

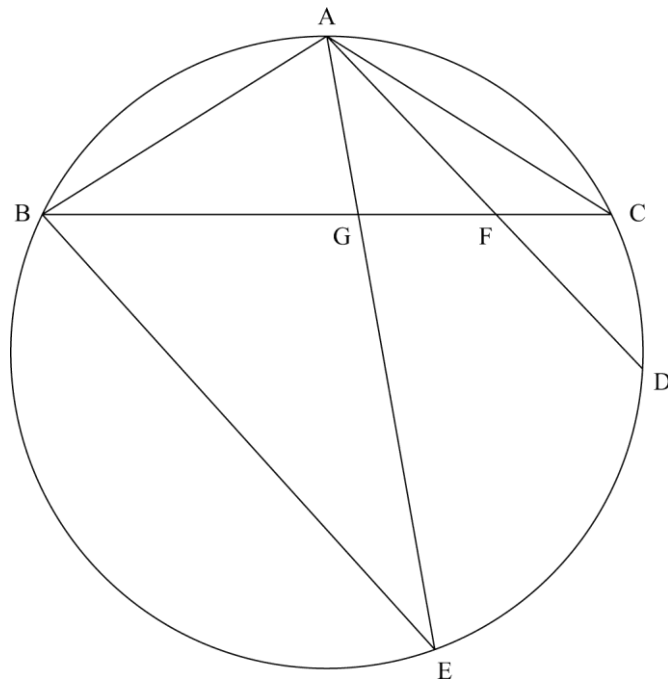
4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2019 年度出題】

【問 1】

次の図のように、同じ円周上に 3 点 A , B , C があり、 $\angle BAC$ は鈍角、 $AB=AC$ となっています。 A を含まない $\widehat{BC}$ 上に $AD \parallel BE$ となるように B , C と異なる点 D , E をとります。また、線分 BC と 2 つの線分 AD , AE との交点をそれぞれ F , G とします。

このとき、 $\triangle ABF \sim \triangle GEB$ であることを証明しなさい。

(岩手県 2019 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle GEB$ において

$\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから

$$\angle ABC = \angle ACB$$

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle AEB = \angle ACB$$

したがって

$$\angle ABF = \angle GEB \cdots \textcircled{1}$$

$AD \parallel BE$ より、平行線の錯角は等しいから

$$\angle AFB = \angle GBE \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より、2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \simeq \triangle GEB$$

解説

二等辺三角形の底角は等しいこと

同じ弧に対する円周角は等しいこと

平行線の錯角は等しいこと

などを利用して

2組の角がそれぞれ等しいことを示す。

【問 2】

図 1 のように、点 O を中心とする円の周上に、3 点 A, B, C があり、 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ である。また、 $\angle ABC$ の大きさは 90° より大きいものとする。点 C を通り線分 AB に平行な直線と円 O との交点のうち点 C とは異なる点を D とし、線分 CD について点 A と反対側の円周上に点 E をとる。線分 CD と線分 AE, BE との交点をそれぞれ F, G とし、線分 AE と線分 BD との交点を H とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(山形県 2019 年度)

問 1 $\angle FDH = 40^\circ$, $\angle CFE = 55^\circ$ であるとき、 $\angle BHE$ の大きさを求めなさい。

問 2 $\triangle AHB \sim \triangle FGE$ であることを証明しなさい。

問 3 図 2 は、図 1 で、点 G が点 O と同じ位置となるように、4 点 A, B, C, E をとったときのものである。円 O の半径が 4 cm であるとき、四角形 $BHFG$ の面積を求めなさい。

図 1

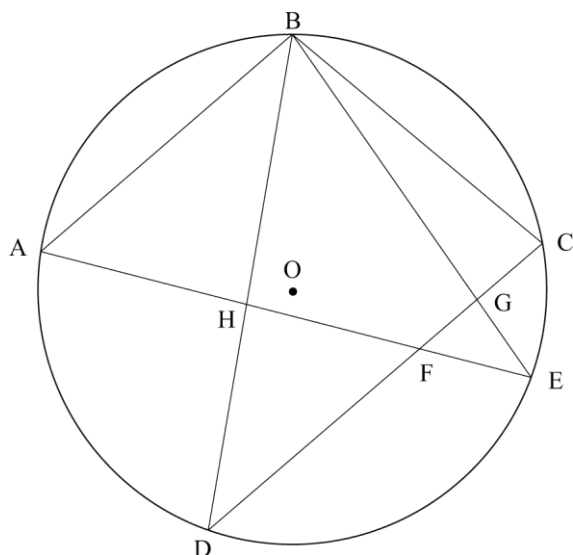
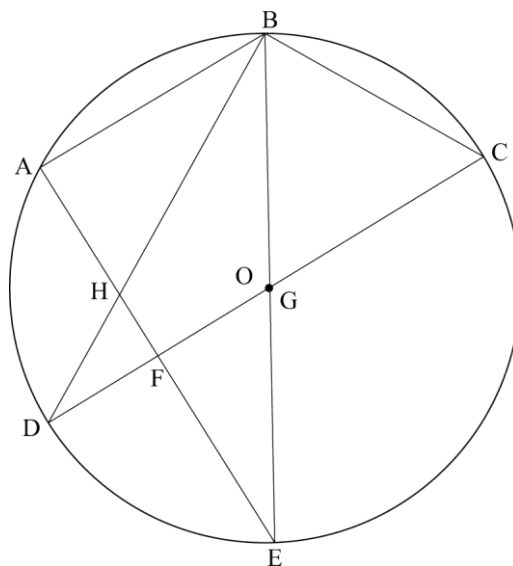


図 2



解答欄

問 1	
問 2	〔証明〕
問 3	cm^2

解答

問 1 95°

問 2

〔証明〕

△AHB と △FGE において

AB // DC で、同位角は等しいから

$$\angle BAH = \angle EFG \cdots \textcircled{1}$$

1 つの円で、等しい弧に対する円周角は等しいから

$$\angle FEG = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$$

AB // DC で、錯角は等しいから

$$\angle ABH = \angle BDC \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle ABH = \angle FEG \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より、2 組の角がそれぞれ等しいので

△AHB ∽ △FGE

$$\text{問 3 } \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

解説

問 1

対頂角は等しいから、 $\angle DFH = \angle CFE = 55^\circ$ △DFH で三角形の内角・外角の性質より、

$$\angle BHE = \angle FDH + \angle DFH = 40^\circ + 55^\circ = 95^\circ$$

問 2

△AHB と △FGE において AB // DC で、同位角は等しいから

$$\angle BAH = \angle EFG \cdots \textcircled{1}$$

1 つの円で、等しい弧に対する円周角は等しいから、

$$\angle FEG = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$$

AB // DC で、錯角は等しいから $\angle ABH = \angle BDC \cdots \textcircled{3}$

②, ③より、 $\angle ABH = \angle FEG \cdots \textcircled{4}$

①, ④より、2 組の角がそれぞれ等しいので △AHB ∽ △FGE

問 3

AB // DC で、錯角は等しいから、 $\angle ABD = \angle BDC$

よって、円周角が等しいから、 $\widehat{AD} = \widehat{BC}$

仮定より、 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ だから、 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{AD}$ がいえるので、2 点 A, B は半円の弧を 3 等分する点である。

$$\text{したがって、} \angle BGD = 180^\circ \times \frac{2}{3} = 120^\circ$$

△BDG は GB = GD の二等辺三角形だから、 $\angle BGD$ の二等分線と辺 BD との交点を I とすると、BI = DI, $BD \perp GI$ であり、△DGI は 30° , 60° , 90° の直角三角形である。

$$\text{よって、} GI = GD \times \frac{1}{2} = 2(\text{cm}), DI = GI \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\text{cm}) \text{ だから、}$$

$$\triangle DGI = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}(\text{cm}^2), \triangle BDG = 2\triangle DGI = 4\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

また、 $\angle BGC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, GB = GC より、△BGC は正三角形だから、BC = GB = 4cm

