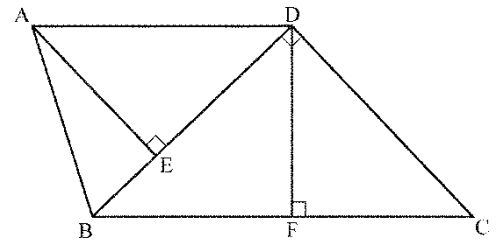


3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2014 年度出題】

【問 1】

図の $AD \parallel BC$ である台形 $ABCD$ において、 $AD=CD=6\text{ cm}$ 、 $\angle BDC=90^\circ$ である。点 A から BD に引いた垂線と BD の交点を E 、点 D から BC に引いた垂線と BC の交点を F とする。 $CF=4\text{ cm}$ のとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

(青森県 2014 年度 前期)



- (1) $\triangle AED$ と $\triangle CFD$ が合同になることを証明しなさい。
- (2) BF の長さを求めなさい。
- (3) BE の長さと ED の長さの比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

(1)	〔証明〕
(2)	cm
(3)	

解答

(1)

〔証明〕

$\triangle AED$ と $\triangle CFD$ において

仮定より

$$\angle AED = \angle CFD = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$AD = CD \quad \cdots \textcircled{2}$$

$AD \parallel BC$, $DF \perp BC$ より $\angle FDA = 90^\circ$ だから

$$\angle EDA = 90^\circ - \angle FDB$$

$$\angle FDC = 90^\circ - \angle FDB$$

$$\text{よって } \angle EDA = \angle FDC \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい直角三角形なので

$$\triangle AED \equiv \triangle CFD$$

(2) 5 cm

(3) 1:2

解説

(1)

$\triangle AED$ と $\triangle CFD$ において

仮定より

$$\angle AED = \angle CFD = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$AD = CD \quad \cdots \textcircled{2}$$

$AD \parallel BC$ より, $\angle ADE = \angle DBC$

$$\triangle BCD \text{ において } \angle DBC + \angle DCB = 90^\circ$$

$$\triangle CFD \text{ において } \angle CDF + \angle DCF = 90^\circ$$

$$\text{よって } \angle DBC = \angle CDF$$

$$\text{よって } \angle ADE = \angle CDF \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AED \equiv \triangle CFD$$

(2)

$\triangle CFD \sim \triangle CDB$ だから

$$CD:CB = CF:CD$$

$$6:CB = 4:6$$

$$4CB = 36$$

$$CB = 9\text{cm}$$

$$\text{よって } BF = 9 - 4 = 5\text{cm}$$

(3)

$\triangle CFD$ において, 三平方の定理より

$$FD = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}\text{ cm}$$

$$\triangle AED \equiv \triangle CFD \text{ より, } ED = FD = 2\sqrt{5}\text{ cm}$$

また $\triangle CFD \sim \triangle CDB$ だから

$$FD:DB = CF:CD$$

$$2\sqrt{5}:DB = 4:6$$

$$DB = 3\sqrt{5}\text{ cm}$$

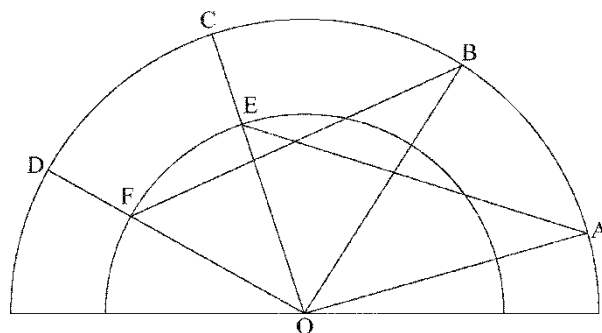
$$\text{よって, } BE = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}\text{ cm}$$

$$BE:ED = \sqrt{5}:2\sqrt{5} = 1:2$$

【問 2】

図のように、点 O を中心とし、半径が異なる 2 つの半円が、直径に対して同じ側にあり、異なる 4 点 A, B, C, D がこの順序で、半径が大きい半円の弧の上にあります。半径が小さい半円と 2 つの線分 OC, OD の交点をそれぞれ E, F とし、2 つの線分 AE, BF をひきます。

$\angle AOB = \angle COD$ のとき、 $AE = BF$ であることを証明しなさい。



(岩手県 2014 年度)

解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle OAE$ と $\triangle OBF$ において

1 つの半円で半径は等しいから

$$OA = OB \cdots ①$$

同様にして

$$OE = OF \cdots ②$$

$\angle AOB = \angle COD$ から

$$\angle AOB = \angle EOF \cdots ③$$

$$\angle AOE = \angle AOB + \angle BOE \cdots ④$$

$$\angle BOF = \angle EOF + \angle BOE \cdots ⑤$$

③, ④, ⑤から

$$\angle AOE = \angle BOF \cdots ⑥$$

①, ②, ⑥より

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle OAE \equiv \triangle OBF$$

したがって

$$AE = BF$$

解説

$\triangle OAE$ と $\triangle OBF$ において

円の半径より

$$OA = OB \cdots ①$$

$$OE = OF \cdots ②$$

$$\angle AOE = \angle AOB + \angle BOC \cdots ③$$

$$\angle BOF = \angle BOC + \angle COD \cdots ④$$

$$\angle AOB = \angle COD \cdots ⑤$$

③, ④, ⑤より

$$\angle AOE = \angle BOF \cdots ⑥$$

①, ②, ⑥より

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle OAE \equiv \triangle OBF$$

よって

$$AE = BF$$

【問 3】

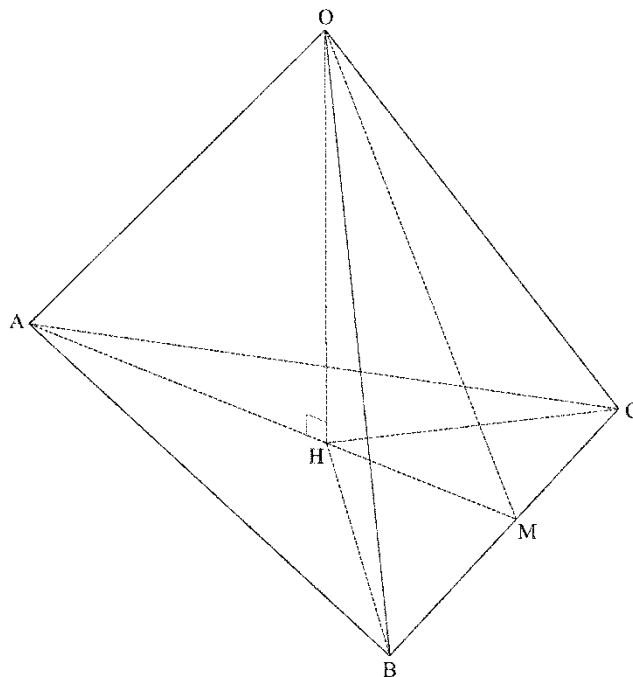
図は、 $OA=OB=OC=6\text{ cm}$ 、 $BC=4\text{ cm}$ 、 $AB=AC$ 、 $\angle BAC=45^\circ$ の三角錐 $OABC$ です。点 M は辺 BC の中点で、点 O から底面 ABC にひいた垂線を OH とすると、点 H は線分 AM 上にあります。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(岩手県 2014 年度)

問1 $\triangle OAH$ と合同な三角形をすべて書きなさい。

問2 三角錐 $OABC$ の体積を求めなさい。



解答欄

問1	
問2	cm^3

解答

問1 $\triangle OBH$, $\triangle OCH$

問2 $\frac{8\sqrt{14}+8\sqrt{7}}{3}\text{ cm}^3$

解説

問1

$\triangle OAH$ と $\triangle OBH$ と $\triangle OCH$ は $\angle OHA = \angle OHB = \angle OHC = 90^\circ$, $OA=OB=OC=6\text{ cm}$, OH は共通より直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので合同である。

問2

$\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$ だから $AH=BH=CH$

よって、 $\triangle HAB$ と $\triangle HAC$ は二等辺三角形で

$\angle HAB = \angle HBA = a$

$\angle HAC = \angle HCA = b$ とすると

$\angle HAB + \angle HAC = a + b = 45^\circ$ より

$\angle BHC = 2(a + b) = 90^\circ$

$\triangle HBC$ は直角二等辺三角形になるから $HB = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 = 2\sqrt{2}\text{ cm}$

$\triangle ABC$ において $AB=AC$, 点 M は中点より $\angle AMB = 90^\circ$

$\triangle MBH$ は直角二等辺三角形だから $MH=BM=2\text{ cm}$

$\triangle OAH$ において、 $OH = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}\text{ cm}$

よって三角錐 $OABC$ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times (2 + 2\sqrt{2}) \times 2\sqrt{7} = \frac{8\sqrt{14} + 8\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3$$

【問 4】

図1のように、線分 AB を直径とする半円 O の $\widehat{AB}$ 上に、2 点 A, B のいずれとも一致しない点 C をとります。
 $\widehat{AC}$ 上に $\widehat{AD} = \widehat{CD}$ となる点 D をとり、点 B と点 D を結びます。また、直線 AD と直線 BC との交点を E とします。

