

4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2018 年度出題】

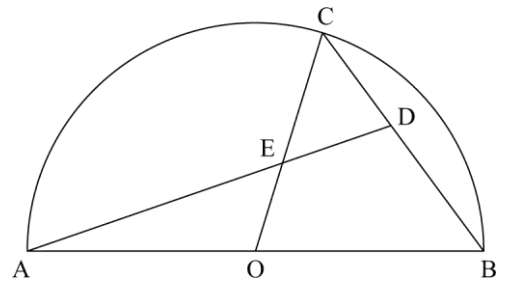
【問 1】

図のように、線分 AB を直径とする半円があり、線分 AB の中点を点 O とします。点 C を弧 AB 上の点とし、線分 BC 上に点 D をとります。線分 AD と線分 OC との交点を E とします。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2018 年度)

問1 $BD=DC$, $OD=2\text{ cm}$ のとき、線分 AC の長さを求めなさい。



問2 $\angle AOC$ の二等分線と線分 AD との交点を F とします。このとき、 $\triangle CDE \sim \triangle OFE$ を証明しなさい。

解答欄

問1	cm
問2	〔証 明〕

解答

問1 4cm

問2

〔証明〕

△CDEと△OFEにおいて

∠CED=∠OEF (対頂角)…①

∠OBC= $\frac{1}{2}$ ∠AOC (円周角の定理)

∠AOF= $\frac{1}{2}$ ∠AOC (仮定)

よって∠OBC=∠AOF…②

したがって BC // OF…③

③より∠ECD=∠EOF (錯角)…④

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

△CDE∞△OFE

解説

問1

△ABCにおいて

BO=OA, BD=DC が成り立つから

中点連結定理より AC=2OD=2×2=4cm

問2

△CDEと△OFEにおいて

対頂角は等しいから∠CED=∠OEF…①

円周角の定理より∠OBC= $\frac{1}{2}$ ∠AOC

仮定より線分 OF は∠AOC の二等分線だから∠AOF= $\frac{1}{2}$ ∠AOC

よって∠OBC=∠AOF…②となり

同位角が等しいから BC //OF…③がいえる。

③より

平行線の錯角は等しいから

∠ECD=∠EOF…④

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

△CDE∞△OFE

(別解)

∠ECD=∠EOF であることは次のように導くこともできる。

円周角の定理より∠OBC= $\frac{1}{2}$ ∠AOC

△OBC は二等辺三角形だから∠OBC=∠ECD

仮定より∠EOF= $\frac{1}{2}$ ∠AOC

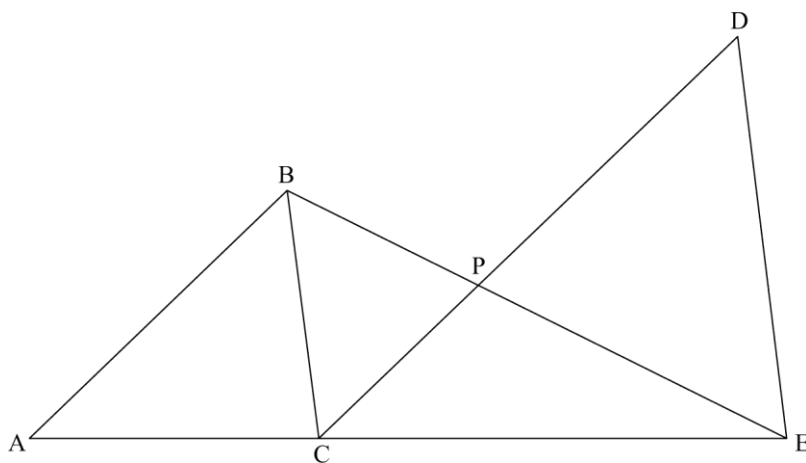
よって∠ECD=∠EOF

【問 2】

次の図のように、 $\triangle ABC$ と $\triangle CDE$ があります。 $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ で、3 点 A, C, E は、この順に一直線上にあり、2 点 B, D は直線 AE に対して同じ側にあります。

線分 BE と辺 CD の交点を P とするとき、 $\triangle BCP \sim \triangle EDP$ であることを証明しなさい。

(岩手県 2018 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

相似な三角形の対応する角は等しいから

$$\angle ACB = \angle CED$$

同位角が等しいから $BC \parallel DE$

$\triangle BCP$ と $\triangle EDP$ において

平行線の錯角は等しいから

$$\angle BCP = \angle EDP \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle CBP = \angle DEP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BCP \sim \triangle EDP$$

解説

$\triangle ABC \sim \triangle CDE$ より

対応する角の大きさは等しいから $\angle ACB = \angle CED$

よって同位角が等しいから $BC \parallel DE$

$\triangle BCP$ と $\triangle EDP$ について

平行線の錯角は等しいから

$$\angle BCP = \angle EDP \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle CBP = \angle DEP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BCP \sim \triangle EDP$$

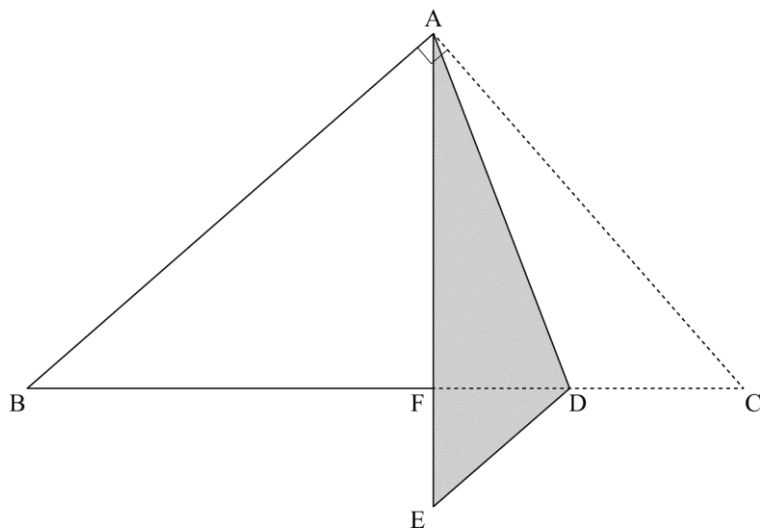
なお対頂角は等しいから

$\angle BPC = \angle EPD$ を相似条件のひとつとして使ってもよい。

【問 3】

下の図のように、 $\angle BAC = 90^\circ$ の $\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 D をとり、 $\triangle ABC$ を、線分 AD を折り目として折り返し、頂点 C がうつった点を E とすると、 $AB \parallel DE$ となった。線分 AE と線分 BD との交点を F とするとき、あとの問いに答えなさい。

(山形県 2018 年度)



問1 $\triangle ABC \sim \triangle FBA$ であることを証明しなさい。

問2 $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ であるとき、次の問いに答えなさい。

(1) DF の長さを求めなさい。

(2) $\triangle ADE$ を、直線 AE を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。なお、円周率は π とする。

解答欄

問1	〔証明〕		
問2	(1)	cm	
	(2)	cm ³	

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle FBA$ において

共通だから

$$\angle ABC = \angle FBA \cdots ①$$

仮定より

$$\angle ACB = \angle AED \cdots ②$$

$AB \parallel DE$ で錯角は等しいから

$$\angle FAB = \angle AED \cdots ③$$

②, ③より

$$\angle ACB = \angle FAB \cdots ④$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle FBA$$

問2

$$(1) \frac{3}{2} \text{cm}$$

$$(2) \frac{3\sqrt{7}}{2} \pi \text{ cm}^3$$

解説

問1

$\triangle ABC$ と $\triangle FBA$ において

共通な角だから $\angle ABC = \angle FBA \cdots ①$

仮定より折り返して移動した角だから $\angle ACB = \angle AED \cdots ②$

$AB \parallel DE$ より

平行線の錯角は等しいから $\angle FAB = \angle AED \cdots ③$

②, ③より $\angle ACB = \angle FAB \cdots ④$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle FBA$$

問2

(1)

問1より $\triangle ABC \sim \triangle FBA$ だから

$$AB:FB = BC:BA \quad 6:FB = 8:6 \quad FB = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

$\triangle ABC \sim \triangle FBA$ だから $\angle BCA = \angle BAF$

折り返してできる三角形だから $\triangle ACD \equiv \triangle AED$ より, $\angle CAD = \angle EAD$

よって $\angle BAD = \angle BAF + \angle EAD = \angle BCA + \angle CAD$

$\triangle ACD$ において三角形の内角と外角の性質より $\angle BDA = \angle BCA + \angle CAD$ だから

$\angle BAD = \angle BDA$ となるので $\triangle ABD$ は $BA = BD$ の二等辺三角形である。

$$\text{したがって } DF = BD - FB = BA - FB = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

(2)

$$\triangle ABC \text{ で三平方の定理より } AC = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

折り返してできる三角形だから $\triangle ACD \equiv \triangle AED$ より $AE = AC = 2\sqrt{7} \text{ cm}$

$\triangle ADE$ を直線 AE を軸として1回転させてできる立体は

半径 DF の円を底面とし, 高さが AF の円すいと

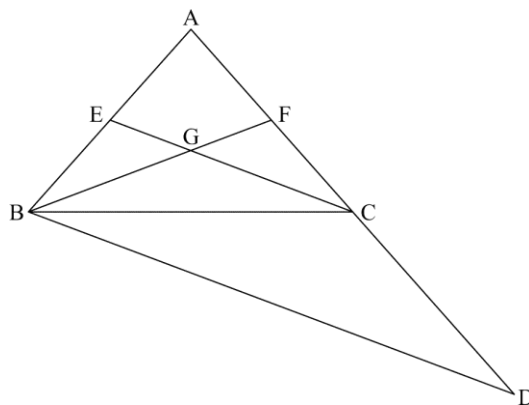
半径 DF の円を底面とし, 高さが EF の円すいを組み合わせてできた図形である。

よって求める体積は

$$\frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times AF + \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times EF = \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times AE = \frac{1}{3} \pi \times \frac{9}{4} \times 2\sqrt{7} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \pi \text{ cm}^3$$

【問 4】

図のように、 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC がある。辺 AC の延長線上に点 D を、 $AC=CD$ となるようにとり、点 B と点 D を結ぶ。また、辺 AB, AC の中点をそれぞれ E, F とし、線分 BF と線分 CE の交点を G とする。



このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(千葉県 2018 年度 後期)

問1 $\triangle BEG \sim \triangle DFB$ となることの証明を、次の

の中に途中まで示してある。 (a) , (b) に

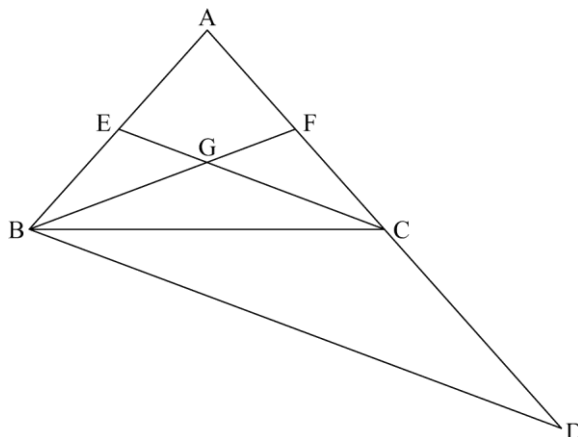
入る最も適当なものを、次の選択肢のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び、符号で答えなさい。

また、 (c) には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。

ただし、 の中の①～④に示されている関係を使う場合、番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

証明

$\triangle BCE$ と $\triangle CBF$ において、
 $AB=AC$ で、点 E, F はそれぞれ
 辺 AB, AC の中点であるから、
 $BE=CF \cdots \textcircled{1}$
 $\triangle ABC$ は、二等辺三角形であるから、
 $\angle CBE = \text{ (a) } \cdots \textcircled{2}$
 共通な辺は等しいので、
 $BC=CB \cdots \textcircled{3}$
 ①, ②, ③より、
 (b) がそれぞれ等しいので、
 $\triangle BCE \equiv \triangle CBF \cdots \textcircled{4}$



(c)

選択肢

ア $\angle CBF$	イ $\angle CFB$	ウ $\angle BCF$
エ 3 組の辺	オ 2 組の辺とその間の角	カ 1 組の辺とその両端の角

問2 $\triangle BEG$ の面積が 1 cm^2 のとき、 $\triangle ABD$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2	cm ²	

解答

問1

(a) ウ

(b) オ

(c)

$\triangle BEG$ と $\triangle DFB$ において

④より

$$\angle BEG = \angle DFB \cdots \textcircled{5}$$

$\triangle ABD$ で

点 C, E は, それぞれ辺 AD, AB の中点であるから

中点連結定理より $BD \parallel EC \cdots \textcircled{6}$

⑥より

平行線の錯角は等しいので

$$\angle BGE = \angle DBF \cdots \textcircled{7}$$

⑤, ⑦より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BEG \sim \triangle DFB$

問2 12cm^2

解説

問1

(a)

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから

2つの底角が等しいことを利用すると $\angle CBE = \angle BCF$ となる。

よって正解はウ

(b)

①～③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいことがわかる。よって正解はオ

(c)