等しい弧に対する弦は等しいので、AB = BC = 4cm

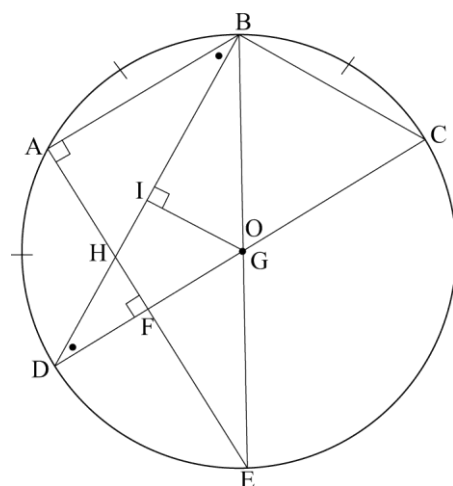
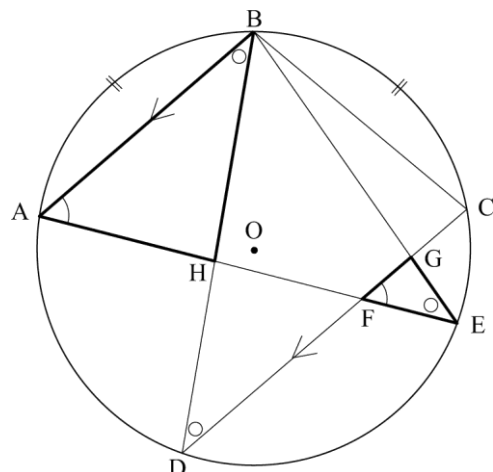
$$\text{ここで、} AB // DC, EG : EB = 1 : 2 \text{ より、} FG = \frac{1}{2}AB = 2(\text{cm}) \text{ だ}$$

$$\text{から、} DF = 4 - 2 = 2(\text{cm})$$

$$\triangle DGI \sim \triangle DHF \text{ であり、} DI : DF = 2\sqrt{3} : 2 = \sqrt{3} : 1 \text{ だから、} \triangle DGI : \triangle DHF = (\sqrt{3})^2 : 1^2 = 3 : 1$$

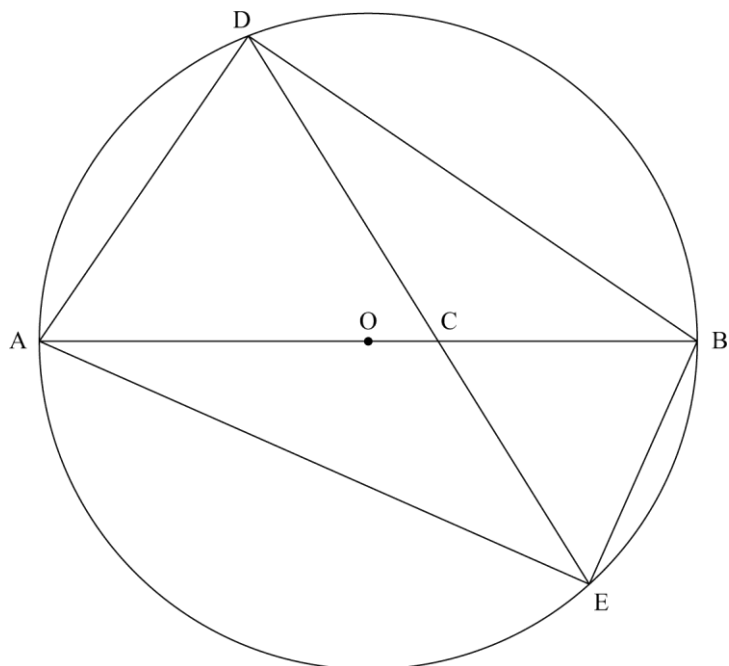
$$\triangle DHF = \triangle DGI \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\text{cm}^2)$$

$$\text{したがって、四角形 BHFG} = \triangle BDG - \triangle DHF = 4\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}(\text{cm}^2)$$



【問 3】

下の図のように、半径 5 cm の円 O があり、線分 AB は円 O の直径である。線分 AB 上で $AC : CB = 3 : 2$ となる点を C とする。円 O の周上に 2 点 A, B と異なる点 D をとり、円 O と直線 CD との交点のうち、点 D と異なる点を E とする。



このとき、次の問 1，問 2 に答えなさい。

(茨城県 2019 年度)

問 1 $\triangle ACD \sim \triangle ECB$ であることを証明しなさい。

問 2 $AB \perp DE$ のとき、線分 AD の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	
問 2	cm

解答

問 1

$\triangle ACD$ と $\triangle ECB$ で

対頂角だから

$$\angle ACD = \angle ECB \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{AE}$ に対する円周角だから

$$\angle ADC = \angle EBC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACD \sim \triangle ECB$$

問 2 $2\sqrt{15}$ (cm)

解説

問 1

線分の長さについての情報が少ないので、三角形の相似条件のうち、「2組の角がそれぞれ等しい2つの三角形は相似」を利用することを考える。

$\triangle ACD$ と $\triangle ECB$ において、対頂角は等しいから $\angle ACD = \angle ECB \cdots \textcircled{1}$

$\widehat{AE}$ に対する円周角は等しいから $\angle ADC = \angle EBC \cdots \textcircled{2}$

①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ACD \sim \triangle ECB$

なお、②の代わりに「 $\widehat{DB}$ に対する円周角は等しいから $\angle DAC = \angle BEC$ 」を示してもよい。

問 2

$AB = 10\text{cm}$ であることと $AC : CB = 3 : 2$ より、 $AC = 6\text{cm}$, $CB = 4\text{cm}$

半円の弧に対する円周角は直角だから $\angle ADB = 90^\circ$ $\triangle ABD$ において、三平方の定理より

$AD^2 + BD^2 = 100 \cdots \textcircled{1}$ また、 $AB \perp DE$ のとき、 $\triangle ACD$, $\triangle BDC$ は直角三角形となるから、 $\triangle ACD$ と $\triangle BDC$ において、それぞれ三平方の定理より

$$AD^2 - AC^2 = CD^2 \quad AD^2 - 36 = CD^2 \cdots \textcircled{2}, \quad BD^2 - BC^2 = CD^2 \quad BD^2 - 16 = CD^2 \cdots \textcircled{3}$$

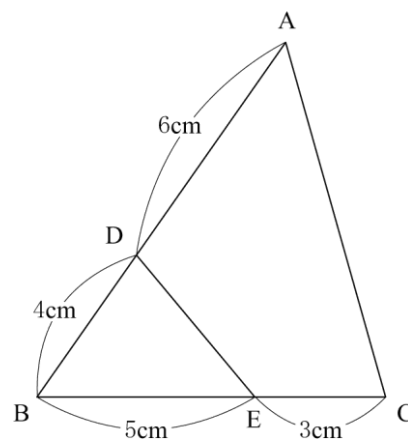
$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より}, \quad AD^2 - 36 = BD^2 - 16 \quad AD^2 - BD^2 = 20 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{4} \text{より}, \quad 2AD^2 = 120 \quad AD^2 = 60 \quad AD > 0 \text{ だから } AD = 2\sqrt{15}(\text{cm})$$

【問 4】

右の図のように、 $\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 D 、辺 BC 上に点 E をとる。このとき、 $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ であることを証明しなさい。

(栃木県 2019 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle EBD$ において

$$AB : EB = 10 : 5 = 2 : 1 \cdots \text{①}$$

$$BC : BD = 8 : 4 = 2 : 1 \cdots \text{②}$$

①, ②より

$$AB : EB = BC : BD \cdots \text{③}$$

共通な角であるから

$$\angle ABC = \angle EBD \cdots \text{④}$$

③, ④より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle EBD$$

解説

$$\triangle ABC \text{ と } \triangle EBD \text{ において, } AB : EB = 10 : 5 = 2 : 1 \cdots \text{①, } BC : BD = 8 : 4 = 2 : 1 \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ②より, } AB : EB = BC : BD \cdots \text{③}$$

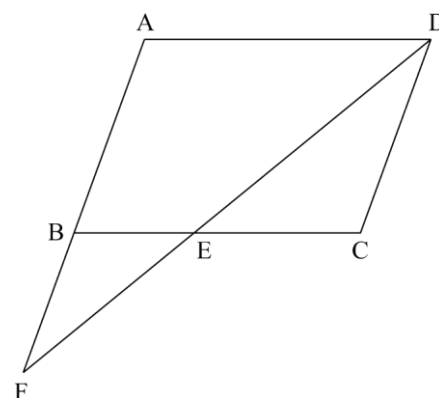
$$\text{共通な角だから } \angle ABC = \angle EBD \cdots \text{④}$$

$$\text{③, ④より, 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから } \triangle ABC \sim \triangle EBD$$

【問 5】

右の図の平行四辺形 $ABCD$ において、 $AB=5\text{ cm}$ 、 $AD=7\text{ cm}$ であり、辺 BC 上の点 E は、 $BE=3\text{ cm}$ となる点である。直線 AB と直線 DE との交点を F とする。次の問 1～問 3 に答えなさい。

(群馬県 2019 年度 前期)



