

### 3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2002 年度出題】

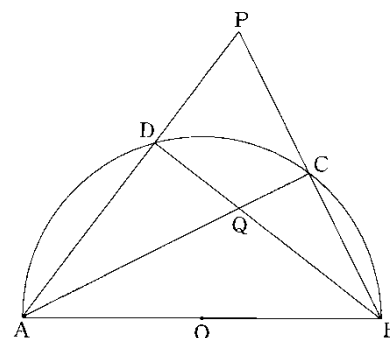
#### 【問 1】

図は、線分  $AB$  を直径とする半円  $O$  の円周上に  $\widehat{BC} = \widehat{CD}$  となる点  $C, D$  をとり、線分  $AD$  と  $BC$  の延長線の交点を  $P$ 、線分  $AC$  と  $BD$  の交点を  $Q$  としたものである。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(秋田県 2002 年度)

(1)  $\triangle ABC \equiv \triangle APC$  であることを証明しなさい。



(2) 線分  $DA$  と  $DB$  の長さの比が  $3:4$  のとき、 $\triangle PAB$  と四角形  $PDQC$  の面積の比を求めなさい。

解答欄

|     |                                                                               |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------|
| (1) | <p>証明</p> <p><math>\triangle ABC</math> と <math>\triangle APC</math> において</p> |
| (2) | <p>：</p>                                                                      |

解答

(1)

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle APC$ において

ACは共通 …①

ABは直径だから、

$\angle ACB = \angle ACP = 90^\circ$  …②

$\widehat{BC} = \widehat{CD}$ より

$\angle BAC = \angle PAC$  …③

①, ②, ③から

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \equiv \triangle APC$

(2)

40:11

解説

(1)

$\triangle ABC$ と $\triangle APC$ において、ACは共通 …①

ABは直径だから、 $\angle ACB = \angle ACP = 90^\circ$  …②

$\widehat{BC} = \widehat{CD}$ より、 $\angle BAC = \angle PAC$  …③

①, ②, ③から、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle ABC \equiv \triangle APC$

(2)

DAの長さを $3t$ とすると、 $DB = 4t$

よって、 $\triangle DAB$ において三平方の定理を用いると $AB = \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = 5t$

(1)より、 $PA = AB = 5t$  よって、 $\triangle PAB$ の面積は $\frac{1}{2} \times 5t \times 4t = 10t^2$

(1)から、 $\triangle ABC \equiv \triangle APC$ なので $\triangle APC$ の面積は $5t^2$

また、線分AQが $\angle DAB$ の角の2等分線なので  $DQ:QB = AD:AB = 3:5$

$DB = 4t$ としたので、 $DQ = 4t \times \frac{3}{8} = \frac{3}{2}t$

よって、 $\triangle DAQ$ の面積は $\frac{1}{2} \times 3t \times \frac{3}{2}t = \frac{9}{4}t^2$

四角形PDQCは $\triangle APC$ から $\triangle DAQ$ を引いたものなので、

四角形PDQCの面積は $5t^2 - \frac{9}{4}t^2 = \frac{11}{4}t^2$

以上より、求める比は  $10t^2 : \frac{11}{4}t^2 = 40:11$

【問 2】

図のように、点  $A, B$  をそれぞれ中心とする半径  $1\text{ cm}$  の円  $A$ 、半径  $2\text{ cm}$  の円  $B$  が交わり、点  $A$  は円  $B$  の円周上にある。点  $P, Q$  はそれぞれ円  $A$ 、円  $B$  の円周上の点で、直線  $PQ$  は2円の共通接線である。

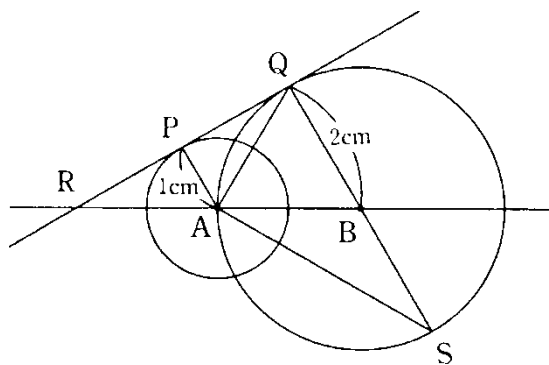
また、点  $R$  は直線  $PQ$  と直線  $AB$  の交点で、点  $S$  は  $QB$  の延長と円  $B$  の交点である。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(千葉県 2002 年度)

