

5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2015 年度出題】

【問 1】

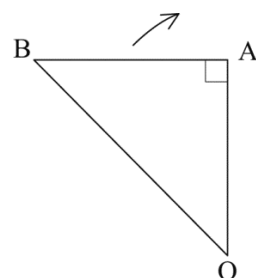
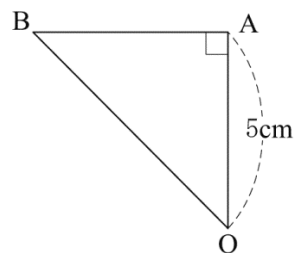
図1のように、 $OA=5\text{ cm}$ の直角二等辺三角形 OAB があります。

次の(1)～(3)に答えなさい。ただし、円周率は π を用いなさい。

(北海道 2015 年度)

- (1) 図1の $\triangle OAB$ を、点 O を中心として矢印の方向に 20° 回転させる
とき、点 B が動いてできる弧の長さを求めなさい。

図1



- (2) 図1の $\triangle OAB$ を、点 O を中心として矢印の方向に 90° 回転させる
とき、辺 AB が動いてできる図形の面積を求めなさい。

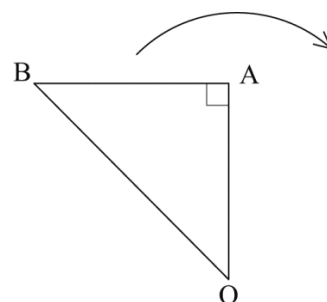
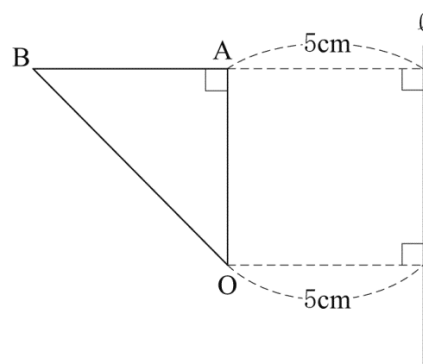


図2



- (3) 図2のように、図1の $\triangle OAB$ の辺 OA と平行で、距離が 5 cm の直線 ℓ があります。 $\triangle OAB$ を、辺 OA を軸として 1 回転させてできる立体を P 、直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体を Q とします。立体 P の体積を求めなさい。また、立体 P の体積は、立体 Q の体積の何倍ですか、求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	[計算] 答 cm²
(3)	cm ³
	倍

解答

$$(1) \frac{5\sqrt{2}}{9} \pi \text{ cm}$$

(2)

[計算]

△OABは直角二等辺三角形より

OB = $5\sqrt{2}$ となる。…①

△OABを 90° 回転させた三角形を△OCDとすると
求める図形の面積のうち線分BDより上方部分の面積は

$$\frac{1}{4} \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times \pi - \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times 2$$

$$= \frac{25}{2} \pi - 25 \cdots \textcircled{2}$$

求める図形の面積のうち線分ADより下方部分の面積は

$$5 \times 5 - \frac{1}{4} \times 5 \times 5 \times \pi = 25 - \frac{25}{4} \pi \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\left(\frac{25}{2} \pi - 25 \right) + \left(25 - \frac{25}{4} \pi \right) = \frac{25}{4} \pi$$

$$\text{答 } \frac{25}{4} \pi \text{ cm}^2$$

(3)

$$\frac{125}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\frac{1}{4} \text{ 倍}$$

解説

(1)

$\triangle OAB$ は $AO=AB=5\text{ cm}$, $\angle OAB=90^\circ$ の直角二等辺三角形より $OB=5\sqrt{2}\text{ cm}$

よって点 B が動いた長さは半径が $5\sqrt{2}\text{ cm}$, 中心角 20° のおうぎ形の弧の長さと一致するので

$$2\pi \times 5\sqrt{2} \times \frac{20}{360} = \frac{5\sqrt{2}}{9} \pi \text{ cm}$$

(2)

$\triangle OAB$ を点 O を中心として矢印の方向に 90° 回転させたとき A, B が移った点をそれぞれ A', B' とする。

辺 AB が動いてできる図形の面積は

おうぎ形 $OB'B' + \triangle OA'B' - \triangle OAB -$ おうぎ形 $OA'A'$

$\triangle OAB \equiv \triangle OA'B'$ より

おうぎ形 $OB'B' -$ おうぎ形 $OA'A'$

$$= \pi \times (5\sqrt{2})^2 \times \frac{90}{360} - \pi \times 5^2 \times \frac{90}{360}$$

$$= \frac{25}{4} \pi \text{ cm}^2$$

(3)

立体 P は底面の半径が 5 cm , 高さが 5 cm の円錐だからその体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 5 = \frac{125}{3} \pi \text{ cm}^3$$

A から直線 l に垂線をひき交点を H とし O から直線 l に垂線をひき交点を K とする。

また BO の延長線と直線 l との交点を I とする。

$\triangle IBH$ を直線 l を軸として 1 回転させてできる円錐を立体 R とし

正方形 $OAHK$ を直線 l を軸として 1 回転させてできる円柱を立体 T

$\triangle IKO$ を直線 l を軸として 1 回転させてできる立体を立体 U とする。

立体 R は立体 P と相似で相似比は $5:10=1:2$ より体積比は $1:8$

$$\text{よって立体 } R \text{ の体積は } \frac{125}{3} \pi \times 8 = \frac{1000}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{立体 } T \text{ の体積は } \pi \times 5^2 \times 5 = 125 \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{立体 } U \text{ は立体 } P \text{ と合同なのでその体積は } \frac{125}{3} \pi \text{ cm}^3$$

よって立体 Q の体積は

立体 R の体積 $-$ 立体 T の体積 $-$ 立体 U の体積

$$= \frac{1000}{3} \pi - 125 \pi - \frac{125}{3} \pi = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{したがって立体 } P \text{ の体積は立体 } Q \text{ の体積の } \frac{125}{3} \pi \div \frac{500}{3} \pi = \frac{1}{4} \text{ 倍}$$

【問 2】

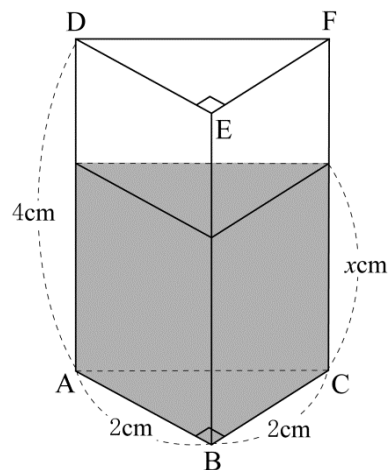
図のような、 $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=BC=2\text{ cm}$ の直角二等辺三角形 ABC を底面とし、高さが 4 cm の三角柱の容器に、水を入れて密閉します。

この容器を水平な台の上に、面 ABC が容器の底となるように置いたときの、底から水面までの高さを $x\text{ cm}$ とします。

次の(1)、(2)の問いに答えなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとします。

(宮城県 2015 年度 前期)

(1) この容器に入っている水の体積を、 x を使った式で表しなさい。



(2) この容器を水平な台の上に、面 $ABED$ が容器の底となるように置きかえたとき、底から水面までの高さは 1 cm になりました。 x の値を求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	

解答

(1) $2x\text{ cm}^3$

(2) 3

解説

(1)

水の体積は

$$\text{底面積} \times \text{高さより } \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times x = 2x\text{ cm}^3$$

(2)

水の入っていない部分は $2-1=1\text{ cm}$ を 2 辺とする直角三角形を底面とし高さを 4 cm とする三角柱の体積と一致する。

$$\text{よって水の体積は } \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 4 = 8 - 2 = 6\text{ cm}^3$$

よって $2x=6$

$x=3$

【問 3】

図のように、円 O を底面とし、点 A を頂点とする円錐の母線 AB 上に $AC:CB=1:3$ となる点 C をとります。点 C を通り、底面に平行な平面と直線 OA との交点を D とします。また、点 O と点 B 、点 C と点 D をそれぞれ結びます。
 $OA=8\text{ cm}$ 、 $OB=4\text{ cm}$ のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

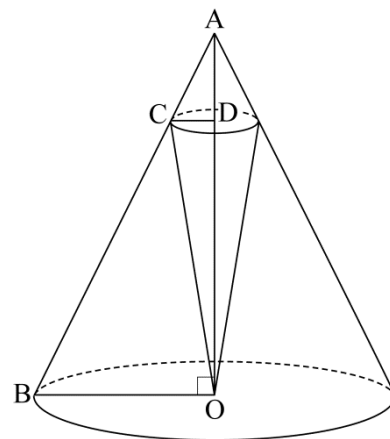
(宮城県 2015 年度 後期)

(1) 線分 CD の長さを求めなさい。

(2) 中心が点 D で、線分 CD を半径とする円を円 D とします。円 D を底面

とし、点 A を頂点とする円錐の体積と、円 D を底面とし、点 O を頂点とする円錐の体積の和を求めなさい。

ただし、円周率を π とします。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³

解答

(1) 1 cm

(2) $\frac{8}{3} \pi \text{ cm}^3$

解説

(1)

$\triangle ABO$ において

$CD \parallel BO$ より

$CD:BO=AC:AB$

$CD:4=1:4$

$4CD=4$

$CD=1\text{ cm}$

(2)

$CD \parallel BO$ より

$AD:DO=AC:CB=1:3$

$OA=8\text{ cm}$ より

$AD=8 \times \frac{1}{4} = 2\text{ cm}$

$OD=8-2=6\text{ cm}$

よって求める体積の和は $\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 2 + \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 6 = \frac{2}{3} \pi + 2\pi = \frac{8}{3} \pi \text{ cm}^3$

【問 4】

図1は三角錐 V の展開図であり、面 ABC は $BC=CA=4\text{ cm}$, $\angle ACB=90^\circ$ の直角二等辺三角形、面 ACD は $CD=8\text{ cm}$, $\angle ACD=90^\circ$ の直角三角形、面 BCE は $\angle BCE=90^\circ$ の直角三角形である。図2は、図1の展開図を面 ABC を底面にして組み立てたときの三角錐 V の投影図である。次の問1～問3に答えなさい。

(秋田県 2015 年度)

図1

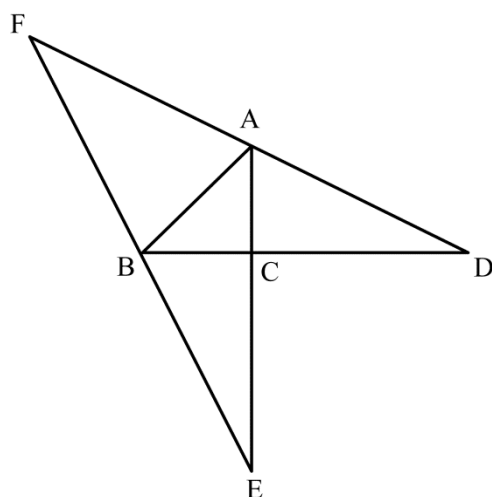
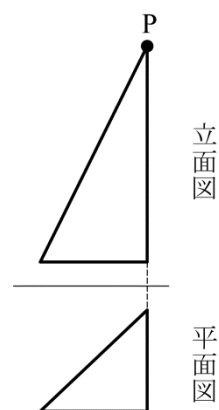


図2



問1 立面図の点 P の位置に集まる頂点を、 $A\sim F$ の中からすべて選んで記号を書きなさい。

問2 辺 AF の長さを求めなさい。求める過程も書きなさい。

問3 点 C を頂点、面 FBA を底面としたときの三角錐 V の高さを求めなさい。

解答欄

問1	
問2	〔過程〕 答 cm
問3	cm

解答

問1 D, E, F

問2

〔過程〕

$AF = x$ cm とすると

辺 AD は組み立てたときに辺 AF と重なる辺であるから

$AD = AF = x$ cm

面 ACD は直角三角形であるので

三平方の定理から

$$x^2 = 4^2 + 8^2$$

$x > 0$ であるから

$$x = 4\sqrt{5}$$

したがって $AF = 4\sqrt{5}$ cm

答 $4\sqrt{5}$ cm

問3 $\frac{8}{3}$ cm

解説

問1

$\triangle ABC$ が底面より三角錐の頂点 P に集まる点は点 D, E, F

問2

$\triangle ACD$ において $\angle ACD = 90^\circ$ より三平方の定理を利用して $AD = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm

組み立てると辺 AF と辺 AD は重なるので $AF = 4\sqrt{5}$ cm

問3

$\triangle ABC$ は $AC = BC = 4$ cm, $\angle ACB = 90^\circ$ の二等辺三角形なので $AB = 4\sqrt{2}$ cm