④より

合同な三角形の対応する角はそれぞれ等しいから

$$\angle BEC = \angle BFC = \angle BEG = \angle DFB \cdots \textcircled{5}$$

$\triangle ABD$ で

点 E は辺 AB の中点であり

また仮定より $AC = CD$ だから

中点連結定理より $EC \parallel BD$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle BGE = \angle DBF \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BEG \sim \triangle DFB$

問2

$\triangle BEG \sim \triangle DFB$ で

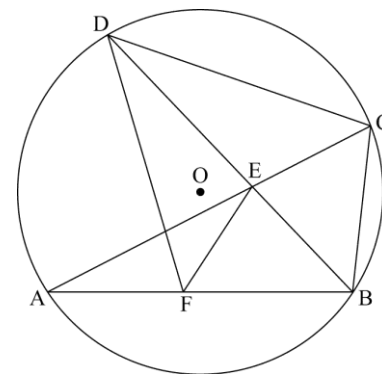
$$BE : DF = BE : (CF + CD) = BE : 3BE = 1 : 3 \text{ だから}$$

$$\triangle BEG : \triangle DFB = 1^2 : 3^2 = 1 : 9$$

$$\text{よって } \triangle ABD = \frac{4}{3} \triangle DFB = \frac{4}{3} \times 9 \triangle BEG = 12\text{cm}^2$$

【問 5】

右の図のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C を $AB > BC$ となるようにとる。
 また、点 B を含まない $\widehat{AC}$ 上に 2 点 A, C とは異なる点 D をとり、線分 AC と線分 BD との交点を E とする。さらに、線分 AB 上に点 F を $\angle BDC = \angle BDF$ となるようにとる。



このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2018 年度)

問1 三角形 BCD と三角形 FED が相似であることを次のように証明した。

〔証明〕

$\triangle BCD$ と $\triangle FED$ において、

まず、 $\angle BDC = \angle BDF$ より、

$$\angle BDC = \angle FDE \cdots \textcircled{1}$$

次に、(i) から、

$$\angle BDC = \angle BAC \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \angle FDE = \angle BAC$$

$$\text{よって}, \angle FDE = \angle FAE \cdots \textcircled{3}$$

2 点 A, D は直線 EF について同じ側にあつて、

$\textcircled{3}$ が成り立つことから、

(ii) といえる。

このとき、 $\widehat{DE}$ に対する円周角は等しいから、線分 AD を引くと、

$$\angle DAE = \angle DFE$$

$$\text{よって}, \angle DAC = \angle DFE \cdots \textcircled{4}$$

また、 $\widehat{DC}$ に対する円周角は等しいから、

$$\angle DAC = \angle DBC \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{より}, \angle DBC = \angle DFE \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{6}$ より、2 組の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle BCD \sim \triangle FED$$

この証明を完成させるために適することがらを (i) , (ii) それぞれに、具体的な点、角、弧、辺などを明らかにして書きなさい。

問2 $\angle ABC = 96^\circ$, $\angle AEF = 30^\circ$ のとき、 $\angle BFE$ の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	(i)	
	(ii)	
問2	$\angle BFE = \boxed{}^{\circ}$	

解答

問1

(i) $\widehat{BC}$ に対する円周角は等しい

(ii) 4点 A, F, E, D は1つの円周上にある

問2 $\angle BFE = \boxed{57}^{\circ}$

解説

問1

(i)の文をうけて、次の行で「 $\angle BDC = \angle BAC$ 」としているから

(i)には $\angle BDC = \angle BAC$ の根拠となる文があてはまる。

よって「 $\widehat{BC}$ に対する円周角は等しい」とすればよい。

次に(ii)の文の次の行で「 $\widehat{DE}$ に対する円周角は等しい」とあるので

2点 D, E を通る円が必要であることがわかる。

(ii)の文の前の3行で「 $\angle FDE = \angle FAE$ で、2点 A, D は直線 EF について同じ側にある」ことがわかるので円周角の定理の逆より「4点 A, F, E, D は同一円周上にある」といえる。

問2

$\angle BDC = a^{\circ}$ とすると $\angle BDF = \angle BDC = a^{\circ}$

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから

$\angle ACB = \angle ADB = a^{\circ} + 30^{\circ}$

問1より4点 A, F, E, D は同一円周上にあるから $\angle FAE = \angle FDE$ だから $\angle FAE = a^{\circ}$

よって $\triangle ABC$ の内角の和から

$a^{\circ} + 96^{\circ} + a^{\circ} + 30^{\circ} = 180^{\circ}$

$a^{\circ} = 27^{\circ}$

$\triangle AFE$ で

三角形の内角と外角の性質より $\angle BFE = 27^{\circ} + 30^{\circ} = 57^{\circ}$

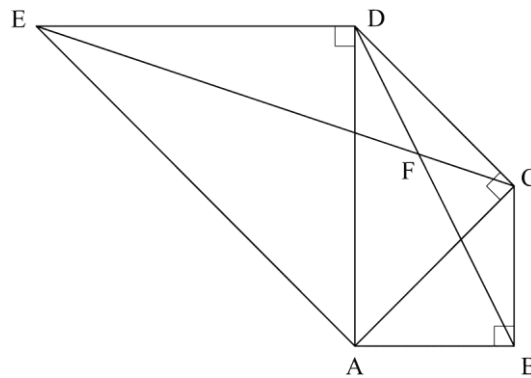
【問 6】

右の図のように，五角形 $ABCDE$ があり， $AB=BC$ ， $AC=CD$ ， $AD=DE$ ， $\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE=90^\circ$ である。

また、線分 CE と線分 BD の交点を F とする。

このとき、次の問いに答えよ。ただし、 $AB=1\text{ cm}$ とする。

(福井県 2018 年度)



問1 CE の長さを求めよ。

問2 $\triangle BCD \sim \triangle CDE$ であることを証明せよ。

問3 $\triangle CDF$ の面積を求めよ。

解答欄

問1	CE=	cm
問2	〔証明〕	
問3		cm ²

解答

問1 $CE = \sqrt{10}\text{cm}$

問2

〔証明〕

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 5$$

$$BD > 0 \text{ であるから } BD = \sqrt{5}$$

$\triangle BCD$ と $\triangle CDE$ において

$$BC:CD = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$CD:DE = \sqrt{2}:2 = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{2}$$

$$BD:CE = \sqrt{5}:\sqrt{10} = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から

3組の辺の比がすべて等しいので

$\triangle BCD \sim \triangle CDE$

問3 $\frac{1}{5}\text{cm}^2$

解説

問1

直線 BC と直線 ED との交点を G とする。

$AB=BC$, $AC=CD$, $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$ より $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ は直角二等辺三角形だから

$$AC = AB \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ cm}, AD = AC \times \sqrt{2} = 2\text{cm} \text{ また } DE = AD = 2\text{cm}$$

$\triangle CGD$ において

$$\angle CGD = 90^\circ, AD \parallel BG \text{ より平行線の錯角は等しいから } \angle DCG = \angle ADC = 45^\circ$$

よって $\triangle CGD$ は直角二等辺三角形で $DG = AB = 1\text{cm}$, だから $CG = DG = 1\text{cm}$

$$\text{したがって } \triangle CGE \text{ において三平方の定理より } CE = \sqrt{(2+1)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ cm}$$

問2

$$\triangle ABD \text{ において三平方の定理より } BD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

$\triangle BCD$ と $\triangle CDE$ において

$$BC:CD = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$CD:DE = \sqrt{2}:2 = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{2}$$

$$BD:CE = \sqrt{5}:\sqrt{10} = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から

3組の辺がすべて等しいので

$\triangle BCD \sim \triangle CDE$

また③の代わりに $\angle BCD = \angle CDE = 135^\circ \cdots \textcircled{4}$ を用いて

①, ②, ④より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいとしてもよい。

問3

点 C から線分 AD に引いた垂線と線分 AD との交点を H , 線分 AD と線分 CE との交点を I とする。

$\triangle CIH$ と $\triangle EID$ において

$$\text{仮定より } \angle CHI = \angle EDI$$

対頂角は等しいので $\angle CIH = \angle EID$ だから

2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle CIH \sim \triangle EID$

$$CH = AB = 1\text{cm}, ED = 2\text{cm} \text{ より } HI:ID = CI:EI = CH:ED = 1:2 \cdots \textcircled{5}$$

$\triangle BCF$ と $\triangle DIF$ において

$$AD \parallel BC \text{ より, 平行線の錯角は等しいので } \angle BCF = \angle DIF, \angle CBF = \angle IDF$$

よって 2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BCF \sim \triangle DIF$

$$DI = \frac{2}{3}, DH = \frac{2}{3} \text{ cm だから } CF:IF = BC:DI = 1:\frac{2}{3} = 3:2 \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より

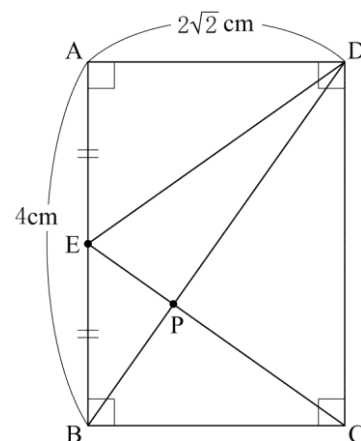
$$EF:FC = \{(3+2) \times 2 \div 2\} : 3 = 12:3 = 4:1$$

$$\text{よって } \triangle CDF = \triangle CDE \times \frac{1}{4+1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \text{ cm}^2$$

【問 7】

図1のような $AB=4\text{ cm}$, $AD=2\sqrt{2}\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ がある。辺 AB の中

図1



このとき、次の問1～問3に答えなさい。

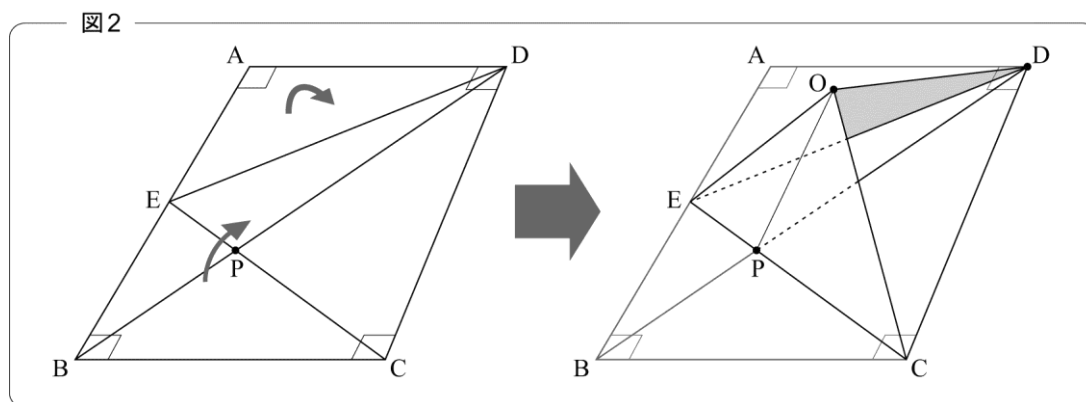
(山梨県 2018 年度)

問1 図1において、 $\triangle PED$ と面積が等しい三角形を1つ書きなさい。

問2 $\triangle PBE \sim \triangle PDC$ となることを証明しなさい。

問3 図2のように、線分 ED と EC を折り目として辺 EA と EB がちょうど重なるように長方形 $ABCD$ を折り曲げ、2点 A, B が重なった点を O とする。

このとき、4点 O, E, C, D を頂点とする三角錐 $OECD$ について、次の(1)～(3)に答えなさい。



(1) $\triangle COD$ の面積を求めなさい。

(2) 三角錐 $OECD$ の体積を求めなさい。

(3) 三角錐 $OECD$ を、3点 O, P, D を通る平面で切ったときの切り口において、線分 PD の中点を M とする。 $\triangle OPM$ を直線 OP を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。

解答欄

問1		
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm^2
	(2)	cm^3
	(3)	cm^3

解答

問1 $\triangle PBC$

問2

〔証明〕

$\triangle PBE$ と $\triangle PDC$ において

対頂角は等しいから

$$\angle BPE = \angle DPC \cdots \textcircled{1}$$

長方形の対辺は平行であり

平行線の錯角は等しいから

$$\angle PBE = \angle PDC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PBE \sim \triangle PDC$$

問3

(1) 4cm^2

(2) $\frac{8}{3}\text{cm}^3$

(3) $\frac{4\sqrt{6}}{9}\pi \text{ cm}^3$

解説

問1

$\triangle PED = \triangle ECD - \triangle PCD$, $\triangle PBC = \triangle BCD - \triangle PCD$ で

$AB \parallel DC$ より $\triangle ECD = \triangle BCD$

よって $\triangle PED = \triangle PBC$

問2

対頂角は等しいから $\angle BPE = \angle DPC \cdots ①$

$AB \parallel DC$ で錯角が等しいから $\angle PBE = \angle PDC \cdots ②$

$\angle PEB = \angle PCD \cdots ③$

①, ②, ③のうちどれか 2 つを使って 2 組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問3

(1)