(1)  $\triangle PRA \equiv \triangle PQA$  であることを証明しなさい。

(2)  $AS$  の長さを求めなさい。



解答欄

|     |    |
|-----|----|
| (1) | 証明 |
| (2) | cm |

解答

(1)

証明

$\triangle PRA$ と $\triangle QRB$ において,  
直線PQは共通接線であるから

$$\angle RPA = \angle RQB = 90^\circ$$

共通の角であるから

$$\angle PRA = \angle QRB$$

よって, 2角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PRA \sim \triangle QRB$$

$\triangle PRA$ と $\triangle PQA$ において,

APは共通な辺であるから

$$AP = AP \cdots \textcircled{1}$$

直線PQは接線であるから

$$\angle RPA = \angle QPA = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

また,  $QB = 2PA$ で,  $\triangle PRA \sim \triangle QPB$ であるから,

$$RQ = 2RP$$

$$\text{したがって, } RP = QP \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle PRA \equiv \triangle PQA$$

(2)

$$2\sqrt{3} \text{ cm}$$

解説

(1)

証明

$\triangle PRA$ と $\triangle QRB$ において, 直線PQは共通接線であるから,

$$\angle RPA = \angle RQB = 90^\circ$$

共通の角であるから,

$$\angle PRA = \angle QRB$$

よって, 2角がそれぞれ等しいから,

$$\triangle PRA \sim \triangle QRB$$

$\triangle PRA$ と $\triangle PQA$ において, APは共通な辺であるから,

$$AP = AP \cdots \textcircled{1}$$

直線PQは接線であるから,

$$\angle RPA = \angle QPA = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

また,  $QB = 2PA$ で,  $\triangle PRA \sim \triangle QRB$ であるから,

$$RQ = 2RP$$

$$\text{したがって, } RP = QP \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より,

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle PRA \equiv \triangle PQA$$

(2)

$$(1) \text{より, } QA = RA = AB = 2 \text{ cm}$$

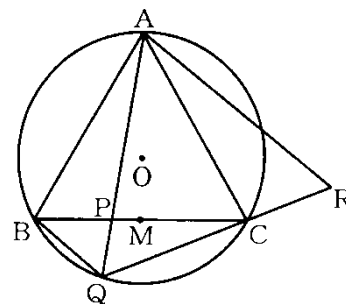
QSは円Bの直径だから,  $\angle QAS = 90^\circ$

$\triangle QAS$  に三平方の定理を用いて,

$$AS = \sqrt{QS^2 - QA^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

【問 3】

図で、円  $O$  は、1辺の長さが  $6\text{ cm}$  の正三角形  $ABC$  の外接円であり、点  $M$  は辺  $BC$  の中点、点  $P$  は線分  $BM$  上の点である。線分  $AP$  の延長と円  $O$  との交点を  $Q$  とし、線分  $QC$  の  $C$  のほうへの延長上の点で、 $BQ=CR$  となる点を  $R$  とする。



各問いに答えよ。なお、必要であれば、円周率は  $\pi$  を用いること。

(奈良県 2002 年度)

- (1)  $\angle BAP=20^\circ$  のとき、 $\angle APC$  の大きさを求めよ。
- (2)  $\triangle ABQ \equiv \triangle ACR$  であることを証明せよ。
- (3) 点  $P$  が、線分  $BM$  上を頂点  $B$  から点  $M$  まで動くとき、点  $R$  が動いてできる線の長さを求めよ。ただし、点  $P$  が頂点  $B$  に一致するときは、点  $R$  は頂点  $C$  の位置にあるものとする。

解答欄

|     |    |
|-----|----|
| (1) | 度  |
| (2) | 証明 |
| (3) | cm |

解答

(1)

80 度

(2)

証明

$\triangle ABQ$ と $\triangle ACR$ において

仮定から

$BQ=CR$  …①

$\triangle ABC$ は正三角形だから

$AB=AC$  …②

四角形 $ABQC$ は円に内接しているから

$\angle ABQ=\angle ACR$  …③

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABQ\equiv\triangle ACR$

(3)