$\triangle FAB$ において点 F から辺 AB に垂線をひき交点を H とすると

$$AH = BH = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$FH = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle FBA = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$\triangle FBA$ を底面としたときの三角錐 V の高さを h とすると

$$\frac{1}{3} \times 24 \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 8 \quad h = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

【問 5】

図1は三角錐 V の展開図であり, $AC=8\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$, $\angle ACB=\angle CBD=90^\circ$, 面 ACE は正三角形である。図2は, 図1の展開図を面 ABC を底面にして組み立てたときの三角錐 V の投影図の一部である。次の問1～問3に答えなさい。

(秋田県 2015 年度)

図1

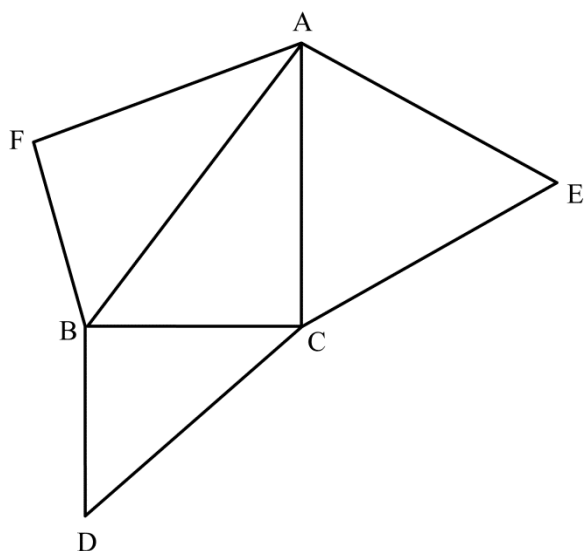
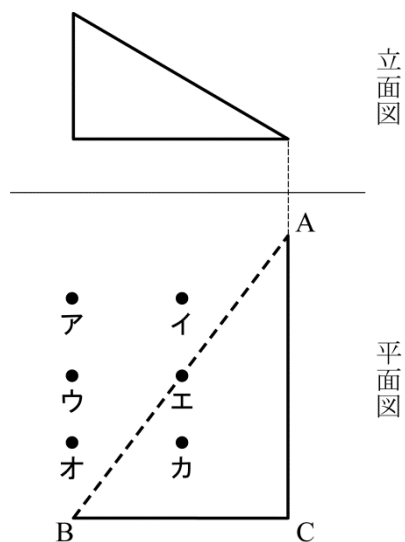


図2



問1 辺 BF の長さを求めなさい。求める過程も書きなさい。

問2 平面図における頂点 D の位置として最も適切な点を, 上のア～カの点の中から 1 つ選んで記号を書きなさい。

問3 三角錐 V の体積を求めなさい。

解答欄

問1	〔過程〕 答 cm	
問2		
問3		cm ³

解答

問1

〔過程〕

$BF = x \text{ cm}$ とすると

辺 BD は組み立てたときに辺 BF と重なる辺であるから

$BD = BF = x \text{ cm}$

面 ACE は正三角形であるから

$CE = AC = 8 \text{ cm}$

辺 CD は組み立てたときに辺 CE と重なる辺であるから

$CD = CE = 8 \text{ cm}$

面 BDC は直角三角形であるので

三平方の定理から

$$x^2 + 6^2 = 8^2$$

$x > 0$ であるから

$$x = 2\sqrt{7}$$

したがって $BF = 2\sqrt{7} \text{ cm}$

答 $2\sqrt{7} \text{ cm}$

問2 ウ

問3 $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$

解説

問1

$\triangle BCD$ において

$\angle CBD = 90^\circ$, $BC = 6 \text{ cm}$, $CD = CE = 8 \text{ cm}$ より

$$BD = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

よって $BF = BD = 2\sqrt{7} \text{ cm}$

問2

点 D の位置は立面図よりア, ウ, オ

$EA = EC$ よりウ, エ

よってどちらにも当てはまるウとなる。

問3

点 E から辺 AC に垂線をひき交点を H とすると

$\triangle ACE$ は1辺が 8 cm の正三角形より $EH = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

点 D から底面に垂線をひき交点を K とすると

$\triangle DKH$ において

$\angle DKH = 90^\circ$, $KH = 6 \text{ cm}$, $DH = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ より

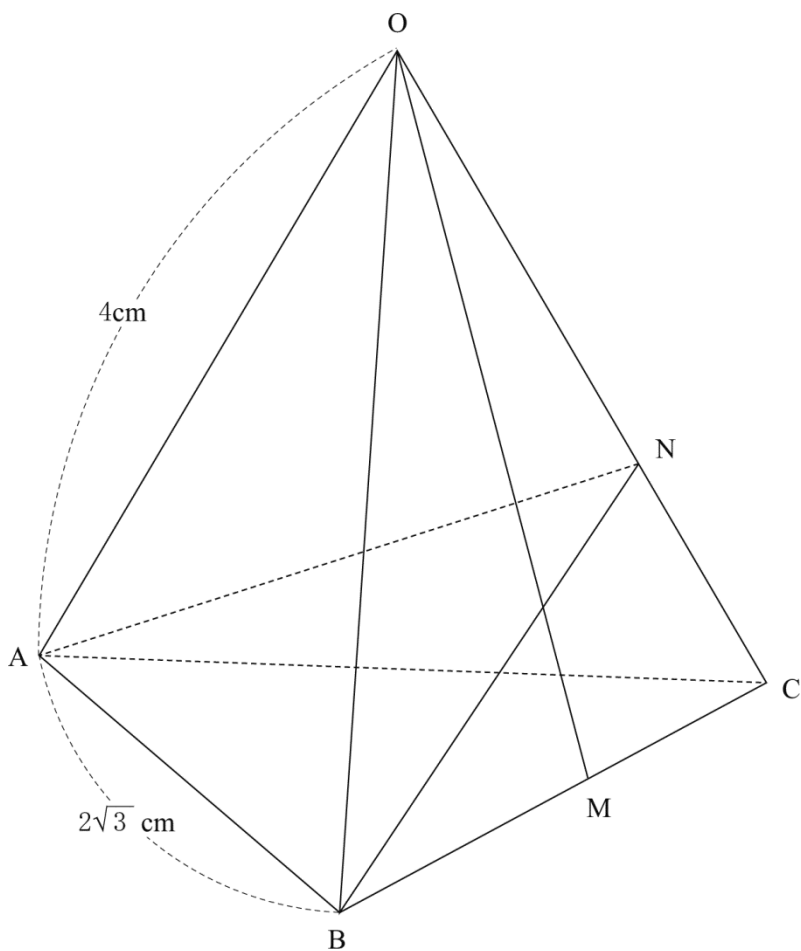
$$DK = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって求める三角錐 V の体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^3$

【問 6】

下の図のような、1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ cm の正三角形 ABC を底面とし、他の辺の長さが 4 cm の正三角錐がある。辺 BC の中点を M とし、辺 OC 上に線分 AN と線分 NB の長さの和が最も小さくなるように点 N をとる。このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(福島県 2015 年度)



問1 線分 OM の長さを求めなさい。

問2 線分 ON と線分 NC の長さの比を求めなさい。

問3 面 OAB と点 N との距離を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	ON:NC= :
問3	cm

解答

問1 $\sqrt{13}$ cm

問2 ON:NC=5:3

問3 $\frac{15\sqrt{39}}{52}$ cm

解説

問1

△OBC は OB=OC=4 cm, BC=2 $\sqrt{3}$ cm の二等辺三角形で

M は BC の中点より OM⊥BC, BM= $\sqrt{3}$ cm

よって△OBM において三平方の定理より OM= $\sqrt{4^2-(\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$ cm

問2

AN と NC の長さの和が最も小さくなるように N をとると右の図のようになる。

△OAB で OA=OB, ∠AON=∠BON より OC⊥AB になるから

ON=x cm, NC=4-x cm とすると

三平方の定理より OB²-ON²=BC²-NC²

よって 4²-x²=(2 $\sqrt{3}$)²-(4-x)²

これを解いて x= $\frac{5}{2}$ cm

したがって NC=4- $\frac{5}{2}$ = $\frac{3}{2}$

ON:NC= $\frac{5}{2} : \frac{3}{2}$ =5:3

問3

AB の中点を P とする。

△ABC は 1 辺が 2 $\sqrt{3}$ cm の正三角形より CP=3 cm

C から OP に垂線をひき交点を R とし OR=x cm すると

4²-x²=3²-($\sqrt{13}$ -x)²

これを解いて x= $\frac{10\sqrt{13}}{13}$ cm

CR= $\sqrt{4^2-\left(\frac{10\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{6\sqrt{39}}{13}$ cm

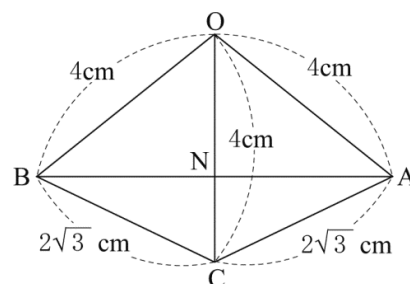
N から OP に垂線をひき交点を Q とする。

NQ // CR より NQ:CR=5:8

NQ: $\frac{6\sqrt{39}}{13}$ =5:8

8NQ= $\frac{30\sqrt{39}}{13}$

NQ= $\frac{15\sqrt{39}}{52}$ cm



【問 7】

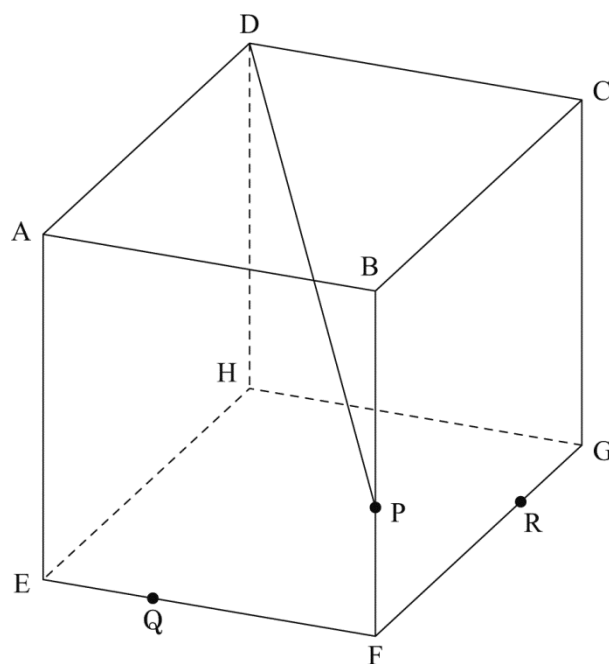
図のように、1 辺の長さが 3 cm である立方体 ABCDEFGH がある。辺 BF 上に $BP=2$ cm となる点 P, 辺 FE 上に $FQ=2$ cm となる点 Q, 辺 FG 上に $FR=2$ cm となる点 R をとる。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(茨城県 2015 年度)

問1 線分 DP の長さを求めなさい。

問2 四角すい BAQRC の体積を求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm ³

解答

問1 $\sqrt{22}$ cm

問2 $\frac{15}{2}$ cm³

解説

問1

△ABD は∠BAD=90° の直角二等辺三角形だから $BD=3\sqrt{2}$ cm

△BDP において∠DBP=90° より

三平方の定理から $DP=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$ cm

問2

AQ, BF, CR を延長し交点を O とする。

△AOB において

QF // AB より

OF:OB=QF:AB=2:3

よって OF:FB=2:1

FB=3 cm より

OF:3=2:1

OF=6 cm

したがって求める四角すい BAQRC の体積は

三角すい OABC－三角すい OQFR－三角すい BQFR

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times (6+3) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 6 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 3$$

$$= \frac{27}{2} - 4 - 2$$

$$= \frac{15}{2} \text{ cm}^3$$

【問 8】

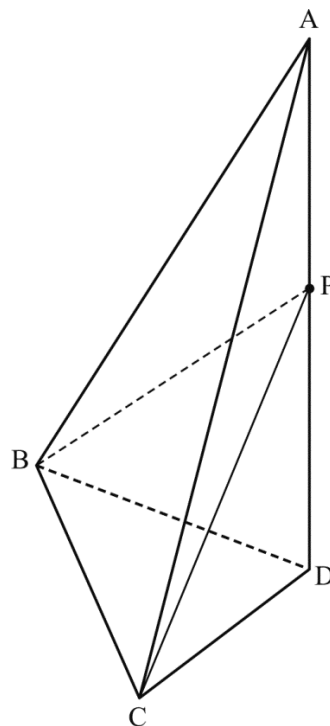
右の図1に示した立体 $A-BCD$ は、 $AD=8\text{ cm}$, $BD=CD=4\text{ cm}$, $\angle ADB=\angle ADC=\angle BDC=90^\circ$ の三角すいである。辺 AD 上にある点を P とする。頂点 B と点 P , 頂点 C と点 P をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2015 年度)