$OC = BC = 2\sqrt{2}\text{cm}$, $OD = AD = 2\sqrt{2}\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$ だから $OC : OD : CD = 1 : 1 : \sqrt{2}$

よって $\triangle COD$ は $\angle COD = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

面積は $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4\text{cm}^2$

(2)

$\angle EOC = \angle EBC = 90^\circ$, $\angle EOD = \angle EAD = 90^\circ$ だから $EO \perp$ 面 COD

よって三角錐 $OECD$ は $\triangle COD$ が底面で EO が高さの三角錐とみることができる。

$EO = EA = 2\text{cm}$ だから三角錐 $OECD$ の体積は $\frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3}\text{cm}^3$

(3)

右の図1で $\triangle BCD$ は $\angle BCD = 90^\circ$ の直角三角形だから

三平方の定理より $BD^2 = BC^2 + CD^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4^2 = 24$

$BD > 0$ だから

$BD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\text{cm}$

$AB \parallel DC$ より

$BP : PD = BE : CD = 1 : 2$

よって $BP = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\text{cm}$

この BP の長さが三角錐 $OECD$ では OP に相当する。

同様に $AD = 2\sqrt{2}\text{cm}$ が三角錐 $OECD$ では OD に相当する。

さらに $\angle DOE = \angle DOC = 90^\circ$ より, $OD \perp$ 面 OEC だから

右の図2のように $\triangle OPD$ は $\angle POD = 90^\circ$ の直角三角形になる。

PD の中点 M から OP に垂線 MN をひくと N は OP の中点で

$NM = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\text{cm}$

したがって $\triangle OPM$ を OP を軸として 1 回転させてできる立体は

底面の半径が $NM = \sqrt{2}\text{cm}$ で高さが $ON = \frac{\sqrt{6}}{3}\text{cm}$ の円錐を

2 つあわせた形になるから体積は

$\frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times 2 = \frac{4\sqrt{6}}{9} \pi \text{cm}^3$

図1

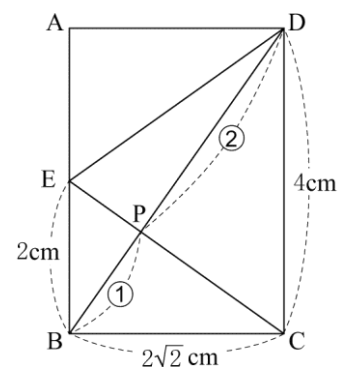
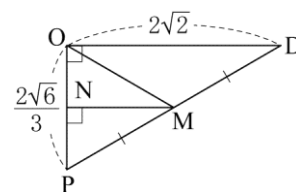
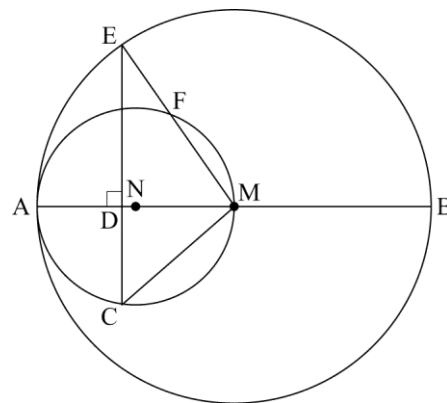


図2



【問 8】

右の図のように、 AB を直径とする円 M と、 AM を直径とする円 N があり、 $AB=8\text{ cm}$ である。円 N の周上に点 C を、 $CM=3\text{ cm}$ となるようにとる。点 C から直線 AB にひいた垂線と直線 AB との交点を D とし、直線 CD と円 M との交点のうち、直線 AB に対して点 C と同じ側でないものを E とする。また、2 点 E, M を通る直線と円 N との交点のうち、 M でないものを F とする。



このとき、次の問1～問3に答えよ。

(京都府 2018 年度 前期)

問1 $\triangle DCM \sim \triangle CAM$ であることを証明せよ。

問2 $\triangle FMA$ と合同な三角形を、次の(ア)～(ウ)から 1 つ選べ。また、線分 FM の長さを求めよ。

$$(\text{ア}) \triangle MCE \quad (\text{イ}) \triangle DAE \quad (\text{ウ}) \triangle DME$$

問3 直線 EM と円 M との交点のうち、E でないものを G とするとき、 $\triangle MGB$ の面積を求めよ。

解答欄

問1			
問2	ア	イ	ウ
	FM= cm		
問3	cm ²		

解答

問1

$\triangle DCM$ と $\triangle CAM$ で

仮定より

$$\angle CDM = 90^\circ$$

半円の弧に対する円周角だから

$$\angle ACM = 90^\circ$$

よって

$$\angle CDM = \angle ACM \cdots \textcircled{1}$$

また共通する角だから

$$\angle DMC = \angle CMA \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角が、それぞれ等しいので

$$\triangle DCM \sim \triangle CAM$$

問2

ウ

$$FM = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

$$\text{問3 } \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^2$$

解説

問1

半円の弧に対する円周角が 90° になることに注目するとよい。

問2

$\triangle FMA$ と $\triangle DME$ において

半円の弧に対する円周角だから $\angle AFM = 90^\circ$

仮定より

$$\angle EDM = 90^\circ \text{ なので } \angle AFM = \angle EDM = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

円 M の半径だから $MA = ME \cdots \textcircled{2}$

共通な角だから $\angle AMF = \angle EMD \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので

$$\triangle FMA \equiv \triangle DME$$

よって $FM = DM \cdots \textcircled{4}$

また問1より $\triangle DCM \sim \triangle CAM$ だから

$$DM : CM = CM : AM \quad DM : 3 = 3 : 4 \quad DM = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \textcircled{4} \text{ より } FM = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

問3

$\triangle MEA$ と $\triangle MGB$ において

円 M の半径だから $MA = MB \cdots \textcircled{1}$, $ME = MG \cdots \textcircled{2}$

対頂角は等しいから $\angle AME = \angle BMG \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle MEA \equiv \triangle MGB$$

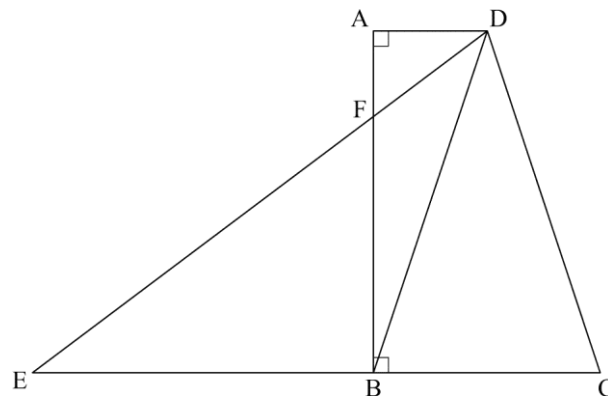
$\triangle DME$ において

$$\text{三平方の定理より } ED = \sqrt{4^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \text{ cm だから}$$

$$\triangle MGB = \triangle MEA = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{5\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^2$$

【問 9】

右図において、四角形 $ABCD$ は $AD \parallel BC$ の台形であり、 $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ 、 $AB = 6 \text{ cm}$ 、 $BC = 4 \text{ cm}$ 、 $AD = 2 \text{ cm}$ である。 D と B とを結ぶ。このとき、 $DB = DC$ である。 E は直線 BC 上にあつて B について C と反対側にある点であり、 $EB = 6 \text{ cm}$ である。 D と E とを結ぶ。 F は、線分 DE と辺 AB との交点である。



次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は、根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2018 年度 A)

問1 $\triangle DBC$ の内角 $\angle DCB$ の大きさを α° とするとき、 $\triangle DBC$ の内角 $\angle CDB$ の大きさを α を用いて表しなさい。

問2 辺 DC の長さを求めなさい。

問3 次は、 $\triangle FDA \sim \triangle FEB$ であることの証明である。 $\boxed{\text{㉑}}$ 、 $\boxed{\text{㉒}}$ に入れるのに適している「角を表す文字」をそれぞれ書きなさい。また、 $[\quad]$ から適しているものを一つ選び、記号を $\bigcirc$ で囲みなさい。

〔証 明〕

$\triangle FDA$ と $\triangle FEB$ において

対頂角は等しいから $\angle AFD = \angle \boxed{\text{㉑}} \cdots \text{㉓}$

$AD \parallel EC$ であり、平行線の錯角は等しいから

$\angle FDA = \angle \boxed{\text{㉒}} \cdots \text{㉔}$

㉓、㉔より、

〔ア 1 組の辺とその両端の角 イ 2 組の辺の比とその間の角 ウ 2 組の角〕

がそれぞれ等しいから

$\triangle FDA \sim \triangle FEB$

問4 四角形 $FBCD$ の面積を求めなさい。求め方も書くこと。

解答欄

問1	度	
問2	cm	
問3	㊶	
	㊷	
	[]	ア イ ウ
問4	[求め方] cm²	

解答

問1 $180 - 2a$ 度

問2 $2\sqrt{10}\text{cm}$

問3

㉖ BFE

㉗ FEB

[] ウ

問4

[求め方]

$\triangle FDA \sim \triangle FEB$ だから

$AF:BF=AD:BE=1:3$

よって $AF=\frac{1}{4}AB=\frac{3}{2}\text{cm}$

したがって四角形 FBCD の面積は

台形 ABCD $-\triangle FDA$

$$=\frac{1}{2} \times (2+4) \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2}$$

$$=\frac{33}{2}\text{cm}^2$$

$$\frac{33}{2}\text{cm}^2$$

解説

問1

$DB=DC$ より $\triangle DBC$ は二等辺三角形だから $\angle DBC = \angle DCB = a^\circ$

よって $\angle CDB = 180^\circ - (a^\circ + a^\circ) = 180^\circ - 2a^\circ$

問2

三平方の定理より

$$DB^2 = AD^2 + AB^2 = 4 + 36 = 40$$

$DB > 0$ より

$$DB = 2\sqrt{10}\text{cm}$$

よって $DC = DB = 2\sqrt{10}\text{cm}$

問3

$\triangle FDA$ と $\triangle FEB$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AFD = \angle BFE \cdots \text{①}$$

$AD \parallel EC$ より

平行線の錯角は等しいから

$$\angle FDA = \angle FEB \cdots \text{②}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle FDA \sim \triangle FEB$

問4

別解

$\triangle FDA \sim \triangle FEB$ より

$$FA:FB=AD:BE=2:6=1:3 \cdots \text{①}$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6\text{cm}^2 \text{ だから}$$

$$\text{①より} \triangle BDF = 6 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2}\text{cm}^2$$

$$\text{また} \triangle DBC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12\text{cm}^2 \text{ より}$$

$$\text{四角形 FBCD の面積} = \triangle BDF + \triangle DBC = \frac{9}{2} + 12 = \frac{33}{2}\text{cm}^2$$

【問 10】

図1, 図2において, 四角形 $ABCD$ は内角 $\angle ABC$ が鋭角の平行四辺形であり, $AB=5\text{ cm}$, $AD=6\text{ cm}$ である。四角形 $EFCD$ は $ED=2\text{ cm}$ の長方形であり, F は四角形 $ABCD$ の内部にある。 G は, 辺 EF と辺 AD との交点である。 H は, A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は, 根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2018 年度 B)

図1

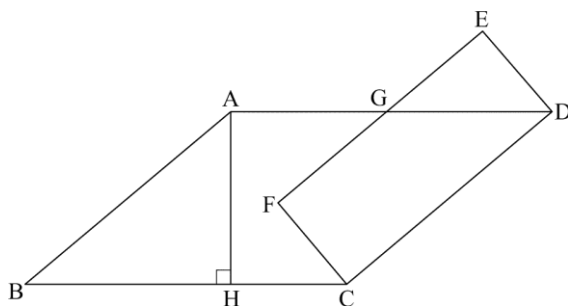
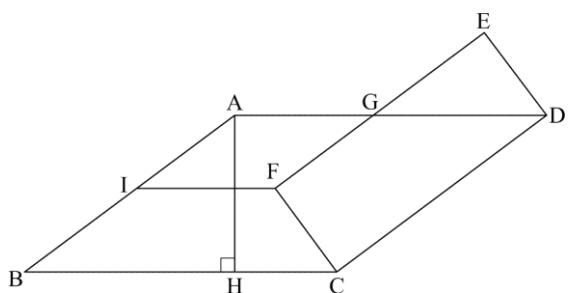


図2



問1 図1において,

(1) 長方形 $EFCD$ の対角線 DF の長さを求めなさい。

(2) $\triangle ABH \sim \triangle DGE$ であることを証明しなさい。

問2 図2において, $AH=3\text{ cm}$ である。このとき, F は直線 AH について B と反対側にある。 I は, F を通り辺 BC に平行な直線と辺 AB との交点である。

(1) 線分 GD の長さを求めなさい。

(2) 四角形 $IBCF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	〔証明〕
問2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

(1) $\sqrt{29}$ cm

(2)

