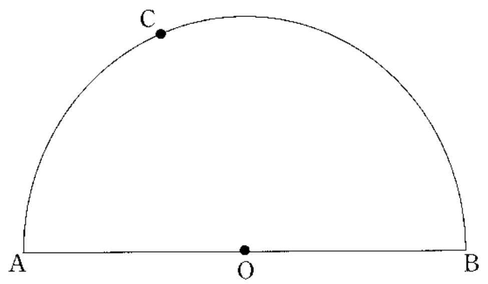


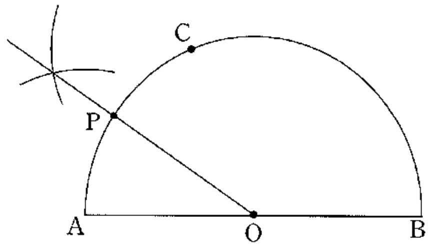
図6



解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="3">〔作図〕
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>(1)</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>①</td><td></td></tr>
<tr><td>②</td><td></td></tr>
</table>

解答
問1



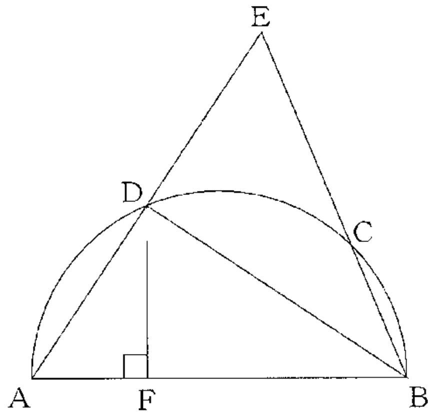
問2
(1)
〔証明〕
△APH と△PBH において
∠AHP＝∠PHB (直角)…①
また∠APH＋∠PAH＝90°
さらに AB は円 O の直径だから
∠APH＋∠BPH＝90°
よって∠PAH＝∠BPH…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△APH∽△PBH
(2)
① $4\sqrt{3}$
② $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$
解説
問2
(2)
①
△PBH において
∠PHB＝90°, BH:PH＝ $\sqrt{3}$:3＝1: $\sqrt{3}$ だから∠PBH＝60°の直角三角形だとわかる。
よって PB＝2BH＝ $2\sqrt{3}$
△ABP∽△PBH だから
AB:PB＝BP:BH
AB: $2\sqrt{3}$ ＝ $2\sqrt{3}$: $\sqrt{3}$
AB＝ $4\sqrt{3}$
②
おうぎ形 OBP は∠PBO＝60°より∠BOP＝60°, OB＝OP＝ $2\sqrt{3}$
点 O が動いてできる線は
半径 OB の中心角 90°のおうぎ形の弧と
長さが $\overset{\frown}{BP}$ と等しい線分と
半径 OB の中心角 90°のおうぎ形の弧の和になる。
よって求める長さは $\left(2\pi\times2\sqrt{3}\times\frac{90}{360}\right)\times2+2\pi\times2\sqrt{3}\times\frac{60}{360}=2\sqrt{3}\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

【問 15】

図のような，線分 AB を直径とする半円があり，点 C は$\overset{\frown}{AB}$上の点である。∠CBA の二等分線をひき，$\overset{\frown}{AC}$との交点を D とし，直線 AD と直線 BC との交点を E とする。また，点 D から線分 AB に垂線をひき，その交点を F とする。このとき，次の問いに答えなさい。

（香川県　2010 年度）

問い　△ABD∽△ADF　であることを証明せよ。



解答欄

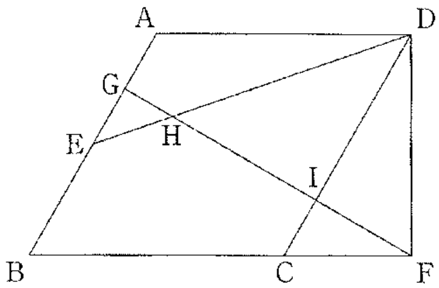
〔証明〕

解答

〔証明〕
△ABD と△ADF において
∠A は共通…①
AB は直径だから
∠ADB＝90°
仮定より
∠AFD＝90°
よって
∠ADB＝∠AFD…②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABD∽△ADF

【問 16】

AB＝4 cm, ∠ABC＝60° のひし形 ABCD がある。下の図のように, 辺 AB の中点 E をとり, 点 E と点 D を結ぶ。点 D を通り辺 BC に垂直な直線と辺 BC を延長した直線の交点を F とする。点 F を通り辺 AB に垂直な直線と辺 AB の交点を G とする。線分 GF と線分 DE, DC の交点をそれぞれ H, I とする。