$AB = 7 \text{ cm}$, $AD = 2 \text{ cm}$ のとき、次の問1～問3に答えなさい。

(宮城県 2014 年度 後期)

問1 線分 BD の長さを求めなさい。

図1

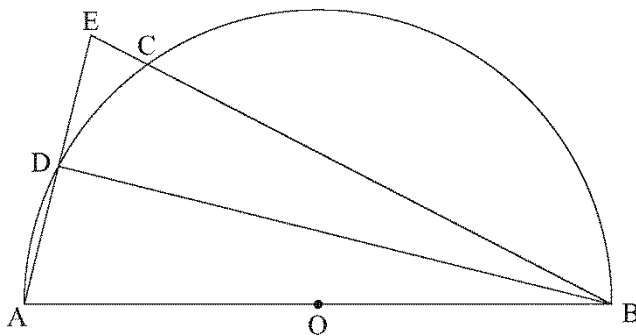
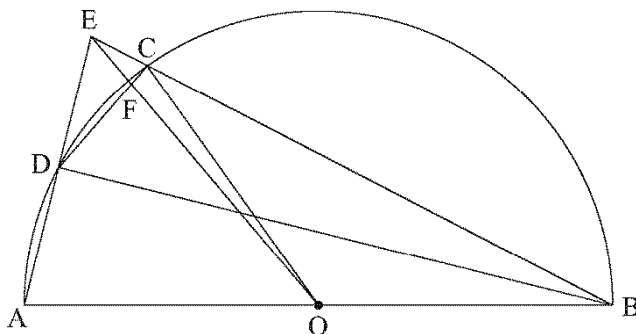


図2



問2 $\triangle ABD \equiv \triangle EBD$ であることを証明しなさい。

問3 図2は、図1において、点 O と点 C 、点 O と点 E をそれぞれ結び、線分 OE と弦 CD との交点を F としたものです。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 CE の長さを求めなさい。

(2) $\triangle OCF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1 $3\sqrt{5}$ cm

問2

〔証明〕

$\triangle ABD$ と $\triangle EBD$ において

BD は共通…①

線分 AB は半円 O の直径であるから

$\angle ADB = 90^\circ$

したがって

$\angle ADB = \angle EDB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

$\widehat{AD} = \widehat{CD}$ であるので、等しい弧に対する円周角は等しいから

$\angle ABD = \angle EBD \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \equiv \triangle EBD$

問3

(1) $\frac{8}{7}$ cm

(2) $\frac{24\sqrt{5}}{65}$ cm²

解説

問1

AB は直径より、円周角の定理から $\angle ADB = 90^\circ$

$\triangle ABD$ において三平方の定理より $BD = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$ cm

問2

$\triangle ABD$ と $\triangle EBD$ において

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことから合同を導く。

問3

(1)

OD を結ぶ。

$\triangle OAD$ と $\triangle ODC$ は、弧 $AD =$ 弧 CD より $\angle AOD = \angle COD$

半径より $OA = OD$, $OD = OC$

よって 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OAD \equiv \triangle ODC$

よって $AD = CD$

また $AD = ED$ より

$CD = ED$

$\angle DCE = \angle DEC$

また $\angle DEC = \angle BEA = \angle BAE$ だから

$\triangle DCE$ と $\triangle BAE$ は

2組の角がそれぞれ等しいので相似な二等辺三角形である。

よって $CE:AE = DC:BA$ $CE:4 = 2:7$ $CE = \frac{8}{7}$ cm

(2)

$\angle ODC = \angle OAD = \angle DEC = \angle ECD$ より、錯角が等しいので $EC \parallel DO$

よって $CF:DF = CE:DO = \frac{8}{7} : \frac{7}{2} = 16:49$

よって $\triangle OCF = \frac{16}{65} \triangle ODC = \frac{16}{65} \triangle OAD$

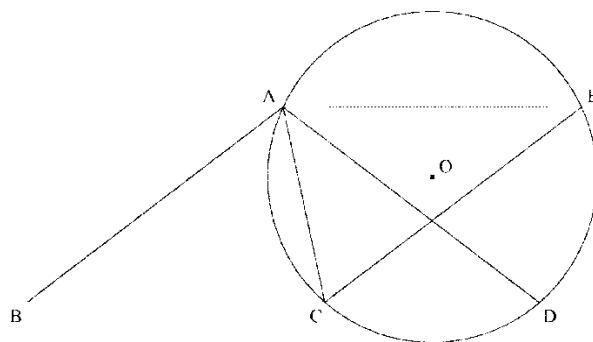
$= \frac{16}{65} \times \frac{1}{2} \triangle ABD$

$= \frac{16}{65} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 2 = \frac{24\sqrt{5}}{65}$ cm²

【問 5】

図のように、 $\triangle ABC$ の辺 BC の延長上に $\angle ADC = \angle ABC$ となる点 D をとる。また、3 点 A, C, D を通る円 O と C を通り辺 AB に平行な直線との交点を E とする。このとき、 $AE = BC$ となることを証明しなさい。

(福島県 2014 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

(例 1)

$\triangle ABC$ と $\triangle CEA$ において

AC は共通… (1)

平行線の錯角は等しいから

$\angle BAC = \angle ECA$ … (2)

仮定から

$\angle ADC = \angle ABC$ … (3)

円周角の定理から

$\angle ADC = \angle CEA$ … (4)

(3), (4)より

$\angle ABC = \angle CEA$ … (5)

三角形の内角の和は 180° であり

(2), (5)から残りの角も等しい。

したがって $\angle ACB = \angle CAE$ … (6)

(1), (2), (6)より

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \equiv \triangle CEA$

したがって $AE = BC$

解説

$\triangle ABC$ と $\triangle CEA$ において

1 組の辺とその両端の角が等しいことを示し合同を導いてから $AE = BC$ を示す。

または、四角形 $ABCE$ において

2 組の対辺がそれぞれ平行であることを示し

平行四辺形になることを導いてから

$AE = BC$ を示す。

(例 2)

仮定から

$\angle ADC = \angle ABC$ … (1)

平行線の同位角は等しいから

$\angle ABC = \angle ECD$ … (2)

円周角の定理から

$\angle ECD = \angle EAD$ … (3)

(1), (2), (3)より

$\angle ADC = \angle EAD$

錯角が等しいから $AE \parallel BD$

すなわち $AE \parallel BC$ … (4)

仮定から $AB \parallel EC$ … (5)

(4), (5)より

2 組の対辺がそれぞれ平行であるから

四角形 $ABCE$ は平行四辺形である。

平行四辺形の対辺は等しいから

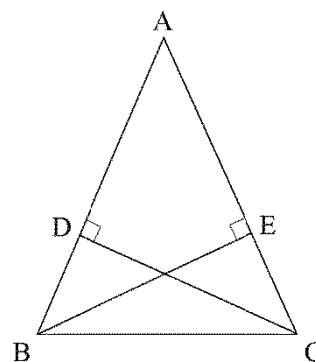
$AE = BC$

【問 6】

右の図のような、 $\angle A$ が鋭角で $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC がある。辺 AB , AC 上に $\angle ADC=\angle AEB=90^\circ$ となるようにそれぞれ点 D , E をとる。

このとき、 $AD=AE$ であることを証明しなさい。

(栃木県 2014 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ADC$ と $\triangle AEB$ において

仮定より

$$\angle ADC = \angle AEB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$AC = AB \cdots \textcircled{2}$$

共通な角であるから

$$\angle CAD = \angle BAE \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADC \equiv \triangle AEB$$

したがって $AD=AE$

解説

$\triangle ADC$ と $\triangle AEB$ において

$$\text{仮定より } \angle ADC = \angle AEB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}, AC = AB \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{共通なので } \angle CAD = \angle BAE \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より, 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADC \equiv \triangle AEB$$

よって $AD=AE$

【問 7】

1 辺の長さが 8 cm の正方形 ABCD を、次の①～③のように折ります。

- ① 図1のように、辺 AB が辺 DC と重なるように折り、折り目の線を EF とし、もとに戻します。
- ② 図2のように、点 A を通る線分を折り目として、点 D が線分 EF 上に重なるように折り、点 D の移った点を G とします。折り目の線と辺 DC との交点を H とし、もとに戻します。
- ③ 図3のように、点 D を通る線分を折り目として、点 A が線分 EF 上に重なるように折ったとき、点 A は点 G に重なります。また、折り目の線と辺 AB との交点を I とし、もとに戻します。

このとき、次の各問に答えなさい。

なお、考えるときに、別紙を点線にそって切り取った際にできる正方形を利用してもしつかえありません。

(埼玉県 2014 年度)

