

9. 式の証明の問題（2008 年度出題）

【問 1】

a を一の位の数字が 0 でない 2 けたの自然数とし, b を a の十の位の数字と一の位の数字を入れかえた 2 けたの自然数とします。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(宮城県 2008 年度)

(1) $a=15$ のとき, $5a+4b$ の値を求めなさい。

(2) a の十の位の数字を x , 一の位の数字を y とします。ただし, x と y は 1 から 9 までの整数とします。

次の①, ②の問いに答えなさい。

① a と b を, それぞれ x と y を使った式で表しなさい。

② $5a+4b$ は 9 の倍数になります。そのわけを, ①で表した式を利用して説明しなさい。

解答欄

(1)			
(2)	①	$a=$	$b=$
	②	わけ	

解答

(1) 279

(2)

①

$$a=10x+y$$

$$b=10y+x$$

②

$$5a+4b$$

$$=5(10x+y)+4(10y+x)$$

$$=54x+45y$$

$$=9(6x+5y)$$

$6x+5y$ は整数だから

$9(6x+5y)$ は 9 の倍数である。

したがって $5a+4b$ は 9 の倍数になる。

【問 2】

a を一の位の数字が 0 でない 2 けたの自然数とし、 a の十の位の数字を x 、一の位の数字を y とします。 b を a の十の位の数字と一の位の数字を入れかえた 2 けたの自然数とします。ただし、 x と y は 1 から 9 までの整数とします。

次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(宮城県 2008 年度)

(1) $10a - b$ は 9 の倍数になります。そのわけを、文字式を使って説明しなさい。

(2) $10a - b = 792$ が成り立つ a の値のうち、もっとも大きい値を求めなさい。

解答欄

(1)	わけ
(2)	

解答

(1)

a は $10x + y$ 、 b は $10y + x$ と表されるから

$$10a - b$$

$$= 10(10x + y) - (10y + x)$$

$$= 100x + 10y - 10y - x$$

$$= 99x$$

$$= 9 \times 11x$$

$11x$ は整数だから

$9 \times 11x$ は 9 の倍数である。

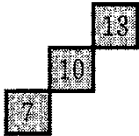
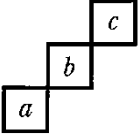
したがって $10a - b$ は 9 の倍数になる。

(2) 89

【問 3】

下の表は、自然数がある規則に従って並べたものの一部である。

1	5	9	13	17	21	25	29
2	6	10	14	18	22	26	30
3	7	11	15	19	23	27	31
4	8	12	16	20	24	28	32

表の中の  のような、3 つの自然数の組  について考える。

このとき、 $bc - a^2$ の値は 9 の倍数になることを、 a を用いて説明しなさい。

(栃木県 2008 年度)

解答欄

解答

$b=a+3$, $c=a+6$ と表すことができる。

よって

$$bc-a^2$$

$$=(a+3)(a+6)-a^2$$

$$=a^2+9a+18-a^2$$

$$=9a+18$$

$$=9(a+2)$$

$a+2$ は自然数だから

$9(a+2)$ は 9 の倍数である。

したがって $bc-a^2$ の値は 9 の倍数になる。

解説

b は a より 3 大きく

c は a より 6 大きくなっているので

$$b=a+3$$

$$c=a+6 \text{ とおける。}$$

$$bc-a^2$$

$$=(a+3)(a+6)-a^2$$

$$=a^2+9a+18-a^2$$

$$=9a+18$$

$$=9(a+2)$$

$a+2$ は整数だから

$9(a+2)$ は 9 の倍数である。

よって $bc-a^2$ は 9 の倍数である。

【問 4】

ある中学校の数学の授業で、S さんがつくった問題を皆で考えた。次の各問に答えよ。

(東京都 2008 年度)

S さんがつくった問題

連続する 3 つの自然数を考え、小さい方から順に 2 つの自然数の和を求める式を左辺、残りの 1 つの自然数を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 1 番目の等式とする。