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle ABP$ で, 内角と外角の関係から,  $\angle APC=\angle ABP+\angle BAP=60^\circ+20^\circ=80^\circ$

(2)

$\triangle ABQ$ と $\triangle ACR$ において仮定から,

$BQ=CR$  …①

$\triangle ABC$ は正三角形だから,

$AB=AC$  …②

四角形 $ABQC$ は円に内接しているから,

$\angle ABQ=\angle ACR$  …③

①, ②, ③より,

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle ABQ\equiv\triangle ACR$

(3)

(2)より,  $\triangle ABQ\equiv\triangle ACR$ なので, 点 $R$ が動いてできる線の長さは, 点 $Q$ が動いてできる線の長さに等しい。

ここで,  $OA=OB=2OM$ より, 円 $O$ の半径は, 正三角形 $ABC$ の高さの $\frac{2}{3}$ に等しい。

1辺が $a$ である正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ と表すことができるから,

$$\text{円}O\text{の半径は, } \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

点 $P$ が点 $M$ と重なるとき,

$$\angle BAQ = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

中心角は, 同じ弧に対する円周角の2倍だから,

$$\angle BOQ = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$$

中心角が $60^\circ$ で, 半径が $2\sqrt{3} \text{ cm}$ である弧の長さは,

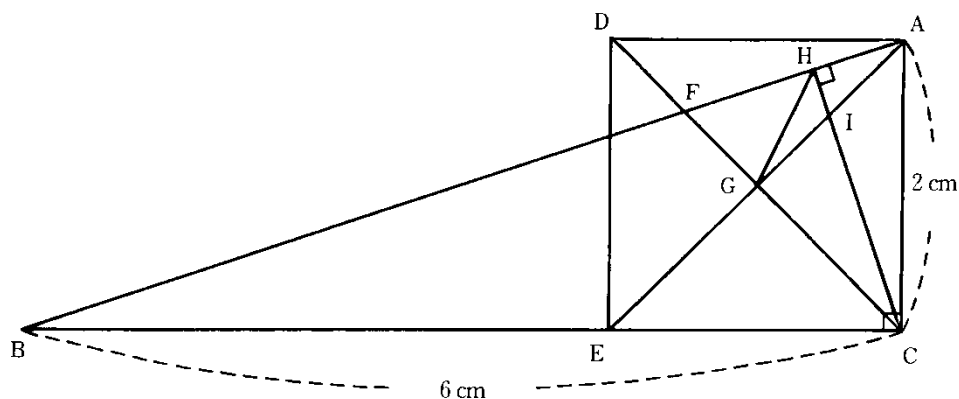
$$2\pi \times 2\sqrt{3} \times \frac{60}{360} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \text{ cm}$$

【問 4】

図のように、 $AC=2\text{ cm}$ 、 $BC=6\text{ cm}$  の直角三角形  $ABC$  と、辺  $AC$  を1辺とする正方形  $ADEC$  があり、対角線  $CD$  と  $AB$ 、 $AE$  との交点をそれぞれ  $F$ 、 $G$  とする。また、点  $C$  から辺  $AB$  にひいた垂線と  $AB$ 、 $AE$  との交点をそれぞれ  $H$ 、 $I$  とする。点  $H$  と点  $G$  を結ぶ。

このとき、①、④では  に適当な数を書き入れ、②、③では指示に従って答えなさい。(無理数はそのまま使いなさい。)

(岡山県 2002 年度)



①  $AB$  の長さは   $\text{cm}$  である。

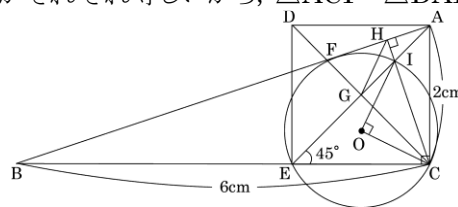
②  $CH$  の長さはいくらか。答えを求めるまでの過程も書いて答えなさい。

③  $\triangle ACI \equiv \triangle DAF$  を証明しなさい。

④  $\triangle GHI$  の面積は   $\text{cm}^2$  である。また、3点  $C$ 、 $I$ 、 $E$  を通る円の半径は   $\text{cm}$  である。