図1

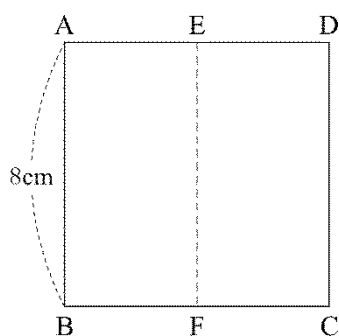


図2

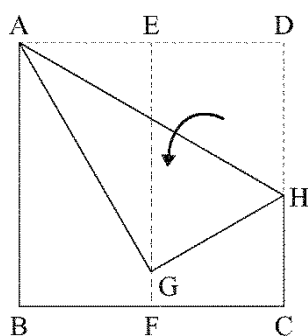
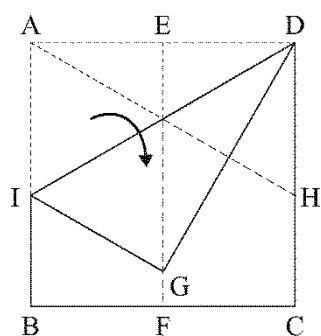
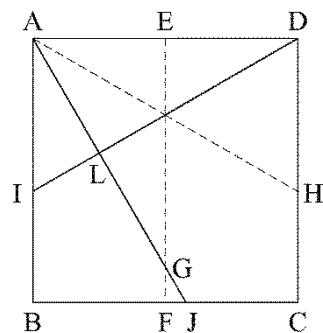


図3



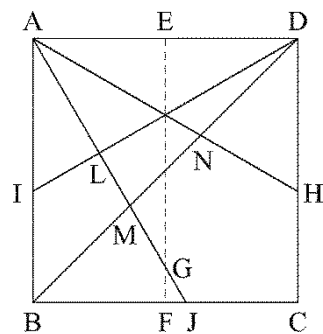
問1 図4のように、直線 AG をかき、辺 BC との交点を J とします。また、線分 ID をかき、線分 AJ との交点を L とします。このとき、 $\triangle ABJ$ と $\triangle DAI$ が合同であることを証明しなさい。

図4



問2 図5のように、線分 BD, AH をかき、線分 BD と、線分 AJ, AH との交点をそれぞれ M, N としたとき、 $\angle DNH$ の大きさを求めます。途中の説明も書いて答えを求めなさい。その際、解答用紙の図に数や記号をかいて、それを用いて説明してもよいものとします。

図5

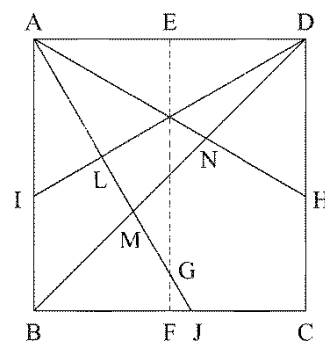


問3 $\triangle ABM$ の面積を求めなさい。

〔証明〕

問1

〔説明〕



問2

答え $\angle \text{DNH} =$ 度

問3

 cm^2

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABJ$ と $\triangle DAI$ において

四角形 $ABCD$ は、正方形なので

$AB=DA \cdots \textcircled{1}$

$\angle ABJ = \angle DAI = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

点 A と G が重なるように折っているので

$\angle ALI = 90^\circ$ となり、

$\angle AID + \angle BAJ = 90^\circ$

また $\triangle DAI$ で、 $\angle DAI = 90^\circ$ だから

$\angle AID + \angle ADI = 90^\circ$

したがって $\angle BAJ = \angle ADI \cdots \textcircled{3}$

よって $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ から

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABJ \cong \triangle DAI$

問2

〔説明〕

$\triangle ABD$ は $AB=AD$ の直角二等辺三角形であり

$\angle ADB = 45^\circ$

折っているので、 $\triangle AGE$ は

$AG=AD=2AE$ であり、図のような比の直角三角形になるので

$\angle GAE = 60^\circ$

また、折っているので

$$\angle HAD = \frac{1}{2} \angle GAE$$

$$= \frac{1}{2} \times 60^\circ$$

$$= 30^\circ$$

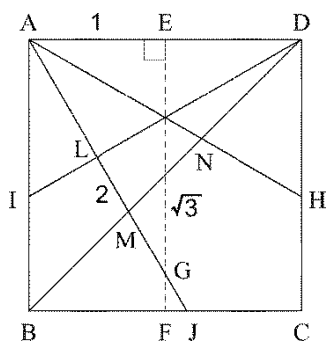
よって

$$\angle DNH = \angle ADB + \angle HAD$$

$$= 45^\circ + 30^\circ$$

$$= 75^\circ$$

答え $\angle DNH = 75$ 度



問3 $16\sqrt{3} - 16\text{cm}^2$

解説

問1

$\triangle ABJ$ と $\triangle DAI$ において

仮定より, $AB=AD$ …①

$\angle ABJ=\angle DAI=90^\circ$ …②

A と G が重なるように折ったので

$\angle ALI=90^\circ$ であるから

$\angle AID+\angle BAJ=90^\circ$

また $\angle DAI=90^\circ$ であるから

$\angle AID+\angle ADI=90^\circ$

よって $\angle BAJ=\angle ADI$ …③

①, ②, ③より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABJ \equiv \triangle DAI$

問2

$\triangle AGD$ は $AG=AD=DG$ より, 正三角形だから

$\angle GAD=60^\circ$

$\triangle DAH$ において $\angle DAH=\angle GAD \div 2=60^\circ \div 2=30^\circ$

$\angle ADH=90^\circ$ だから $\angle AHD=60^\circ$

$\triangle BCD$ は, $BC=DC$ の直角二等辺三角形だから $\angle BDC=45^\circ$

よって $\triangle DNH$ において $\angle DNH=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$

問3

$AB:BJ=\sqrt{3}:1$

よって $AD \parallel BJ$ より

$AM:JM=AD:JB=AB:BJ=\sqrt{3}:1$

これより

$\triangle BMJ=S$ とすると

$\triangle ABM=\sqrt{3}S$

$\triangle ADM=3S$ と表せる。

$\triangle ABD=\frac{1}{2} \times 8 \times 8=32$ より

$\sqrt{3}S+3S=32$ …①

$\triangle ABJ=\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$ より

$\sqrt{3}S+S=\frac{32\sqrt{3}}{3}$ …②

①-②より

$2S=32-\frac{32\sqrt{3}}{3}$

$S=16-\frac{16\sqrt{3}}{3}$

よって $\triangle ABM=\sqrt{3}S$

$=\sqrt{3} \times \left(16-\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$

$=16\sqrt{3}-16\text{cm}^2$

【問 8】

下の図1のように、 $AB=12\text{ cm}$ 、 $BC=8\text{ cm}$ 、 $\angle ABC=60^\circ$ の平行四辺形 $ABCD$ があり、点 A から線分 BC に引いた垂線と線分 BC との交点を E とする。図2のように、この平行四辺形 $ABCD$ を、頂点 A が頂点 C に重なるように折り返したとき、折り目の両端を F 、 G とし、頂点 D が移った点を H とする。また、点 F から線分 BC に引いた垂線と線分 BC との交点を I とする。このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(新潟県 2014 年度)

図1

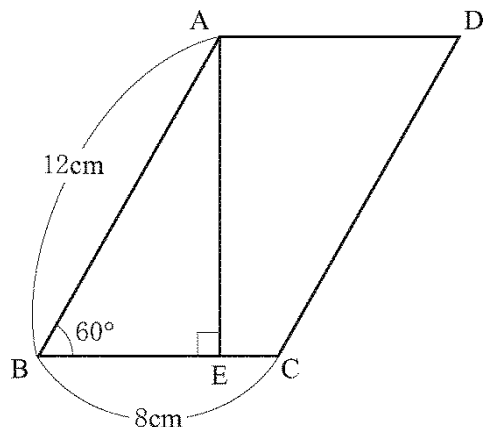
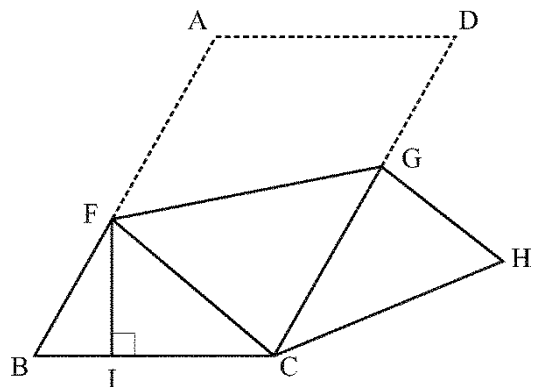


図2



問1 図1について、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 AE の長さを答えなさい。

(2) 平行四辺形 $ABCD$ の面積を答えなさい。

問2 図2について、 $\triangle BCF \equiv \triangle HCG$ であることを証明しなさい。

問3 図2において、 BI の長さを $x\text{ cm}$ とするとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) $\triangle BCF$ の面積を、 x を用いて表しなさい。

(2) 線分 CF の長さを、 x を用いて表しなさい。

(3) $\triangle CFG$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm	
	(2)	cm ²	
問2	〔証明〕		
問3	(1)	cm ²	
	(2)	cm	
	(3)	〔求め方〕	
	答	cm ²	

解答

問1

(1) $6\sqrt{3} \text{ cm}$

(2) $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$

問2

〔証明〕

$\triangle BCF$ と $\triangle HCG$ において

$BC=AD, AD=HC$ より $BC=HC \cdots \textcircled{1}$

$\angle CBF = \angle ADG = \angle CHG = 60^\circ$ より

$\angle CBF = \angle CHG \cdots \textcircled{2}$

$\angle BCF = 120^\circ - \angle FCG, \angle HCG = 120^\circ - \angle FCG$ より

$\angle BCF = \angle HCG \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BCF \equiv \triangle HCG$