〔証明〕

$\triangle ABH$ と $\triangle DGE$ において

$AH \perp BC$ だから $\angle AHB = 90^\circ \cdots \textcircled{ア}$

四角形 $EFCD$ は長方形だから

$\angle DEG = 90^\circ \cdots \textcircled{イ}$

$\textcircled{ア}$, $\textcircled{イ}$ より

$\angle AHB = \angle DEG \cdots \textcircled{ウ}$

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから

$\angle ABH = \angle GDC \cdots \textcircled{エ}$

$EF \parallel DC$ だから

$\angle DGE = \angle GDC$ (錯角) $\cdots \textcircled{オ}$

$\textcircled{エ}$, $\textcircled{オ}$ より

$\angle ABH = \angle DGE \textcircled{カ}$

$\textcircled{ウ}$, $\textcircled{カ}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABH \sim \triangle DGE$

問2

(1) $\frac{10}{3}$ cm

(2) $\frac{104}{15}$ cm^2

解説

問1

(1)

三平方の定理より $DF^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$ $DF > 0$ より $DF = \sqrt{29}$ cm

(2)

$\triangle ABH$ と $\triangle DGE$ において

$\angle AHB = \angle DEG = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

平行四辺形の向かいあう角は等しいから $\angle ABH = \angle CDG \cdots \textcircled{2}$

$EF \parallel DC$ より, 平行線の錯角は等しいから $\angle DGE = \angle CDG \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より $\angle ABH = \angle DGE \cdots \textcircled{4}$

よって $\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABH \sim \triangle DGE$

問2

(1)

$\triangle ABH \sim \triangle DGE$ より相似な図形の対応する辺の比は等しいから

$$AB:DG = AH:DE \quad 5:DG = 3:2 \quad DG = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

(2)

直線 AH と直線 IF の交点を J とする。

$$\text{三平方の定理より } GE^2 = DG^2 - DE^2 = \frac{100}{9} - 4 = \frac{64}{9}$$

$$GE > 0 \text{ より } GE = \frac{8}{3} \text{ cm} \quad EF = 5 \text{ cm} \text{ より } GF = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} \text{ cm}$$

$$\text{四角形 AIFG は平行四辺形だから } AI = GF = \frac{7}{3} \text{ cm, } IF = AG = AD - DG = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$\triangle AIJ \sim \triangle ABH \text{ より } AI:AB = AJ:AH \quad \frac{7}{3}:5 = AJ:3 \quad AJ = \frac{7}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって } JH = 3 - \frac{7}{5} = \frac{8}{5} \text{ cm}$$

$$\text{四角形 IBCF は台形だから面積は } \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{3} + 6 \right) \times \frac{8}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{26}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{104}{15} \text{ cm}^2$$

【問 11】

図1, 図2において, $\triangle ABC$ は $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 6 \text{ cm}$ の直角二等辺三角形である。D は, 辺 AC 上にあって A, C と異なる点である。E は直線 BD 上にあって D について B と反対側にある点であり, $BE = BA$ である。A と E とを結ぶ。F は, 線分 AE の中点である。B と F とを結ぶ。G は, 線分 BF と辺 AC との交点である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は, 根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2018 年度 C)

問1 図1において, $\triangle ABE$ の内角 $\angle ABE$ の大きさを α° とするとき, $\triangle ABG$ の内角 $\angle AGB$ の大きさを α を用いて表しなさい。

問2 図2において, $AG = GC$ である。C と E とを結ぶ。

(1) $\triangle BDG \sim \triangle EDC$ であることを証明しなさい。

(2) 線分 GF の長さを求めなさい。

(3) $\triangle ABD$ の面積を求めなさい。

図1

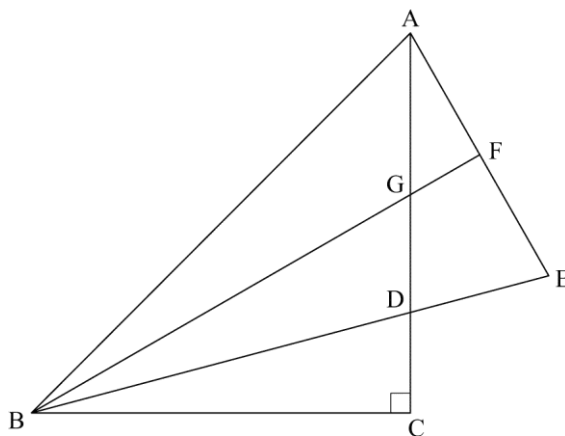
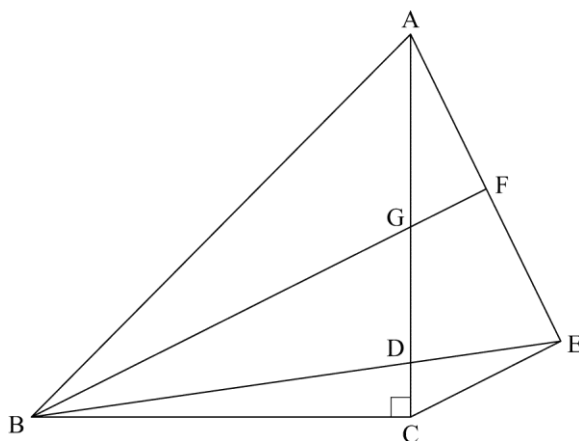


図2



解答欄

問1	度	
問2	(1)	〔証明〕
	(2)	cm
	(3)	cm ²

解答

問1 $135 - \frac{1}{2}a$ 度

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle BDG$ と $\triangle EDC$ において

対頂角は等しいから

$$\angle BDG = \angle EDC \cdots \textcircled{7}$$

$\triangle ACE$ において

G, F はそれぞれ辺 AC, AE の中点だから

$BF \parallel CE$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle BGD = \angle ECD \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDG \sim \triangle EDC$

$$(2) \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$(3) \frac{108}{7} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle ABE$ は二等辺三角形で $AF = FE$ より

線分 BF は $\angle ABE$ の二等分線であるから

$$\angle ABG = \frac{1}{2}a^\circ$$

また $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形だから $\angle BAG = 45^\circ$

$$\text{よって } \angle AGB = 180^\circ - 45^\circ - \frac{1}{2}a^\circ = 135^\circ - \frac{1}{2}a^\circ$$

問2

(1)

$\triangle BDG$ と $\triangle EDC$ において

対頂角は等しいから

$$\angle BDG = \angle EDC \cdots \textcircled{1}$$

$AF = FE$, $AG = GC$ だから

中点連結定理より $GF \parallel CE$

よって平行線の錯角は等しいから

$$\angle DBG = \angle DEC \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDG \sim \triangle EDC$

(2)

三平方の定理より $BG^2 = BC^2 + CG^2 = 36 + 9 = 45$ $BG > 0$ より $BG = 3\sqrt{5} \text{ cm}$

$\triangle AGF \sim \triangle BGC$ より

$$GF:GC = AG:BG \quad GF:3 = 3:3\sqrt{5} \quad GF = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

(3)

$$CE = 2GF = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm} \text{ で } \triangle BDG \sim \triangle EDC \text{ より } GD:CD = BG:EC = 3\sqrt{5}:\frac{6\sqrt{5}}{5} = 5:2$$

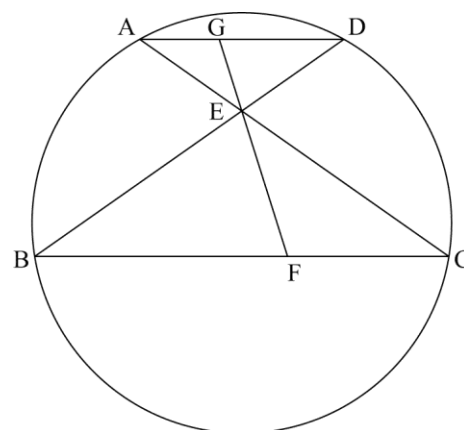
$$\text{よって } GD = \frac{5}{7} \times 3 = \frac{15}{7} \text{ cm} \text{ だから}$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times \left(3 + \frac{15}{7}\right) \times 6 = \frac{108}{7} \text{ cm}^2$$

【問 12】

右の図で、4 点 A, B, C, D は円周上にあり、 $AD \parallel BC$ で、点 E は直線 AC と直線 BD との交点である。点 F は線分 BC 上の点で $BE = BF$ であり、点 G は直線 EF と直線 AD との交点である。 $AD = 6 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$, $AC = 11 \text{ cm}$ のとき、各問いに答えよ。

(奈良県 2018 年度)



問1 $\triangle AEG \sim \triangle CEF$ を証明せよ。

問2 $\angle ECF = \alpha^\circ$ とするとき、 $\angle CEF$ の大きさを α を用いて表せ。

問3 線分 AB の長さを求めよ。

問4 $\triangle ABE$ の面積は $\triangle AEG$ の面積の何倍か。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2		
問3	cm	
問4	倍	

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AEG$ と $\triangle CEF$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AEG = \angle CEF \cdots \textcircled{1}$$

$AD \parallel BC$ より, 錯角は等しいから

$$\angle EAG = \angle ECF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AEG \sim \triangle CEF$$

$$\text{問2 } 90^\circ - \frac{3}{2}a^\circ$$

$$\text{問3 } 7\text{cm}$$

$$\text{問4 } \frac{36}{7}\text{倍}$$

解説

問1

対頂角が等しいことや平行線の錯角が等しいことなどを利用して2組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問2

$AD \parallel BC$ より, 錯角が等しいから $\angle DAC = \angle ACB$

$\widehat{DC}$ に対する円周角だから $\angle DAC = \angle DBC$

よって $\angle ACB = \angle DBC$ すなわち $\angle EBC = \angle ECB = a^\circ$

$\triangle BEC$ は $EB = EC$ の二等辺三角形で $\angle BEC = 180^\circ - a^\circ \times 2 = 180^\circ - 2a^\circ$

また $\triangle BEF$ は $BE = BF$ の二等辺三角形だから $\angle BEF = (180^\circ - a^\circ) \div 2 = 90^\circ - \frac{a^\circ}{2}$

よって $\angle CEF = \angle BEC - \angle BEF = 180^\circ - 2a^\circ - \left(90^\circ - \frac{a^\circ}{2}\right) = 90^\circ - \frac{3}{2}a^\circ$

問3

$\triangle ABC \cong \triangle DCB$ より

点 A, D から辺 BC に下ろした垂線をそれぞれ AH, DI とすると

$\triangle ABH \cong \triangle DCI$

$BH = CI$ より $BH = (12 - 6) \div 2 = 3\text{cm}$

$\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ で

三平方の定理より

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - 9$$

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 11^2 - (12 - 3)^2 = 121 - 81 = 40$$

よって $AB^2 - 9 = 40$ $AB^2 = 49$

$AB > 0$ より $AB = 7\text{cm}$

問4

$\triangle DEG$ は $\triangle BEF$ と相似な二等辺三角形だから $DG = DE = AE = \frac{11}{3}\text{cm}$

$$AG = AD - DG = 6 - \frac{11}{3} = \frac{7}{3}\text{cm}$$

$\triangle AEG$ と $\triangle AED$ はそれぞれ AG, AD を底辺とみたときの高さが等しいから

$$\triangle AEG : \triangle AED = AG : AD = \frac{7}{3} : 6 = 7 : 18$$

また $\triangle AED$ と $\triangle ABE$ は

それぞれ ED, BE を底辺とみたときの高さが等しいから

$$\triangle AED : \triangle ABE = ED : BE = AD : BC = 6 : 12 = 1 : 2 = 18 : 36$$

よって $\triangle AEG : \triangle ABE = 7 : 36$ だから

$\triangle ABE$ の面積は $\triangle AEG$ の面積の $\frac{36}{7}$ 倍

【問 13】

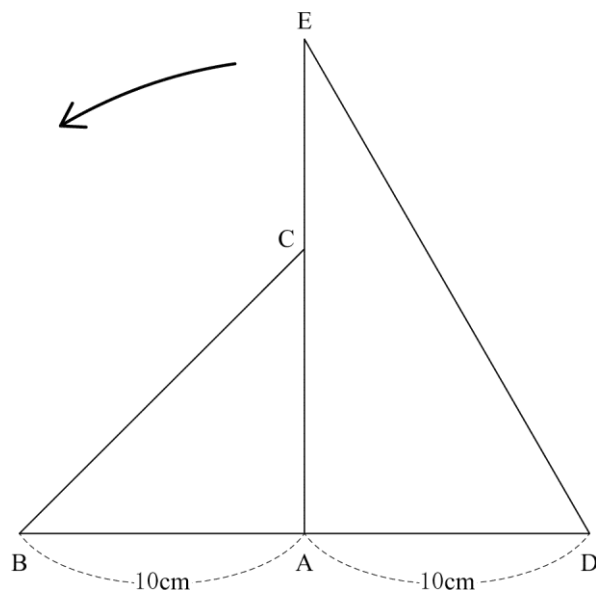
1組の三角定規のうち片方を忘れてしまったので、友達に忘れた方と同じ形の三角定規を貸してもらったら、2つの三角定規それぞれの最も短い辺の長さが等しいことがわかった。

図1のように、これらの三角定規を直角が隣り合うように置き、各頂点を A, B, C および A, D, E とする。 $\triangle ADE$ を点 A を中心として、点 D が点 C の位置にくるまで反時計回りに回転させていく。