問 1 三角形 BFE と三角形 CDE が相似であることを証明しなさい。

問 2 三角形 BFE の面積 S と三角形 CDE の面積 S' の比 $S : S'$ を、最も簡単な整数比で表しなさい。

問 3 三角形 BFE の面積 S と平行四辺形 $ABCD$ の面積 T の比 $S : T$ を、最も簡単な整数比で表しなさい。

解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	$S : S' =$	:
問 3	$S : T =$	:

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle BFE$ と $\triangle CDE$ において

$AF \parallel DC$ より、平行線の錯角は等しいから

$$\angle BFE = \angle CDE \quad \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから

$$\angle BEF = \angle CED \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BFE \sim \triangle CDE$$

問 2 ($S : S' = 9 : 16$)

問 3 ($S : T = 9 : 56$)

解説

問 1

$\triangle BFE$ と $\triangle CDE$ において、四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから、向かい合う辺は平行なので、 $AF \parallel DC$

平行線の錯角は等しいから、 $\angle BFE = \angle CDE \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいから、 $\angle BEF = \angle CED \cdots \textcircled{2}$ ①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle BFE \sim \triangle CDE$ ①や②の代わりに $\angle FBE = \angle DCE$ を用いてもよい。

問 2

平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しいので、 $BC = AD = 7 \text{ cm}$ だから、 $CE = 7 - 3 = 4(\text{cm})$

問 1 より $\triangle BFE \sim \triangle CDE$ で、相似比は $BE : CE = 3 : 4$ よって、 $S : S' = 3^2 : 4^2 = 9 : 16$

問 3

問 2 より、 $S' = \frac{16}{9}S$ $\triangle DEC$ と $\triangle DBC$ は底辺をそれぞれ CE , BC とみると高さが等しいので、

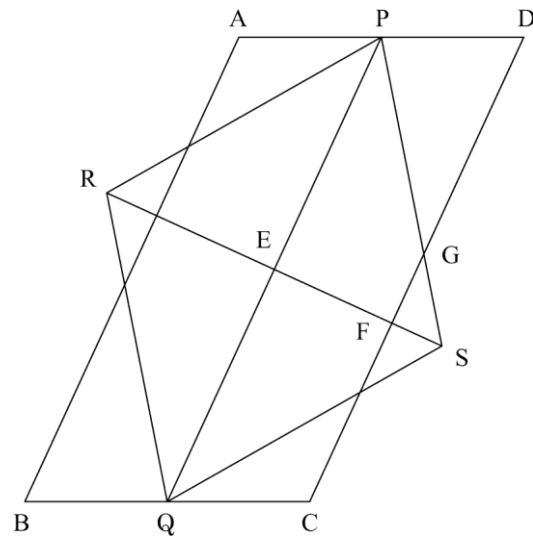
$$\triangle DEC : \triangle DBC = CE : BC = 4 : 7 \quad \text{よって、} \triangle DBC = S' \times \frac{7}{4} = \frac{16}{9}S \times \frac{7}{4} = \frac{28}{9}S$$

平行四辺形は対角線で 2 つの合同な三角形に分けられるので、平行四辺形 $ABCD$ の面積 T は

$$T = \triangle DBC \times 2 = \frac{28}{9}S \times 2 = \frac{56}{9}S \quad \text{したがって、} S : T = S : \frac{56}{9}S = 9 : 56$$

【問 6】

下の図のように，平行四辺形 $ABCD$ があり，辺 AD ， BC の中点をそれぞれ P ， Q とする。2 点 R ， S を平行四辺形 $ABCD$ の外側に，四角形 $PRQS$ がひし形になるようにとる。線分 PQ と線分 RS の交点を E ，線分 RS と辺 CD の交点を F ，辺 CD と辺 PS の交点を G とする。



このとき，次の問 1，問 2 に答えなさい。

(千葉県 2019 年度 前期)

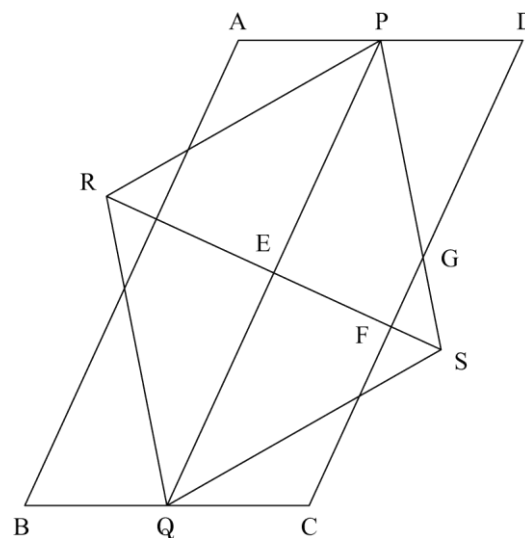
問 1 $\triangle RQE \sim \triangle SGF$ となることの証明を，次ページの の中に途中まで示してある。

(a) ， (b) に入る最も適当なものを，次ページの選択肢のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び，符号で答えなさい。また， (c) には証明の続きを書き，証明を完成させなさい。

ただし， 中の①～④に示されている関係を使う場合，番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

証明

四角形 PQCD において、
 四角形 ABCD は平行四辺形であるから、
 $AD=BC \cdots ①$
 $AD \parallel BC \cdots ②$
 点 P, Q は、それぞれ辺 AD, BC の中点であるか
 ら、①より、
 $PD = \boxed{\text{(a)}} \cdots ③$
 ②, ③より、
 $\boxed{\text{(b)}}$ から、
 四角形 PQCD は平行四辺形となる。
 したがって、
 $PQ \parallel DC \cdots ④$

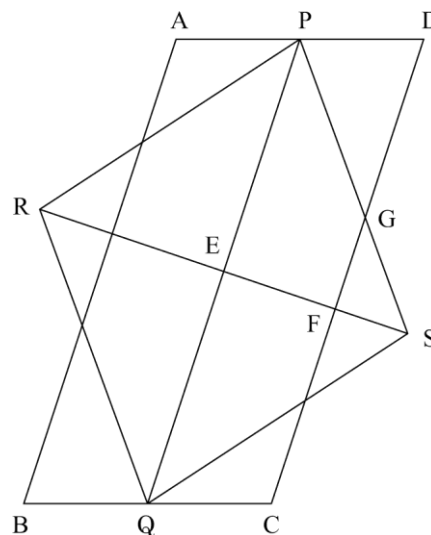


(c)

選択肢

- | | | |
|------------------------|------|------|
| ア PG | イ QC | ウ ES |
| エ 2組の向かいあう辺が、それぞれ平行である | | |
| オ 2組の向かいあう辺が、それぞれ等しい | | |
| カ 1組の向かいあう辺が、等しくて平行である | | |

問2 RQ=5 cm, AD=4 cm, PG=DG=3 cm のとき、線分 FS
 の長さを求めなさい。



解答欄

問 1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問 2	cm	

解答

問 1

(a) イ

(b) カ

(c)

$\triangle RQE$ と $\triangle SGF$ において

④より、同位角は等しいので

$$\angle REQ = \angle EFC \cdots \textcircled{5}$$

対頂角は等しいので

$$\angle EFC = \angle SFG \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より

$$\angle REQ = \angle SFG \cdots \textcircled{7}$$

また、四角形 $PRQS$ はひし形だから

平行四辺形である。

したがって、 $PS \parallel RQ \cdots \textcircled{8}$

⑧より、錯角は等しいので

$$\angle QRE = \angle GSF \cdots \textcircled{9}$$

⑦, ⑨より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle RQE \sim \triangle SGF$$

$$\text{問 2 } \frac{8\sqrt{2}}{9} \text{ (cm)}$$

解説

問 1

証明の④より、 $PQ \parallel DC$ 、ひし形は平行四辺形の特別な形であることから、 $PS \parallel RQ$ がいえるので、平行線の同位角が等しいこと、平行線の錯角が等しいことを利用して、2組の角がそれぞれ等しいことをいえばよい。

模範解答で示した $\angle REQ = \angle SFG \cdots \textcircled{7}$ 、 $\angle QRE = \angle GSF \cdots \textcircled{9}$ 以外に、次のように $\angle RQE = \angle SGF$ を示してもよい。 $PS \parallel RQ$ より、平行線の錯角は等しいから $\angle RQE = \angle SPE \cdots (1)$ $PQ \parallel DC$ より、平行線の同位角は等しいから $\angle SPE = \angle SGF \cdots (2)$ (1), (2)より、 $\angle RQE = \angle SGF$