解答欄

|   |                                             |  |   |  |
|---|---------------------------------------------|--|---|--|
| ① |                                             |  |   |  |
| ② | <div>答 CH の長さ                      cm</div> |  |   |  |
| ③ | <div>証明</div>                               |  |   |  |
| ④ | ア                                           |  | イ |  |



【問 5】

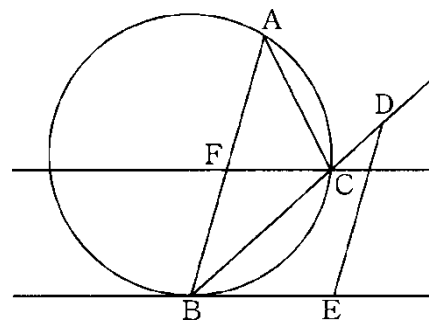
図のように、 $\triangle ABC$  は円に内接し、線分  $BC$  の延長上に、 $AB=BD$  となる点  $D$  をとる。点  $D$  を通り  $AB$  に平行な直線と、点  $B$  における接線との交点を  $E$  とする。さらに、直線  $BE$  に平行で点  $C$  を通る直線と線分  $AB$  との交点を  $F$  とする。

次の(1), (2)に答えなさい。

(山口県 2002 年度)

(1)  $\triangle ABC \equiv \triangle BDE$  であることを証明しなさい。

(2)  $AB=8\text{ cm}$ ,  $BC=5\text{ cm}$  のとき、線分  $AF$  の長さを求めなさい。



解答欄

|     |    |
|-----|----|
| (1) | 証明 |
| (2) | cm |

解答

(1)

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle BDE$ で

仮定から  $AB=BD$  …①

$AB \parallel DE$  で錯角は等しいから

$\angle ABC = \angle BDE$  …②

また,  $BE$ は点 $B$ で円に接するので, 接線と弦のつくる角の定理から

$\angle BAC = \angle DBE$  …③

①, ②, ③から

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \equiv \triangle BDE$

(2)

$\frac{39}{8}$  cm

解説

(1)

$\triangle ABC$ と $\triangle BDE$ で,

仮定から

$AB=BD$  …①

$AB \parallel DE$ で, 錯角は等しいから

$\angle ABC = \angle BDE$  …②

また,  $BE$ は点 $B$ で円に接するので, 接線と弦のつくる角の定理から

$\angle BAC = \angle DBE$  …③

①, ②, ③から,

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle ABC \equiv \triangle BDE$

(2)

$AB=BD=8$  cmで $BC=5$  cmより $CD=3$  cmとわかる。

また $DE=5$  cmより $DE$ と $FC$ の延長線との交点を $C'$  とすると

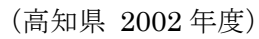
$CC' \parallel BE$ で $\triangle DCC' \sim \triangle DBE$ より  $DC' : C'E = DC : CB = 3 : 5$ だから

$$C'E = 5 \times \frac{5}{3+5} = \frac{25}{8} \text{ cm}$$

四角形 $FBEC'$  は平行四辺形より  $FB = C'E = \frac{25}{8}$  cmより

$$AF = AB - FB = 8 - \frac{25}{8} = \frac{39}{8} \text{ cm}$$

図のように、平行四辺形  $ABCD$  がある。 $\angle B$  の二等分線と辺  $AD$  の交点を  $E$ 、 $\angle D$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $F$  とする。また、対角線  $AC$  と線分  $BE$ 、 $DF$  の交点をそれぞれ  $P$ 、 $Q$  とする。このとき、次の (1)(2) の問いに答えなさい。ただし、 $AD > AB$  とする。



- 解答欄

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| (1) | 証明<br><br>△ABP と △CDQ において               |
| (2) | ゆえに $\triangle ABP \equiv \triangle CDQ$ |

解答

(1)

証明

$\triangle ABP$ と $\triangle CDQ$ において

平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいから

$$AB=CD \cdots ①$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle BAP=\angle DCQ \cdots ②$$