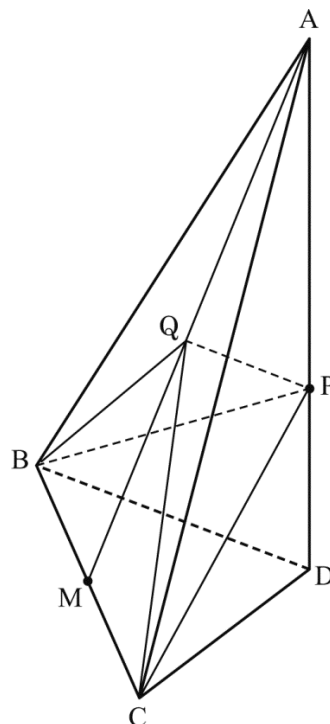
問1 $AP=PD$ のとき, $\triangle BCP$ の内角である $\angle BPC$ の大きさは何度か。

図1



問2 右の図2は, 図1において, $AP=6\text{ cm}$ のとき, 辺 BC の中点を M , 頂点 A と点 M を結び, 点 P から線分 AM に引いた垂線と線分 AM との交点を Q とし, 頂点 B と点 Q , 頂点 C と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。立体 $P-QBC$ の体積は何 cm^3 か。

図2



解答欄

問1	度
問2	cm^3

解答

問1 60度

問2 $\frac{16}{3}\text{cm}^3$

解説

問1

$$AP=PD=8\div 2=4\text{ cm}$$

$\triangle BCD$, $\triangle PBD$, $\triangle PCD$ は2辺が4 cm の直角二等辺三角形だから $BC=PB=PC=4\sqrt{2}\text{ cm}$
よって $\triangle PBC$ は正三角形になるので $\angle BPC=60^\circ$

問2

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において

$$\text{三平方の定理より } AB=AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}\text{ cm}$$

$$M \text{ は二等辺三角形の底辺の中点だから } BM=CM=4\sqrt{2}\div 2=2\sqrt{2}\text{ cm}$$

また $\angle AMB=90^\circ$ だから $\triangle ABM$ において

$$\text{三平方の定理より } AM=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}=6\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$\triangle CMD \text{ は直角二等辺三角形だから } MD=2\sqrt{2}\text{ cm}$$

$\triangle APQ\sim\triangle AMD$ だから

$$AP:AM=AQ:AD$$

$$6:6\sqrt{2}=AQ:8$$

$$AQ=4\sqrt{2}\text{ cm}$$

同様に $AP:AM=PQ:MD$ より

$$6:6\sqrt{2}=PQ:2\sqrt{2}$$

$$PQ=2\text{ cm}$$

よって立体 P-QBC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle QBC\times PQ$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times(6\sqrt{2}-4\sqrt{2})\times 2$$

$$=\frac{16}{3}\text{cm}^3$$

【問 9】

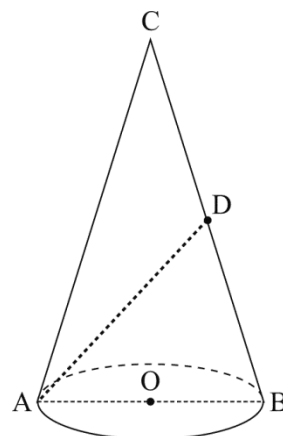
右の図1は、線分 AB を直径とする円 O を底面とし、線分 AC を母線とする円すいであり、点 D は線分 BC の中点である。

図1

$AB=6\text{ cm}$, $AC=10\text{ cm}$ のとき、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(神奈川県 2015 年度)

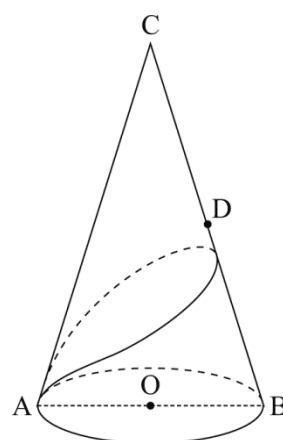
問1 この円すいの体積を求めなさい。



問2 この円すいにおいて、2 点 A , D 間の距離を求めなさい。

図2

問3 この円すいの表面上に、図2のように点 A から線分 BC と交わるように、点 A まで線を引く。このような線のうち、長さが最も短くなるように引いた線の長さを求めなさい。



解答欄

問1	cm^3
問2	cm
問3	cm

解答

問1 $3\sqrt{91} \pi \text{ cm}^3$

問2 $\sqrt{43} \text{ cm}$

問3 $5+5\sqrt{5} \text{ cm}$

解説

問1

$\triangle CAO$ において

三平方の定理より $CO = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{91} \text{ cm}$

よって円すいの体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times \sqrt{91} = 3\sqrt{91} \pi \text{ cm}^3$

問2

D から AB に垂線をひき交点を H とすると $DH \parallel CO$

よって $BH:HO = BD:DC = 1:1$ より $BH = HO = \frac{3}{2} \text{ cm}$

また $DH:CO = BD:BC = 1:2$

$DH = \frac{\sqrt{91}}{2} \text{ cm}$

$\triangle DAH$ において

三平方の定理より $AD = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{91}}{2}\right)^2 + \left(3 + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{43} \text{ cm}$

問3

円すいを展開し側面のおうぎ形を CAA' とする。

線が最も短くなるのは線が線分 AA' と一致するときである。

おうぎ形の中心角 $\angle ACA' = \alpha^\circ$ とすると

$2\pi \times 10 \times \frac{\alpha}{360} = 6\pi$ より

$\alpha = 108$

$CA = CA'$ より $\angle CAA' = \angle CA'A = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$

$\triangle CAA'$ において $\angle ACA'$ を 3 等分する直線と AA' との交点を E, F とする。

$\angle ACF = 2 \times 36^\circ = 72^\circ$

$\angle AFC = 180^\circ - (72^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$

$\angle ACF = \angle AFC$ より $AF = AC = 10 \text{ cm}$

また $\triangle FCA'$ において $\angle FCA' = \angle FA'C = 36^\circ$ より

$FC = FA' = x \text{ cm}$ とおくと

$\triangle CAA' \sim \triangle FCA'$ だから

$CA:FC = AA':CA'$

$10:x = (10+x):10$

$x(10+x) = 100$

$x^2 + 10x - 100 = 0$

$x = \frac{-10 \pm \sqrt{500}}{2}$

$= \frac{-10 \pm 10\sqrt{5}}{2}$

$= -5 \pm 5\sqrt{5}$

$x > 0$ より

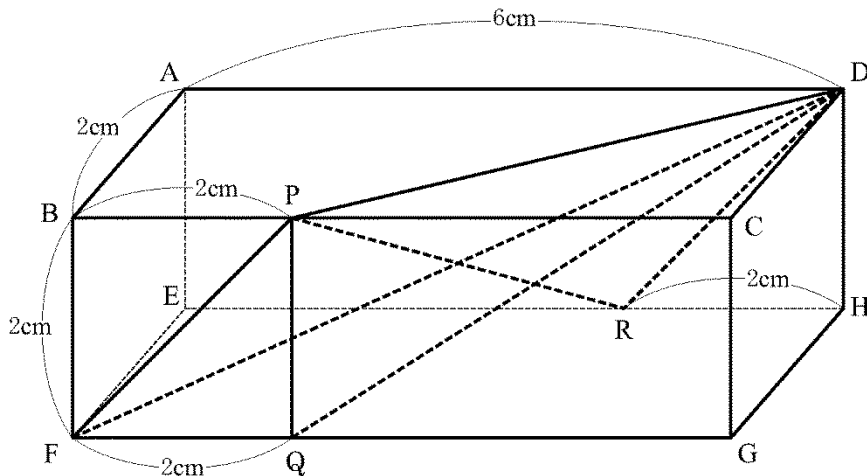
$x = -5 + 5\sqrt{5}$

よって $AA' = 10 + x = 10 - 5 + 5\sqrt{5} = 5 + 5\sqrt{5} \text{ cm}$

【問 10】

下の図のように、 $AB=2\text{ cm}$ 、 $AD=6\text{ cm}$ 、 $BF=2\text{ cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 BC 上に $BP=2\text{ cm}$ となる点 P 、辺 FG 上に $FQ=2\text{ cm}$ となる点 Q 、辺 HE 上に $HR=2\text{ cm}$ となる点 R をとる。このとき、次の問1～問4に答えなさい。

(新潟県 2015 年度)



問1 直線 AB とねじれの位置にある直線を、次のア～オから二つ選び、その符号を書きなさい。

ア 直線 BF イ 直線 FP ウ 直線 PD エ 直線 QD オ 直線 GH

問2 線分 PD と線分 PR の長さを、それぞれ答えなさい。

問3 $\angle PRD$ の大きさを求めなさい。

問4 $\triangle FPD$ の面積は、 $\triangle FQD$ の面積の何倍か、求めなさい。

解答欄

問1	
問2	$PD = \quad \text{cm}$
	$PR = \quad \text{cm}$
問3	$\angle PRD = \quad \text{度}$
問4	$\quad \text{倍}$

解答

問1 イエ

問2

$$PD = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$PR = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

問3 $\angle PRD = 90^\circ$ 度

問4 $\sqrt{3}$ 倍

解説

問1

直線 AB と交わるものと平行であるものを除くとねじれの位置が残る。

問2

$\triangle PCD$ において

$$\text{三平方の定理より } PD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

点 R から辺 FG に垂線をひき交点を K とすると

$\triangle RQK$ において

$$QR = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle PQR$ において

$$PR = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

問3

$\triangle DRH$ において

$$DR = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$PR^2 + DR^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 12 + 8 = 20 \quad PD^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

$PR^2 + DR^2 = PD^2$ が成り立つので

三平方の定理の逆より $\angle PRD = 90^\circ$

問4

4 点 D, P, F, R は直方体の切断面とみることができるので同一平面上にある。

$$\text{三平方の定理より } FP = RD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$PD = FR = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

2 組の対辺の長さがそれぞれ等しいから

四角形 PFRD は平行四辺形になる。

よって $FP \parallel RD$ 底辺が共通で高さが等しいので

$$\triangle FPD = \triangle FPR$$

また平行線の錯角は等しいから $\angle DRP = \angle FPR = 90^\circ$

$$\text{よって } \triangle FPD = \triangle FPR = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6} \text{ cm}^2$$

$$\triangle FQD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}^2 \text{ だから}$$

$$\triangle FPD \text{ は } \triangle FQD \text{ の } 2\sqrt{6} \div 2\sqrt{2} = \sqrt{3} \text{ 倍}$$

【問 11】

太郎さんと花子さんが、1 辺の長さが 2 cm の正四面体 ABCD の体積の求め方について話をしている。次の会話を読んで、あとの問いに答えなさい。

(富山県 2015 年度)

花子 太郎さんは図1のような正四面体の体積をどのようにして求めたのですか。

太郎 立体の体積は底面の面積と高さがわかれば求めることができるから、点 A から面 BCD に垂線をひいて答えを求めたよ。

花子 私も同じようにして求めたのよ。でも、図2のように辺 AB の中点を M として、面 MCD と辺 AB が垂直であることを利用できないかしら。

太郎 面 MCD と辺 AB は垂直だといえるのかな。

花子 図3において、直線 ℓ と平面 P が点 O で交わっていて、点 O を通る平面 P 上の少なくとも I 本の直線が直線 ℓ と垂直であるとき、平面 P と直線 ℓ が垂直であると習ったよね。

太郎 そうだね。図2にあてはめてみれば、 $AB \perp$ II , $AB \perp$ III だから、面 MCD と辺 AB は垂直なんだね。

花子 それに、図2のように、点 H をとれば、 $\triangle MCD$ の面積を求めることができるよね。

太郎 $\triangle MCD$ を底面、AM を高さで見れば、四面体 AMCD の体積を求めることができ、正四面体 ABCD の体積も求めることができるよね。

図1

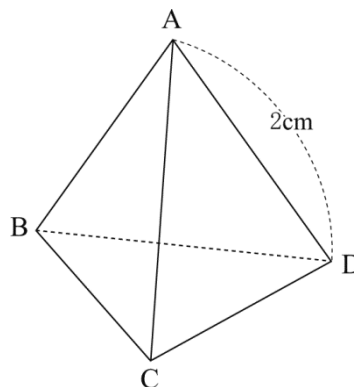


図2

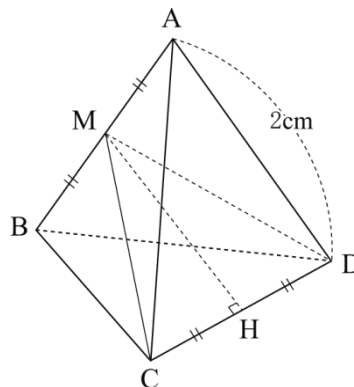
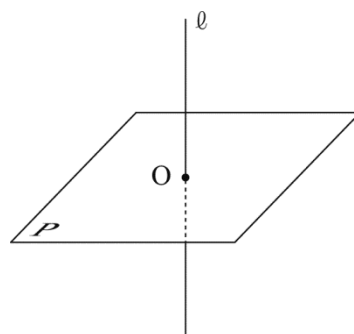