$AB=AD=10\text{ cm}$ とするとき、次の問1～問3に答えなさい。

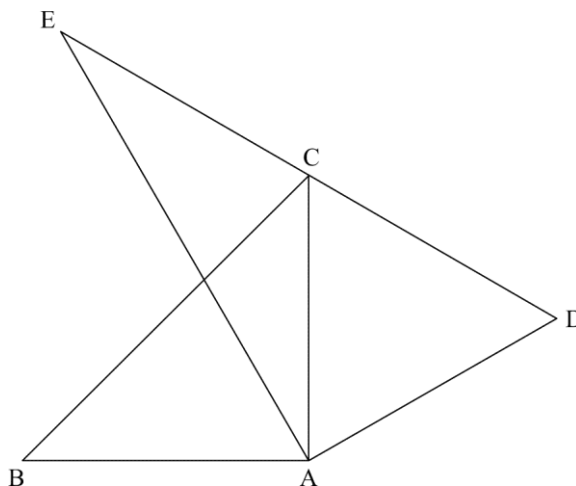
(島根県 2018 年度)

図1



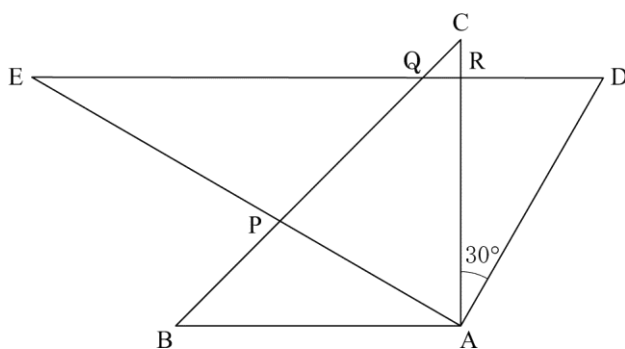
問1 図2のように、点 C が辺 DE 上にあるとき、 $\angle BCE$ の大きさを求めなさい。

図2

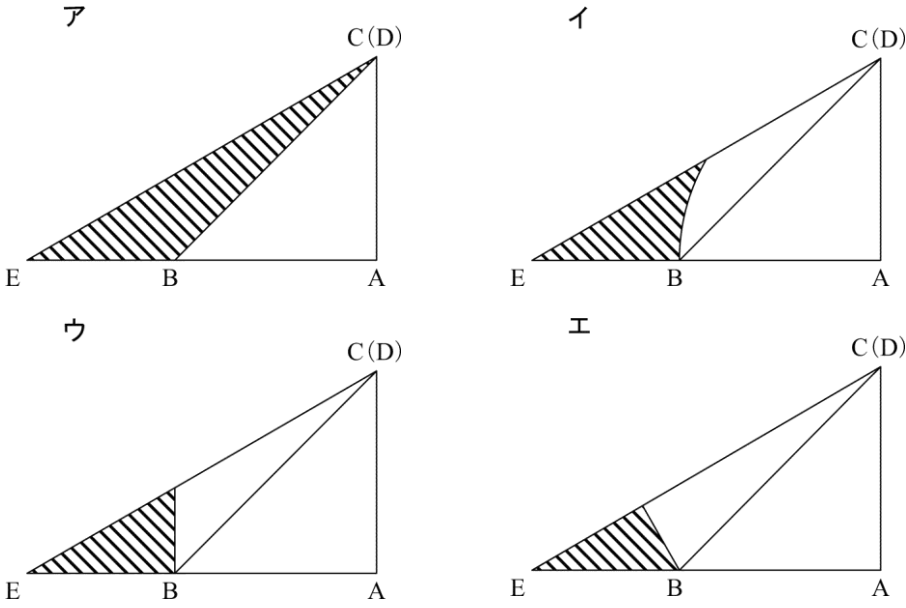


問2 図3のように、 $\angle DAC=30^\circ$ となるとき、辺 BC と辺 AE の交点を P 、辺 BC と辺 DE の交点を Q 、辺 AC と辺 DE の交点を R とする。 $\triangle ABP \sim \triangle EQP$ であることを証明しなさい。

図3



問3 図1の状態から点 D が点 C まで移動するあいだに, 2 つの三角定規が重ならない部分を斜線で表したものとして最も適当なものを次のア～エから 1 つ選び, 記号で答えなさい。また, その面積を求めなさい。



解答欄

問1	。	
問2	〔証明〕 △ABP と△EQP において △ABP≍△EQP	
問3	記号	
	面積	cm ²

解答

問1 75°

問2

〔証明〕

△ABPと△EQPにおいて

対頂角は等しいから

$$\angle APB = \angle EPQ \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle DAC = 30^\circ \text{ より } \angle PAC = 60^\circ$$

よって $\angle PAB = 90^\circ - \angle PAC = 30^\circ$ なので

$$\angle PAB = \angle PEQ = 30^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

△ABP ∽ △EQP

問3

記号 イ

$$\text{面積} \left(25\sqrt{3} - \frac{25}{3}\pi \right) \text{ cm}^2$$

解説

問1

△ADE は 30°, 60°, 90° の直角三角形で $AD < AE$, $\angle DAE = 90^\circ$ より $\angle ADE = 60^\circ$

△ABC は $\angle BAC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから $AB = AC$, $\angle ACB = 45^\circ$

よって $AD = AB = AC$ より △ADC は $AC = AD$ の二等辺三角形である。

したがって $\angle ACD = \angle ADC = 60^\circ$ だから $\angle BCE = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$

問2

△ABC と △ADE はどちらも「三角定規」の三角形であることに注意して角の大きさを証明に利用する。

△ABP と △EQP において

対頂角は等しいから $\angle APB = \angle EPQ \cdots \textcircled{1}$

$$\angle DAC = 30^\circ \text{ より } \angle PAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

よって $\angle PAB = 90^\circ - \angle PAC = 30^\circ$ なので $\angle PAB = \angle PEQ = 30^\circ \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

△ABP ∽ △EQP

問3

2つの三角定規が重ならない部分は

△ADE のうち線分 AC が通過しない部分と等しいので

右の図の斜線部のようになる。

その図形は △ADE から △ADF と おうぎ形 AFB を取り除いた図形である。

△ADE は 30°, 60°, 90° の直角三角形だから

$$AE = AD \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm より}$$

$$\triangle ADE = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 10 = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

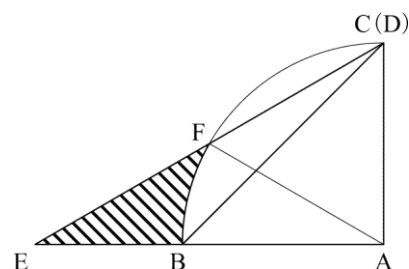
△ADF は $AD = AF$, $\angle ADF = 60^\circ$ より, 1 辺が 10cm の正三角形だから

$$\text{その面積は } \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

おうぎ形 AFB は中心角 30°, 半径 10cm だから

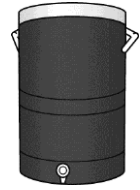
$$\text{その面積は } \pi \times 10^2 \times \frac{30}{360} = \frac{25}{3} \pi \text{ cm}^2$$

$$\text{したがって求める面積は } 50\sqrt{3} - 25\sqrt{3} - \frac{25}{3}\pi = 25\sqrt{3} - \frac{25}{3}\pi \text{ cm}^2$$



【問 14】

右の写真は、飲料水を入れる容器を示したものです。バレーボール部の部長の若菜さんと副部長の春香さんが、この写真を見ながら部室で話をしています。



若菜さん「部活動で使うために飲料水を入れる容器を買ってもらおうと思うんだけど、高さは 50 cm のものでいいかしら？」

春香さん「待って。使用する水道は、地面から蛇口まで 50 cm もないわ。高さが 50 cm の容器だと傾けないと水を入れることができないから、容器を傾けずに水を入れることができる 40 cm の高さの容器の方がいいと思うわ。」

若菜さん「どうして？ 傾けて水を入れることになっても、高さ 50 cm の容器の方が、一度にたくさんの水が入るからいいんじゃない？」

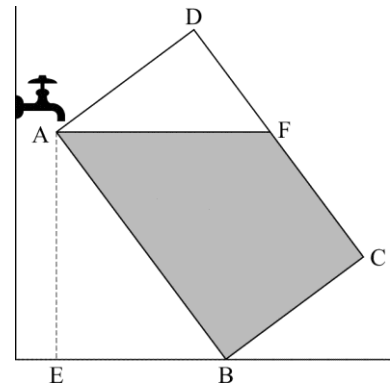
春香さん「そうかしら？ 高さ 50 cm の容器を傾けた状態でその容器に入る水の量が最大になるまで水を入れるよりも、高さ 40 cm の容器を傾けずに満水になるまで水を入れる方が、たくさん水が入る気がするけどな。」

若菜さん「どちらの方がたくさん水が入るのか、考えてみましょうよ。」

2 人は、容器の形を円柱とみなして考えることにしました。容器 a は底面の直径が 30 cm で高さが 50 cm の円柱、容器 b は底面の直径が 30 cm で高さが 40 cm の円柱とし、容器の厚さは考えないものとします。春香さんは、水平な地面に対して傾けた状態の容器 a に入る水の量が最大になったときの様子を真横から見た図とその説明を次のようにかきました。

【図と説明】

- ・四角形 $ABCD$ は、 $AB=50$ cm、 $AD=30$ cm の長方形で、点 B は水平な地面にある点である。
- ・点 A から地面に垂線 AE を引くと、 $AE=40$ cm である。
- ・点 F は辺 CD 上の点で、線分 AF は、地面に対して傾けた状態の容器 a に入る水の量が最大になったときの水面を表しており、 $AF \parallel EB$ である。



2 人は、【図と説明】の中の容器 a に入っている水の量と、水平な地面に傾けずに置いた容器 b に満水になるまで入れた水の量では、どちらの方が水の量が多いのかを考えることにしました。

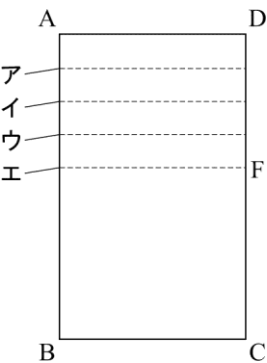
春香さん「容器 a と容器 b は底面積が等しいから、それぞれの容器の中の水の量を直接求めなくても水の量を比較できるわ。」

若菜さん「そうね。①【図と説明】の中の容器 a を水平な地面に置き直したときの地面から水面までの高さ、容器 b の地面から水面までの高さである 40 cm を比較すればいいわね。」

これについて、次の問1～問3に答えなさい。

問1 線分 BE の長さは何 cm ですか。

問2 右の図の長方形 ABCD は、【図と説明】の中の容器 *a* を水平な地面に置き直したものを表しています。点 F は【図と説明】における辺 CD 上の点です。ア～ウの破線は線分 DF を 4 等分した点から水平に引いた線分を、エの破線は点 F から水平に引いた線分を表しています。ア～エの中で、【図と説明】の中の容器 *a* を水平な地面に置き直したときの水面を表しているものはどれですか。その記号を書きなさい。



問3 下線部①について、若菜さんは、容器 *b* の方が容器 *a* よりも地面から水面までの高さが高くなると判断しました。そのように判断できるのはなぜですか。その理由を説明しなさい。ただし、 $\triangle AEB \sim \triangle ADF$ であることは証明せずに用いてよいものとします。

解答欄

問1	cm
問2	
問3	

解答

問1 30cm

問2 イ

問3

$\triangle AEB \sim \triangle ADF$ であることから

$$AE:AD=EB:DF$$

$$\text{よって } DF=22.5\text{cm}$$

したがって容器 a を水平な地面に置き直したときの地面から水面までの高さは

$$CF+\frac{DF}{2}=38.75\text{ cm であり}$$

容器 b の高さである 40 cm の方が高いから。

解説

問1

$\triangle AEB$ で

$$\angle AEB=90^\circ \text{ だから}$$

$$\text{三平方の定理より } EB^2=AB^2-AE^2=50^2-40^2=900$$

$EB>0$ だから

$$EB=\sqrt{900}=30\text{cm}$$

問2

右の図のように F から DA に平行な線をひいて AB との交点を G とする。

$\triangle AGF \cong \triangle FDA$ だから

$\triangle AGF$ の面積は長方形 $AGFD$ の面積の半分になる。

よって BC が地面に水平になるように容器 a を置き直すと

水面は DF の中点を通るから

水面を表す破線はイ

問3

$\triangle AEB \sim \triangle ADF$ より

$$AE:AD=EB:DF$$

$$40:30=30:DF$$

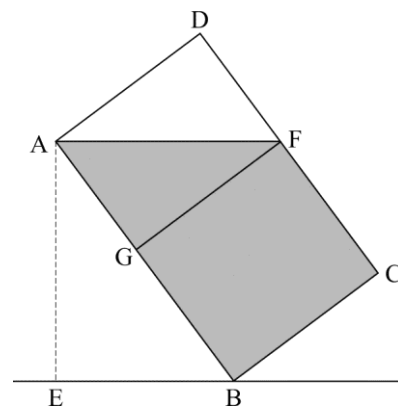
$$40DF=900$$

$$DF=22.5\text{cm}$$

$$\text{よって } CF=DC-DF=50-22.5=27.5\text{cm}$$

地面から水面までの高さは

$$CF+\frac{DF}{2}=27.5+11.25=38.75\text{cm}$$



【問 15】

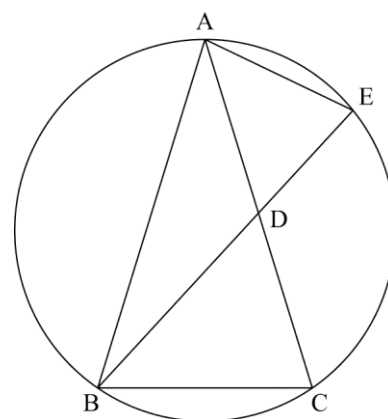
右の図のような円があり、異なる 3 点 A, B, C は円周上の点で、 $AB=AC$ である。線分 AC 上に 2 点 A, C と異なる点 D をとり、直線 BD と円との交点のうち、点 B と異なる点を E とする。また、点 A と点 E 、点 B と点 C をそれぞれ結ぶ。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(香川県 2018 年度)