平行四辺形の対角はそれぞれ等しいから

$$\angle ABC=\angle CDA$$

$$\text{また } \angle ABP=\frac{1}{2} \angle ABC$$

$$\angle CDQ=\frac{1}{2} \angle CDA$$

したがって

$$\angle ABP=\angle CDQ \cdots ③$$

①, ②, ③より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しい

ゆえに  $\triangle ABP \equiv \triangle CDQ$

(2)

$$\frac{16}{3} \text{ cm}$$

解説

(1)

証明

$\triangle ABP$ と $\triangle CDQ$ において,

平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいから,

$$AB=CD \cdots ①$$

平行線の錯角は等しいから,

$$\angle BAP=\angle DCQ \cdots ②$$

平行四辺形の対角はそれぞれ等しいから,

$$\angle ABC=\angle CDA$$

$$\text{また, } \angle ABP=\frac{1}{2} \angle ABC \quad \angle CDQ=\frac{1}{2} \angle CDA$$

したがって,

$$\angle ABP=\angle CDQ \cdots ③$$

①, ②, ③より,

1辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

ゆえに,  $\triangle ABP \equiv \triangle CDQ$

(2)

$$\triangle ABC \text{で三平方の定理より, } AC=\sqrt{13^2-5^2}=12$$

$AD \parallel BC$ より, 錯角は等しいから,

$$\angle AEB=\angle CBE$$

$$\text{仮定より, } \angle ABE=\angle CBE$$

$$\text{よって, } \angle AEB=\angle ABE \text{ だから, } AE=AB=5$$

また,  $AD \parallel BC$ より,

$\triangle APE \sim \triangle CPB$ だから,

$$AP:CP=AE:CB=5:13$$

$$\text{したがって, } AP=\frac{5}{5+13} AC=\frac{5}{18} \times 12=\frac{10}{3}$$

$$\text{同様にして, } CQ=\frac{10}{3} \text{ だから, } PQ=12-\frac{10}{3} \times 2=\frac{16}{3} \text{ cm}$$

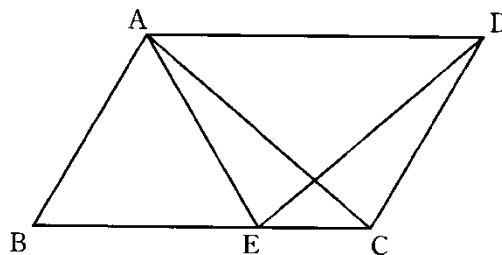
【問 7】

図のような平行四辺形  $ABCD$  があり、辺  $BC$  上に  $AB=AE$  となる点  $E$  をとる。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(佐賀県 2002 年度)

(1)  $\triangle ABC \equiv \triangle EAD$  であることを証明しなさい。



(2)  $AB=4\text{ cm}$ ,  $BC=6\text{ cm}$  で、 $AE$  が  $\angle DAB$  の二等分線であるとき、次の(ア)～(ウ)の各問いに答えなさい。

(ア)  $\angle ABC$  の大きさを求めなさい。

(イ)  $\triangle ABC$  の面積を求めなさい。

(ウ) 線分  $DE$  の長さを求めなさい。

解答欄

|     |     |                 |  |
|-----|-----|-----------------|--|
| (1) |     |                 |  |
| (2) | (ア) | 度               |  |
|     | (イ) | cm <sup>2</sup> |  |
|     | (ウ) | cm              |  |

解答

(1)

$\triangle ABC$ と $\triangle EAD$ において,

仮定から

$$AB=EA \cdots \textcircled{1}$$

四角形ABCDは平行四辺形だから,

$$BC=AD \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle ABE$ は,  $AB=AE$ の二等辺三角形だから,

$$\angle ABC = \angle AEB$$

$AD \parallel BC$ だから

$$\angle AEB = \angle EAD$$

よって,  $\angle ABC = \angle EAD \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③から

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ABC \equiv \triangle EAD$$

(2)

(ア) 60 度

$$(イ) 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$(ウ) 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle ABC$ と $\triangle EAD$ において,

仮定から,

$$AB=EA \cdots \textcircled{1}$$

四角形ABCDは平行四辺形だから,

$$BC=AD \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle ABE$ は,  $AB=AE$ の二等辺三角形だから,

$$\angle ABC = \angle AEB$$

$AD \parallel BC$ だから,

$$\angle AEB = \angle EAD$$

よって,  $\angle ABC = \angle EAD \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③から,