次の問1は指示にしたがって答え, 問2, 問3は ☐ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし, 根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県 2010 年度）

問1 上の図において, 相似な三角形を 1 組選び, その 2 つの三角形が相似であることを, 右の ☐ の中に証明せよ。

〔証明

問2 線分 DE の長さは ☐ cm である。

問3 GH : HF＝ ☐ : ☐ である。

解答欄

問1	
問2	
問3	

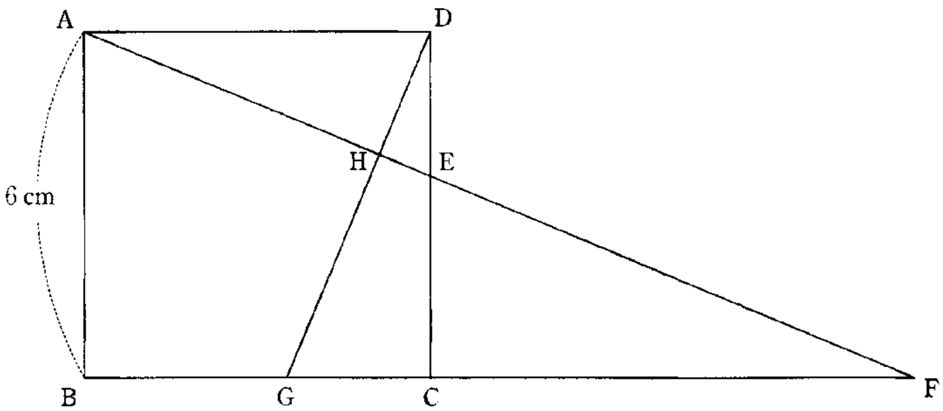
解答
問1
(△GEHと△IDHにおいての例)
△GEHと△IDHにおいて
平行線の錯角は等しいから
∠GEH＝∠IDH…①
∠EGH＝∠DIH…②
①，②より
2組の角がそれぞれ等しいので
△GEH∽△IDH
問2　$2\sqrt{7}$
問3　1，5
解説
問3
△FCI，△FBG，△DCFはどれも60°の角をもつ直角三角形なので
$CF=\frac{CD}{2}=\frac{4}{2}=2$ cm，$CI=\frac{CF}{2}=1$ cm，$BF=4+2=6$ cm，$BG=\frac{BF}{2}=\frac{6}{2}=3$ cm
$GH:HI=GE:DI=(3-2):(4-1)=1:3$
$GI:IF=BC:CF=2:1$
よって $GH:HF=1:(3+2)=1:5$

【問 17】

図のように，1 辺が 6 cm の正方形 ABCD がある。辺 CD 上に点 E をとり，線分 AE の延長と辺 BC の延長の交点を F とする。辺 BC 上に CG＝DE となる点 G をとり，線分 AE と線分 DG の交点を H とする。

次の問1，問2に答えなさい。

（大分県 2010 年度）



問1 △CDG∽△HFG となることを次のように証明した。

$\boxed{ア}$ には，△CDG と△DAE が合同であることの証明を，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ には適する式を書いて，証明を完成させなさい。

〔証明〕

△CDG と△DAE において，

$\boxed{ア}$

したがって，　∠CDG＝∠DAE　…$\boxed{1}$

ここで，AD // BF より

∠DAE＝∠HFG (錯角)　…$\boxed{2}$

△CDG と△HFG において

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$より，　$\boxed{イ}$　…$\boxed{3}$

また，　$\boxed{ウ}$　(共通)　…$\boxed{4}$

$\boxed{3}$，$\boxed{4}$より，

2 組の角がそれぞれ等しいから

△CDG∽△HFG

問2 線分 BF の長さが 18 cm のとき，線分 HG の長さを求めなさい。

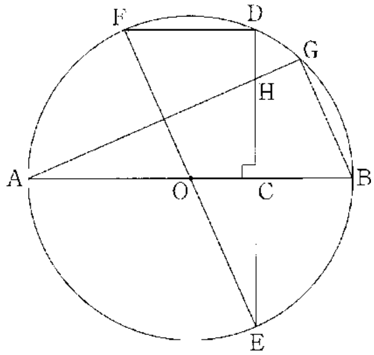
解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>ウ</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">cm</td></tr>
</table>