図3



問1 I にあてはまる数を答えなさい。

問2 II, III にあてはまる線分を、次のア～力からそれぞれ選び、記号で答えなさい。

ア BC イ AD ウ MC エ BD オ MD 力 AC

問3 $\triangle MCD$ の面積を求めなさい。

問4 1 辺の長さが 2 cm の正四面体の体積を求めなさい。

解答欄

問1		
問2	Ⅱ	
	Ⅲ	
問3	cm^2	
問4	cm^3	

解答

問1 2

問2

Ⅱ ウ

Ⅲ オ

問3 $\sqrt{2} \text{ cm}^2$

問4 $\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

解説

問1

直線 l と平面 P が点 O で交わっているとき

点 O を通る平面 P 上の少なくとも 2 本の直線が直線 l と垂直であるとき
平面 P と直線 l が垂直であるといえる。

問2

$\triangle ABD$ と $\triangle ABC$ は正三角形であるから

点 M が辺 AB の中点のとき $AB \perp MD$, $AB \perp MC$ がいえる。

問3

MD , MC は 1 辺が 2 cm の正三角形の高さになるから

$$MD = MC = \sqrt{3} \text{ AM} = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$\triangle MCD$ は二等辺三角形なので

$$MH = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle MCD = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ cm}^2$$

問4

正四面体 $ABCD$ の体積は

$2 \times$ 三角すい $AMCD$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 1$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

【問 12】

右の図のように、1 辺の長さが 4 cm の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 EF , EH の中点をそれぞれ M , N とする。

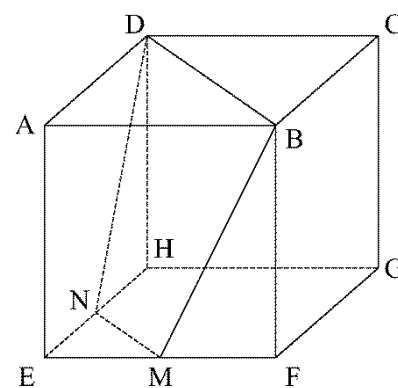
このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(石川県 2015 年度)

問1 面 $AEFB$ と平行な辺をすべて答えなさい。

問2 四角形 $BDNM$ の面積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

問3 線分 AG と平面 $BDNM$ との交点を P とするとき、線分 AP の長さを求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。



解答欄

問1	
問2	[計算] 答 cm^2
問3	[計算] 答 cm

解答

問1 辺 CG, 辺 DH, 辺 CD, 辺 GH

問2

〔計算〕

四角形 BDNM は台形

$$BD = 4\sqrt{2}, MN = 2\sqrt{2}, BM = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{よって台形の高さは } \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{したがって求める面積は } \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2} = 18$$

答 18 cm^2

問3

〔計算〕

$$AG = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3}$$

三角形の相似より $AP:PG = 2:3$

$$\text{したがって求める長さは } AP = \frac{2}{5} AG = \frac{8}{5} \sqrt{3}$$

答 $\frac{8}{5} \sqrt{3} \text{ cm}$

解説

問1

面 AEFB と平行な辺は面 AEFB と交わらない辺だから辺 CG, 辺 DH, 辺 CD, 辺 GH

問2

線分 DB, 線分 HF は 1 辺が 4 cm の正方形の対角線だから $DB = HF = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

$\triangle EHF$ において中点連結定理より $NM \parallel HF$

$$NM = \frac{1}{2} HF = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$BM = DN = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

四角形 NMBD は $NM \parallel DB$ の台形だから点 M から線分 DB に垂線をひき交点を K とすると

$$BK = (4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \div 2 = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$MK = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって四角形 BDNM の面積は } \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2} = 18 \text{ cm}^2$$

問3

線 AG は 1 辺が 4 cm の立方体の対角線だから $4\sqrt{3} \text{ cm}$

線 AC と線 BD の交点を I, 線 EG と線 NM との交点を J とする。

$AI \parallel JG$ より

$\triangle PAI \sim \triangle PGJ$

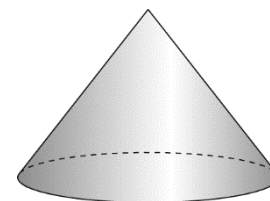
$$PA:PG = AI:GJ = \frac{1}{2} AC : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) AC = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 2:3$$

$$\text{よって } AP = \frac{2}{5} AG = \frac{2}{5} \times 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{5} \text{ cm}$$

【問 13】

図のように、底面の半径が 3 cm で、高さが 4 cm の円錐がある。

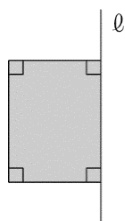
図



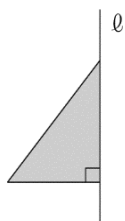
(1) 円錐は、ある平面図形を直線のまわりに 1 回転させてできる立体とみることができる。直線 l を回転の軸として 1 回転させたとき、円錐ができる図形として正しいものを、次のア～オから 1 つ選び、記号を書きなさい。

(長野県 2015 年度)

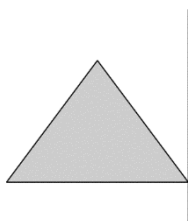
ア



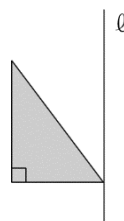
イ



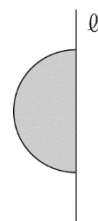
ウ



エ



オ



(2) 図の円錐の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

(3) 図の円錐の側面となるおうぎ形の半径と、中心角の大きさを求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm ³
(3)	半径 cm
	中心角 °

解答

(1) イ

(2) $12\pi \text{ cm}^3$

(3)

半径 5 cm

中心角 216°

解説

問1

(1)

円錐は直角をはさむ 2 辺が 4 cm , 3 cm の直角三角形を 4 cm の辺を軸として 1 回転させてできる立体なので
選択肢はイ

(2)

体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi \text{ cm}^3$

(3)

側面のおうぎ形の半径は $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$

中心角を x° とすると

$$2\pi \times 5 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 3$$

$$x = 216^\circ$$

【問 14】

図3のような、2 つの容器 P, Q がある。容器 P は、底面が 1 辺 4 cm の正方形で、高さが 2 cm である正四角すいの形をしている。容器 Q は、底面が 1 辺 8 cm の正方形で、高さが 4 cm である直方体の形をしている。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

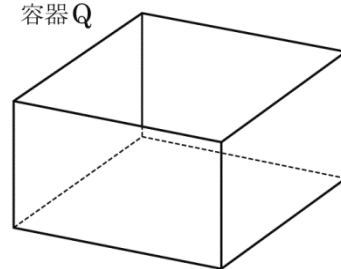
(静岡県 2015 年度)

図3

容器P



容器Q



問1 「容器 P いっぱいに水を入れて、その水を水平に置かれた容器 Q に移しかえる。この作業を繰り返して、容器 Q を満水にするには、容器 P で何杯分の水を移しかえればよいか」について、SさんとTさんは、それぞれ違う解き方で答えを出した。

Sさんは、右の の中のように、それぞれの体積を求める解き方で答えを出した。一方、Tさんは、それぞれの体積を求める解き方ではなく、比を使う解き方で答えを出した。Tさんの解き方を書きなさい。

(Sさんの解き方)

$$\text{容器 P に入る水の体積は、} \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2 = \frac{32}{3}$$

$$\text{容器 Q に入る水の体積は、} 8^2 \times 4 = 256$$

$$256 \div \frac{32}{3} = 24$$

したがって、24 杯分である。

問2 図4は、水がいっぱいに入った容器 Q を、静かに傾けながら水をこぼし、水面が、点 A, 点 D, 辺 BF の中点 L, 辺 CE の中点 M の 4 点を通るところで静止させたときの見取図である。

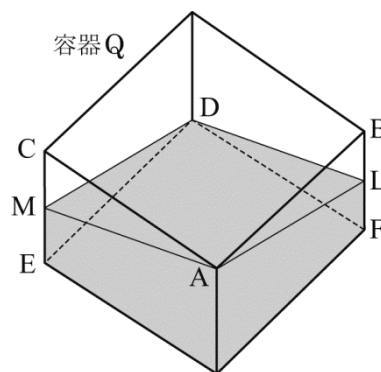
線分 AD と線分 ML の長さを求めなさい。さらに、求めた長さを比べた結果について正しく述べたものを、次のア～ウの中から 1 つ選び、記号で答えなさい。

ア 線分 AD の方が長い。

イ 線分 ML の方が長い。

ウ どちらも同じである。

図4



問1	[Tさんの解き方] したがって、24 杯分である。	
問2	AD	cm
	ML	cm
	記号	

解答

問1

底面が 1 辺 4 cm の正方形で高さが 2 cm の正四角柱は
容器 P の 3 倍の体積であり
底面が 1 辺 8 cm で高さが 4 cm の容器 Q とは相似になる。
その相似比は 1:2 より
体積比は 1:8
よって容器 Q の体積は
容器 P の $3\times 8=24$ 倍である。
したがって 24 杯分となる。

問2

AD 12 cm
ML $8\sqrt{2}$ cm
記号 ア

解説

問2

AD は容器 Q の対角線の長さだから $AD=\sqrt{8^2+8^2+4^2}=\sqrt{144}=12$ cm
ML は 1 辺が 8 cm の正方形の対角線の長さと一致するので $8\sqrt{2}$ cm
 $8\sqrt{2}=\sqrt{128}$
 $\sqrt{144}>\sqrt{128}$ より
AD の方が長い。
よって選択肢はア

【問 15】

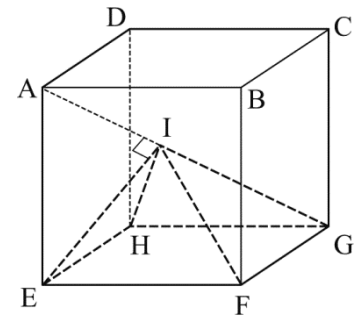
図で、A、B、C、D、E、F、G、H を頂点とする立体は立方体であり、I は線分 AG 上の点で、 $IE \perp AG$ である。

AB = 3 cm のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(愛知県 2015 年度 B)

(1) 線分 IE の長さは何 cm か、求めなさい。

(2) 四角すい IEF GH の体積は何 cm^3 か、求めなさい。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) $\sqrt{6}$ cm

(2) 6 cm^3

解説

(1)

EG を結ぶ。

線分 EG は 1 辺が 3 cm の正方形の対角線より $EG = 3\sqrt{2}$ cm

線分 AG は立方体の対角線より $AG = 3\sqrt{3}$ cm

2 組の角がそれぞれ等しくなるので $\triangle AEG \sim \triangle AIE$ だから

$EG : IE = AG : AE$

$3\sqrt{2} : IE = 3\sqrt{3} : 3$

$IE = \sqrt{6}$ cm

(2)

$\triangle AIE$ において

$AI = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$ cm

$GI = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm

点 I から線分 EG に垂線をひき交点を K とすると

$IK \parallel AE$ より

$IK : AE = GI : GA$

$IK : 3 = 2\sqrt{3} : 3\sqrt{3}$

$IK = 2$ cm

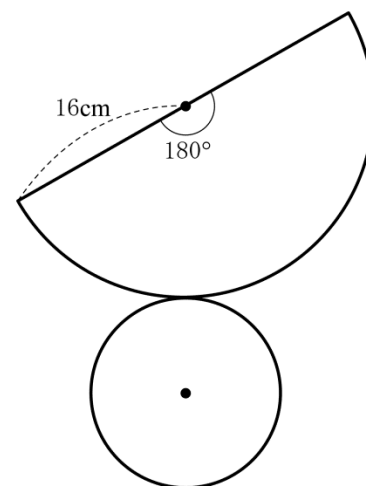
よって四角すい IEF GH の体積は $\frac{1}{3} \times \text{正方形 EFGH} \times IK = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 2 = 6 \text{ cm}^3$

【問 16】

右の図は、円すいの展開図であり、側面の部分は、半径 16 cm、中心角 180° のおうぎ形である。この展開図を組み立ててできる円すいについて、次の各問いに答えなさい。

ただし、円周率は π とする。

(三重県 2015 年度)



(1) この円すいの底面の円の半径を求めなさい。

(2) この円すいの体積を求めなさい。なお、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい自然数に
しなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³

解答

(1) 8 cm

(2) $\frac{512\sqrt{3}}{3} \pi$ cm³

解説

(1)