問 2

点 P は辺 AD の中点だから、 $PD = AD \div 2 = 4 \div 2 = 2(\text{cm})$ 点 P から線分 DG に引いた垂線と線分 DG との交点を H とし、 $DH = x \text{ cm}$ 、 $PH = h \text{ cm}$ とすると、 $PD = 2 \text{ cm}$ だから、 $\triangle PHD$ で三平方の定理より、 $x^2 + h^2 = 2^2$ $x^2 + h^2 = 4 \cdots (1)$ $PG = DG = 3 \text{ cm}$ 、 $GH = (3 - x) \text{ cm}$ だから、 $\triangle PHG$ で三平方の定理より、

$$(3 - x)^2 + h^2 = 3^2 \quad x^2 - 6x + h^2 = 0 \cdots (2) \quad (1) - (2) \text{より、} 6x = 4 \quad x = \frac{2}{3}$$

$$(1) \text{に } x = \frac{2}{3} \text{を代入して、} h^2 = \frac{32}{9} \quad h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ここで、ひし形の対角線は垂直に交わるから $\angle PES = 90^\circ$ で、問 1 の証明の④より

$PQ \parallel DC$ だから平行線の同位角は等しく $\angle SFG = 90^\circ$ したがって、 $\angle PHG = \angle SFG$

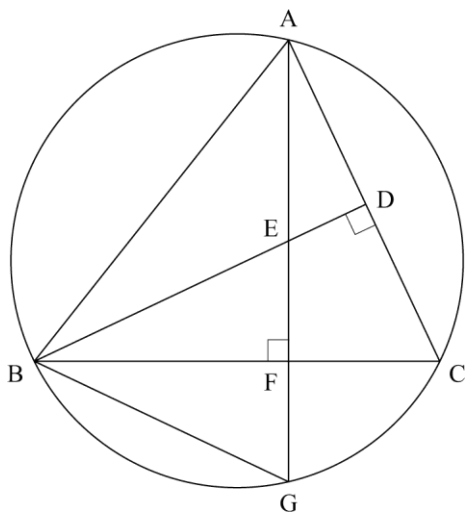
$\angle PGH = \angle SGF$ だから、2組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle PGH \sim \triangle SGF$ ひし形の性質より

$$PS = RQ = 5 \text{ cm} \text{ だから、} SG = 5 - 3 = 2(\text{cm}) \text{ よって、} FS : HP = 2 : 3 \quad FS : \frac{4\sqrt{2}}{3} = 2 : 3$$

$$FS = \frac{8\sqrt{2}}{9}(\text{cm})$$

【問 7】

下の図のように、3つの頂点A, B, Cが、1つの円周上にある鋭角三角形ABCがある。点Bから辺ACに垂線BDをひく。また、点Aから辺BCに垂線をひき、線分BDとの交点をE、辺BCとの交点をF、円との交点をGとする。さらに、点Bと点Gを結ぶ。



このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(千葉県 2019 年度 後期)

問1 FE=FG となることの証明を、次ページの の中に途中まで示してある。

(a) , (b) に入る最も適当なものを、次ページの選択肢のア～カのうちからそれぞれ1つずつ選び、符号で答えなさい。また、(c) には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。

ただし、 中の①～③に示されている関係を使う場合、番号の①～③を用いてもかまわないものとする。

証明

$\triangle BCD$ と $\triangle BGF$ において、
 仮定より、 $\angle BDC = \angle BFG = 90^\circ \cdots \text{①}$

円周角の定理より、

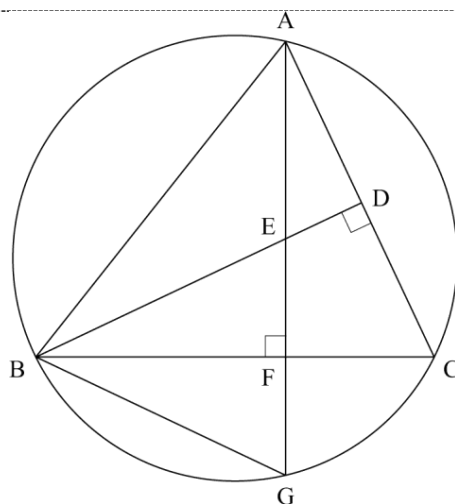
$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいので、

$\angle BCD = \text{ (a) } \cdots \text{②}$

①, ②より、

(b) がそれぞれ等しいので、

$\triangle BCD \sim \triangle BGF \cdots \text{③}$



(c)

選択肢

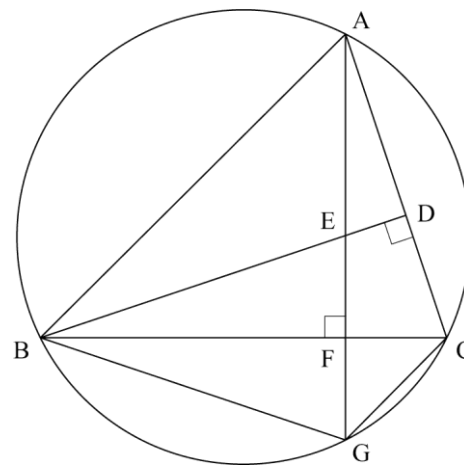
ア $\angle BGF$
エ 2組の角

イ $\angle BFE$
オ 2組の辺の比とその間の角

ウ $\angle BEA$
カ 3組の辺の比

問2 $AE : EF = 2 : 1$, $AF = BF$ とする。また、点 C と点 G を結ぶ。

このとき、 $\triangle AED$ と四角形 $ABGC$ の面積の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。



解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2		

解答

問 1

(a) ア

(b) エ

(c)

$\triangle BFE$ と $\triangle BFG$ において

③より

$$\angle FBE = \angle FBG \cdots ④$$

仮定より

$$\angle BFE = \angle BFG = 90^\circ \cdots ⑤$$

BF は共通 $\cdots ⑥$

④, ⑤, ⑥より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BFE \equiv \triangle BFG$$

したがって

$$FE = FG$$

問 2 3 : 40

解説

問 1

$\triangle BCD$ と $\triangle BGF$ において

仮定より, $\angle BDC = \angle BFG = 90^\circ \cdots ①$

円周角の定理より, $\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいので

$$\angle BCA = \angle BGA \quad \angle BCD = \angle BGF \cdots ②$$

①, ②より, 2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BCD \sim \triangle BGF \cdots ③$$

$\triangle BFE$ と $\triangle BFG$ において

③より, 相似な図形の対応する角は等しいので

$$\angle FBE = \angle FBG \cdots ④$$

仮定より, $\angle BFE = \angle BFG = 90^\circ \cdots ⑤$

BF は共通 $\cdots ⑥$ ④, ⑤, ⑥より, 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので, $\triangle BFE \equiv \triangle BFG$

合同な図形の対応する辺は等しいので, $FE = FG$

問 2

$EF = a \text{ cm} (a > 0)$ とすると, $AE : EF = 2 : 1$ より, $AF = 3a \text{ cm}$ 仮定より, $BF = AF = 3a \text{ cm}$

また, 問 1 より, $FG = FE = a \text{ cm}$ $\triangle ABF$ は $AF = BF$, $\angle AFB = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから,

$\angle BAF = 45^\circ$ 円周角の定理より, $\widehat{BG}$ に対する円周角は等しいので, $\angle GCF = \angle BAF = 45^\circ$

よって, $\triangle CFG$ は $\angle CFG = 90^\circ$, $\angle GCF = \angle CGF = 45^\circ$ の直角二等辺三角形だから, $FC = FG = a \text{ cm}$

したがって, 四角形 ABGC の面積は, $\frac{1}{2} \times AG \times BC = \frac{1}{2} \times (3a + a) \times (3a + a) = 8a^2 (\text{cm}^2)$

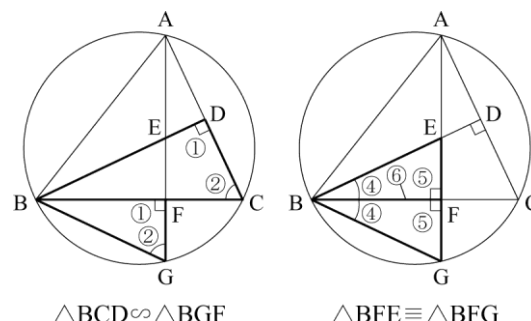
ここで, $\triangle ACF$ と $\triangle AED$ において, 仮定より, $\angle AFC = \angle ADE = 90^\circ \cdots ①$, $\angle FAC = \angle DAE \cdots ②$

①, ②より, 2組の角がそれぞれ等しいので, $\triangle ACF \sim \triangle AED$ 三平方の定理より, $AC^2 = (3a)^2 + a^2 = 10a^2$