問3

(1) $4\sqrt{3}x \text{ cm}^2$

(2) $12 - 2x \text{ cm}$

(3) $14\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

解説

問1

(1)

$\triangle ABE$ において

$AB:AE = 2:\sqrt{3}$

よって $12:AE = 2:\sqrt{3}$

$AE = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

(2)

平行四辺形 $ABCD$ の面積は $8 \times 6\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$

問2

$\triangle BCF$ と $\triangle HCG$ において

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことから合同を導く。

問3

(1)

$\triangle BIF$ において

$BI:FI = 1:\sqrt{3}$

$x:FI = 1:\sqrt{3}$

$FI = \sqrt{3}x \text{ cm}$

よって $\triangle BCF = \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{3}x = 4\sqrt{3}x \text{ cm}^2$

(2)

$BI:BF = 1:2$

$x:BF = 1:2$

$BF = 2x \text{ cm}$

$CF = AF = 12 - 2x \text{ cm}$

(3)

$\triangle FIC$ において

三平方の定理より

$(12 - 2x)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (8 - x)^2$

これを解いて $x = \frac{5}{2} \text{ cm}$

よって $\triangle BCF = 4\sqrt{3} \times \frac{5}{2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$\triangle CFG = (48\sqrt{3} - 2 \times 10\sqrt{3}) \div 2 = 14\sqrt{3} \text{ cm}^2$

【問 9】

図1、図2の正方形 AEFG は、1 辺 4 cm の正方形 ABCD を、点 A を中心として、矢印の方向に回転させたものであり、 $\angle BAE < 45^\circ$ とする。また、辺 CD と EF の交点を H とする。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(石川県 2014 年度)

問1 $\angle BAE = 40^\circ$ のとき、 $\angle DHE$ の大きさを求めなさい。

図1

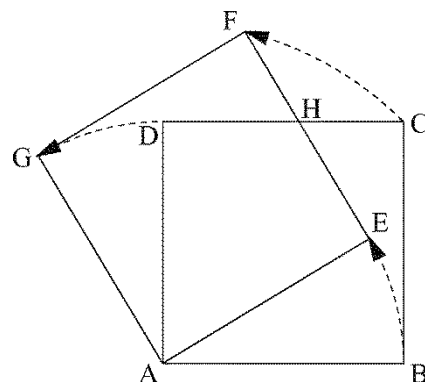
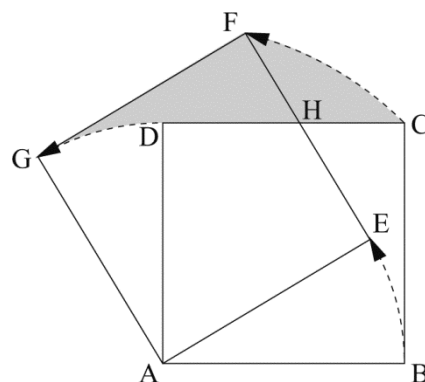


図2



問2 点 C と E、点 F と D を結んだとき、 $\angle AEC = \angle ADF$ であることを証明しなさい。

問3 図2のように、 $\angle BAE = 30^\circ$ となるまで正方形 ABCD を回転させたとき、辺 CD が動いてできた部分の面積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

解答欄

問1	度
問2	〔証明〕
問3	〔計算〕 答 cm²

解答

問1

130 度

問2

〔証明〕

△AEC と△ADF について

仮定より

$$AE=AD\cdots①$$

$$AC=AF\cdots②$$

$$\text{また } \angle CAE = \angle EAF - \angle CAF$$

$$= 45^\circ - \angle CAF \cdots ③$$

$$\angle FAD = \angle CAD - \angle CAF$$

$$= 45^\circ - \angle CAF \cdots ④$$

③, ④より

$$\angle CAE = \angle FAD \cdots ⑤$$

①, ②, ⑤より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AEC \equiv \triangle ADF$$

これより

$$\angle AEC = \angle ADF$$

問3

〔計算〕

$$\pi \times (4\sqrt{2})^2 \times \frac{30}{360} + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \pi \times 4^2 \times \frac{30}{360} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

$$\text{答 } \frac{4}{3} \pi \text{ cm}^2$$

解説

問1

四角形 AEHD の内角の和は 360° より

$$\angle DHE = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (90^\circ - 40^\circ) = 130^\circ$$

問2

△AEC と△ADF が 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいことを示し合同を導く。

△AEC ≡ △ADF より, $\angle AEC = \angle ADF$ がいえる。

問3

正三角形の対角線より, $AC = 4\sqrt{2}$ cm

求める面積は, おうぎ形 ACF + △GAF - {△ACD + おうぎ形 ADG}

$$= \pi \times (4\sqrt{2})^2 \times \frac{30}{360} + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \pi \times 4^2 \times \frac{30}{360} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi \text{ cm}^2$$

【問 10】

図で、四角形 $ABCD$ と四角形 $AEFG$ はともに正方形であり、点 E は辺 BC の延長線上にある。また、辺 AE と CD との交点を H 、線分 AF と DG との交点を I とする。

次の問1、問2に答えなさい。

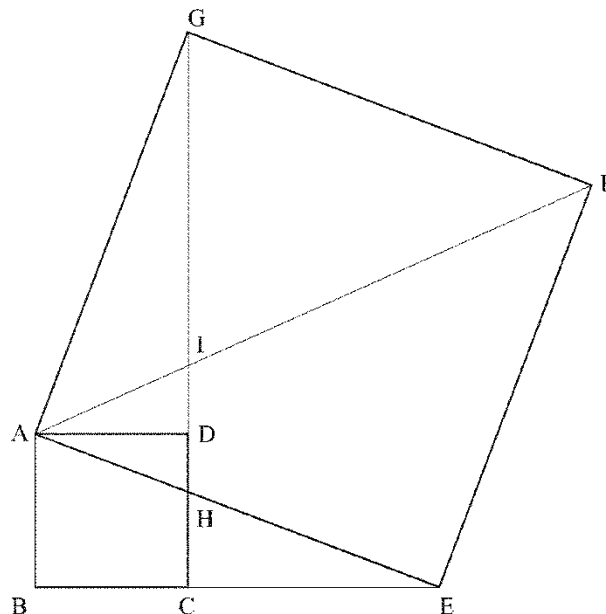
(岐阜県 2014 年度)

問1 $\triangle ABE \equiv \triangle ADG$ であることを証明しなさい。

問2 $BC = 2 \text{ cm}$, $CE = 4 \text{ cm}$ のとき、

(1) $AI:IF$ を求めなさい。

(2) $\triangle AHI$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	:
	(2)	cm^2

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle ADG$ で

仮定から

$$AB=AD\cdots\textcircled{1}$$

$$AE=AG\cdots\textcircled{2}$$

また

$$\angle BAE=90^\circ-\angle DAE$$

$$\angle DAG=90^\circ-\angle DAE$$

だから

$$\angle BAE=\angle DAG\cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③から

2組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABE\equiv\triangle ADG$$

問2

(1) 1:3

$$(2) \frac{5}{3}\text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle ABE$ と $\triangle ADG$ において

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいこと

直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいこと

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい

ことなどを示し合同を導く。

問2

(1)

$HC\parallel AB$ より

$$AH:AE=BC:BE$$

$$=2:6=1:3$$

$AE\parallel GF$ より

$$AI:IF=AH:FG=AH:AE=1:3$$

(2)

$$\text{三平方の定理より, } AE=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}\text{ cm}$$

$AH:HE=1:2$ より

$$\triangle AGH=\frac{1}{3}\triangle AGE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}=\frac{20}{3}\text{ cm}^2$$

$HI:IG=AI:IF=1:3$ より

$$\triangle AHI=\frac{1}{4}\triangle AGH=\frac{1}{4}\times\frac{20}{3}=\frac{5}{3}\text{ cm}^2$$

【問 11】

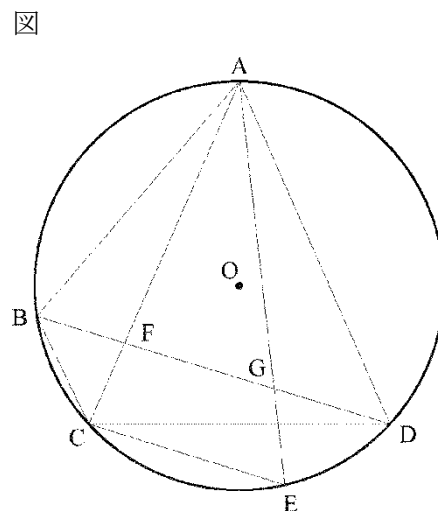
図において、4 点 A, B, C, D は円 O の円周上の点であり、 $\triangle ACD$ は $AC=AD$ の二等辺三角形である。点 C を通り BD に平行な直線と円 O との交点を E とし、BD と AC, AE との交点をそれぞれ F, G とする。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(静岡県 2014 年度)

問1 $\triangle ABC \equiv \triangle AGD$ であることを証明しなさい。

問2 $\widehat{AB}:\widehat{BC}=3:1$, $\angle AFB=100^\circ$ のとき、 $\angle CAE$ の大きさを求めなさい。