円すいの底面の半径を r cm とすると

$$2\pi r = 2\pi \times 16 \times \frac{180}{360}$$

$$r = 8 \text{ cm}$$

(2)

円すいの高さを h cm とすると

$$\text{三平方の定理より } h = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって求める体積は } \frac{1}{3} \pi \times 8^2 \times 8\sqrt{3} = \frac{512\sqrt{3}}{3} \pi \text{ cm}^3$$

【問 17】

半径 4 cm の球を、中心 O を通る平面で切ってできる半球の形をした容器があり、右の図1のように、切り口を水平に保って満水にしてある。また、右の図2のように、頂点を A 、底面の円の中心を B とする円錐の形をした鉄のおもりがあり、 $AB = 3\sqrt{7}\text{ cm}$ である。

このおもりを右の図3のように、底面を水平に保ったまま、線分 AB が点 O を通るように、おもりが容器に触れるまで静かに沈めたところ、水があふれ、 $AO = 2\sqrt{7}\text{ cm}$ となった。

このとき、次の問1～問3に答えよ。ただし、容器の厚さは考えないものとし、円周率は π とする。

(京都府 2015 年度 前期)

問1 図1の容器に入っている水の体積を求めよ。

問2 おもりの底面の円の半径を求めよ。

問3 容器に触れるまでおもりを沈めたとき、あふれた水の体積を求めよ。

図1

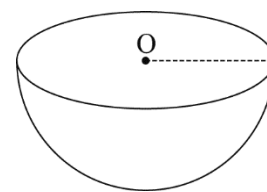


図2

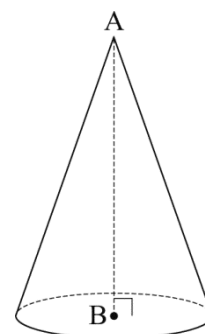
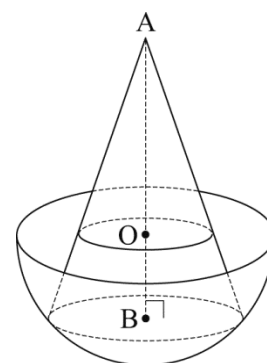


図3



解答欄

問1	cm^3
問2	cm
問3	cm^3

解答

問1 $\frac{128}{3} \pi \text{ cm}^3$

問2 3 cm

問3 $\frac{19\sqrt{7}}{3} \pi \text{ cm}^3$

解説

問1

水の体積は $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = \frac{128}{3} \pi \text{ cm}^3$

問2

$OB = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = \sqrt{7} \text{ cm}$

おもりの底面の円周上の点を P とすると $OP = 4 \text{ cm}$

$\triangle OBP$ において

三平方の定理より $BP = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$

よって求める半径は 3 cm

問3

おもりの体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{7} = 9\sqrt{7} \pi \text{ cm}^3$

おもりの水面から出ている分とおもり全体は相似であり

相似比は $2:3$ だから

体積比は $8:27$

よってあふれた水の体積はおもりの水面に沈んでいる部分の体積と一致し

おもり全体の体積の $\frac{19}{27}$ 倍である。

よって $9\sqrt{7} \pi \times \frac{19}{27} = \frac{19\sqrt{7}}{3} \pi \text{ cm}^3$

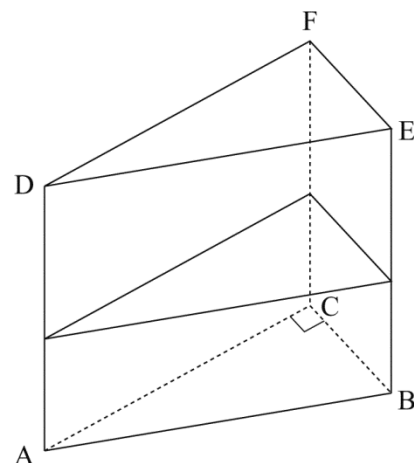
【問 18】

三角柱 $ABC-DEF$ の形をした透明な容器がある。この容器の側面はすべて長方形で、 $AB=18\text{ cm}$ 、 $BC=6\text{ cm}$ 、 $\angle ACB=90^\circ$ 、 $AD=16\text{ cm}$ である。この容器を右の図のように、 $\triangle ABC$ が底になるように置き、容器の底から高さ 7 cm のところまで水を入れ、密閉する。

このとき、次の問1・問2に答えよ。ただし、容器は水平な台の上に置くものとし、容器の厚さは考えないものとする。

(京都府 2015 年度 中期)

問1 容器に入っている水の体積を求めよ。



問2 この容器を四角形 $ABED$ が底になるように置いたとき、容器の底から水面までの高さは何 cm になるか求めよ。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm

解答

問1 $252\sqrt{2} \text{ cm}^3$

問2 $\sqrt{2} \text{ cm}$

解説

問1

$\triangle ABC$ において $\angle ACB=90^\circ$ より

三平方の定理を利用して $AC=\sqrt{18^2-6^2}=12\sqrt{2} \text{ cm}$

よって水の体積は $\triangle ABC \times 7 = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{2} \times 6 \times 7 = 36\sqrt{2} \times 7 = 252\sqrt{2} \text{ cm}^3$

問2

四角形 $ABED$ が底になるように置いたときの水の入っていない部分の体積は

$$\frac{1}{2} \times 12\sqrt{2} \times 6 \times 9 = 324\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

できる水面と AC , BC との交点をそれぞれ G , H とすると

$$\triangle CGH \times 16 = 324\sqrt{2}$$

$$\triangle CGH = \frac{81\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^2$$

$\triangle CGH \sim \triangle ABC$ で

$$\text{面積比は } \frac{81\sqrt{2}}{4} : 36\sqrt{2} = 9:16 = 3^2:4^2$$

よって相似比は $3:4$

C から AB にひいた垂線をひき GH , AB との交点をそれぞれ I , J とする。

$$\frac{1}{2} \times 18 \times CJ = 36\sqrt{2}$$

$$CJ = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$CI:CJ = 3:4 \text{ より}$$

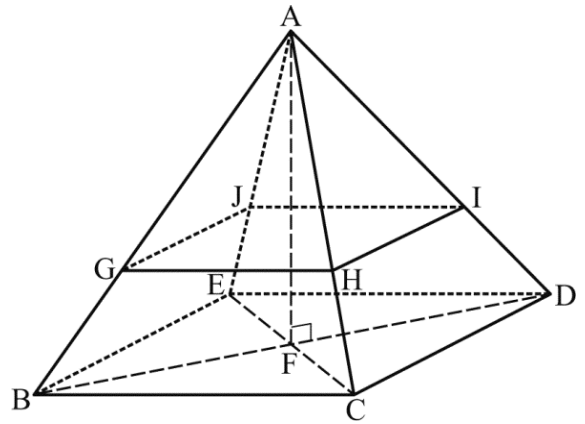
$$CI:4\sqrt{2} = 3:4$$

$$CI = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって求める高さ } IJ = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

【問 19】

右図において、立体 $A-BCDE$ は四角すいである。底面 $BCDE$ は長方形であり、 $BC=6\text{ cm}$ 、 $CD=4\text{ cm}$ である。側面の三角形 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ADE$ 、 $\triangle AEB$ はすべて二等辺三角形であり、 $AB=AC=AD=AE$ である。 F は、底面 $BCDE$ の対角線の交点である。 A と F とを結ぶ。 $AF=6\text{ cm}$ である。このとき、線分 AF は底面 $BCDE$ と垂直である。 G は辺 AB 上にあって A 、 B と異なる点であり、 H 、 I 、 J はそれぞれ辺 AC 、 AD 、 AE 上にあって $AG=AH=AI=AJ$ となる点である。このとき、4 点 G 、 H 、 I 、 J を結んでできる四角形 $GHIJ$ は長方形であり、 $GH \parallel BC$ 、 $HI \parallel CD$ である。



(大阪府 2015 年度 前期)

- (2) $AG = x$ cm とするとき、四角形 $GHIJ$ の面積を x を用いて表しなさい。求め方も書くこと。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	[求め方]
	cm^2

解答

(1) 48 cm^3

(2)

[求め方]

$\angle BCD = 90^\circ$ だから

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$BD = y \text{ cm}$ とすると

$$y^2 = 6^2 + 4^2$$

これを解くと

$y > 0$ より

$$y = 2\sqrt{13}$$

F は対角線 BD の中点だから

$$BF = \sqrt{13} \text{ cm}$$

$\angle AFB = 90^\circ$ だから

$$AB^2 = AF^2 + BF^2$$

$AB = z \text{ cm}$ とすると

$$z^2 = 6^2 + (\sqrt{13})^2$$

これを解くと

$z > 0$ より

$$z = 7$$

$GH \parallel BC$ だから

$$AG:GH = AB:BC = 7:6$$

$$\text{よって } GH = \frac{6}{7}x \text{ cm}$$

$HI \parallel CD$ だから

$$AH:HI = AC:CD = 7:4$$

$$\text{よって } HI = \frac{4}{7}x \text{ cm}$$

したがって四角形 GHIJ の面積は

$$GH \times HI = \frac{6}{7}x \times \frac{4}{7}x = \frac{24}{49}x^2 \text{ cm}^2$$

$$\frac{24}{49}x^2 \text{ cm}^2$$

解説

(1)

求める体積は $\frac{1}{3} \times \text{長方形 BCDE の面積} \times AF$ より $\frac{1}{3} \times 4 \times 6 \times 6 = 48 \text{ cm}^3$

(2)

$\triangle BCD$ において

$$\text{三平方の定理より } BD = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

長方形の対角線はそれぞれの中点で交わるので $BF = \sqrt{13} \text{ cm}$

$\triangle ABF$ において

$$\text{三平方の定理より } AB = \sqrt{(\sqrt{13})^2 + 6^2} = 7 \text{ cm}$$

$$\text{よって } AG:AB = x:7$$

$GH \parallel BC$ より

$$GH:6 = x:7$$

$$GH = \frac{6}{7}x$$

同様に $HI:4 = x:7$

$$HI = \frac{4}{7}x$$

$$\text{よって四角形 GHIJ} = \frac{6}{7}x \times \frac{4}{7}x = \frac{24}{49}x^2 \text{ cm}^2$$

【問 20】

図1～図3において、立体 $ABC-DEF$ は三角柱である。 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同な二等辺三角形であり、 $BA=BC=6$ cm, $AC=2$ cm である。四角形 $DEBA$, $DFCA$, $FEBC$ は長方形である。 $BE=x$ cm とする。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は、根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2015 年度 後期)

問1 図1において、次のア～オのうち、辺 AB とねじれの位置にある辺はどれですか。すべて選び、記号を○で囲みなさい。

ア 辺 AC
イ 辺 BE
ウ 辺 CF
エ 辺 DE
オ 辺 EF

図1

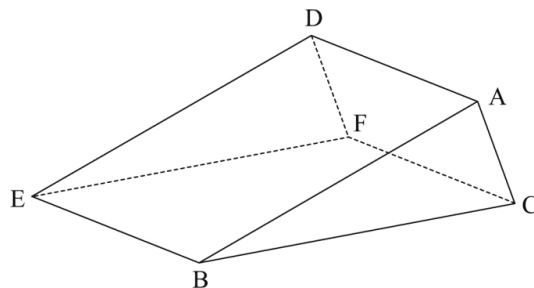
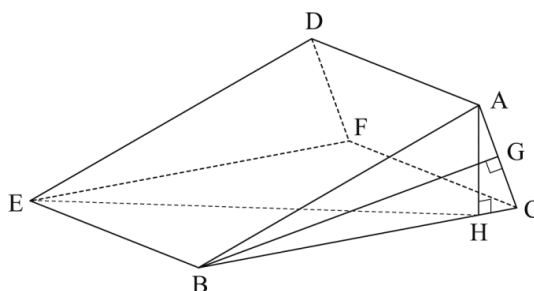


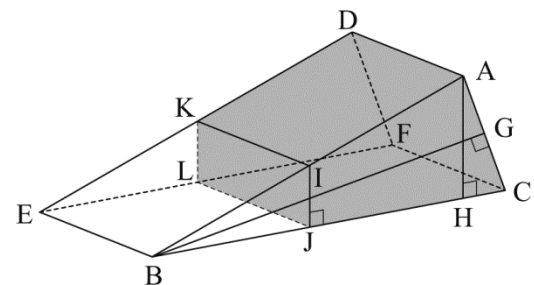
図2



問2 図2において、 G は、辺 AC の中点である。 B と G とを結ぶ。このとき、 $BG \perp AC$ である。 H は、 A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。

このとき、 $\triangle ACH \sim \triangle BCG$ である。 E と H とを結ぶ。 $EH=7$ cm であるときの x の値を求めなさい。求め方も書くこと。