$AC > 0$ だから, $AC = \sqrt{10}a (\text{cm})$ $\triangle ACF : \triangle AED = AC^2 : AE^2 = 10a^2 : 4a^2 = 5 : 2$

$$\triangle ACF = \frac{1}{2} \times a \times 3a = \frac{3}{2}a^2 (\text{cm}^2), \quad \triangle AED = \triangle ACF \times \frac{2}{5} = \frac{3}{2}a^2 \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}a^2 (\text{cm}^2)$$

よって, $\triangle AED : \text{四角形 ABGC} = \frac{3}{5}a^2 : 8a^2 = 3 : 40$



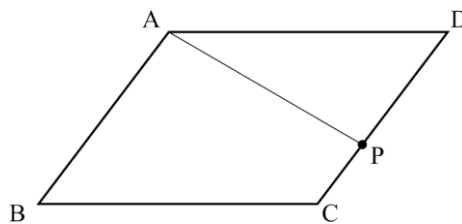
【問 8】

右の図 1 で、四角形 ABCD は、平行四辺形である。点 P は、
辺 CD 上にある点で、頂点 C、頂点 D のいずれにも一致しない。
頂点 A と点 P を結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2019 年度)

図 1



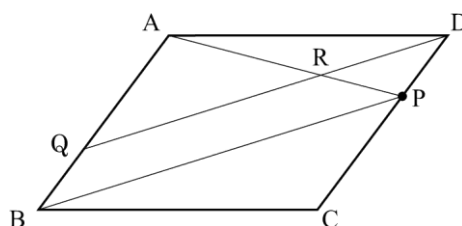
問 1 図 1 において、 $\angle ABC = 50^\circ$ 、 $\angle DAP$ の大きさを a° とするとき、 $\angle APC$ の大きさを表す式を、
次のア～エのうちから選び、記号で答えよ。

ア $(a+130)$ 度 イ $(a+50)$ 度 ウ $(130-a)$ 度 エ $(50-a)$ 度

問 2 右の図 2 は、図 1 において、頂点 B と点 P を結び、頂点

図 2

D を通り線分 BP に平行な直線を引き、辺 AB との交点
を Q、線分 AP との交点を R とした場合を表している。
次の (1)、(2) に答えよ。



(1) $\triangle ABP \sim \triangle PDR$ であることを証明せよ。

(2) 次の 中の「き」「く」「け」「こ」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図 2 において、頂点 C と点 R を結び、線分 BP と線分 CR の交点を S とした場合を考える。

CP : PD = 2 : 1 のとき、四角形 QBSR の面積は、 $\triangle AQR$ の面積の

きく
けこ

倍である。

解答欄

問 1			
問 2	(1)	〔証明〕 △ABP と △PDR において,	
		△ABP ∽ △PDR	
	(2)	き	
		く	
		け	
こ			

解答

問 1 イ

問 2

(1)

〔証明〕

$\triangle ABP$ と $\triangle PDR$ において

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから

$AB \parallel DC$

平行線の錯角は等しいから

$\angle PAB = \angle RPD \cdots (1)$

仮定から, $BP \parallel QD$

平行線の錯角は等しいから

$\angle APB = \angle PRD \cdots (2)$

(1), (2)より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABP \sim \triangle PDR$

(2)

き 1

く 3

け 1

こ 2

解説

問 1

平行四辺形の向かいあう角は等しいから $\angle ADP = \angle ABC = 50^\circ$

三角形の 1 つの外角は, そのとなりにない 2 つの内角の和に等しいから

$\angle APC = \angle DAP + \angle ADP = a + 50(\text{度})$

問 2

(1)

$\triangle ABP$ と $\triangle PDR$ において, 平行四辺形 $ABCD$ の向かいあう辺は平行だから $AB \parallel DC$

平行線の錯角は等しいから $\angle PAB = \angle RPD \cdots \cdots ①$

仮定より $BP \parallel QD$

平行線の錯角は等しいから $\angle APB = \angle PRD \cdots \cdots ②$

①, ②より, 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABP \sim \triangle PDR$

(2)

平行四辺形 $BPDQ$ の向かいあう辺は等しいから $PD = BQ$ したがって, $CP = AQ$

仮定より $CP : PD = 2 : 1$ だから $AQ : QB = 2 : 1$

$\triangle AQR \sim \triangle ABP$ より, $\triangle AQR : \triangle ABP = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$

よって, $\triangle AQR : (\text{四角形 } QBPR \text{ の面積}) = 4 : 5 \cdots \cdots ③$

$\triangle AQR$ の面積を S とおくと, ③より $(\text{四角形 } QBPR \text{ の面積}) = \frac{5}{4}S$

$\triangle CPS \sim \triangle CDR$ より, $PS : DR = CP : CD = 2 : 3$ だから $\triangle PRS : \triangle PDR = 2 : 3 \cdots \cdots ④$

$\triangle PDR \sim \triangle AQR$ より $\triangle PDR : \triangle AQR = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$ だから $\triangle PDR = \frac{1}{4}S$

④より $\triangle PRS = \frac{2}{3}\triangle PDR = \frac{1}{6}S$

したがって, $(\text{四角形 } QBSR \text{ の面積}) = (\text{四角形 } QBPR \text{ の面積}) - \triangle PRS = \frac{5}{4}S - \frac{1}{6}S = \frac{13}{12}S$ だから,

四角形 $QBSR$ の面積は $\triangle AQR$ の面積の $\frac{13}{12}$ 倍である。

【問 9】

右の図 1 のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C を、三角形 ABC の辺が長い方から順に AC, AB, BC となるようにとる。

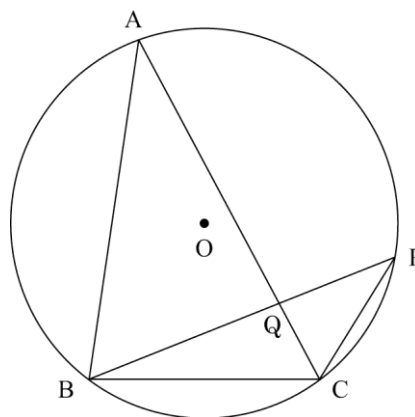
また、点 B を含まない $\widehat{AC}$ 上に 2 点 A, C とは異なる点 P をとり、線分 AC と線分 BP との交点を Q とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2019 年度)

問 1 三角形 ABQ と三角形 PCQ が相似であることを次のように証明した。 $\boxed{\text{(i)}}$, $\boxed{\text{(ii)}}$ に最も適するものをあとの 1 ～ 6 の中からそれぞれ 1 つ選び、その番号を答えなさい。

図 1



〔証明〕

$\triangle ABQ$ と $\triangle PCQ$ において、

まず、 $\boxed{\text{(i)}}$ から、

$$\angle BAC = \angle BPC$$

よって、 $\angle BAQ = \angle CPQ$ …①

次に、 $\boxed{\text{(ii)}}$ から、

$$\angle AQB = \angle PQC \quad \cdots \text{②}$$

①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいから、

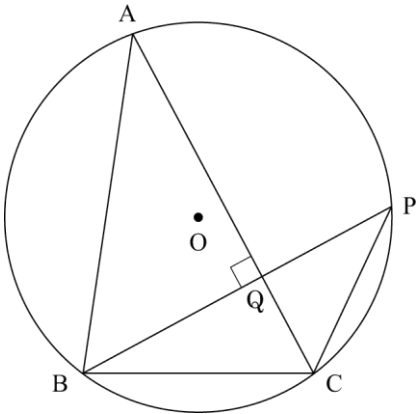
$$\triangle ABQ \sim \triangle PCQ$$

- 1 対頂角は等しい
- 2 $\widehat{AB}$ に対する円周角は等しい
- 3 $\widehat{BC}$ に対する円周角は等しい
- 4 $\widehat{CP}$ に対する円周角は等しい
- 5 $\widehat{PA}$ に対する円周角は等しい
- 6 三角形の外角は、それととなり合わない 2 つの内角の和に等しい

問2 点Pが、点Bを含まない $\widehat{AC}$ 上の2点A、Cを除いた部分を動くとき、次の 中の
に適するものを書きなさい。ただし、「AB」を必ず用いること。

三角形ABQと三角形PCQは常に相似であり、 $AB=CP$ となるときの、三角形ABQと三角形PCQは合同である。
 また、三角形ABQと三角形PCQがともに二等辺三角形となるのは、 $AB=AQ$ のときや のときである。