解答
問1
ア
仮定から
CG＝DE…①
CD＝DA…②
∠GCD＝∠EDA＝90°…③
①, ②, ③より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△CDG≡△DAE
イ
∠CDG＝∠HFG
ウ
∠DGC＝∠FGH
問2
$\frac{7\sqrt{10}}{5}$ cm
解説
問2
BF＝18 cm より, CF＝18－6＝12 cm
AD // BF より
DE : EC＝AD : CF＝6 : 12＝1 : 2
これより DE＝$\frac{1}{3}\times 6$＝2 cm
EC＝6－2＝4 cm
CG＝DE＝2 cm
△DGC で三平方の定理より
DG＝$\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$ cm
FG＝2＋12＝14 cm
△HAD∽△HFG より
DH : HG＝AD : GF＝6 : 14＝3 : 7
よって HG＝$\frac{7}{10}$DG＝$\frac{7}{10}\times 2\sqrt{10}=\frac{7\sqrt{10}}{5}$ cm

【問 18】

図は，点 O を中心とする円で，線分 AB は円の直径である。点 C は線分 OB 上にあって，2 点 D，E は，点 C を通る線分 OB の垂線と円 O との交点で，点 F は EO の延長と円 O との交点である。また，点 G は点 A をふくまない $\overset{\frown}{BD}$上にあって，点 H は線分 AG と線分 CD との交点である。



このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

（熊本県　2010 年度）

問1　△ABG∽△AHC であることを証明しなさい。

問2　AB＝5 cm，OC＝1 cm，AG＝DE のとき，

(1)　線分 BG の長さを求めなさい。

(2)　線分 CH の長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
</table>

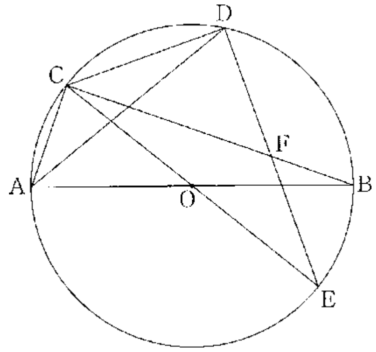
解答
問1
〔証明〕
△ABG と△AHC において
2 つの三角形に共通な角だから
∠GAB＝∠CAH…①
AB は円 O の直径だから
∠AGB＝90°…②
一方 OB⊥DE だから
∠ACH＝90°…③
②, ③より
∠AGB＝∠ACH…④
①, ④より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABG∽△AHC
問2
(1)　2 cm
(2)　$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ cm
解説
問2
(2)
△ABG で三平方の定理より
AG＝$\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$ cm
△ABG∽△AHC
GB : CH＝AG : AC
2 : CH＝$\sqrt{21}:\left(\dfrac{5}{2}+1\right)$
CH＝$\dfrac{7}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ cm

【問 19】

図は，点 O を中心とする円で，線分 AB は円の直径である。点 C は円 O の周上にあって，点 D は点 A をふくまない $\overset{\frown}{BC}$ 上にある。点 E は CO の延長と円 O との交点で，点 F は線分 BC と線分 DE との交点である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県　2010 年度）



問1　△ADC∽△ECF であることを証明しなさい。

問2　AB＝9 cm，AC＝3 cm，AD＝7 cm のとき，線分 DF の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

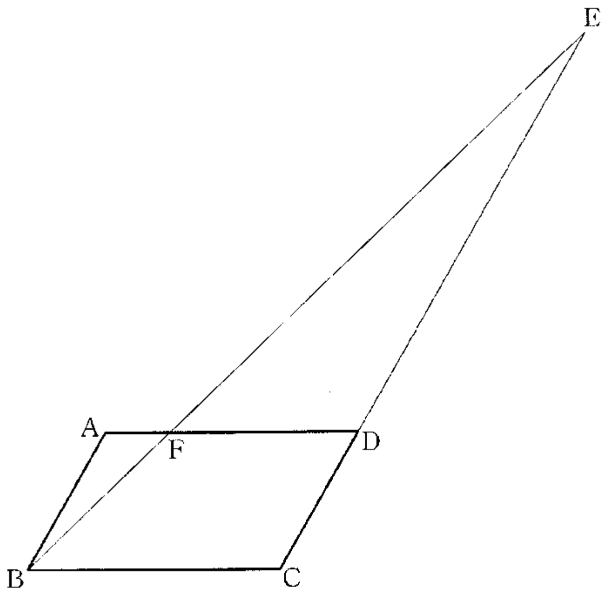
解答
問1
〔証明〕
△ADC と△ECF において
∠CAD と∠FEC は$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角だから
∠CAD＝∠FEC…①
∠ADC と∠ABC は$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$に対する円周角だから
∠ADC＝∠ABC…②
また OB＝OC だから
∠ECF＝∠ABC…③
②, ③より
∠ADC＝∠ECF…④
①, ④より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ADC∽△ECF
問2　$\dfrac{80}{21}$ cm
解説
問2
△ABC において
∠ACB＝90°だから
三平方の定理より BC＝$\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$ cm
△ABD において
同様に DB＝$\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}$ cm
△ADC∽△ECF∽△BDF だから
BD : AD＝BF : AC
$4\sqrt{2}$: 7＝BF : 3
BF＝$\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$ cm
CF＝BC－BF＝$6\sqrt{2}-\dfrac{12\sqrt{2}}{7}=\dfrac{30\sqrt{2}}{7}$ cm
CF : DF＝CE : DB
$\dfrac{30\sqrt{2}}{7}$: DF＝9 : $4\sqrt{2}$
DF＝$\dfrac{80}{21}$ cm