解答欄

問1	〔証明〕
問2	度

解答

問1

$\triangle ABC$ と $\triangle AGD$ において

仮定より

$$AC=AD\cdots\textcircled{1}$$

$\widehat{AB}$ に対する円周角だから

$$\angle ACB=\angle ADG\cdots\textcircled{2}$$

$\widehat{BC}$ に対する円周角より

$$\angle BAC=\angle BDC$$

$CE\parallel BD$ より

$$\angle BDC=\angle DCE \quad \widehat{ED}\text{に対する円周角より}$$

$$\angle DCE=\angle GAD$$

$$\text{よって}\angle BAC=\angle GAD\cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③より,

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC\equiv\triangle AGD$$

問2 36度

解説

問2

$$\angle BAC=\angle BDC=\angle DAE=a \text{ とおく。}$$

$$\widehat{AB}:\widehat{BC}=3:1 \text{ より}$$

$$\angle ADB=3a$$

$$AC=AD \text{ より}$$

$$\angle ACD=\angle ADC=3a+a=4a$$

$\triangle CDF$ において

$$4a+a=180^\circ-100^\circ \quad 5a=80^\circ \quad a=16^\circ$$

$\triangle AGD$ において

$$\angle AGF=a+3a=4a=4\times 16^\circ=64^\circ$$

$\triangle AFG$ において

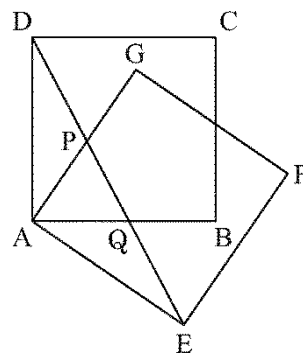
$$\angle CAE=100^\circ-64^\circ=36^\circ$$

【問 12】

図で、正方形 AEFG は、正方形 ABCD を、頂点 A を回転の中心として、時計の針の回転と同じ向きに回転移動したものである。また、P、Q はそれぞれ線分 DE と辺 AG、AB との交点である。このとき、 $AP=AQ$ となることを次のように証明したい。

, にあてはまる最も適当なものを、下のアからカまでのの中からそれぞれ選んで、そのかな符号を書きなさい。また、 にあてはまる数を書きなさい。

ただし、回転する角度は 90° よりも小さいものとする。なお、2 か所の には、同じ数があてはまる。



(愛知県 2014 年度 A)

(証明)

$\triangle ADP$ と $\triangle AEQ$ で、

AD と AE は同じ大きさの正方形の辺なので、

$$AD=AE \cdots \textcircled{1}$$

①から、 $\triangle AED$ は二等辺三角形なので、

$$\angle ADP = \text{I} \cdots \textcircled{2}$$

また、

$$\angle PAD = \text{a}^\circ - \angle PAQ, \angle QAE = \text{a}^\circ - \angle PAQ \text{ より、}$$

$$\angle PAD = \angle QAE \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から、 ので、

$$\triangle ADP \equiv \triangle AEQ$$

よって、

$$AP=AQ$$

ア $\angle AQE$

イ $\angle AEQ$

ウ $\angle EAQ$

エ 1 組の辺とその両端の角が、それぞれ等しい

オ 2 組の辺とその間の角が、それぞれ等しい

カ 2 組の角が、それぞれ等しい

解答欄

I (), II (), a ()°

解答

I (イ)

II (エ)

a (90)°

解説

$\triangle ADP$ と $\triangle AEQ$ で

合同な正方形の対応する辺だから

$AD = AE \cdots \textcircled{1}$

$\triangle AED$ は二等辺三角形より、底角が等しいので

$\angle ADP = \angle AEQ \cdots \textcircled{2}$

正方形の1つの内角は 90° だから

$\angle PAD = 90^\circ - \angle PAQ$, $\angle QAE = 90^\circ - \angle PAQ$ より

$\angle PAD = \angle QAE \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADP \equiv \triangle AEQ$

よって $AP = AQ$

【問 13】

線分 AB と線分 CD が点 O で交わっているとき、 $AO=BO$ 、 $CO=DO$ ならば、 $AC \parallel DB$ であることを、次のように証明したい。

, , にあてはまる最も適当なものを、下のアからカまでの中からそれぞれ選んで、そのかな符号を書きなさい。

(愛知県 2014 年度 B)

(証明)

$\triangle AOC$ と $\triangle BOD$ で、

仮定より、 $AO=BO$ …①

$CO=DO$ …②

は等しいから、 $\angle AOC = \angle BOD$ …③

①, ②, ③から、 が、それぞれ等しいので、 $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$

合同な図形では、対応する角の大きさは等しいので、 $\angle ACO = \angle BDO$

2 つの直線に 1 つの直線が交わる時、 が等しいならば、この 2 つの直線は平行だから、

$AC \parallel DB$

ア 同位角

イ 錯角

ウ 対頂角

エ 1 組の辺とその両端の角

オ 2 組の辺とその間の角

カ 2 組の辺と 1 組の角

解答欄

I (), II (), III ()

解答

I (ウ)

II (オ)

III (イ)

解説

$\triangle AOC$ と $\triangle BOD$ で

仮定より、 $AO=BO$ …①

$CO=DO$ …②

対頂角は等しいから

$\angle AOC = \angle BOD$ …③

①, ②, ③より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$

よって $\angle ACO = \angle BDO$

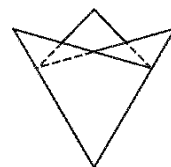
よって錯角が等しいので $AC \parallel DB$

【問 14】

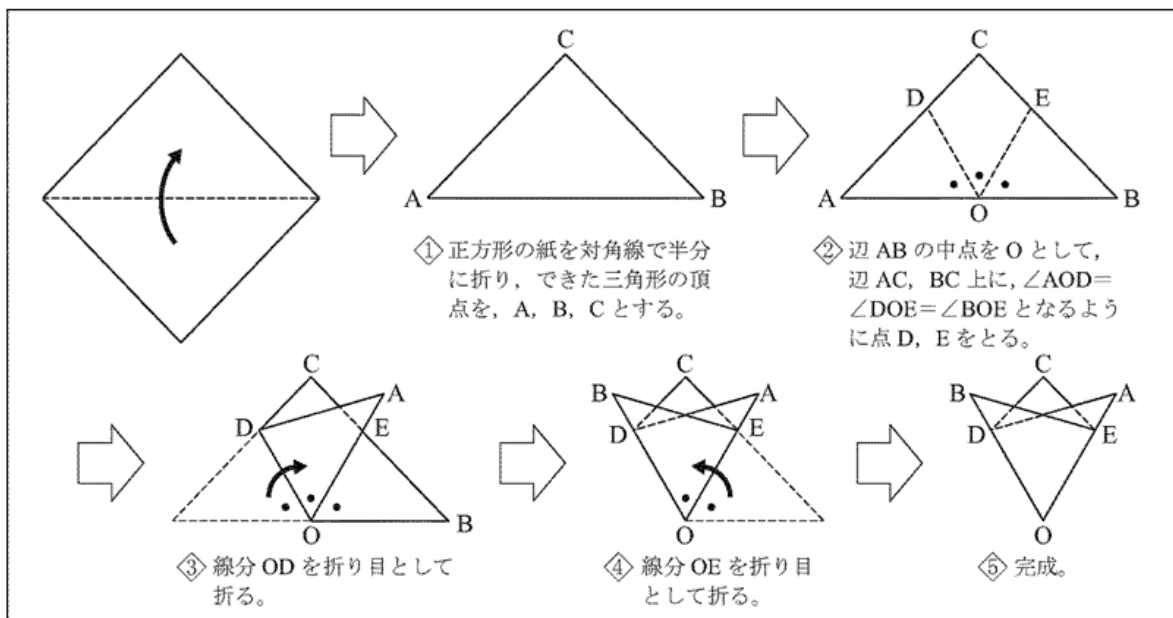
図1のような形は、正方形の紙を次の手順にしたがって折ると作ることができる。後の問1～問3に答えなさい。ただし、紙の厚さは考えないものとする。

(滋賀県 2014 年度)

図1



手順



問1 手順④の図において、 $\triangle OAD \equiv \triangle OBE$ であることを証明しなさい。

問2 手順④の図において、点A、B、C、D、E、Oのうち、点Aを含む4点は1つの円周上にある。点A以外の3点を書き、その4点が1つの円周上にあることを説明しなさい。

問3 手順にしたがって折った紙を、図2のように、線分DEで $\triangle ODE$ を切りとって開くと、図3のような、正六角形ができる。DE=4cmのとき、折る前の正方形の面積を求めなさい。

図2

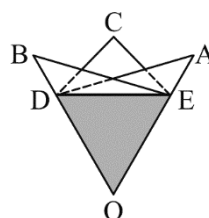
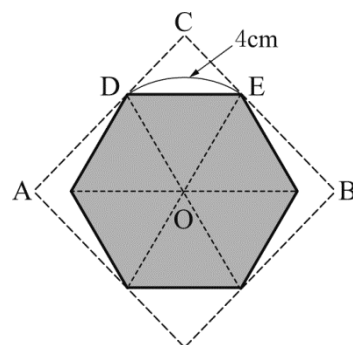