問3 図2のように、点Pを、線分ACと線分BPが垂直に交わる 図2
ようにとる。
 $AB=7\text{ cm}$ 、 $AC=8\text{ cm}$ 、 $BC=5\text{ cm}$ のとき、線分BPの長さを求めなさい。



解答欄

問1	(i)	
	(ii)	
問2		
問3	cm	

解答

問 1

(i) 3

(ii) 1

問 2 $AB \parallel CP$

問 3 $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ cm

解説

問 1

(i) には $\angle BAC = \angle BPC$ となることの根拠が入る。 $\angle BAC$, $\angle BPC$ はどちらも $\widehat{BC}$ に対する円周角だから、あてはまるのは 3

また、(ii) には $\angle AQB = \angle PQC$ となることの根拠が入る。 $\angle AQB$, $\angle PQC$ は対頂角だから、あてはまるのは 1

問 2

AB と BQ の関係は常に $AB > BQ$ となるから、 $\triangle ABQ$ が二等辺三角形になるのは、 $AB = AQ$ のときと $AQ = BQ$ のとき。また、 $\triangle ABQ \sim \triangle PCQ$ だから、 $AQ = BQ$ のとき、 $\angle ABQ = \angle BAQ = \angle CPQ$ が成り立つ。よって、錯角が等しいから、 $AB \parallel CP$

問 3

$CQ = x$ cm とすると、 $AQ = AC - CQ = 8 - x$ (cm) 三平方の定理より、

$\triangle BCQ$ で、 $BQ^2 = BC^2 - CQ^2 = 5^2 - x^2 \cdots \textcircled{1}$ 同様に $\triangle ABQ$ で、 $BQ^2 = AB^2 - AQ^2 = 7^2 - (8 - x)^2 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より、 $5^2 - x^2 = 7^2 - (8 - x)^2$ $25 - x^2 = 49 - (64 - 16x + x^2)$ $16x = 40$ $x = \frac{5}{2}$

よって、 $\textcircled{1}$ より、 $BQ^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$ $BQ > 0$ だから、 $BQ = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (cm)

また、 $AQ = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$ (cm) 問 1 より $\triangle ABQ \sim \triangle PCQ$ だから、 $AQ : PQ = BQ : CQ$

$\frac{11}{2} : PQ = \frac{5\sqrt{3}}{2} : \frac{5}{2}$ よって、 $\frac{11}{2} : PQ = \sqrt{3} : 1$ $PQ = \frac{11}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{6}$ (cm)

したがって、 $BP = BQ + PQ = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{11\sqrt{3}}{6} = \frac{15\sqrt{3}}{6} + \frac{11\sqrt{3}}{6} = \frac{26\sqrt{3}}{6} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$ (cm)

【問 10】

図 1 ～図 3 のように、 $\angle ABC = 60^\circ$ の平行四辺形 ABCD があり、P は辺 AB 上の点とする。ただし、P が頂点 A、B 上にあるときは考えないものとする。

このとき、次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(石川県 2019 年度)

問 1 図 1 のように、線分 AC と PD の交点を E とする。
 $\angle ACD = 41^\circ$ 、 $\angle ADP = 21^\circ$ のとき、 $\angle CED$ の大きさを求めなさい。

図 1

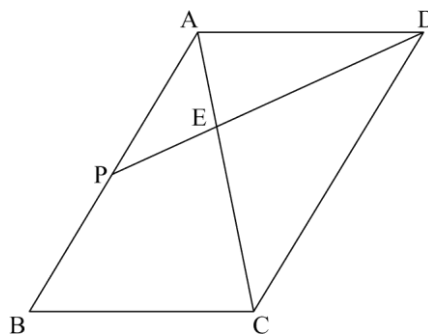


図 2

問 2 図 2 のように、点 Q を辺 BC 上に $PQ \parallel AC$ となるようにとる。AB と DQ を延長したときの交点を F とし、AC と DF の交点を G とする。
 このとき、 $\triangle GCD \sim \triangle QPF$ であることを証明しなさい。

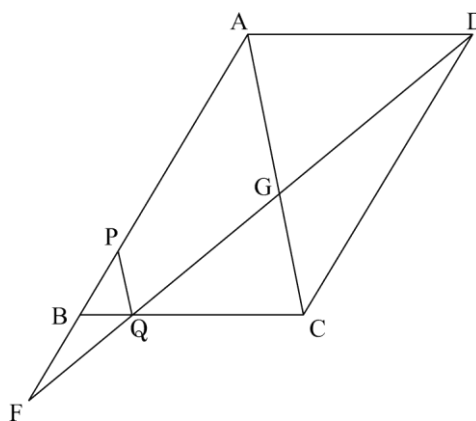
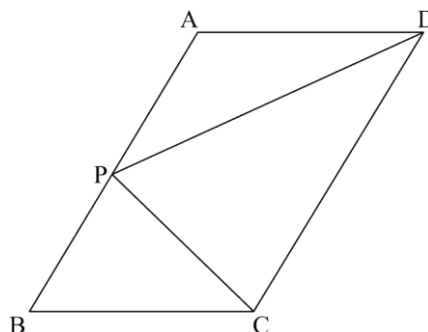


図 3

問 3 図 3 において、 $AB = 6 \text{ cm}$ 、 $AD = 4 \text{ cm}$ とする。
 $CP + PD$ の長さが最短となるとき、その長さを求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。



解答欄

問 1	度
問 2	〔証明〕
問 3	〔計算〕 答 cm

解答

問 1 100 度

問 2

〔証明〕

$\triangle GCD$ と $\triangle QPF$ において

$CD \parallel PF$ より, 錯角は等しいので

$$\angle GDC = \angle QFP \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいので $\angle DGC = \angle FGA \cdots \textcircled{2}$

$PQ \parallel AG$ より, 同位角は等しいので

$$\angle FGA = \angle FQP \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より, $\angle DGC = \angle FQP \cdots \textcircled{4}$

①, ④より, 2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle GCD \sim \triangle QPF$$

問 3

〔計算〕

辺 AB を軸として, 点 C を対称移動した点を H とする。

$CP + PD = HP + PD$ より $CP + PD$ の最短の長さは, HD の長さに等しい。

$BC = 4$, $\angle ABC = 60^\circ$ より

$$CH = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}$$

$\angle HCD = 90^\circ$ より

$$HD = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{21}$$

〔答〕 $2\sqrt{21}$ cm

解説

問 1

$\angle ABC = 60^\circ$ より, $\angle ADC = 60^\circ$ $\angle ADP = 21^\circ$ より, $\angle PDC = 60^\circ - 21^\circ = 39^\circ$

よって, $\angle CED = 180^\circ - 41^\circ - 39^\circ = 100^\circ$

問 2

$\triangle GCD$ と $\triangle QPF$ において, $CD \parallel PF$ より, 平行線の錯角は等しいから $\angle GDC = \angle QFP \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいから $\angle DGC = \angle FGA \cdots \textcircled{2}$

$PQ \parallel AG$ より, 平行線の同位角は等しいから $\angle FGA = \angle FQP \cdots \textcircled{3}$

②, ③より, $\angle DGC = \angle FQP \cdots \textcircled{4}$

よって, ①, ④より, 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle GCD \sim \triangle QPF$

問 3

辺 AB を軸として, 点 C を対称移動した点を H とする。 $CP + PD$ の長さが最短となるのは, 点 H と頂点 D を結んだ線分と辺 AB の交点を P としたときである。このとき, $\triangle PHC$ は二等辺三角形となるから $HP = CP$ より, $CP + PD = HP + PD = HD$ である。よって, $CP + PD$ の最短の長さは HD の長さと等しい。点 C と点 H を結んだ線分と辺 AB との交点を I とすると, $\angle ABC = 60^\circ$ より, $\triangle CBI$ は 3つの角が 30° , 60° , 90° の直角三角形であるから, 辺の比は $BC : BI : CI = 2 : 1 : \sqrt{3}$ である。 $BC = 4\text{cm}$ より, $CI = 2\sqrt{3}\text{cm}$ だから $CH = 2CI = 4\sqrt{3}\text{cm}$

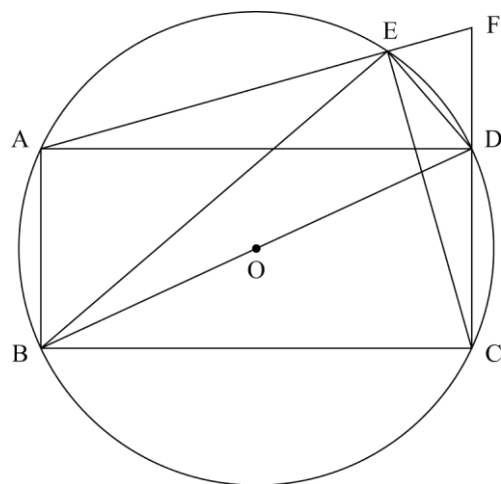
$AB \parallel DC$ より, $\angle HCD = \angle HIA = 90^\circ$ だから, 三平方の定理より $HD = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{21}(\text{cm})$