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ABC \equiv \triangle EAD$$

(2)

(ア)  $\angle BAE = \angle DAE = \angle AEB = \angle ABE$ より,  $\triangle ABE$ は正三角形になる。

$$(イ) \text{ AからBEに垂線AHをひくと, } AH = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm したがって, } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(ウ)  $HC = BC - BH = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$   $\triangle AHC$ に三平方の定理を用いて,

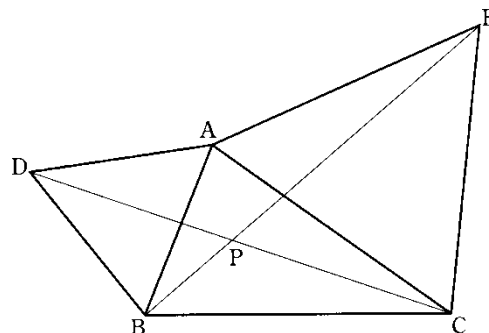
$$AC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{7} \text{ cm} \quad (1) \text{より, } DE = CA = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

【問 8】

図の $\triangle ABC$ で、その外側に2つの正三角形 $\triangle ABD$ ,  $\triangle ACE$ をつくり、 $BE$ と $CD$ の交点を $P$ とする。

このとき、次の(1)～(4)の問いに答えなさい。

(宮崎県 2002 年度)



(1)  $\triangle ADC \equiv \triangle ABE$  を証明しなさい。

(2) 点  $A, B, C, D, E, P$  のうち、同じ円周上にある4点は何組ありますか。また、そのうちの1組を選び、その4点を書きなさい。

(3)  $\angle BPC$  の大きさを求めなさい。

(4)  $BC = 3 \text{ cm}$  のとき、 $\triangle BPC$  の外接円の半径を求めなさい。

解答欄

|     |                  |    |
|-----|------------------|----|
| (1) | 証明               |    |
| (2) | 組                | 4点 |
| (3) | $\angle BPC =$ 度 |    |
| (4) | cm               |    |

解答

(1)

証明

$\triangle ADC$ と $\triangle ABE$ で

$\triangle ABD$ ,  $\triangle ACE$  は正三角形だから

$AD=AB$  …①

$AC=AE$  …②

また,

$\angle DAC=60^\circ + \angle BAC$  …③

$\angle BAE=\angle BAC+60^\circ$  …④

③, ④から  $\angle DAC=\angle BAE$  …⑤

①, ②, ⑤から

2辺とその間の角が, それぞれ等しいので

$\triangle ADC \equiv \triangle ABE$

(2)

2組  $A, D, B, P$

(3)

$\angle BPC=120$  度

(4)

$\sqrt{3}$  cm

解説

(1)

$\triangle ADC$ と $\triangle ABE$ で,

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ は正三角形だから,

$AD=AB$  …①,

$AC=AE$  …②

また,  $\angle DAC=60^\circ + \angle BAC$  …③,

$\angle BAE=\angle BAC+60^\circ$  …④

③, ④から,

$\angle DAC=\angle BAE$  …⑤

①, ②, ⑤から,

2辺とその間の角が, それぞれ等しいので,

$\triangle ADC \equiv \triangle ABE$

(2)

(1)より $\triangle ADC \equiv \triangle ABE$ だから,

$\angle ADC=\angle ABE$ ,  $\angle ACD=\angle AEB$

それぞれ $\widehat{AP}$ に対する円周角が等しいとみなせるので,

$A, D, B, P$ の4点と $A, P, C, E$ の4点の2組。

(3)

(2)より $A, D, B, P$ は同一円周上にあるので,

$\angle DAB=\angle DPB=60^\circ$

よって,  $\angle BPC=180^\circ - \angle DPB=120^\circ$

(4)

$\triangle BPC$ の外接円の中心を $O$ とする。

図のように,  $\angle BPC=120^\circ$ だから,

大きい方の $\angle BOC=240^\circ$

$O$ から $BC$ に垂線 $OQ$ を引くと,

$\triangle OQC$ は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形で,  $OC$ は円 $O$ の半径になる。

$OC:QC=2:\sqrt{3}$ より,

$$OC = \frac{2}{\sqrt{3}} QC = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}$$

$$BC = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