問1 $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ であることを証明せよ。

問2 点 C と点 E を結ぶ。線分 BE 上に $EC=EF$ となる点 F をとり、直線 CF と円との交点のうち、点 C と異なる点を G とする。点 E と点 G を結ぶとき、 $\triangle ACE \equiv \triangle GEF$ であることを証明せよ。



解答欄

問1	〔証明〕
問2	〔証明〕

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ADE$ と $\triangle BDC$ において

対頂角は等しいから $\angle ADE = \angle BDC$

$\widehat{CE}$ に対する円周角は等しいから $\angle DAE = \angle DBC$

2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ADE \sim \triangle BDC$

問2

〔証明〕

$\triangle ACE$ と $\triangle GEF$ において仮定より, $CE = EF \cdots ①$

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから $\angle BAC = \angle FEC$

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから $\angle ACB = \angle ABC$

よって $\angle ACB = (180^\circ - \angle BAC) \div 2$

$\triangle EFC$ は二等辺三角形だから $\angle ECF = \angle EFC$

よって $\angle ECF = (180^\circ - \angle FEC) \div 2$

したがって $\angle ACB = \angle ECF \cdots ②$

$\angle BCG = \angle ACB - \angle ACG$, $\angle ACE = \angle ECF - \angle ACG$

②より $\angle BCG = \angle ACE$

$\widehat{BG}$ に対する円周角は等しいから $\angle BCG = \angle GEF$

よって $\angle ACE = \angle GEF \cdots ③$

また $\widehat{CE}$ に対する円周角は等しいから

$\angle CAE = \angle EGF \cdots ④$

$\angle AEC = 180^\circ - \angle ACE - \angle CAE$

$\angle GFE = 180^\circ - \angle GEF - \angle EGF$

③, ④より $\angle AEC = \angle GFE \cdots ⑤$

①, ③, ⑤より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから $\triangle ACE \equiv \triangle GEF$

解説

問1

$\triangle ADE$ と $\triangle BDC$ において

対頂角は等しいから $\angle ADE = \angle BDC \cdots (1)$

$\widehat{CE}$ に対する円周角は等しいから $\angle DAE = \angle DBC \cdots (2)$

(1), (2)より2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ADE \sim \triangle BDC$

問2

$\triangle ACE$ と $\triangle GEF$ において

仮定より $CE = EF \cdots ①$

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから $\angle BAC = \angle FEC$

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから $\angle ACB = \angle ABC$

よって $\angle ACB = (180^\circ - \angle BAC) \div 2$

$\triangle EFC$ は二等辺三角形だから $\angle ECF = \angle EFC$

よって $\angle ECF = (180^\circ - \angle FEC) \div 2$

したがって $\angle ACB = \angle ECF \cdots ②$

$\angle BCG = \angle ACB - \angle ACG$, $\angle ACE = \angle ECF - \angle ACG$

②より $\angle BCG = \angle ACE$

$\widehat{BG}$ に対する円周角は等しいから $\angle BCG = \angle GEF$

よって $\angle ACE = \angle GEF \cdots ③$

また $\widehat{CE}$ に対する円周角は等しいから $\angle CAE = \angle EGF \cdots ④$

$\angle AEC = 180^\circ - \angle ACE - \angle CAE$

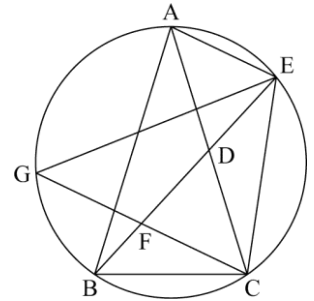
$\angle GFE = 180^\circ - \angle GEF - \angle EGF$

③, ④より $\angle AEC = \angle GFE \cdots ⑤$

①, ③, ⑤より

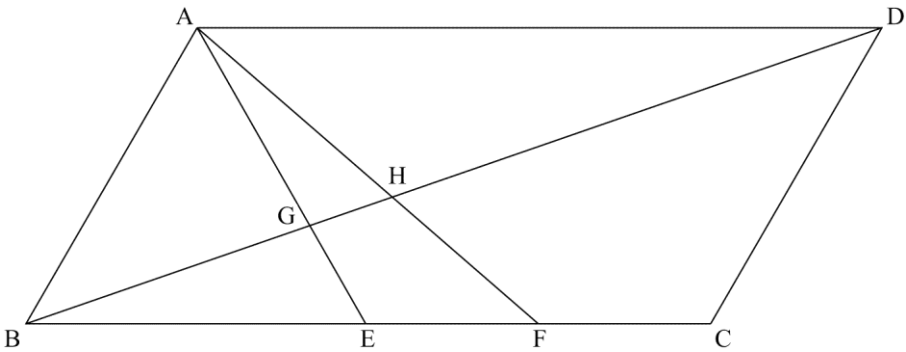
1組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACE \equiv \triangle GEF$



【問 16】

下の図のように、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$ 、 $\angle ABC=60^\circ$ の平行四辺形 $ABCD$ がある。辺 BC 上に点 E を、 $BE=4\text{ cm}$ となるようにとり、線分 EC 上に点 F を、 $\angle EAF=\angle ADB$ となるようにとる。また、線分 AE と対角線 BD との交点を G 、線分 AF と対角線 BD との交点を H とする。



このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2018 年度)

- 問1 $\triangle AEF \sim \triangle DAB$ であることを証明せよ。
- 問2 線分 AF の長さを求めよ。
- 問3 $\triangle AGH$ の面積を求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2		cm
問3		cm^2

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AEF$ と $\triangle DAB$ において

仮定より

$$\angle EAF = \angle ADB \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABE$ は正三角形だから

$$\angle AEF = 180^\circ - \angle AEB$$

$$= 180^\circ - 60^\circ$$

$$= 120^\circ \cdots \textcircled{2}$$

四角形 $ABCD$ は $\angle ABC = 60^\circ$ の平行四辺形だから

$$\angle DAB = 120^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle AEF = \angle DAB \cdots \textcircled{4}$$

①, ④で2つの三角形は

2組の角がそれぞれ等しいことがいえたから

$\triangle AEF \sim \triangle DAB$

問2 $2\sqrt{7}$ cm

問3 $\frac{16\sqrt{3}}{21}$ cm²

解説

問1

$\triangle AEF$ と $\triangle DAB$ において

仮定より $\angle EAF = \angle ADB \cdots \textcircled{1}$

$\angle ABE = 60^\circ$, $AB = BE$ より $\triangle ABE$ は正三角形だから $\angle AEF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \cdots \textcircled{2}$

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから $2(\angle DAB + \angle ABC) = 360^\circ$ より, $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$

よって $\angle DAB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \cdots \textcircled{3}$

②, ③より $\angle AEF = \angle DAB \cdots \textcircled{4}$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AEF \sim \triangle DAB$

問2

辺 BC を点 C の方に延長した直線に点 D から垂線を下ろしその直線との交点を I とする。

$\triangle DCI$ は3つの角が 30° , 60° , 90° の直角三角形だから

辺の比は $DC : CI : DI = 2 : 1 : \sqrt{3}$

よって $CI = 2\text{cm}$, $DI = 2\sqrt{3}\text{cm}$

$\triangle DBI$ は直角三角形だから

三平方の定理より $DB^2 = 10^2 + (2\sqrt{3})^2 = 112$ $DB > 0$ より $DB = 4\sqrt{7}\text{cm}$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$$AE : DA = AF : DB$$

$$4 : 8 = AF : 4\sqrt{7}$$

$$\text{したがって } AF = 2\sqrt{7}\text{cm}$$

問3

平行四辺形 $ABCD$ の面積は $8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\text{cm}^2$

$\triangle BEG \sim \triangle DAG$ より $BG : DG = BE : DA = 4 : 8 = 1 : 2 = 7 : 14 \cdots \textcircled{1}$

$\triangle AEF \sim \triangle DAB$ より $EF : AB = AE : DA$ $EF : 4 = 4 : 8$

よって $EF = 2\text{cm}$

また $\triangle BFH \sim \triangle DAH$ より $BH : DH = BF : DA = 6 : 8 = 3 : 4 = 9 : 12 \cdots \textcircled{2}$

①, ②より $BG : GH : HD = 7 : 2 : 12$

$$\text{したがって } \triangle AGH = \frac{1}{2} \times \frac{2}{21} \times \text{平行四辺形 } ABCD \text{ の面積} = \frac{16\sqrt{3}}{21}\text{cm}^2$$

【問 17】

$BC=6\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ がある。図1のように、点 A と異なる点 D を、 $AC=DB$ 、 $\angle ACB=\angle DBC$ となるようにとり、点 B と点 D 、点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。

次の問1～問3に答えよ。

(福岡県 2018 年度)

問1 図1において、次のように、 $\angle BAC=\angle CDB$ であることを証明した。

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において

共通な辺だから

$BC=CB\cdots\textcircled{1}$

仮定から

$AC=DB\cdots\textcircled{2}$

$\angle ACB=\angle DBC\cdots\textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より

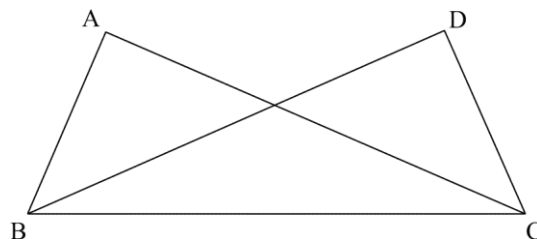
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC\equiv\triangle DCB$

合同な図形の対応する角は等しいから

$\angle BAC=\angle CDB$

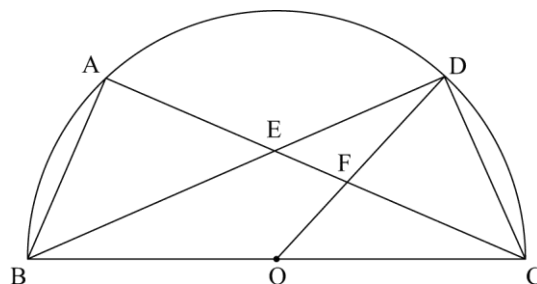
図1



証明の中で示した $\triangle ABC\equiv\triangle DCB$ であることから、 $\angle BAC=\angle CDB$ のほかに、 $\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ の辺や角の関係について新たにわかることが 2 組ある。新たにわかる辺や角の関係を、記号 $=$ を使って答えよ。

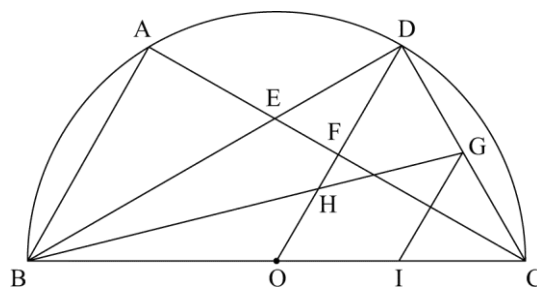
問2 図2は、図1において、線分 BC の中点を O とし、点 A 、 D が、線分 BC を直径とする半円 O の $\widehat{BC}$ 上にある場合を表しており、線分 AC と線分 BD 、 OD との交点をそれぞれ E 、 F としたものである。
このとき、 $\triangle OCF\cong\triangle EDF$ であることを証明せよ。

図2



問3 図3は、図2において、 $\widehat{AB}=\widehat{AD}$ となる場合を表しており、線分 CD の中点を G とし、線分 BG と線分 OD との交点を H 、点 G を通り線分 AB に平行な直線と線分 BC との交点を I としたものである。
このとき、四角形 $OIGH$ の面積を求めよ。