【問 11】

右の図のように、円 O の周上の 4 点 A, B, C, D を頂点とする長方形 $ABCD$ がある。点 B, C を含まない $\widehat{AD}$ 上に、点 A, D と異なる点 E をとり、直線 AE と直線 CD の交点を点 F とする。

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2019 年度)



問 1 $\triangle ADF \sim \triangle BED$ であることを証明せよ。

問 2 $AB=2\text{ cm}$, $BC=2\sqrt{2}\text{ cm}$, $DF=1\text{ cm}$ とする。

(1) 円 O の半径と DE の長さを求めよ。

(2) $\triangle BCE$ の面積を求めよ。

解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	(1)	円 O の半径 (cm)
		$DE =$ (cm)
	(2)	$\triangle BCE =$ (cm ²)

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle ADF$ と $\triangle BED$ で

$\widehat{DE}$ に対する円周角だから

$$\angle DAF = \angle EBD \cdots \textcircled{1}$$

四角形 $ABCD$ は長方形であり

$\angle ADF$ は頂点 D における外角だから

$$\angle ADF = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$\widehat{BD}$ に対する円周角であり

四角形 $ABCD$ は長方形だから

$$\angle BED = \angle BAD = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から, } \angle ADF = \angle BED \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ から, 2 組の角が, それぞれ等しいので

$\triangle ADF \sim \triangle BED$

問 2

(1)

円 O の半径 $\sqrt{3}$ (cm)

$$DE = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$(2) \triangle BCE = \frac{8}{3}\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

解説

問 1

$\triangle ADF$ と $\triangle BED$ で, $\widehat{DE}$ に対する円周角だから, $\angle DAF = \angle EBD \cdots \textcircled{1}$

四角形 $ABCD$ は長方形であり, $\angle ADF$ は頂点 D における外角だから, $\angle ADF = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

$\widehat{BD}$ に対する円周角であり, 四角形 $ABCD$ は長方形だから, $\angle BED = \angle BAD = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から, } \angle ADF = \angle BED \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ から, 2 組の角がそれぞれ等しいので, $\triangle ADF \sim \triangle BED$

問 2

(1)

$\triangle ABD$ において三平方の定理より, $BD^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 = 12$ $BD > 0$ だから, $BD = 2\sqrt{3}$ (cm)

$\angle BAD = 90^\circ$ より, $\widehat{BD}$ は半円の弧であり, 線分 BD は円 O の直径だから

円 O の半径は, $BD \div 2 = 2\sqrt{3} \div 2 = \sqrt{3}$ (cm)

$\triangle ADF$ において三平方の定理より, $AF^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2 = 9$ $AF > 0$ だから, $AF = 3$ (cm)

問 1 より $\triangle ADF \sim \triangle BED$ であるから, $DE : FD = BD : AF$, $DE : 1 = 2\sqrt{3} : 3$, $3DE = 2\sqrt{3}$,

$$DE = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

(2)

右の図のように線分 AC をひき, 点 E を通り線分 AB , FC に平行な直線と線分 AC , BC との交点をそれぞれ G , H とする。

$\triangle ADF$ と $\triangle CEF$ において, (1) より, $AF = 3$ cm, $CF = 2 + 1 = 3$ (cm) だから,

$$AF = CF \cdots \textcircled{1} \quad \widehat{DE} \text{ に対する円周角だから, } \angle DAF = \angle ECF \cdots \textcircled{2}$$

共通な角だから, $\angle AFD = \angle CFE \cdots \textcircled{3}$ $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ より, 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので, $\triangle ADF \equiv \triangle CEF$ だから $EF = DF = 1$ cm

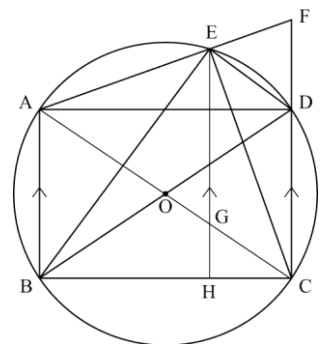
$$AE : EF = (3 - 1) : 1 = 2 : 1 \text{ で, 三角形と比の定理より } EG = FC \times \frac{2}{3} = 2 \text{ (cm)}$$

平行線と比の定理より, $BH : HC = AE : EF = 2 : 1$ だから,

$$\text{三角形と比の定理より, } GH = AB \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ (cm)} \quad \text{よって, } EH = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \text{ (cm)}$$

$EH \parallel FC$ より, 平行線の同位角は等しいから, $\angle EHB = \angle FCB = 90^\circ$ なので,

$$\triangle BCE = \frac{1}{2} \times BC \times EH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$



【問 12】

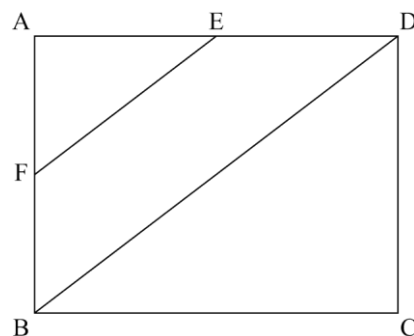
各問いに答えなさい。

(長野県 2019 年度)

問 1 図 1 のように、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ がある。辺 AD の中点を E 、点 E を通り BD に平行な直線と AB の交点を F とする。

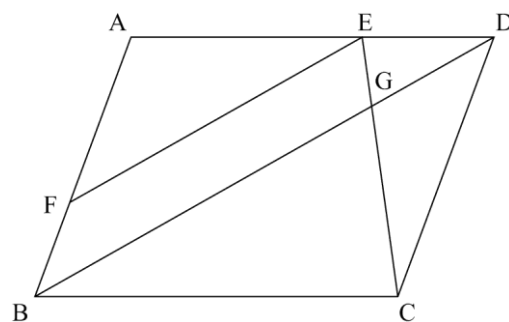
(1) EF の長さを求めなさい。

図 1



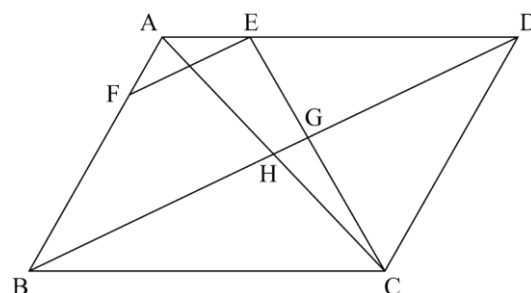
(2) 四角形 $BDEF$ を、直線 DE を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

図 2



問 2 図 2 のように、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$ 、 $\angle ABC$ が鋭角の平行四辺形 $ABCD$ がある。辺 AD 上に点 E をとり、点 E を通り BD に平行な直線と AB の交点を F 、 BD と CE の交点を G とする。

図 3



(1) $\angle ABD$ と大きさの等しい角を、次のア～エからすべて選び、記号を書きなさい。

ア $\angle ADC$

イ $\angle AEF$

ウ $\angle AFE$

エ $\angle BDC$

(2) $\triangle GBC \sim \triangle GDE$ を証明しなさい。

(3) 図 3 は、図 2 の図形で、 $\triangle CDE$ が正三角形となるように、 $\angle ABC$ の大きさと点 E の位置をかえ、点 A と C を結び、 AC と BD の交点を H としたものとする。

① BD の長さを求めなさい。

② $\triangle CGH$ の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	(1)	cm	
	(2)	cm ³	
問 2	(1)		
	(2)		
	(3)	①	cm
		②	cm ²

解答

問 1

(1) 5

(2) 84π

問 2

(1) ウ, エ

(2)

$\triangle GBC$ と $\triangle GDE$ について

対頂角は等しいから

$$\angle BGC = \angle DGE \cdots \textcircled{1}$$

四角形 ABCD は平行四辺形なので

$BC \parallel DE$ より

平行線の錯角は等しいから

$$\angle GBC = \angle GDE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle GBC \sim \triangle GDE$

(3)

$$\textcircled{1} 2\sqrt{37}$$

$$\textcircled{2} \frac{6\sqrt{3}}{7}$$

解説

問 1

(1)

E は辺 AD の中点だから、 $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 8 = 4(\text{cm})$

FE // BD だから、 $AF : AB = AE : AD = 1 : 2$ よって、 $AF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$