【問 20】

図のような，平行四辺形 ABCD があり，$\angle$ABC＝60°である。点 E は辺 CD の延長上にあり，点 F は線分 BE と辺 AD との交点である。

このとき，次の問1～問4に答えなさい。

（宮崎県　2010 年度）



問1　$\angle$BAD の大きさを求めなさい。

問2　△ABF∽△DEF であることを証明しなさい。

問3　図において，辺 BA の延長と線分 CF の延長との交点を G とし，線分 EG をひく。このとき，△EGF と面積の等しい三角形を 1 つ答えなさい。また，その 2 つの三角形の面積が等しくなるわけを説明しなさい。

問4　上の図において，AB＝4 cm，BC＝8 cm，AF＝2 cm のとき，線分 BE の長さを求めなさい。

解答欄

問1	∠BAD＝　　　　　度
問2	〔証明〕
問3	△ 〔説明〕
問4	cm

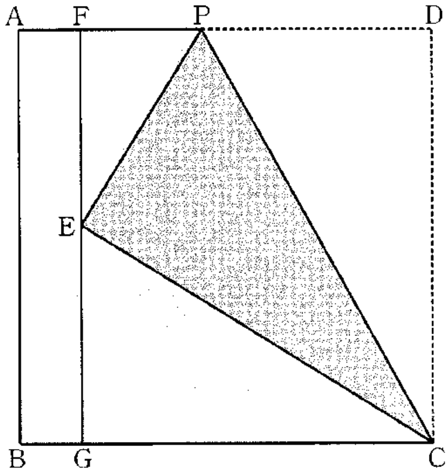
解答
問1　∠BAD＝120 度
問2
〔証明〕
△ABF と△DEF で
AB // EC で
錯角は等しいから
∠ABF＝∠DEF…①
対頂角は等しいから
∠AFB＝∠DFE…②
①, ②から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABF∽△DEF
問3
△FBC
〔説明〕
例 1
BG // CE より△EGC と△EBC において底辺 CE が共通で高さが等しいから
△EGC＝△EBC…①
△EGF＝△EGC－△EFC…②
△FBC＝△EBC－△EFC…③
①, ②, ③から
△EGF＝△FBC となる。
例 2
線分 BG と CE は平行より底辺 CE が共通で高さが等しいから△EGC と△EBC は面積が等しい。
またこの 2 つの三角形はともに△EFC を含むからそれぞれの三角形から△EFC をひいた面積は等しい。
よって△EGF と△FBC の面積は等しい。
問4　$8\sqrt{7}$ cm
解説
問4
AF // BC より
GA : GB＝AF : BC
GA : (GA＋4)＝2 : 8
2(GA＋4)＝8GA　6GA＝8
GA＝$\dfrac{4}{3}$ cm
BG // EC より
BG : EC＝AF : FD
$\left(4+\dfrac{4}{3}\right)$: EC＝2 : (8－2)
2EC＝32
EC＝16 cm
E から BC の延長に垂線 EH をひく。
△ECH は∠ECH＝60° の直角三角形だから
CH＝$\dfrac{EC}{2}=\dfrac{16}{2}$＝8 cm
EH＝$\sqrt{3}$ CH＝$8\sqrt{3}$ cm
△EBH において
BH＝8＋8＝16 cm
三平方の定理より
BE＝$\sqrt{16^2+(8\sqrt{3})^2}=8\sqrt{7}$ cm