次に、1 番目の等式の左辺と右辺の自然数の個数が 1 つずつ増えるように、連続する 5 つの自然数を考え、小さい方から順に 3 つの自然数の和を求める式を左辺、残りの 2 つの自然数の和を求める式を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 2 番目の等式とする。

さらに、2 番目の等式の左辺と右辺の自然数の個数が 1 つずつ増えるように、連続する 7 つの自然数を考え、小さい方から順に 4 つの自然数の和を求める式を左辺、残りの 3 つの自然数の和を求める式を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 3 番目の等式とする。

このとき、1 番目の等式、2 番目の等式、3 番目の等式は次のようになる。

$$1+2=3 \quad \cdots 1 \text{ 番目の等式}$$

$$4+5+6=7+8 \quad \cdots 2 \text{ 番目の等式}$$

$$9+10+11+12=13+14+15 \quad \cdots 3 \text{ 番目の等式}$$

同様に、4 番目以降の等式をつくることができる。5 番目の等式をつくってみよう。

問1 [S さんがつくった問題]で、5 番目の等式において、連続する自然数のうち、もっとも小さい自然数と、もっとも大きい自然数をそれぞれ求めよ。

先生は、[S さんがつくった問題]をもとにして、次の問題をつくった。

先生がつくった問題

連続する 3 つの自然数を考え、小さい方から順に 2 つの自然数をそれぞれ 2 乗した和を求める式を左辺、残りの 1 つの自然数の 2 乗を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 1 番目の等式とする。1 番目の等式は $3^2+4^2=5^2$ となる。

次に、1 番目の等式の左辺と右辺の自然数の個数が 1 つずつ増えるように、連続する 5 つの自然数を考え、小さい方から順に 3 つの自然数をそれぞれ 2 乗した和を求める式を左辺、残りの 2 つの自然数をそれぞれ 2 乗した和を求める式を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 2 番目の等式とする。2 番目の等式をつくってみよう。

T さんは、[先生がつくった問題]で、2 番目の等式を次の形の式で表し、 $\square$ の中に連続する 5 つの自然数を当てはめた。T さんの答えは正しかった。

<T さんの答え> $\square^2 + \square^2 + \square^2 = \square^2 + \square^2$

問2 <T さんの答え>の $\square$ に当てはまる自然数のうちもっとも小さい自然数を求めよ。

ただし、もっとも小さい自然数を n とおき、解答欄には答えだけではなく、答えを求める過程がわかるように途中の式や計算なども書け。

解答欄

問1	もっとも小さい自然数	
	もっとも大きい自然数	
問2	もっとも小さい自然数を n とおくと, 答 もっとも小さい自然数	

解答

問1

もっとも小さい自然数 25

もつとも大きい自然数 35

問2

もっとも小さい自然数を n とおくと

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2$$

$$n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4=n^2+6n+9+n^2+8n+16$$

$$n^2 - 8n - 20 = 0$$

$$(n+2)(n-10)=0$$

$n=-2, n=10$

n は自然数だから $n=10$

したがってもっとも小さい自然数は 10 である。

答 もつとも小さい自然数 10

解説

問1

5 番目の等式では連続する 11 個の自然数で

小さいほうから順に 6 つの自然数を求める式が左辺

残りの 5 つの自然数の和を求める式が右辺となる。

連続する 11 個の自然数のうちもっとも小さい自然数を n とすると

5 番目の等式は

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = (n + 6) + (n + 7) + (n + 8) + (n + 9) + (n + 10)$$

$$6n + 15 = 5n + 40$$

$n=25$

よってもっとも小さい自然数は 25 、もっとも大きい自然数は $25+10=35$

【問 5】

数学の授業で、カレンダーを用いて、次の手順①～⑥で 4 つの数に○をつけ、○をつけたその数の和を調べる学習をした。

- ① カレンダーの日付の数のうち、縦、横に 4 つずつ並んでいる 16 個の数を枠で囲む。
- ② 枠の中のどれか 1 つの数に○をつける。
- ③ ○をつけた数を含む縦の列と横の列にある数で、○をつけた数以外のすべての数に×をつける。
- ④ 枠の中でまだ○や×がついていない数のうち、どれか 1 つの数に○をつける。
- ⑤ 新たに○をつけた数を含む縦の列と横の列にある数で、○や×のついていないすべての数に×をつける。
- ⑥ 枠の中のすべての数に○や×がつくまで、④、⑤をくり返す。