図3



解答欄

問1	
問2	〔証明〕
問3	cm^2

解答

問1

$$AB=DC$$

$$\angle ABC = \angle DCB$$

問2

〔証明〕

$\triangle OCF$ と $\triangle EDF$ において

対頂角は等しいから

$$\angle OFC = \angle EFD \cdots \textcircled{1}$$

仮定から

$$\angle ACB = \angle DBC \cdots \textcircled{2}$$

$OB=OD$ より $\triangle ODB$ は二等辺三角形だから

$$\angle DBC = \angle FDE \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle ACB = \angle FDE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle OCF \sim \triangle EDF$$

$$\text{問3 } \frac{15\sqrt{3}}{16} \text{ cm}^2$$

解説

問1

「新たにわかる辺や角の関係」とあるので

証明で根拠となる事がらとして使われている関係や、すでに示されている $\angle BAC = \angle CDB$ を除いて考える。

$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ で合同な図形の対応する辺は等しいから $AB=DC$ であることと

合同な図形の対応する角は等しいから $\angle ABC = \angle DCB$ であることがいえる。

問2

OB と OD はともに半円 O の半径なのでその長さは等しくなる。

よって $\triangle OBD$ は $OB=OD$ の二等辺三角形となり

その底角と考えると $\angle DBC = \angle FDE$ となることがわかる。

問3

$$\angle ACB = \angle DBC \text{ だから } \widehat{AB} = \widehat{DC} \text{ また, } \widehat{AB} = \widehat{AD} \text{ だから } \widehat{AB} = \widehat{AD}$$

$$\text{したがって } \widehat{AB} = \widehat{AD} = \widehat{DC}$$

$$\text{よって } \angle COD = 180^\circ \div 3 = 60^\circ \text{ だから円周角の定理より } \angle DBC = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$$

半円の弧に対する円周角は 90° だから $\angle BDC = 90^\circ$ なので $\triangle BCD$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形である。

$$\text{よって } DC = BC \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3\text{cm}, BD = DC \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{したがって } \triangle BCD = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

$$\text{線分 } CD \text{ の中点が } G \text{ であることより } CG:GD=1:1 \text{ だから } \triangle BCG = \triangle BCD \times \frac{1}{1+1} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

$$\angle ABC = \angle DOC = 60^\circ \text{ より同位角が等しいので } AB \parallel DO$$

また $AB \parallel GI$ だから $DO \parallel GI$ なので

$$\triangle OCD \text{ において三角形と比の定理より } CI:IO = CG:GD = 1:1$$

$$\text{よって } BI:IC = 3:1 \text{ だから } \triangle BIG = \triangle BCG \times \frac{3}{3+1} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{16} \text{ cm}^2$$

$\triangle BIG$ と $\triangle BOH$ において $DO \parallel GI$ より平行線の同位角は等しいから $\angle BIG = \angle BOH, \angle BGI = \angle BHO$ より
2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle BIG \sim \triangle BOH$ であり、相似比は、2:3

$$\text{したがって } \triangle BOH = \triangle BIG \times \frac{2^2}{3^2} = \frac{27\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 \text{ だから}$$

$$\text{四角形 } OIGH \text{ の面積は } \triangle BIG - \triangle BOH = \frac{27\sqrt{3}}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{16} \text{ cm}^2$$

【問 18】

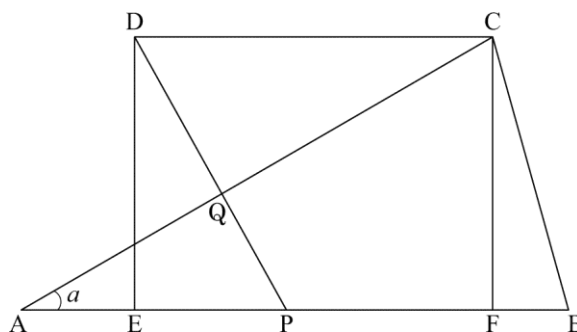
図のように、 $AB=AC$ 、 $\angle CAB=\angle a$ である二等辺三角形 ABC と、辺 EF が線分 AB 上にある長方形 $DEFC$ がある。辺 EF 上に点 P をとり、線分 DP と辺 AC の交点を Q とする。

このとき、次の問1～問4に答えなさい。

(佐賀県 2018 年度 特色)

問1 $\triangle APQ \sim \triangle CDQ$ であることを証明しなさい。

問2 $\angle BCF$ の大きさを $\angle a$ を用いて表しなさい。



問3 $CD=CQ$ のとき、四角形 $DPBC$ が平行四辺形となることを、次のように証明した。

[証明]の(ア)～(エ)にあてはまるものを、下の①～⑫の中からそれぞれ1つずつ選び、番号を書きなさい。

[証明]

四角形 $DEFC$ は長方形なので、
 $DC \parallel EF$ すなわち $DC \parallel PB \cdots (i)$
 また、 $\triangle APQ \sim \triangle CDQ$ より、対応する辺の比は等しいので、
 $AP:CD=AQ:CQ$ が成り立つ。
 ここで、仮定より $CD=CQ$ であるので、 $(ア)$ が成り立つ。
 $\angle QAP=\angle a$ だから、 $\angle APQ=(イ)=\angle ABC$ であり、
 このことは、 $(ウ)$ が等しいことを示しているので、
 $QP \parallel CB$ すなわち $DP \parallel CB \cdots (ii)$
 したがって、 (i) と (ii) から、
 四角形 $DPBC$ は $(エ)$ ので、平行四辺形である。

- ① $AP=AQ$ ② $QP=QD$ ③ $AB=CD$
- ④ $180^\circ - \angle a$ ⑤ $90^\circ - \frac{1}{2}\angle a$ ⑥ $45^\circ + \frac{1}{2}\angle a$
- ⑦ 対頂角⑧同位角⑨錯角
- ⑩ 2組の向かいあう辺が、それぞれ平行である
- ⑪ 2組の向かいあう角が、それぞれ等しい
- ⑫ 1組の向かいあう辺が、等しくて平行である

問4 $CD=CQ$ 、 $AP:DC=1:2$ 、 $DA=CB$ であるとき、 $\triangle APQ$ の面積を S_1 、四角形 $QPFC$ の面積を S_2 とする。

$S_1:S_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1		
問2	$\angle BCF =$	
問3	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
	(エ)	
問4	$S_1:S_2 = \quad :$	

解答

問1

$\triangle APQ$ と $\triangle CDQ$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AQP = \angle CQD \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle QAP = \angle QCD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角が, それぞれ等しいので

$$\triangle APQ \sim \triangle CDQ$$

$$\text{問2 } \angle BCF = \frac{1}{2} \angle a$$

問3

(ア) ①

(イ) ⑤

(ウ) ⑧

(エ) ⑩

$$\text{問4 } S_1 : S_2 = 2 : 13$$

解説

問1

$\triangle APQ$ と $\triangle CDQ$ で対頂角は等しいから $\angle AQP = \angle CQD \cdots \textcircled{1}$

平行線の錯角は等しいから $\angle APQ = \angle CDQ \cdots \textcircled{2}$

①, ②より2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle APQ \sim \triangle CDQ$

問2

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから $\angle ABC = \angle ACB$

$$\text{よって } \angle ABC = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle a) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle a$$

$$\text{また } \angle CFB = 90^\circ \text{ より } \angle BCF = 180^\circ - (\angle CFB + \angle CBF) = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{1}{2} \angle a \right) = \frac{1}{2} \angle a$$

問3

(ア) $AP : CD = AQ : CQ$ より, $AP \times CQ = CD \times AQ$ で, 仮定より, $CD = CQ$ だから $AP = AQ$

$$(イ) \angle ABC = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle a) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle a$$

(ウ) $\angle APQ$ と $\angle ABC$ は同位角である。

(エ) $DC \parallel PB$, $DP \parallel CB$ より2組の向かいあう辺がそれぞれ平行である。

問4

問3より $CD = CQ$ のとき四角形 $DPBC$ は平行四辺形である。

よって四角形 $DPBC$ と長方形 $DEFC$ の面積は等しい。

問1より $\triangle APQ \sim \triangle CDQ$ で $AP : DC = 1 : 2$ だから

$$\triangle APQ : \triangle CDQ = 1^2 : 2^2 = 1 : 4 \cdots \textcircled{1}$$

問3(ア)より $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ であり

$$\text{また } DC = PB \text{ より } AP : AB = 1 : 3 \text{ であることから } \triangle APQ : \triangle ABC = 1^2 : 3^2 = 1 : 9 \cdots \textcircled{2}$$

$DA = CB$ より $\triangle CFB \equiv \triangle DEA$ で

また $\triangle CFB \equiv \triangle DEP$ であるから $\triangle DEA \equiv \triangle DEP$

合同な三角形の対応する辺は等しいから $EA = EP$

$$\text{よって } EP : DC = 1 : 4 \cdots \textcircled{3}$$

①, ②より $\triangle APQ : \text{平行四辺形 } DPBC \text{ の面積} = 1 : 12$

③より $\triangle DEP : \text{長方形 } DEFC \text{ の面積} = 1 : 8$

したがって $\triangle APQ : \triangle DEP = 2 : 3$ だから $\triangle APQ : \triangle CFB = 2 : 3 \cdots \textcircled{4}$

$$\text{②, ④より } S_1 : S_2 = 2 : (16 - 3) = 2 : 13$$

図1, 図2のように, 1 辺の長さが 8 cm の正方形 ABCD がある。辺 BC 上に $BE=2$ cm となる点 E をとり, 線分 DE の延長と辺 AB の延長との交点を F とする。このとき, 次の問いに答えなさい。

問1 台形 ABED の面積は何 cm^2 か。

問3 線分 BF の長さは何 cm か。

The diagram shows a square $ABCD$ with side length 8 cm . A line segment DF is drawn from vertex D to a point F on the extension of side AB . Point E is the intersection of DF and side BC . The segment BE is labeled 2 cm . A dashed arc indicates the side length AD is 8 cm .

問1	cm ²	
問2		
問3	cm	
問4	四角形 APQD と四角形 BEQP の面積の比は :	

解答

問1 40cm^2

問2

$\triangle BFE$ と $\triangle CDE$ において

$\angle FBE = \angle DCE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$\angle EFB = \angle EDC$ (平行線の錯角) $\cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BFE \sim \triangle CDE$

問3 $\frac{8}{3} \text{ cm}$

問4 四角形 $APQD$ と四角形 $BEQP$ の面積の比は $4:1$

解説

問1

求める面積は $\frac{1}{2} \times (2+8) \times 8 = 40\text{cm}^2$

問2

$\triangle BFE$ と $\triangle CDE$ について

対頂角は等しいから $\angle BEF = \angle CED \cdots \textcircled{1}$

平行線の錯角は等しいから $\angle BFE = \angle CDE \cdots \textcircled{2}$

よって①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BFE \sim \triangle CDE$

問3

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$BF:CD = BE:CE$ $BF:8 = 2:6$ $BF = \frac{8}{3}\text{cm}$

問4

$\triangle CDE$ について

三平方の定理より $DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10\text{cm}$

$\triangle DAP$ と $\triangle DQP$ について

$\angle DAP = \angle DQP = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

共通な辺より $DP = DP \cdots \textcircled{2}$

仮定より $DA = DQ \cdots \textcircled{3}$

よって

斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから

$\triangle DAP \cong \triangle DQP$

合同な三角形の対応する辺の長さは等しいから

$AP = QP$

$PQ = x \text{ cm}$ とおくと

四角形 $APQD$ の面積は $\frac{1}{2} \times x \times 8 \times 2 = 8x \text{ cm}^2$

$\triangle PBE$ と $\triangle PQE$ について

上と同様に $\triangle PBE \cong \triangle PQE$ が示せる。

合同な三角形の対応する辺の長さは等しいから

$PB = PQ$

したがって四角形 $BEQP$ の面積は $\frac{1}{2} \times 2 \times x \times 2 = 2x \text{ cm}^2$ だから

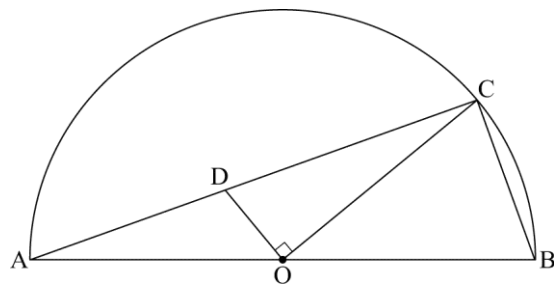
四角形 $APQD$ の面積: 四角形 $BEQP$ の面積 $= 8x:2x = 4:1$

【問 20】

右の図は、線分 AB を直径とする半円で、点 O は AB の中点である。 $\widehat{AB}$ 上に点 C を、 $\widehat{AC}$ の長さが $\widehat{BC}$ の長さより長くなるようにとる。点 D は線分 AC 上にあつて、 $DO \perp OC$ である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2018 年度)



問1 $\triangle ABC \sim \triangle CDO$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=6\text{ cm}$, $BC=2\text{ cm}$ のとき、

(1) 線分 CD の長さを求めなさい。

(2) $\triangle AOD$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle CDO$ において

$\triangle OAC$ は $OA=OC$ の二等辺三角形だから

$$\angle BAC = \angle DCO \cdots \textcircled{1}$$

AB は半円の直径だから

$$\angle ACB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

一方 $DO \perp OC$ だから

$$\angle COD = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle ACB = \angle COD \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle CDO$$

問2

$$(1) \frac{9\sqrt{2}}{4} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{7\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2$$

解説

問1

半円の弧に対する円周角は 90° になることなどを利用して 2組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問2