図3



問1	〔証明〕	
問2	4 点(A , , ,) 〔説明〕	
問3		cm²

解答

問1

〔証明〕

$\triangle OAD$ と $\triangle OBE$ で

仮定より

$$\angle AOD = \angle BOE \cdots \textcircled{1}$$

点 O は辺 AB の中点なので

$$OA = OB \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また } \angle OAD = \angle OBE = 45^\circ \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle OAD \equiv \triangle OBE$$

問2

4点(A , C , D , O)

〔説明〕

補助線 OC をひく。

$$\angle DCO = \angle DAO = 45^\circ \text{ だから}$$

円周角の定理の逆より

4点 A , C , D , O は1つの円周上にある。

$$\text{問3 } 32 + 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle OAD$ と $\triangle OBE$ において

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことを示す。

問2

CO をひくと $\angle DCO = \angle DAO = 45^\circ$ だから

円周角の定理の逆より

4点 A , C , D , O は同一円周上にあるから

求める点は C , D , O

問3

CO と DE との交点を M とおく。

$$DM = EM = 2 \text{ cm}$$

$\triangle CME$ は, $\angle CME = 90^\circ$, $\angle MCE = 45^\circ$ の直角二等辺三角形より $CM = EM = 2 \text{ cm}$

$\triangle OEM$ は, $\angle OME = 90^\circ$, $\angle OEM = 60^\circ$ の直角三角形だから, $OM = \sqrt{3} \text{ } EM = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

よって, 折る前の正方形の面積は

$$4\triangle COB = 4 \times \frac{1}{2} \times (2 + 2\sqrt{3})^2 = 2(16 + 8\sqrt{3}) = 32 + 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 15】

図1, 図2において, 四角形 ABCD と四角形 EFGH はともに長方形であり, $EF=8\text{ cm}$, $EH=2\text{ cm}$ である。4 点 E, F, G, H はそれぞれ辺 AB, BC, CD, DA 上にあって A, B, C, D と異なる。このとき, $\triangle HAE \sim \triangle GDH$ である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

(大阪府 2014 年度 前期)

問1 図1において,

- (1) $\triangle HAE$ の面積を $S\text{ cm}^2$ とするとき, $\triangle GDH$ の面積を S を用いて表しなさい。

図1

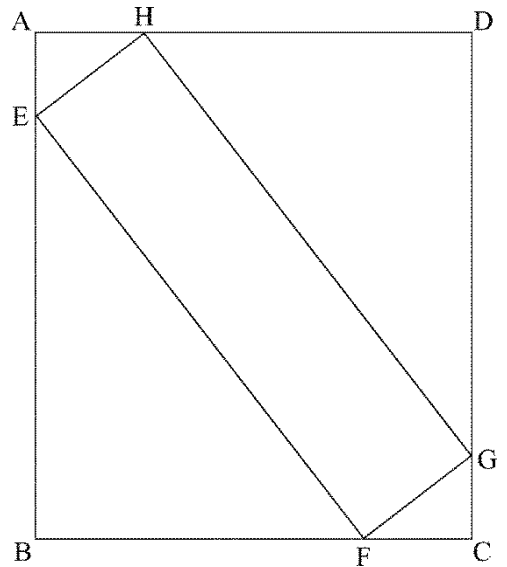
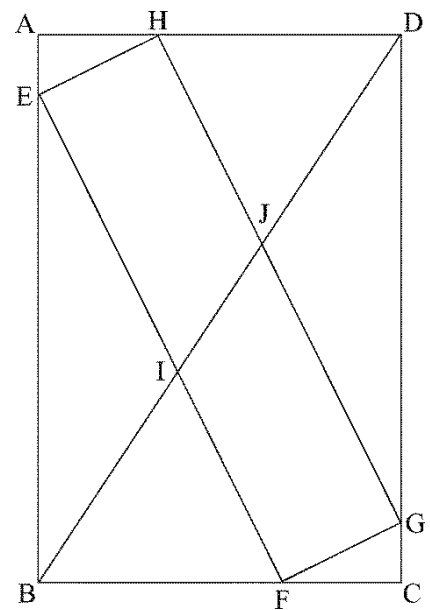


図2



- (2) $\triangle EBF \equiv \triangle GDH$ であることを証明しなさい。

- (3) $HD=5\text{ cm}$ であるときの辺 AB の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

問2 図2において, B と D とを結ぶ。I は線分 BD と辺 EF との交点であり, J は線分 BD と辺 HG との交点である。 $AB:AD=3:2$ であるときの線分 IJ の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm ²
	(2)	〔証 明〕
	(3)	〔求め方〕
問2		cm

解答

問1

(1) $16S \text{ cm}^2$

(2)

[証 明]

$\triangle EBF$ と $\triangle GDH$ において

四角形 $ABCD$ は長方形だから

$$\angle EBF = \angle GDH = 90^\circ \cdots \textcircled{7}$$

四角形 $EFGH$ は長方形だから

$$EF = GH \cdots \textcircled{8}$$

$$\angle BEF = 180^\circ - (\angle HEF + \angle AEH)$$

$$= 90^\circ - \angle AEH \cdots \textcircled{9}$$

$$\angle DGH = 180^\circ - (\angle HDG + \angle DHG)$$

$$= 90^\circ - \angle DHG \cdots \textcircled{10}$$

$\triangle HAE \sim \triangle GDH$ より

$$\angle AEH = \angle DHG \cdots \textcircled{11}$$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{10}$, $\textcircled{11}$ より

$$\angle BEF = \angle DGH \cdots \textcircled{12}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$, $\textcircled{12}$ より,

直角三角形の斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle EBF \equiv \triangle GDH$$

(3)

[求め方]

$$\angle HDG = 90^\circ \text{ だから}$$

$$HG^2 = HD^2 + DG^2$$

$$DG = x \text{ cm とすると}$$

$$8^2 = 5^2 + x^2$$

これを解くと

$$x > 0 \text{ より}$$

$$x = \sqrt{39}$$

$\triangle EBF \equiv \triangle GDH$ だから

$$EB = GD = \sqrt{39} \text{ cm}$$

$\triangle HAE \sim \triangle GDH$ だから

$$AE : DH = EH : HG = 2 : 8 = 1 : 4$$

よって

$$AE = \frac{1}{4}$$

$$DH = \frac{5}{4} \text{ cm}$$

したがって

$$AB = AE + EB = \frac{5}{4} + \sqrt{39} \text{ cm}$$

$$\frac{5}{4} + \sqrt{39} \text{ cm}$$

問2 $\frac{2\sqrt{65}}{7} \text{ cm}$

解説

問1

(1)

$\triangle HAE \sim \triangle GDH$ より, 相似比は $EH:HG=2:8=1:4$

よって, 面積比は $\triangle HAE:\triangle GDH=1:16$ $\triangle HAE=S \text{ cm}^2$ より $\triangle GDH=16S \text{ cm}^2$

(2)

$\triangle EBF$ と $\triangle GDH$ において, 直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいことを示し, 合同を導く。

(3)

$\triangle GDH$ において, $GD=\sqrt{8^2-5^2}=\sqrt{39} \text{ cm}$

$\triangle EBF \cong \triangle GDH$ より, $EB=GD=\sqrt{39} \text{ cm}$

また, $\triangle HAE \sim \triangle GDH$ より

$AE:DH=EH:HG$

$AE:5=2:8$

$$AE=\frac{5}{4} \text{ cm}$$

$$\text{よって } AB=\frac{5}{4}+\sqrt{39} \text{ cm}$$

問2

$AE=x \text{ cm}$, $AH=y \text{ cm}$ とすると

$\triangle HAE \sim \triangle GDH$ で, 相似比は $1:4$ だから

$DH=4x \text{ cm}$, $DG=4y \text{ cm}$ と表せる。

また $AB:AD=3:2$ より

$$(x+4y):(y+4x)=3:2$$

$$3y+12x=2x+8y$$

$$5y=10x$$

$$y=2x$$

よって $AH=2x \text{ cm}$

$\triangle AEH$ において, 三平方の定理より

$$x^2+(2x)^2=2^2$$

$$5x^2=4$$

$x>0$ より

$$x=\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$AD=y+4x=2x+4x=6x=6 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$\triangle ABD$ において, 三平方の定理より

$AB=3$, $AD=2$ のとき

$$BD=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

$AD:BD=2:\sqrt{13}$ より

$$\frac{12\sqrt{5}}{5}:BD=2:\sqrt{13}$$

$$BD=\frac{6\sqrt{65}}{5} \text{ cm}$$

EF と AD の延長線の交点を K とすると

$\triangle EAK \sim \triangle HAE$ だから

$AK:AE=AE:AH=1:2$

$$\text{よって } AK=\frac{x}{2} \text{ cm}$$

$$KD \parallel BF \text{ より } BI:ID=BF:KD=4x:\left(\frac{x}{2}+2x+4x\right)=8:13$$

同様に $DJ:JB=8:13$

$$\text{よって } BI:IJ:JD=8:5:8 \quad IJ=\frac{5}{21}BD=\frac{5}{21} \times \frac{6\sqrt{65}}{5}=\frac{2\sqrt{65}}{7} \text{ cm}$$