図3



問3 図3は、図2において $x=2$ であるときの状態を示している。図3において、 I は、辺 AB 上にあって A , B と異なる点である。 J は、 I から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。 K は、 I を通り辺 BE に平行な直線と辺 DE との交点である。 L は、 J を通り辺 BE に平行な直線と辺 EF との交点である。このとき、立体 $IBJ-KEL$ は三角柱である。

$BI=3$ cm であるとき、

(1) 線分 IJ の長さを求めなさい。

(2) 立体 $AIJC-DKLF$ の体積を求めなさい。

解答欄

[illegible]

解答

問1 ウ,オ

問2

〔求め方〕

G は辺 AC の中点だから

$$CG = \frac{1}{2} AC = 1$$

$\triangle ACH \sim \triangle BCG$ だから

$$AC : CH = BC : CG = 6 : 1$$

$$\text{よって } CH = \frac{1}{6} AC = \frac{1}{3} \text{ cm}$$

$$\text{だから } BH = BC - CH = \frac{17}{3} \text{ cm}$$

$\angle EBH = 90^\circ$ だから

$$BE^2 + BH^2 = EH^2$$

$$\text{よって } x^2 + \left(\frac{17}{3}\right)^2 = 7^2$$

これを解くと

$x > 0$ より

$$x = \frac{2\sqrt{38}}{3}$$

$$x \text{ の値 } \frac{2\sqrt{38}}{3}$$

問3

$$(1) \quad \frac{\sqrt{35}}{6} \text{ cm}$$

$$(2) \quad \frac{55\sqrt{35}}{36} \text{ cm}^3$$

解説

問1

辺 AB とねじれの位置にあるのは AB と平行なものと交わるものを除いた辺。

よって辺 CF, 辺 EF, 辺 DF

選択肢にあるのはウの辺 CF とオの辺 EF になる。

問2

$$G \text{ は辺 } AC \text{ の中点より } CG = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ cm}$$

$\triangle ACH \sim \triangle BCG$ だから

$$AC:CH=BC:CG=6:1$$

$$\text{よって } CH = \frac{1}{6} AC = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3} \text{ cm}$$

$$BH = 6 - \frac{1}{3} = \frac{17}{3} \text{ cm}$$

$\triangle EBH$ において $\angle EBH = 90^\circ$ だから

$$\text{三平方の定理より } EB = \sqrt{7^2 - \left(\frac{17}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{38}}{3} \text{ cm}$$

問3

(1)

$\triangle ACH$ において

$$\angle AHC = 90^\circ \text{ より } AH = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{3} \text{ cm}$$

$IJ \parallel AH$ より

$$IJ:AH=BI:BA$$

$$IJ: \frac{\sqrt{35}}{3} = 3:6$$

$$6IJ = \sqrt{35}$$

$$IJ = \frac{\sqrt{35}}{6} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle BCG$ において

$$\angle BGC = 90^\circ \text{ より } BG = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35} \text{ cm}$$

また $IJ \parallel AH$ より

$$BJ:JH=BI:IA=3:3=1:1$$

$$\text{よって } BJ = \frac{1}{2} BH = \frac{17}{6} \text{ cm}$$

立体 $AIJC-DKLF$ の体積は

三角柱 $ABC-DEF$ の体積 - 三角柱 $BIJ-EKL$ の体積で求めることができる。

$$\text{よって } \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{35} \times 2 - \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} \times \frac{\sqrt{35}}{6} \times 2 = 2\sqrt{35} - \frac{17\sqrt{35}}{36} = \frac{55\sqrt{35}}{36} \text{ cm}^3$$

【問 21】

右の図1のように、 $AC=6\text{ cm}$ 、 $BC=8\text{ cm}$ 、 $AD=5\text{ cm}$ 、 $\angle ACB=90^\circ$ の三角柱がある。このとき、次の各問いに答えなさい。

(鳥取県 2015 年度)

問1 線分 AB の長さを求めなさい。

図1

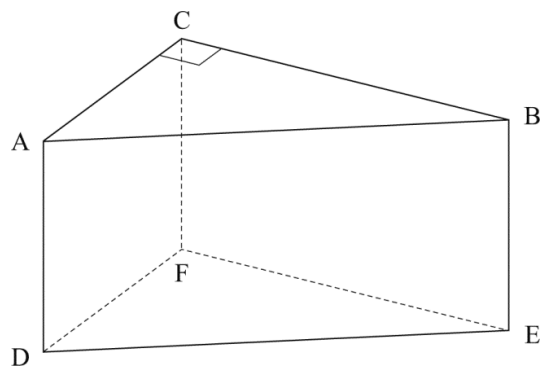
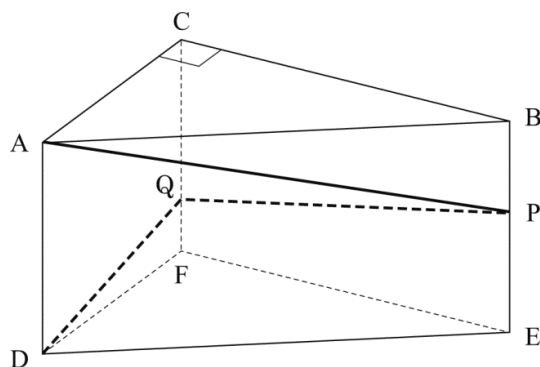


図2

問2 $\triangle ADE$ を、直線 AD を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。



問3 右の図2のように、図1の三角柱の表面に、頂点 A から 2 辺 BE 、 CF と交わるように、頂点 D までひもをゆるまないようにかける。かけるひもの長さがもっとも短くなる時、2 辺 BE 、 CF と交わる点をそれぞれ P 、 Q とする。このとき、次の(1)、(2)に答えなさい。

(1) 線分 PE の長さと線分 QF の長さの比を、もっとも簡単な整数の比で表しなさい。

(2) 三角錐 $DFPQ$ の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	cm ³	
問3	(1)	PE:QF= :
	(2)	cm ³

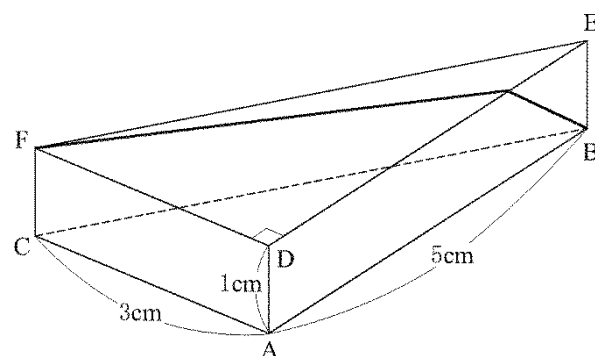
【問 22】

右の図のような三角柱がある。

$AB=5\text{ cm}$, $AC=3\text{ cm}$, $AD=1\text{ cm}$, $\angle EDF=90^\circ$ であるとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(香川県 2015 年度)

- (1) この三角柱の辺のうち、面 $ACFD$ と垂直な辺はどれか。すべて書け。



- (2) 右の図のように、頂点 F から辺 DE を通って頂点 B まで、三角柱の面に沿って糸を張る。張った糸の長さがもっとも短くなるときの、糸の長さは何 cm か。

解答欄

(1)	
(2)	cm

解答

(1) 辺 AB , 辺 DE

(2) $\sqrt{41}\text{ cm}$

解説

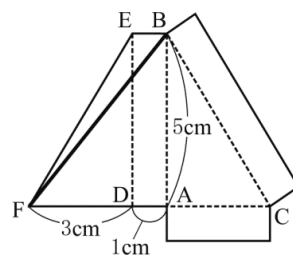
(1)

面 $ACFD$ と垂直な辺は辺 AB と辺 DE

(2)

張った糸の長さが最も短くなるのは
右の図のように展開した図において BF が直線になるとき。

よって $BF = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}\text{ cm}$



【問 23】

下の図1のような円すいがあり、図2はその展開図である。この展開図において、底面の円の半径は 2 cm 、側面のおうぎ形の半径は 5 cm である。

(愛媛県 2015 年度)

図1

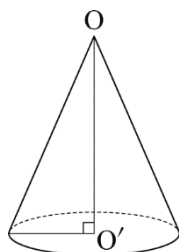
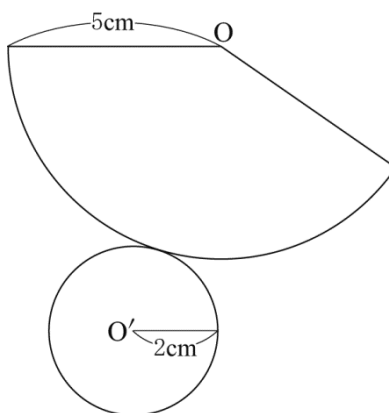


図2



(1) 図1の円すいの高さを求めよ。

(2) 図2の側面のおうぎ形の中心角の大きさを求めよ。

解答欄

(1)	cm
(2)	度

解答

(1) $\sqrt{21}\text{ cm}$

(2) 144 度

解説

(1)

円すいの高さは三平方の定理を利用して $\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}\text{ cm}$

(2)

側面のおうぎ形の中心角を x° とするとおうぎ形の弧の長さと底面の円周は等しいので

$$2\pi \times 5 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 2$$

$$x = 144^\circ$$

【問 24】

図は、 $BC=6\text{ cm}$ の正四角すい $ABCDE$ を表している。

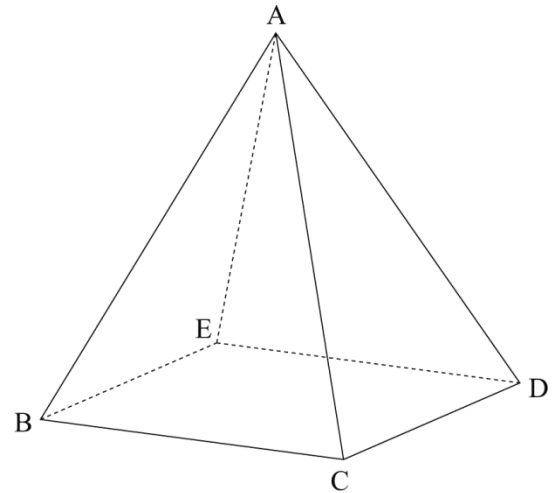
次の問1は指示にしたがって、問2、問3は最も簡単な数で答えよ。ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2015 年度)

問1 図に示す立体において、

辺 BC とねじれの位置にある辺を、次のア～キからすべて選び、記号で答えよ。

- ア 辺 AB
- イ 辺 AC
- ウ 辺 AD
- エ 辺 AE
- オ 辺 BE
- カ 辺 CD
- キ 辺 DE



問2 図に示す立体において、

辺 AB , AC , AD , AE の中点をそれぞれ F , G , H , I とする。正四角すい $ABCDE$ を 4 点 F , G , H , I を通る平面で分けたときにできる 2 つの立体のうち、頂点 A をふくまない立体の体積は、四角すい $FBCDE$ の体積の何倍か求めよ。

問3 図に示す立体において、

辺 AB 上に点 J , 辺 AC 上に点 K を, $AJ:JB=AK:KC=1:2$ となるようにとると、四角形 $JKDE$ の面積が 24 cm^2 である。このとき、辺 AC の長さを求めよ。

解答欄

問1	
問2	倍
問3	cm

解答

問1 ウ, エ

問2 $\frac{7}{4}$ 倍

問3 $3\sqrt{7}$ cm

解説

問1

辺 BC とねじれの位置にある辺は交わったり平行であったりする辺を除いたものだから
辺 AE と辺 AD

問2

正四角すい A-BCDE の体積を S とすると

正四角すい A-BCDE と正四角すい A-FGHI の相似比は 2:1 より体積比は 8:1 だから

正四角すい A-FGHI の体積は $\frac{1}{8}S$

よって立体 FGHI-BCDE の体積は $\frac{7}{8}S$

また四角すい F-BCDE の体積は、底面積が A-BCDE と同じで高さが $\frac{1}{2}$ だから $\frac{1}{2}S$

よって立体 FGHI-BCDE の体積は四角すい F-BCDE の体積の $\frac{7}{8}S \div \frac{1}{2}S = \frac{7}{4}$ 倍

問3

△ABC において

AJ:JB=AK:KC より JK//BC

よって JK:BC=AK:AC

JK:6=1:3

JK=2 cm

JK//BC, BC//ED より JK//ED

台形 JKDE において点 K から辺 ED に垂線をひき交点を M とすると

台形 JKDE の面積が 24 cm^2 より

$$\frac{1}{2} \times (2+6) \times KM = 24$$

KM=6 cm

また DM=(6-2)÷2=2 cm より

三平方の定理から $KD = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ cm

△CKD において点 K から辺 CD に垂線をひき交点を N とすると

DN=4 cm

CN=2 cm

よって $KN = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 4^2} = 2\sqrt{6}$ cm

$KC = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 2^2} = 2\sqrt{7}$ cm

したがって $AC = \frac{3}{2} KC = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$ cm