次の文は、その授業での先生と生徒の会話の一部である。

この会話を読み、あとの問1～問3に答えなさい。

(新潟県 2008 年度)

先生： 手順①で、図 1 のとおり、16 個の数を枠で囲むことにします。次に、各自で、手順②から⑥にしたがって、作業をしてください。4 つの数に○がつきましたね。○をつけた数の和を計算してください。

皆さんの答えは ア ですね。

友子： 先生、合っています。どうして○をつけた数を見ないのに、答えがわかったのですか。

香里： 私は友子さんとは違う数に○をつけましたが、答えは同じになりました。

先生： 実は、枠で囲む数のうち、一番左上の数がわかれば、○をつけた数を見なくても、その数の和がわかるのです。その理由を考えていきましょう。

例えば、図 1 の枠で囲んだ数を、図 2 のように、ます目の中に書くことにします。ます目の中に書かれた数は、どのような規則で並んでいますか。

陽子： それぞれの横の列では、右に 1 つ進むごとに 1 ずつ大きくなり、それぞれの縦の列では、下に 1 つ進むごとに イ ずつ大きくなっています。

図 1

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

図 2

2	3	4	5
9	10	11	12
16	17	18	19
23	24	25	26

先生：そうですね。枠で囲む数が変わったときにどうなるか、ます目の一番左上の数 n として調べてみましょう。

陽子さんの答えたことをもとにして考えると、図 3 のます目に入る数は、すべて n を使って表すことができますね。図 3 の一番左の縦の列に入る 4 つの数の和を A とするとき、 A を、 n を使って表すと、どうなりますか。

正行：一番左の縦の列に入る数を順に n を使って表し、その 4 つの数の和 A を求めると $A = \boxed{\text{ウ}}$ になります。

図 3

n			

先生：そうですね。次に、手順にしたがって○をつけた 4 つの数の和を B として、 A と B の関係を調べましょう。

図 3 の横の列ごとにみていくと、○をつけた数は、それぞれの横の列に 1 つずつありますね。4 つの横の列ごとに、それぞれ○をつけた数と、その列の一番左の数との差を調べると、 B は A を使って、 $B = \boxed{\text{エ}}$ と表せることがわかります。

健太：ということは、○をつけた 4 つの数の和 B は、枠の中の一番左上の数 n によって決まりますね。

先生：そのとおりです。さらに、○をつけた 4 つの数の和は、枠の中の一番左上の数と一番右下の数の和の 2 倍に等しくなります。

このことを使って、○をつけた数の和を言い当てたのです。

秀平：そうすれば○をつけた 4 つの数を見なくても、それらの和が簡単にわかりますね。

問1 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる数を、それぞれ答えなさい。

問2 $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる式を、それぞれ答えなさい。

問3 下線部分について、このことが成り立つことを、 n を用いて証明しなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	ウ	
	エ	
問3	証明	