(1)

$\triangle ABC$ で

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 2^2 = 32$$

$AC > 0$ だから

$$AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

問1より $\triangle ABC \sim \triangle CDO$ だから $AB:CD = AC:CO$

$$6:CD = 4\sqrt{2}:3$$

$$4\sqrt{2}CD = 18$$

$$CD = \frac{18}{4\sqrt{2}} = \frac{9 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \text{ cm}$$

(2)

$$AC:DC = 4\sqrt{2}:\frac{9\sqrt{2}}{4} = 16:9$$

$$\text{よって } AD:AC = (16-9):16 = 7:16$$

$\triangle AOD$ と $\triangle AOC$ は

それぞれ AD, AC を底辺とみたときの高さが等しいから

$$\text{面積の比は } AD:AC \text{ で } \triangle AOD = \frac{7}{16} \triangle AOC$$

ここで $AO=OB$ より $\triangle AOC = \triangle OBC$ だから

$$\triangle AOC = \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2 \right) = 2\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$\text{よって } \triangle AOD = \frac{7}{16} \triangle AOC = \frac{7}{16} \times 2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2$$

【問 21】

右の図は、点 O を中心とする円で、線分 AB は円の直径である。四角形 $OACD$ は、線分 OA を 1 辺とする正方形で、点 C は円の外部にあり、点 D は $\widehat{AB}$ 上にある。また、 D を含まない $\widehat{AB}$ 上に点 E をとり、線分 AB と線分 EC 、線分 ED との交点をそれぞれ F , G とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

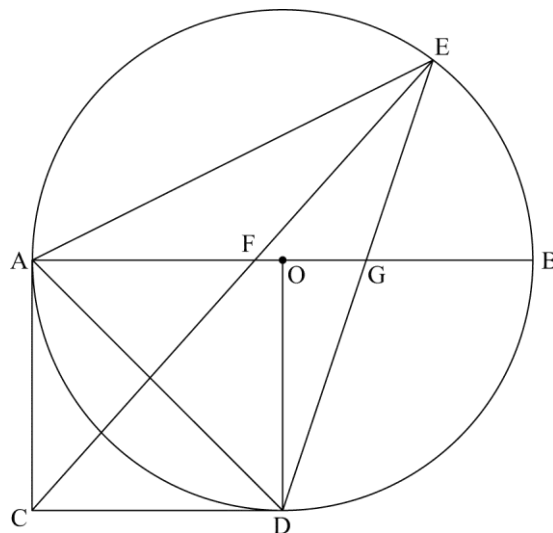
(熊本県 2018 年度)

問1 $\triangle EAD \sim \triangle AGD$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=6\text{ cm}$, $BG=2\text{ cm}$ のとき、

(1) 線分 ED の長さを求めなさい。

(2) $\triangle AFE$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1			
問2	(1)	cm	
	(2)	cm ²	

解答

問1

〔証明〕

$\triangle EAD$ と $\triangle AGD$ において

2 つの三角形に共通な角だから

$$\angle ADE = \angle GDA \cdots \textcircled{1}$$

$\angle AED$ は $\widehat{AD}$ に対する円周角で $\angle AOD = 90^\circ$ だから

$$\angle AED = 45^\circ \cdots \textcircled{2}$$

一方四角形 $OACD$ は正方形で AD は対角線だから

$$\angle GAD = 45^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle AED = \angle GAD \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle EAD \sim \triangle AGD$$

問2

$$(1) \frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{16}{5} \text{ cm}^2$$

解説

問1

円周角の定理などを利用して 2 組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問2

(1)

$AB = 6\text{cm}$, $BG = 2\text{cm}$ より円 O の半径は 3cm で $OG = 3 - 2 = 1\text{cm}$

$$\triangle ODG \text{ で } GD^2 = OD^2 + OG^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$GD > 0 \text{ だから } GD = \sqrt{10}\text{cm}$$

また $\triangle OAD$ は直角二等辺三角形だから

$$AD = \sqrt{2}OD = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}\text{cm}$$

問1より

$$\triangle EAD \sim \triangle AGD \text{ だから } ED : AD = AD : GD$$

$$ED : 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} : \sqrt{10} \quad \sqrt{10}ED = 18$$

$$ED = \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{18 \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{18\sqrt{10}}{10} = \frac{9\sqrt{10}}{5}\text{cm}$$

(2)

$$GD = \sqrt{10}\text{cm}, ED = \frac{9\sqrt{10}}{5}\text{cm} \text{ より}$$

$$GD : ED = \sqrt{10} : \frac{9\sqrt{10}}{5} = 5 : 9$$

$$\text{よって } EG : GD = (9 - 5) : 5 = 4 : 5$$

E から AB に垂線 EH をひくと $EH \parallel OD$ だから

$$EH : DO = EG : DG \quad EH : 3 = 4 : 5$$

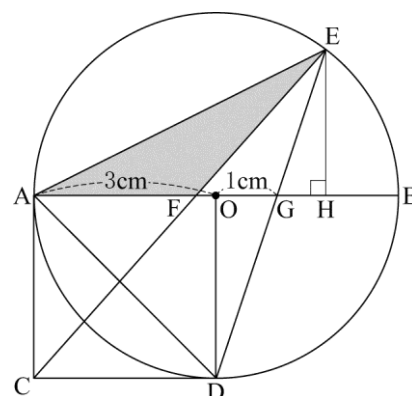
$$5EH = 12 \quad EH = \frac{12}{5}\text{cm}$$

また $\triangle ECD$ で

$$FG \parallel CD \text{ だから } FG : CD = EG : ED \quad FG : 3 = 4 : 9 \quad 9FG = 12 \quad FG = \frac{4}{3}\text{cm}$$

$$\text{よって } AF = AG - FG = (3 + 1) - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\text{cm}$$

$$\triangle AFE = \frac{1}{2} \times AF \times EH = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{16}{5}\text{cm}^2$$



【問 22】

1 辺の長さが 10 cm の正三角形 ABC があり, 辺 AB 上に $BD=3$ cm となる点 D がある。

図1

このとき, 次の問1, 問2に答えなさい。

(宮崎県 2018 年度)

問1 図1のように, 辺 AC 上に $BC \parallel DE$ となる点 E を, 辺 BC 上に $BF=5$ cm となる点 F をとる。

このとき, 次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) $\angle EDB$ の大きさを求めなさい。

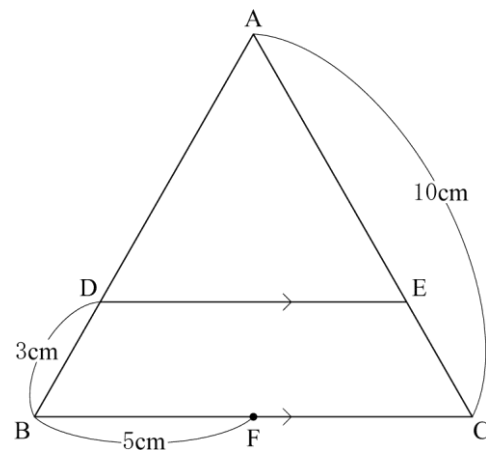
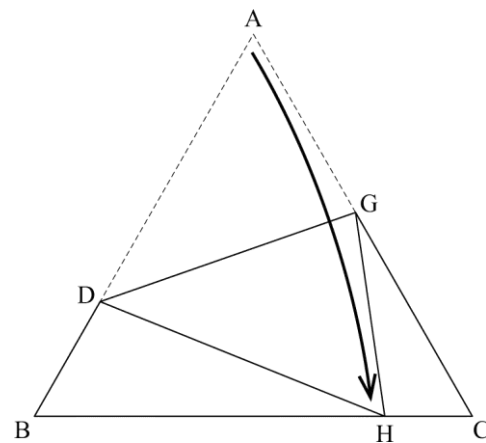


図2

(2) 四角形 ADFE の面積を求めなさい。

問2 図2は, 辺 AC 上に点 G をとり, 線分 DG を折り目として点 A が辺 BC 上にぴったり重なるように折ったものである。

この重なった点を H とするとき, 次の(1), (2)の問いに答えなさい。



(1) $\triangle DBH \sim \triangle HCG$ であることを, 次のように証明した。この【証明】を完成させなさい。

【証明】

$\triangle DBH$ と $\triangle HCG$ で,

$\triangle ABC$ は正三角形だから,

$\angle DBH = \angle HCG = 60^\circ$ ……①



(2) 線分 HC の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	$\angle EDB =$	度
	(2)		cm^2
問2	(1)	$\triangle DBH$ と $\triangle HCG$ で, $\triangle ABC$ は正三角形だから, $\angle DBH = \angle HCG = 60^\circ$ ……①	
	(2)	cm	

解答

問1

(1) $\angle EDB = 120^\circ$ 度

(2) $\frac{35\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

問2

(1)

$\triangle DBH$ と $\triangle HCG$ で

$\triangle ABC$ は正三角形だから

$\angle DBH = \angle HCG = 60^\circ \cdots \textcircled{1}$

$\triangle DBH$ で

$\angle BDH = 180^\circ - 60^\circ - \angle BHD$

$= 120^\circ - \angle BHD \cdots \textcircled{2}$

また、辺 BC 上の点 H で

$\angle CHG = 180^\circ - 60^\circ - \angle BHD$

$= 120^\circ - \angle BHD \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ から

$\angle BDH = \angle CHG \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ から

2組の角が、それぞれ等しいので

$\triangle DBH \sim \triangle HCG$

(2) 2cm

解説

問1

(1)

平行線の同位角は等しいから $\angle ADE = \angle ABC = 60^\circ$

よって $\angle EDB = 180^\circ - \angle ADE = 120^\circ$

(2)

$\triangle ABF$ は3つの内角が 90° , 30° , 60° の直角三角形だから $BF:AF = 1:\sqrt{3}$ $AF = 5\sqrt{3}\text{cm}$

$\triangle ADE$ は正方形だから $DE = AD = 10 - 3 = 7\text{cm}$

$AF \perp DE$ だから

四角形 $ADFE$ の面積は $\frac{1}{2} \times DE \times AF = \frac{1}{2} \times 7 \times 5\sqrt{3} = \frac{35\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

問2

(1)

$\triangle DBH$ において

$\angle BDH = 180^\circ - (60^\circ + \angle DHB) \cdots \textcircled{2}$

$\angle DHG = \angle DAG = 60^\circ$ より

$\angle CHG = 180^\circ - (60^\circ + \angle DHB) \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$\angle BDH = \angle CHG \cdots \textcircled{4}$

よって $\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle DBH \sim \triangle HCG$

(2)

点 D から BH に垂線をひき BH との交点を I とおく。

$\triangle DBI$ は3つの内角が 90° , 30° , 60° の直角三角形だから $BI = \frac{1}{2} DB = \frac{3}{2} \text{ cm}$, $DI = \sqrt{3}BI = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

$DH = AD = 7\text{cm}$ だから

$\triangle DHI$ において、三平方の定理より

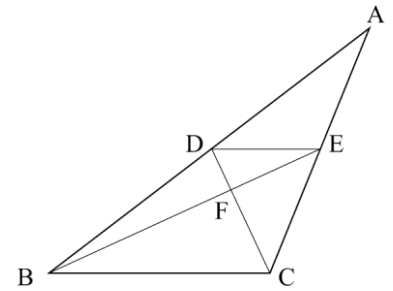
$HI = \sqrt{DH^2 - DI^2} = \sqrt{49 - \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2} \text{ cm}$

よって $HC = 10 - \frac{3}{2} - \frac{13}{2} = 2\text{cm}$

【問 23】

右の図は、 $\triangle ABC$ において、辺 AB 上に点 D を、辺 AC 上に点 E を $BC \parallel DE$ となるようにとり、線分 CD と線分 BE との交点を F としたものである。このとき、図の中には相似な三角形の組が複数ある。そのうちの 1 組を選び、それが相似であることを証明せよ。

(鹿児島県 2018 年度)



解答欄

(相似な三角形)	と
〔証明〕	

解答

(相似な三角形) $\triangle DEF$ と $\triangle CBF$

〔証明〕

$\triangle DEF$ と $\triangle CBF$ において

$BC \parallel DE$ より平行線の錯角は等しいから

$$\angle DEF = \angle CBF \cdots \text{①}$$

$$\angle EDF = \angle BCF \quad \text{②}$$

①, ②より 2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle DEF \sim \triangle CBF$$

解説

($\triangle DEF$ と $\triangle CBF$ が相似であることの証明)

$\triangle DEF$ と $\triangle CBF$ において

$BC \parallel DE$ より、平行線の錯角は等しいから

$$\angle DEF = \angle CBF \cdots \text{①} \quad \angle EDF = \angle BCF \cdots \text{②}$$

①, ②より 2 組の角がそれぞれ等しいから $\triangle DEF \sim \triangle CBF$

($\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ が相似であることの証明)

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において

$$\text{共通な角だから } \angle BAC = \angle DAE \cdots \text{③}$$

$$BC \parallel DE \text{ より、平行線の同位角は等しいから } \angle ABC = \angle ADE \cdots \text{④}$$

③, ④より 2 組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \sim \triangle ADE$