【問 16】

点 O を中心とし線分 AB を直径とする半径 3 cm の半円がある。
次の問1～問3に答えなさい。

(和歌山県 2014 年度)

問1 図1のように、 $\widehat{AB}$ 上に $\widehat{AP}$ と $\widehat{PB}$ の長さの比が $5:4$ となるように点 P をとるとき、 $\angle PAB$ の大きさを求めなさい。

図1

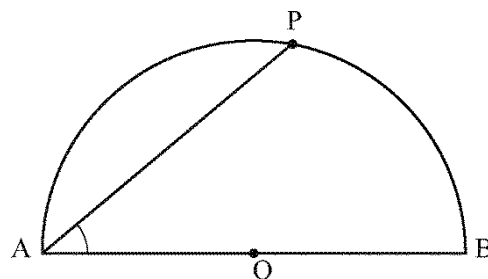
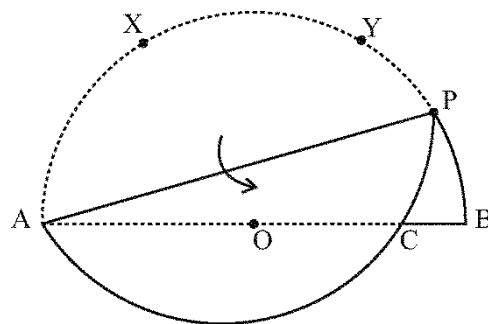


図2



問2 図2のように、 $\widehat{AB}$ を3等分する2点を取り、 A に近い方を点 X , B に近い方を点 Y とする。 $\widehat{BY}$ (点 B , Y をふくまない) 上に点 P をとり、弦 AP を折り目として折り返した後の $\widehat{AP}$ と線分 OB との交点を C とする。また、図3のように、 P から O を通る直線をひき、 $\widehat{AC}$ との交点を D とし、 A と D , P と C をそれぞれ結ぶ。このとき、 $\triangle ACP \equiv \triangle PDA$ であることを証明しなさい。

図3

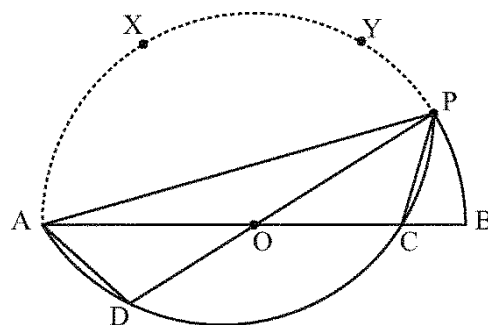
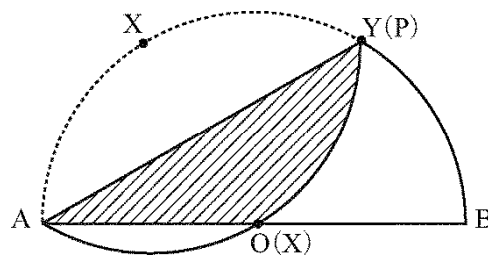


図4

問3 図4のように、点 P を図2の Y 上にとり、弦 AP を折り目として折り返すと、 X は O と重なった。このとき、 の部分の面積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。



解答欄

問1	$\angle PAB =$ 度
問2	〔証明〕
問3	cm^2

解答

問1 $\angle PAB = 40^\circ$ 度

問2

〔証明〕

$\triangle ACP$ と $\triangle PDA$ で

AP は共通 …①

$\angle CAP$ と $\angle DPA$ は $\triangle OAP$ が $OA = OP$ の二等辺三角形だから

$\angle CAP = \angle DPA$ …②

$\widehat{CD}$ に対する円周角は等しいから

$\angle CPD = \angle DAC$ …③

②, ③から

$\angle CPA = \angle DAP$ …④

①, ②, ④から,

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ACP \equiv \triangle PDA$

問3 $\frac{3}{2} \pi \text{ cm}^2$

解説

問1

$$\angle POB = 180^\circ \times \frac{4}{9} = 80^\circ$$

$$\text{円周角の定理より } \angle PAB = \frac{1}{2} \angle POB = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$$

問2

$\triangle ACP$ と $\triangle PDA$ において

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことを示し合同を導く。

問3

$$\angle AOX = \angle XOY = 180^\circ \times \frac{1}{3} = 60^\circ \text{ より } \triangle AOX \text{ と } \triangle XOY \text{ は正三角形。}$$

XO と AY の交点を H とすると

$\triangle XHY \equiv \triangle OHY \equiv \triangle OHA$ だから

求める面積は

半径を $OY = 3 \text{ cm}$, 中心角を 60° とするおうぎ形の面積と一致する。

$$\text{よって } \pi \times 3^2 \times \frac{60}{360} = \frac{3}{2} \pi \text{ cm}^2$$

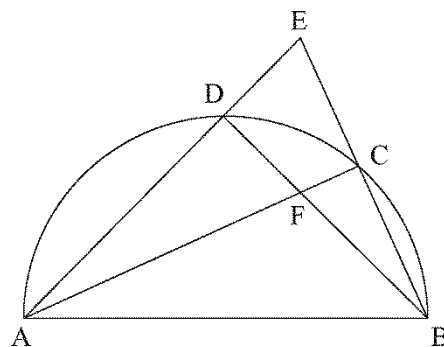
【問 17】

右の図のように、線分 AB を直径とする半円があり、半円の周上に、点 C と、 $AD=BD$ となる点 D をとる。また、線分 AD の延長と線分 BC の延長の交点を E 、線分 AC と線分 BD の交点を F とする。

次の問1、問2に答えなさい。

(山口県 2014 年度)

問1 $\triangle AFD \equiv \triangle BED$ であることを証明しなさい。



問2 $AF=9\text{ cm}$, $DE=3\text{ cm}$ のとき、線分 BC の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AFD$ と $\triangle BED$ で

仮定から

$$AD=BD \cdots \textcircled{1}$$

線分 AB は直径だから

$$\angle ADB=90^\circ$$

$$\text{よって } \angle ADF = \angle BDE = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

弧 CD に対する円周角は等しいから

$$\angle CAD = \angle CBD$$

$$\text{よって } \angle FAD = \angle EBD \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFD \equiv \triangle BED$$

問2 $8 - 2\sqrt{2}$ cm

解説

問1

$\triangle AFD$ と $\triangle BED$ において

$$\text{仮定より } AD=BD \cdots \textcircled{1}$$

AB は直径より円周角の定理から $\angle ADB=90^\circ$

$$\text{よって } \angle ADF = \angle BDE \cdots \textcircled{2}$$

弧 CD に対する円周角は等しいから

$$\angle CAD = \angle CBD$$

$$\text{よって } \angle FAD = \angle EBD \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFD \equiv \triangle BED$$

問2

$\triangle ADF$ において

$$AD = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle AFD \sim \triangle BFC$ だから

$$AF:BF = AD:BC$$

$$9:(6\sqrt{2} - 3) = 6\sqrt{2}:BC$$

$$9BC = 6\sqrt{2}(6\sqrt{2} - 3)$$

$$BC = 8 - 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

【問 18】

図1のような長方形 ABCD を, 図2のように, 頂点 B が頂点 D に重なるように折ったとき, 折り目の線分を EF, 頂点 A が移った点を G とする。

このとき, 次の問いに答えなさい。
(愛媛県 2014 年度)

問1 $\triangle CDF \equiv \triangle GDE$ であることを証明せよ。

問2 $AB=5\text{ cm}$, $AD=10\text{ cm}$ とするとき,

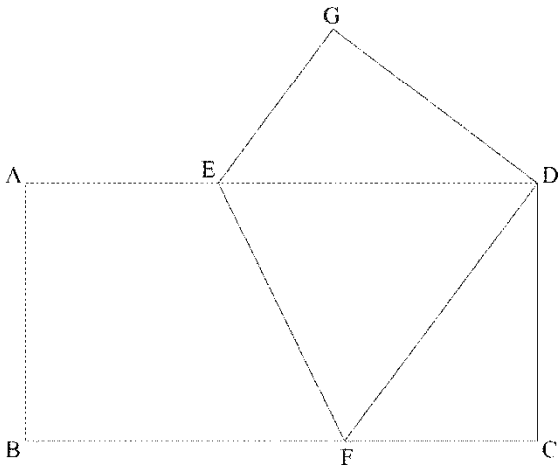
(1) 線分 EG の長さを求めよ。

(2) $\triangle DEF$ の面積を求めよ。

図1



図2



解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

〔証明〕

$\triangle CDF$ と $\triangle GDE$ において

四角形 $ABCD$ は長方形だから

$$\angle C = \angle G = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$CD = GD \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle CDF = 90^\circ - \angle FDE \cdots \textcircled{3}$$

$$\angle GDE = 90^\circ - \angle FDE \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ から

$$\angle CDF = \angle GDE \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{5}$ で

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことがいえたから

$$\triangle CDF \equiv \triangle GDE$$

問2

$$(1) \frac{15}{4} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{125}{8} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle CDF$ と $\triangle GDE$ において

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいことを示し合同を導く。

問2

(1)

$EG = x \text{ cm}$ とすると $EA = EG = x \text{ cm}$ より, $DE = 10 - x \text{ cm}$ と表せる。