解答

問1

ア 56

イ 7

問2

ウ $4n+42$

エ $A+6$

問3

$A=4n+42$, $B=A+6$ より

○をつけた4つの数の和 B は

$$B=(4n+42)+6=4n+48\cdots\textcircled{1}$$

枠の中の一番左上の数と一番右下の数の和の2倍は

$$\{n+(n+24)\}\times 2=(2n+24)\times 2$$

$$=4n+48\cdots\textcircled{2}$$

①, ②より

○をつけた4つの数の和は枠の中の一番左上の数と一番右下の数の和の2倍に等しい。

解説

問2

縦に並ぶ4つの数は上から順に n , $n+7$, $n+14$, $n+21$ と表せる。

よってその和 $A=n+(n+7)+(n+14)+(n+21)=4n+42$ ウ

○をつけた数は4つの横の列に1つずつあり

それは4つの縦の列に1つずつあるから○をつけた4つの数の和 $B=A+1+2+3=A+6$ エ

【問 6】

表 1 は、自然数を 1 から順に横に 5 つずつ書き並べていったものである。この表で、上から m 番目で左から n 番目の数を、 m, n を用いて表しなさい。

(静岡県 2008 年度)

表 1

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

解答欄

--

解答

$$5m + n - 5$$

解説

上から m 番目列の右端の数字は $5m$ と表せる。

その列の左から n 番目の数字は右端の数字より $5 - n$ 小さいから

$$5m - (5 - n)$$

$$= 5m + n - 5$$

【問 7】

「連続する 4 つの整数において、最も大きい整数と 2 番目に大きい整数の積から最も小さい整数と 2 番目に小さい整数の積をひいた数は、これらの連続する 4 つの整数の和に等しい」ことの証明を、文字を使って の中に完成せよ。

(福岡県 2008 年度)

解答欄

(証明)

だから、連続する 4 つの整数において、最も大きい整数と 2 番目に大きい整数の積から最も小さい整数と 2 番目に小さい整数の積をひいた数は、これらの連続する 4 つの整数の和に等しい。

解答

最も小さい整数を n とすると連続する 4 つの整数は $n, n+1, n+2, n+3$ である。

最も大きい整数と 2 番目に大きい整数の積から最も小さい整数と 2 番目に小さい整数の積をひいた数は

$$(n+3)(n+2) - n(n+1)$$

$$= n^2 + 5n + 6 - n^2 - n$$

$$= 4n + 6$$

連続する 4 つの整数の和は

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$$

である。

解説

連続する 4 つの整数を $n, n+1, n+2, n+3$ とすると

最も大きい整数と 2 番目に大きい整数の積から最も小さい整数と 2 番目に小さい整数の積をひくと

$$(n+3)(n+2) - n(n+1)$$

$$= n^2 + 5n + 6 - n^2 - n$$

$$= 4n + 6$$

4 つの整数の和は $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$

【問 8】

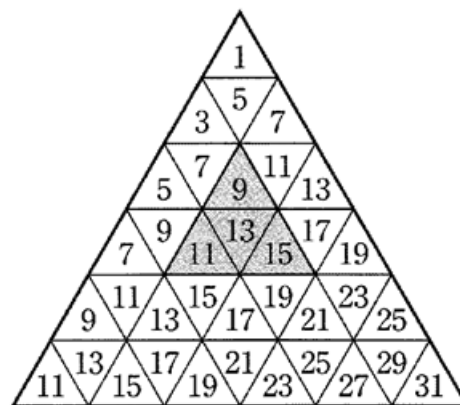
図は、奇数を、ある規則にしたがって、書き並べたものである。

図の中の  のように並んだ 4 つの奇数の組  について考える。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(宮崎県 2008 年度)

(1) $b+c+d$ を、 a を使った式で表しなさい。



(2) $cd-ab$ の値は、つねに 8 の倍数になることを証明しなさい。

解答欄

(1)	$b+c+d=$
(2)	証明

解答

(1) $b+c+d=3a+12$

(2)

証明

$b=a+2$, $c=a+4$, $d=a+6$ と表される。

$$cd-ab$$

$$=(a+4)(a+6)-a(a+2)$$

$$=a^2+10a+24-a^2-2a$$

$$=8a+24$$

$$=8(a+3)$$

ここで a は自然数より $a+3$ も自然数となる。

よって $cd-ab$ の値はつねに 8 の倍数になる。