【問 25】

図のように、 $OA=OB=OC=4\text{ cm}$ 、 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=45^\circ$ の三角すい $OABC$ がある。点 A から辺 OB に垂線 AD をひき、点 D から辺 OC に垂線 DE をひき、点 E から辺 OA に垂線 EF をひく。

このとき、問1～問4に答えなさい。

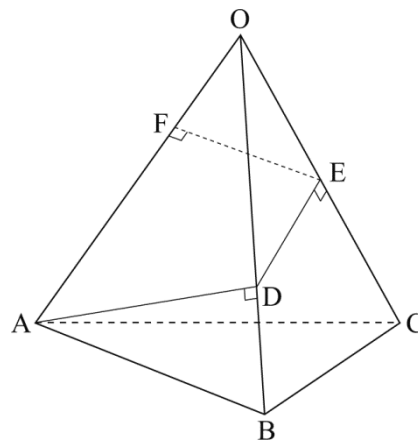
(佐賀県 2015 年度 一般)

問1 線分 OD の長さを求めなさい。

問2 線分 EF の長さを求めなさい。

問3 四角形 $ACEF$ の面積を求めなさい。

問4 三角すい $OABC$ に、点 A から点 F まで、辺 OB 、辺 OC の順に交わるようにひもをかける。ひもの長さが最も短くなるとき、ひもの長さを求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm ²
問4	cm

解答

問1 $2\sqrt{2}$ cm

問2 $\sqrt{2}$ cm

問3 $4\sqrt{2} - 1$ cm²

問4 $\sqrt{26}$ cm

解説

問1

△OAD は $\angle ODA = 90^\circ$, $\angle AOD = 45^\circ$ より $OD:AD:OA = 1:1:\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形。

よって $OD:4 = 1:\sqrt{2}$

$\sqrt{2} OD = 4$

$$OD = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

問2

△ODE は $OE:ED:OD = 1:1:\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形。

よって $OE:2\sqrt{2} = 1:\sqrt{2}$ より $OE = 2$ cm

また△OEF は $FO:EF:OE = 1:1:\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形。

よって $EF:2 = 1:\sqrt{2}$ より $EF = \sqrt{2}$ cm

問3

$$\text{四角形 AECF} = \triangle OAC - \triangle OEF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 1 \text{ cm}^2$$

問4

右の図のように展開図において

A から OA' の延長線に垂線をひき交点を H とする。

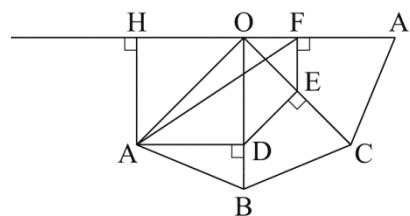
△AOH は $\angle AHO = 90^\circ$, $\angle AOH = 45^\circ$ より

$$AH = OH = \frac{1}{\sqrt{2}} OA = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } FH = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

△AFH において

$$\text{三平方の定理より } AF = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{26} \text{ cm}$$



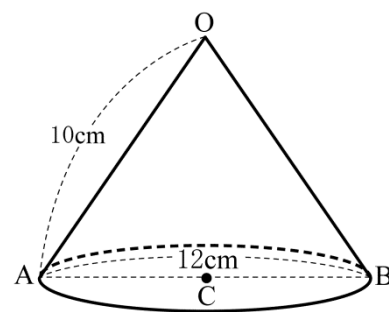
【問 26】

図1, 図2のように, O を頂点とし, 線分 AB を底面の直径, 点 C を底面の中心とする円すいがある。 $OA=10\text{ cm}$, $AB=12\text{ cm}$ とするとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2015 年度)

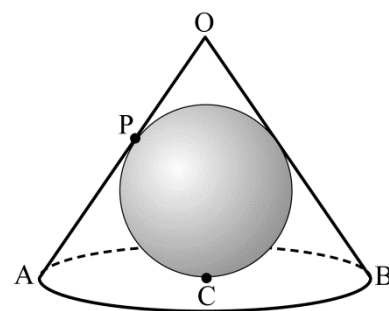
問1 図1において, 底面の円周の長さは何 cm か。

図1



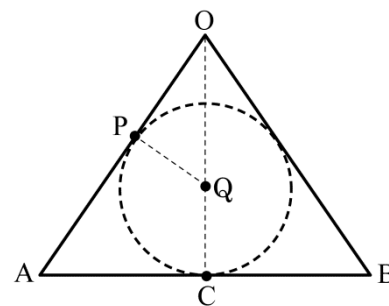
問2 図1において, 円すいの体積は何 cm^3 か。

図2



問3 図2のように, 円すいにちょうど入る球が母線 OA とふれている点を P とする。また, この球は底面の中心 C にもふれている。図3は, 図2を正面から見た図であり, 円の中心を Q とする。このとき, 次の(1)~(3)に答えよ。

図3



(1) 図3において, 線分 PQ の長さは何 cm か。

(2) 図3において, $\triangle OPQ$ と $\triangle OAC$ の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

(3) 図2において, 点 P を通り, 底面に平行な平面で円すいを 2 つに切り分ける。このとき, 頂点 O をふくむほうは円すいになる。この円すいの側面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	cm	
問2	cm ³	
問3	(1)	cm
	(2)	△OPQ:△OAC= :
	(3)	cm ²

解答

問1 12 π cm

問2 96 π cm³

問3

(1) 3 cm

(2) △OPQ:△OAC=1:4

(3) $\frac{48}{5}$ π cm²

解説

問1

底面の円周の長さは $12 \times \pi = 12\pi$ cm

問2

△OAC において

三平方の定理より $OC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

よって求める体積は $\frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$ cm³

問3

(1)

PQ = r cm とすると

CQ = PQ = r cm

OQ = $8 - r$ cm

PQ ⊥ OA だから

2組の角がそれぞれ等しくなるので

△OQP ∽ △OAC

よって $r : 6 = (8 - r) : 10$

$10r = 6(8 - r)$

これを解いて

$r = 3$ cm

(2)

△OPQ と △OAC の相似比は PQ : CA = 3 : 6 = 1 : 2

よって面積比は 1 : 4

(3)

△OPQ と △OAC の相似比は 1 : 2 より

OP : 8 = 1 : 2

OP = 4 cm

点 P から線分 OC に垂線をひき交点を R とする。

△OPR ∽ △OAC で

相似比は OP : OA = 4 : 10 = 2 : 5

面積比は 4 : 25

もとの円すいの側面積は $\pi \times 10^2 \times \frac{2\pi \times 6}{2\pi \times 10} = 60\pi$ cm² より

求める円すいの側面積を S とすると

S : 60π = 4 : 25

25S = 240π

$S = \frac{48}{5} \pi$ cm²

【問 27】

右の図は、点 A, B, C, D, E, F を頂点とし、3 つの側面がそれぞれ長方形である三角柱で、 $AD=5\text{ cm}$, $DE=6\text{ cm}$, $EF=4\text{ cm}$, $\angle ABC=90^\circ$ である。辺 AB 上に点 P を、2 つの線分 DP, PC の長さの和が最小となるようにとる。また、点 Q は、線分 AE と線分 DP との交点である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

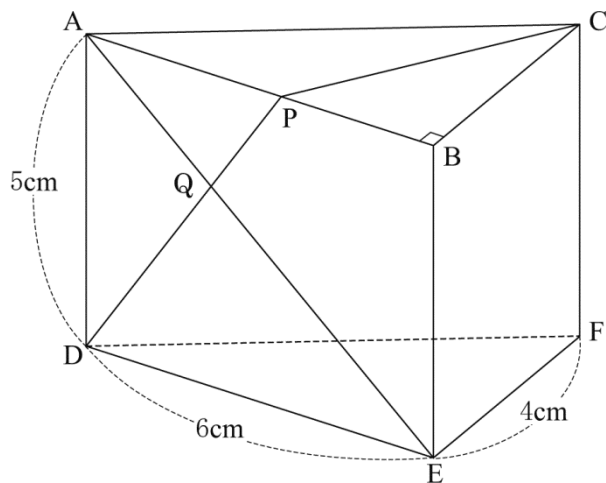
(熊本県 2015 年度)

問1 辺 AC の長さを求めなさい。

問2 線分 PB の長さを求めなさい。

問3 線分 AQ と線分 QE の長さの比 $AQ:QE$ を求めなさい。答えは最も簡単な整数比で表すこと。

問4 四角形 ADFC を底面とする四角すい QADFC の体積を求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	$AQ:QE=$:
問4	cm^3

解答

問1 $2\sqrt{13}$ cm

問2 $\frac{8}{3}$ cm

問3 $AQ:QE=5:9$

問4 $\frac{100}{7}$ cm³

解説

問1

△ABC において

三平方の定理より $AC = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ cm

問2

DP, PC が最短になるとき展開図の一部は右のようになる。

AD // CE より $PA:PB=AD:BC=5:4$

よって $PB = \frac{4}{9}AB = \frac{4}{9} \times 6 = \frac{8}{3}$ cm

問3

AD // CE より

$AQ:QE=AD:CE=5:(4+5)=5:9$

問4

Q から面 ADFC に垂線をひきその交点を H とする。

また E から DF に垂線をひき交点を K とする。

△DEK ∽ △DFE だから

$DE:DF=EK:FE$

$6:2\sqrt{13}=EK:4$

$EK = \frac{24}{2\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm

△AEK において

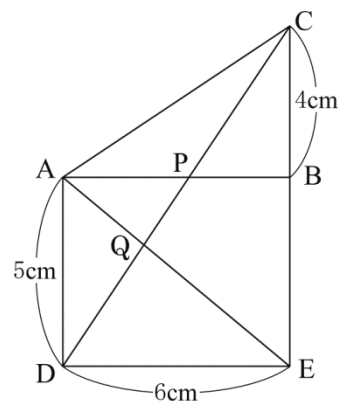
QH // EK より

$QH:EK=AQ:AE$

よって $QH: \frac{12\sqrt{13}}{13} = 5:14$

$QH = \frac{30\sqrt{13}}{91}$ cm

したがって四角すい QADFC の体積は $\frac{1}{3} \times 5 \times 2\sqrt{13} \times \frac{30\sqrt{13}}{91} = \frac{100}{7}$ cm³



【問 28】

図1のように、 $AD \parallel BC$ である台形 $ABCD$ があり、 $AB=10\text{ cm}$ 、 $AD=5\text{ cm}$ 、 $BC=15\text{ cm}$ 、 $\angle BAD=90^\circ$ である。点 M は、辺 CD の中点であり、点 N は、点 M から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。図2は、図1の台形 $ABCD$ を、線分 BD 、線分 BM 、線分 MN で折り曲げてできる三角すいである。また、図1の点 C 、点 N は、図2の三角すいにおいて、点 D 、点 A とそれぞれ重なっている。

次の問1～問4に答えなさい。

(大分県 2015 年度)

図1

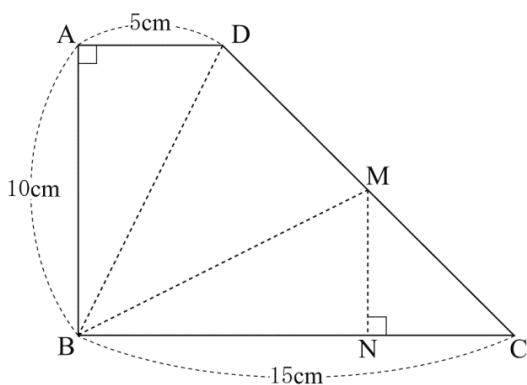
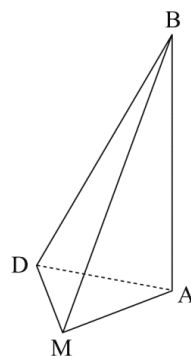


図2



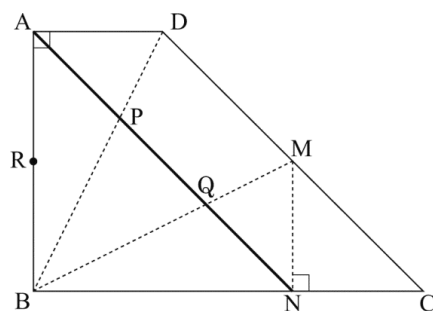
問1 図2の三角すいにおいて、辺 AD とねじれの位置にある辺を答えなさい。

問2 図2の三角すいの体積を求めなさい。

問3 図2の三角すいにおいて、 $\triangle BDM$ を底面としたときの高さを求めなさい。

問4 図3のように、図1の台形 $ABCD$ において、線分 AN と線分 BD 、線分 BM との交点をそれぞれ P 、 Q とし、辺 AB の中点を R とする。このようにして定めた3点 P 、 Q 、 R を図2の三角すいの辺上にとり、3点 P 、 Q 、 R を通る平面で図2の三角すいを切ったとき、点 B をふくむ方の立体の体積を求めなさい。