$\triangle GDE$ において

三平方の定理より

$$(10 - x)^2 = x^2 + 5^2$$

$$100 - 20x + x^2 = x^2 + 25$$

$$20x = 75$$

$$x = \frac{15}{4} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle DEF = \triangle BEF$, $\triangle ABE = \triangle GDE = \triangle CDF$ だから

$$\triangle DEF = \left\{ 5 \times 10 - \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{15}{4} \times 2 \right\} \div 2 = \frac{125}{8} \text{ cm}^2$$

【問 19】

図1のように、正方形 ABCD があり、辺 AB 上に点 E、辺 BC 上に点 F をとり、 $\triangle DEF$ が正三角形になるようにする。

このとき、問1～問3に答えなさい。

(佐賀県 2014 年度 一般)

問1 $\triangle AED \equiv \triangle CFD$ であることを証明しなさい。

問2 $\angle ADE$ の大きさを求めなさい。

問3 下の図2は、図1において 3 点 E, B, F を通る円をかいたものである。 $EB = 4\text{ cm}$ のとき、(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(1) 3 点 E, B, F を通る円の半径を求めなさい。

(2) $\triangle DEF$ の面積を求めなさい。

(3) 図2の色をつけた部分の面積を求めなさい。

図1

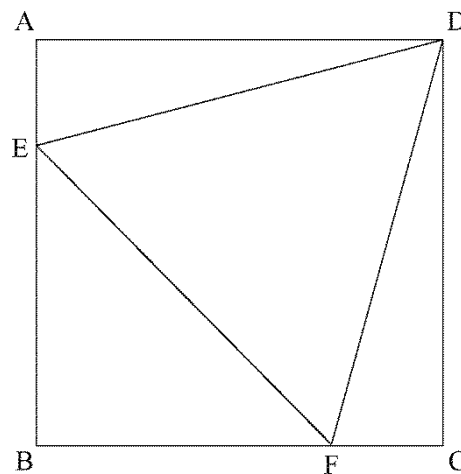
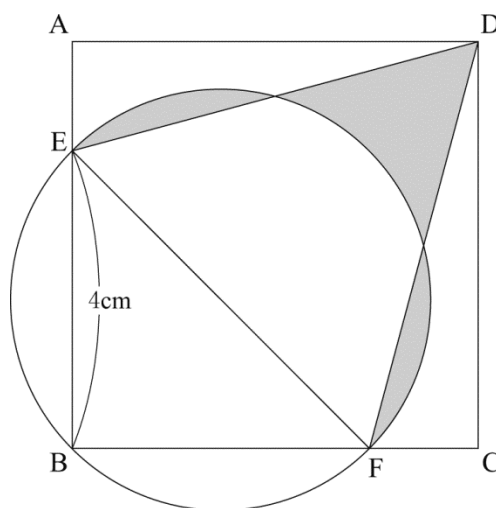


図2



解答欄

問1		
問2	度	
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²
	(3)	cm ²

解答

問1

$\triangle AED$ と $\triangle CFD$ において

四角形 $ABCD$ は正方形だから

$$AD=CD \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle EAD = \angle FCD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle DEF$ は正三角形だから

$$DE=DF \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と他の1辺が, それぞれ等しいので

$$\triangle AED \equiv \triangle CFD$$

問2 15 度

問3

$$(1) \ 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$(2) \ 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$(3) \ \frac{4}{3}\pi \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle AED$ と $\triangle CFD$ において

直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいことを示し合同を導く。

問2

$$\triangle AED \equiv \triangle CFD \text{ より } \angle ADE = \angle CDF = (90^\circ - 60^\circ) \div 2 = 15^\circ$$

問3

(1)

$\angle EBF = 90^\circ$ より EF が円の直径となる。

$$\triangle AED \equiv \triangle CFD \text{ より } AE = CF$$

$$\text{また } AB = BC \text{ だから } BF = BE = 4 \text{ cm}$$

よって三平方の定理より

$$EF = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

したがって円の半径は $2\sqrt{2} \text{ cm}$

(2)

円の中心を O とすると $\triangle DEF$ は正三角形だから $EO = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ より

$$DO = 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle DEF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(3)

弧 EF と DE , DF の交点をそれぞれ G , H とする。

$\triangle EOG$ において

$$\angle OEG = 60^\circ, \text{ OE} = \text{OG} \text{ より}$$

$\triangle OEG$ は1辺が $2\sqrt{2} \text{ cm}$ の正三角形となる。

同様に $\triangle FOH$ も1辺が $2\sqrt{2} \text{ cm}$ の正三角形となるので $\angle GOH = 60^\circ$

$$\text{よって } \triangle OEG \equiv \triangle OGH \equiv \triangle DGH \equiv \triangle OFH$$

よって斜線部分の面積は

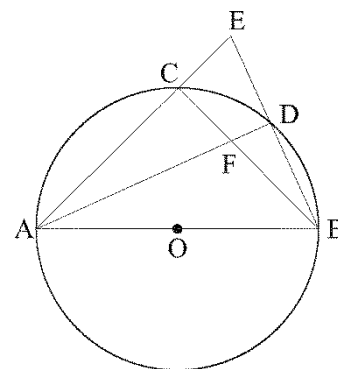
半径が $2\sqrt{2} \text{ cm}$, 中心角 60° のおうぎ形の面積と一致するので

$$\pi \times (2\sqrt{2})^2 \times \frac{60}{360} = \frac{4}{3} \pi \text{ cm}^2$$

【問 20】

右の図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に 2 点 C, D をとる。直線 AC と直線 BD の交点を E とし、線分 AD と線分 BC の交点を F とする。 $AC=BC$ のとき、 $\triangle CAF \equiv \triangle CBE$ であることを証明せよ。

(鹿児島県 2014 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕 $\triangle CAF$ と $\triangle CBE$ において

仮定より $AC = BC \cdots ①$

$\widehat{CD}$ に対する円周角は等しいから

$\angle CAF = \angle CBE \cdots ②$

AB は直径であるから $\widehat{AB}$ に対する円周角より

$\angle ACF = 90^\circ \cdots ③$

$\angle BCE = 180^\circ - \angle ACF = 90^\circ \cdots ④$

③, ④より

$\angle ACF = \angle BCE \cdots ⑤$

①, ②, ⑤より

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle CAF \equiv \triangle CBE$

解説

$\triangle CAF$ と $\triangle CBE$ において

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことから合同を導く。

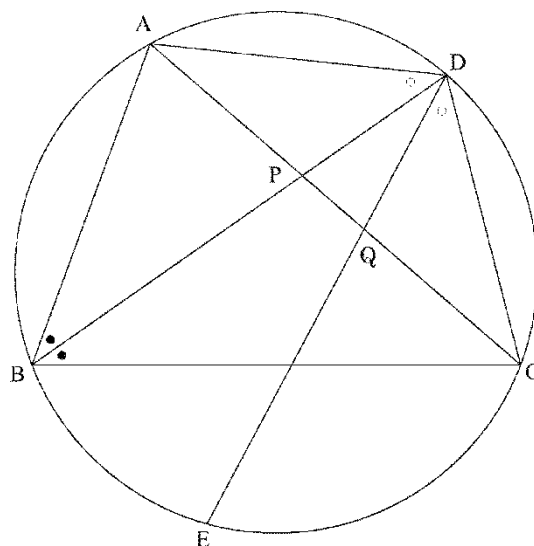
【問 21】

図のように、円周上の 3 点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ について、 $\angle B$ の二等分線と円との交点を D とし、 $\angle ADB = \angle CDE$ となる点 E を円周上にとる。また、線分 BD, ED と辺 AC との交点をそれぞれ P, Q とする。このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2014 年度)

問1 $\triangle ADP \equiv \triangle CDQ$ であることを証明しなさい。ただし、証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

問2 $AB=9\text{ cm}$, $BC=12\text{ cm}$, $AC=14\text{ cm}$ のとき、 PQ の長さを求めなさい。



解答欄

問1	
問2	PQ = cm

解答

問1

$\triangle ADP$ と $\triangle CDQ$ において

条件より

$$\angle ADP = \angle CDQ \cdots \textcircled{1}$$

円周角の定理より

$$\angle ABD = \angle ACD, \angle CBD = \angle CAD$$

条件より

$$\angle ABD = \angle CBD \text{ あるから}$$

$$\angle ACD = \angle CAD$$

$$\text{すなわち } \angle DAP = \angle DCQ \cdots \textcircled{2}$$

ゆえに $\triangle DAC$ は二等辺三角形であるから

$$DA = DC \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ADP \equiv \triangle CDQ$$

問2 $PQ = 2 \text{ cm}$

解説

問1

$\triangle ADP$ と $\triangle DCQ$ において

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことから合同を導く。

問2

点 P を通り AB に平行な直線と BC との交点を R とする。

$$\angle RPB = \angle PBA = \angle RBP \text{ より}$$

$$PR = BR$$

$$\text{よって } AP : CP = BR : RC = PR : RC = AB : BC = 9 : 12 = 3 : 4$$

$$AP = \frac{3}{7} AC = \frac{3}{7} \times 14 = 6 \text{ cm}$$

$$PQ = 14 - 2 \times 6 = 2 \text{ cm}$$