【問 21】

図は，1 辺の長さが 8 cm の正方形 ABCD において，辺 AD 上に 2 つの頂点 A，D と異なる点 P をとり，線分 CP を折り目として折り返し，頂点 D が移った点を E としたものである。

また，点 E を通り辺 AB と平行な直線と線分 AP，辺 BC との交点をそれぞれ F，G としたものである。このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（鹿児島県　2010 年度）



問1　∠ECP＝28°のとき，∠ECG の大きさは何度か。

問2　△EPF∽△CEG であることを証明せよ。

問3　FE＝EG のとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。

(1)　線分 EP の長さは何 cm か。

(2)　点 P から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を I とする。点 I を通り四角形 ICPE の面積を 2 等分する直線と線分 EC，PC との交点をそれぞれ S，R とするとき，△ESR の面積は何 cm^2 か。

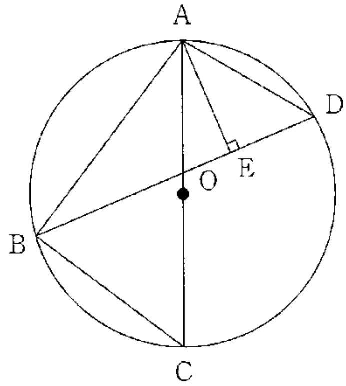
解答欄

問1		度
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答
問1　34度
問2
〔証明〕
△EPFと△CEGにおいて
四角形ABCDは正方形であるから
$\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$
仮定より AB // FG
平行線の同位角は等しいから
$\angle PFE = \angle DAB = 90^\circ$ …①
$\angle EGC = \angle ABC = 90^\circ$ …②
①, ②より $\angle PFE = \angle EGC = 90^\circ$ …③
$\angle PFE = 90^\circ$ であるから
$\angle FEP + \angle EPF = 90^\circ$ …④
$\angle PEC = 90^\circ$ であるから
$\angle FEP + \angle CEG = 90^\circ$ …⑤
④, ⑤より $\angle EPF = \angle CEG$ …⑥
③, ⑥より
2組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle EPF \backsim \triangle CEG$
問3
(1) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm
(2) $\dfrac{16\sqrt{3}}{5}$ cm^2
解説
問3
(2)
△CEGは辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形だから 30°, 60° の角をもつ。
相似である△EPF, △EIGの辺の比や角の大きさも等しくなる。
$IG = PF = \dfrac{EP}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm
$IC = 4\sqrt{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm
四角形 $ICPE = \triangle EIC + \triangle ECP = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \times 4 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \times 8 = 16\sqrt{3}$ cm^2
RからBCに垂線RHをひくと
$\triangle RIC = \dfrac{1}{2}$(四角形ICPE) より $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \times RH = \dfrac{1}{2} \times 16\sqrt{3}$
RH＝6 cm
RH // PIより
$CR:CP = 6:8 = 3:4$
よって $PR:RC = 1:3$
また△CPEも $EP:CP:CE = 1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形だから
$\angle PCE = 30^\circ$　$IC = IE = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cmより $\angle IEC = \angle ICE = 30^\circ$
よって $\angle IEC = \angle PCE$ より錯角が等しいので EI // PC
$ES:SC = EI:CR = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} : \dfrac{3}{4} \times \dfrac{16\sqrt{3}}{3} = 2:3$
したがって $\triangle ESR = \dfrac{2}{5}\triangle ECR = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4}\triangle PEC = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \times 8 = \dfrac{16\sqrt{3}}{5}$ cm^2

【問 22】

図のように，点 O を中心とする円 O の周上に 4 つの点 A，B，C，D があり，線分 AC はその円の直径である。また，点 A から線分 BD に垂線をひき，BD との交点を E とする。このとき，次の各問いに答えなさい。



（沖縄県 2010 年度）

問1 △ABC∽△AED となることを証明しなさい。

問2 AB＝4 cm，AC＝6 cm，AD＝3 cm とする。

(1) AE の長さを求めなさい。

(2) BD の長さを求めなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	cm
	(2)	cm

解答
問1
△ABC と△AED で
∠ACB＝∠ADE (円周角の定理)…①
∠ABC＝∠AED＝90° (半円の弧に対する円周角)…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABC∽△AED
問2
(1) 2 cm
(2) $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ cm
解説
問2
(1)
△ABC∽△AED より
AB : AE＝AC : AD
4 : AE＝6 : 3
6AE＝12
AE＝2 cm
(2)
△ABE で三平方の定理より
BE＝$\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ cm
△AED で三平方の定理より
ED＝$\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ cm
よって BD＝BE＋ED＝$2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ cm