図3



解答欄

問1	辺
問2	cm^3
問3	cm
問4	cm^3

解答

問1 辺 BM

問2 $\frac{125}{3}\text{cm}^3$

問3 $\frac{10}{3}\text{cm}$

問4 $\frac{250}{27}\text{cm}^3$

解説

問1

辺 AD とねじれの位置にある辺は交わらず平行でもないものだから辺 BM

問2

展開図において点 D から辺 BC に垂線をひき交点を H とする。

MN // DH より

$$MN:DH=CM:CD$$

$$MN:10=1:2$$

$$2MN=10$$

$$MN=5 \text{ cm}$$

$$\text{よって求める三角すいの体積は } \frac{1}{3} \times \triangle ADM \times AB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times 10 = \frac{125}{3} \text{ cm}^3$$

問3

$$\text{展開図において } CM=DM \text{ より } \triangle BDM = \frac{1}{2} \triangle DBC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 15 \times 10 = \frac{75}{2} \text{ cm}^2$$

組み立てた三角すいにおいて $\triangle BDM$ を底面としたときの高さを $h \text{ cm}$ とすると

$$\frac{1}{3} \times \frac{75}{2} \times h = \frac{125}{3} \text{ より}$$

$$h = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

問4

AD // BN より BP:PD=BN:DA=10:5=2:1

四角形 ANCD は AD // NC, AD=NC より平行四辺形である。

よって AN // DC

$\triangle BPQ \sim \triangle BDM$ だから

BP:BD=2:3 より

$$\triangle BPQ:\triangle BDM=4:9$$

$$\text{よって } \triangle BPQ = \frac{4}{9} \triangle BDM$$

また点 R は辺 AB の中点だから

点 R から面 BDM にひいた垂線の長さは点 A から面 BDM にひいた垂線の長さの $\frac{1}{2}$

したがって求める三角すい BPQR の体積は三角すい ABDM の体積の $\frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$ 倍

$$\text{したがって } \frac{125}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{250}{27} \text{ cm}^3$$

【問 29】

次の図1のような、直方体の形をした紙の箱がある。この箱の面 $ABCD$ は切り取られており、 $AB=AE=6\text{ cm}$ 、 $BC=8\text{ cm}$ である。また、点 I , J , K , L , M , N は、それぞれ線分 AE , BF , CG , DH , AB , CD の中点である。

このとき、後の問1～問3に答えなさい。ただし、円周率は π とし、箱の面の厚さは考えないものとする。

(宮崎県 2015 年度)

問1 図1において、箱の底面 $EFGH$ の対角線 EG の長さを求めなさい。

図1

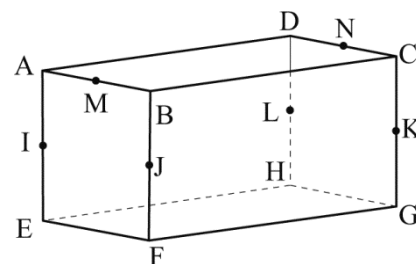
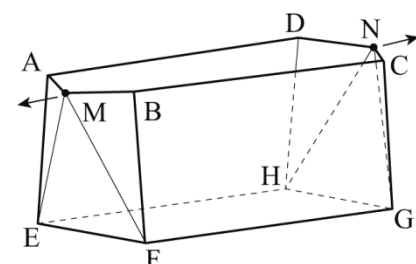


図2



M , N を外側に開き、 AD と BC を近づけ、 ME , MF , NG , NH を折り目として折る。

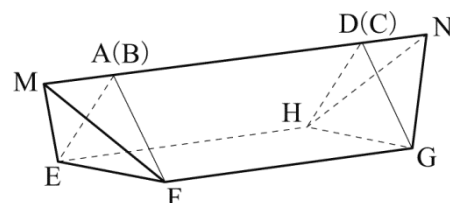


問2 図2と図3は、図1の箱を変形して、立体をつくる手順を示したものである。

このとき、図3の、点 M , N , E , F , H を頂点とする立体について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) この立体の表面積を求めなさい。

図3



AM と BM , AD と BC , DN と CN を、それぞれぴったりと重ねる。

(2) この立体の体積を求めなさい。

問3 図4は、図1の箱の四角形 $IJKL$ より上の部分を切り取り、底面の円の半径が 3 cm 、高さが 8 cm の円柱を入れたものである。

箱に円柱を入れたまま、図5のように、次の①、②の手順にしたがって、2本のひも a, b をかけ、円柱の真上の点 P でつるす。点 P は、箱の下側で2本のひもが交わる点 Q を通り、底面 $EFGH$ に垂直な直線上にある。

- ① ひも a を、点 P から線分 IJ , EF , GH , KL のそれぞれの中点を通り、最も短くなるようにして、再び点 P に戻す。

② ひも b を、点 P から線分 IL , EH , FG , JK のそれぞれの中点を通り、最も短くなるようにして、再び点 P に戻す。

ひも a の長さが 30 cm であるとき、ひも b の長さを求めなさい。ただし、ひもの太さは考えないものとする。

図4

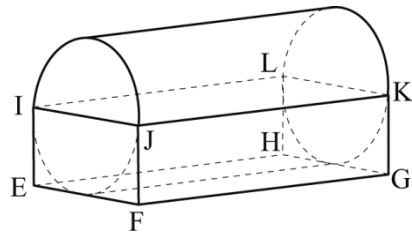
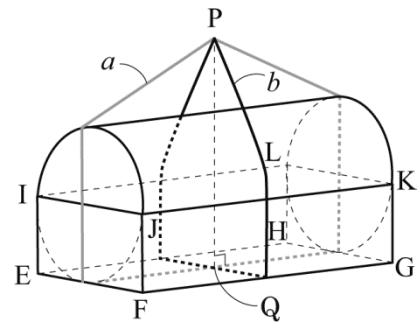


図5



解答欄

問1	cm	
問2	(1)	cm ²
	(2)	cm ³
問3	cm	

解答

問1 10 cm

問2

(1) 216 cm^2

(2) $90\sqrt{3} \text{ cm}^3$

問3 $(\pi + 12 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}$

解説

問1

三平方の定理より $EG = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$

問2

(1)

問題の図3の立体の表面積は図1の直方体の表面積のうち面 ABCD のないものだから

$$6 \times (6 \times 2 + 8 \times 2) + 6 \times 8 = 216 \text{ cm}^2$$

(2)

できる立体は底面を正三角形 AEF 高さを AD とする三角柱と

底面を正三角形 AEF 高さを MA とする三角錐 2 つ分できている。

1 辺が 6 cm の正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ より

$$\text{求める体積は } \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times 3 \times 2 = 72\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 90\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

問3

右の図1のように PQ と面 IJKL との交点を O

O を中心とする半径 OQ の円と

PQ との交点のうち Q ではない交点を R とする。

またひも a が面 IEFJ 上の円と交わる点を T とする。

このとき $PT = (30 - 6 \times 2 - 8) \div 2 = 5 \text{ cm}$

$\triangle PTR$ において

三平方の定理より $PR = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$

また図2のように円 O とひも b の交点の1つを U とすると

$\triangle POU$ において

$PO = 6 \text{ cm}$

$OU = 3 \text{ cm}$

$\angle PUO = 90^\circ$ だから $PU = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

$\triangle POU$ は

辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形だから

$\angle POU = 60^\circ$

よってひも b の長さは

$$\left(2\pi \times 3 \times \frac{30}{360} + 3\sqrt{3} \right) \times 2 + 6 + 3 \times 2 = \pi + 12 + 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

図1

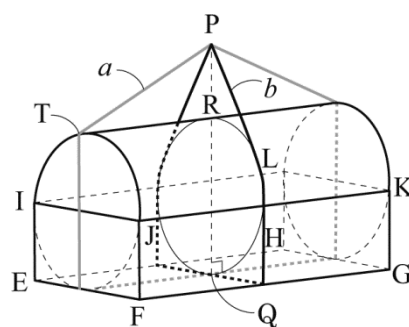
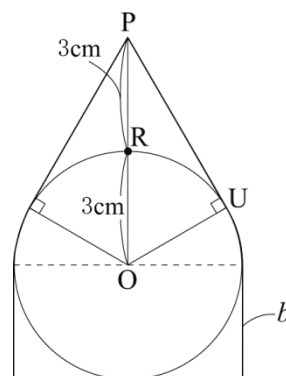


図2



【問 30】

図1のように、円 O が $AB=AC=4\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ の各辺と接している。 図1

$\triangle ABC$ の面積を $S\text{ cm}^2$, 円 O の半径を $r\text{ cm}$ として, 次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2015 年度)

問1 S の値を求めなさい。

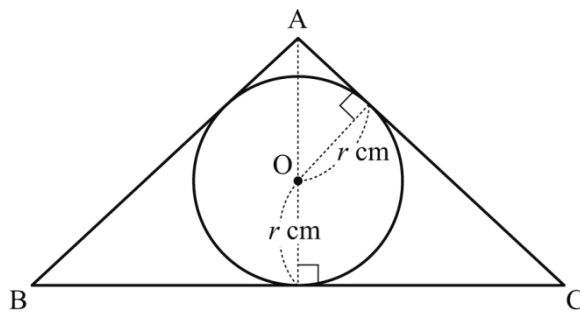
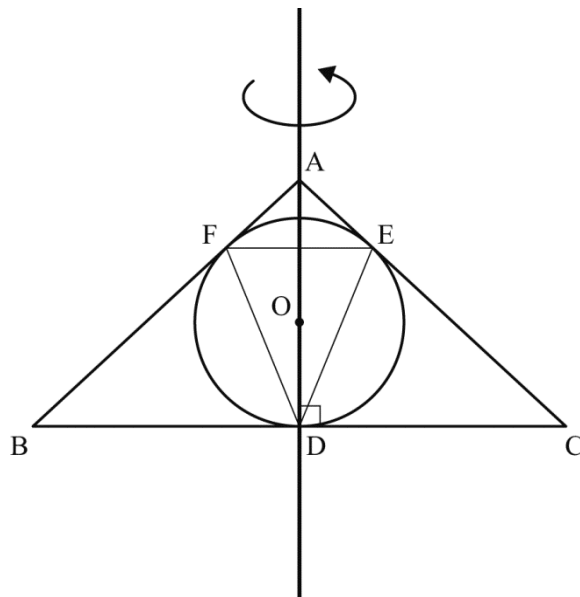


図2

問2

(1) S を r を使って表しなさい。

(2) r の値を求めなさい。



問3 円 O と $\triangle ABC$ の各辺との接点を, 図2のように D, E, F とする。直線 AD を軸として $\triangle DEF$ を 1 回転させてできる回転体の体積を求めなさい。ただし, 円周率は π とする。

解答欄

問1	$S =$ cm^2	
問2	(1)	$S =$
	(2)	$r =$ cm
問3	cm^3	

解答

問1 $3\sqrt{7} \text{ cm}^2$

問2

(1) $S=7r$

(2) $r=\frac{3\sqrt{7}}{7} \text{ cm}$

問3 $\frac{9\sqrt{7}}{64} \pi \text{ cm}^3$

解説

問1

AB=AC より点 A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を H とすると BH=CH=3 cm
△AHC において

三平方の定理より $AH=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7} \text{ cm}$

よって $S=\triangle ABC=\frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7}=3\sqrt{7} \text{ cm}^2$

問2

(1)

△ABC=△ABO+△BCO+△CAO より

$$\frac{1}{2} \times 4 \times r + \frac{1}{2} \times 6 \times r + \frac{1}{2} \times 4 \times r = 2r + 3r + 2r = 7r$$

(2)

$S=3\sqrt{7}$ より

$7r=3\sqrt{7}$

よって $r=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

問3

図2において△AOEと△ACDは2組の角がそれぞれ等しいので相似である。
よって AE:AD=OE:CD

$$AE:\sqrt{7}=\frac{3\sqrt{7}}{7}:3$$

$$3AE=3$$

$$AE=1 \text{ cm}$$

同様に AF=1 cm

EFとADの交点をKとすると AF:FB=AE:EC=1:3 より

EF // BC

$$EF:BC=AE:AC$$

$$EF:6=1:4$$

$$4EF=6$$

$$EF=\frac{3}{2} \text{ cm}$$

また AK:AD=AE:AC より

$$AK:\sqrt{7}=1:4$$

$$4AK=\sqrt{7}$$

$$AK=\frac{\sqrt{7}}{4} \text{ cm}$$

$$DK=\sqrt{7}-\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{4} \text{ cm}$$

△DEFをADを軸に1回転させてできる立体は
底面の直径がEFの円

高さがDKの円錐なので

$$\text{求める体積は} \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{9\sqrt{7}}{64} \pi \text{ cm}^3$$