$\triangle AFE$ は $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形だから、三平方の定理より、 $EF^2 = AF^2 + AE^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

$EF > 0$ だから、 $EF = \sqrt{25} = 5(\text{cm})$

(2)

四角形 BDEF を直線 DE を回転の軸として 1 回転させてできる立体は、 $\triangle ABD$ を 1 回転させてできる円錐 P から $\triangle AFE$ を 1 回転させてできる円錐 Q を取り除いた形になる。

円錐 P は底面の半径が $AB = 6\text{cm}$ 、高さが $AD = 8\text{cm}$ で、円錐 Q は底面の半径が $AF = 3\text{cm}$ 、高さが

$AE = 4\text{cm}$ だから、求める立体の体積は、 $\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 - \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 96\pi - 12\pi = 84\pi (\text{cm}^3)$

問 2

(1)

FE // BD で、平行線の同位角は等しいから、 $\angle AFE = \angle ABD$

また、AB // DC で、平行線の錯角は等しいから、 $\angle BDC = \angle ABD$

よって、あてはまるのはウとエ。

なお、平行四辺形の対角は等しいから $\angle ADC = \angle ABC$ で、 $\angle ABC$ は $\angle ABD$ より大きい。よって、アはあてはまらない。また、FE // BD より、 $\angle AEF = \angle ADB$ もし、 $\triangle ABD$ が $AB = AD$ の二等辺三角形であれば $\angle ADB = \angle ABD$ となるが、 $AB = 6\text{cm}$ 、 $AD = 8\text{cm}$ だから、 $\angle ADB$ と $\angle ABD$ は等しくない。よって、イもあてはまらない。

(2)

対頂角は等しいから、 $\angle BGC = \angle DGE$

BC // DE より、平行線の錯角は等しいから、 $\angle GBC = \angle GDE$ 、 $\angle GCB = \angle GED$

これらのうちどれか 2 つを使って、2 組の角がそれぞれ等しいことを示せばよい。

(3)

①

点 D から辺 BC の延長に垂線 DI をひく。

$\triangle CDE$ は正三角形だから、 $\angle CDE = 60^\circ$

AD // BI で、平行線の錯角は等しいから、

$\angle DCI = \angle CDE = 60^\circ$

よって、 $\triangle DCI$ は 60° の角をもつ直角三角形だから、DC :

CI : DI = 2 : 1 : $\sqrt{3}$

$CI = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$

$DI = \sqrt{3}CI = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}(\text{cm})$

よって、 $\triangle BID$ で、三平方の定理より、 $BD^2 = BI^2 + DI^2 = (8+3)^2 + (3\sqrt{3})^2 = 148$

$BD > 0$ だから、 $BD = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}(\text{cm})$

②

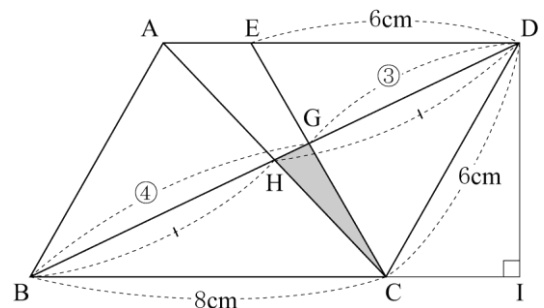
AD // BC より、 $BG : DG = BC : DE = 8 : 6 = 4 : 3$ よって、 $BG = BD \times \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}BD$

また、平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから、 $BH = DH$ よって、 $BH = \frac{1}{2}BD$

$HG = BG - BH = \frac{4}{7}BD - \frac{1}{2}BD = \frac{8}{14}BD - \frac{7}{14}BD = \frac{1}{14}BD$

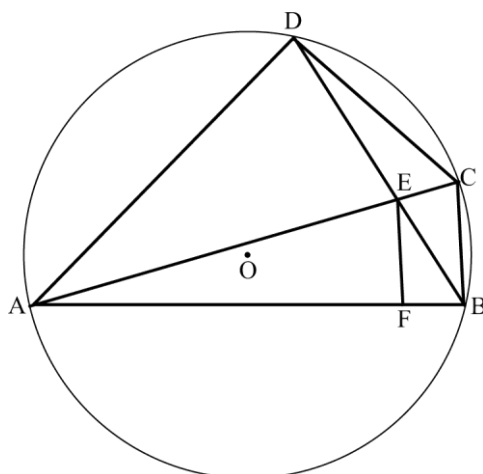
$\triangle CGH$ と $\triangle BCD$ は、それぞれ HG, BD を底辺としたときの高さが等しいから、面積の比は底辺の長さ

の比になる。よって、 $\triangle CGH = \frac{1}{14} \triangle BCD = \frac{1}{14} \times \frac{1}{2} \times BC \times DI = \frac{1}{14} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 3\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{7}(\text{cm}^2)$



【問 13】

下の図のように、四角形 $ABCD$ の 4 つの頂点 A , B , C , D が円 O の周上にある。線分 AC と BD の交点を E とする。また、 E を通り辺 BC と平行な直線と辺 AB との交点を F とする。



次の問 1, 問 2 に答えなさい。

(岐阜県 2019 年度)

問 1 $\triangle ACD \sim \triangle EBF$ であることを証明しなさい。

問 2 AC が円 O の直径で、 $OA=6$ cm, $BC=3$ cm, $CE=2$ cm のとき、

(1) AB の長さを求めなさい。

(2) BF の長さを求めなさい。

(3) $\triangle ACD$ の面積を求めなさい。

問 1	〔証明〕		
問 2	(1)	cm	
	(2)	cm	
	(3)	cm ²	

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle ACD$ と $\triangle EBF$ で

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$$\angle ACD = \angle EBF \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{CD}$ に対する円周角だから

$$\angle CAD = \angle EBC \quad \cdots \textcircled{2}$$

$BC \parallel FE$ より, 平行線の錯角だから

$$\angle BEF = \angle EBC \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から, } \angle CAD = \angle BEF \quad \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ から

2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACD \sim \triangle EBF$$

問 2

$$(1) 3\sqrt{15} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$$

$$(3) 9\sqrt{15} \text{ cm}^2$$

解説

問 1

$\triangle ACD$ と $\triangle EBF$ で

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから, $\angle ACD = \angle EBF \cdots \textcircled{1}$

$\widehat{CD}$ に対する円周角だから, $\angle CAD = \angle EBC \cdots \textcircled{2}$

$BC \parallel FE$ より, 平行線の錯角だから

$$\angle BEF = \angle EBC \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から, } \angle CAD = \angle BEF \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ から, 2 組の角がそれぞれ等しいので $\triangle ACD \sim \triangle EBF$

問 2

(1)

半円の弧に対する円周角は 90° だから

$\triangle ABC$ は直角三角形。

$AC = 2OA = 12(\text{cm})$ だから, 三平方の定理より,

$$AB = \sqrt{12^2 - 3^2} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}(\text{cm})$$

(2)

$BC \parallel FE$ だから, 三角形と比の定理より $AC : CE = AB : BF$

$$(1) \text{ より, } AC = 12\text{cm}, AB = 3\sqrt{15}\text{cm} \text{ だから, } 12 : 2 = 3\sqrt{15} : BF \quad BF = \frac{6\sqrt{15}}{12} = \frac{\sqrt{15}}{2}(\text{cm})$$

(3)

$$BC \parallel FE \text{ だから, 三角形と比の定理より, } AE : AC = EF : CB \quad (12 - 2) : 12 = EF : 3 \quad EF = \frac{5}{2}(\text{cm})$$

$$BC \parallel FE \text{ より, } \angle AFE = \angle ABC = 90^\circ, (2) \text{ より, } BF = \frac{\sqrt{15}}{2}\text{cm}$$

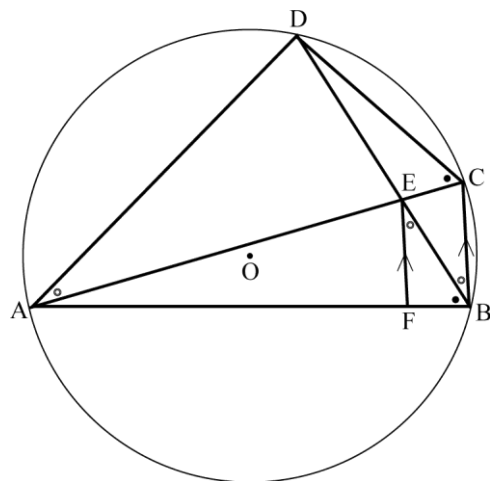
$$\text{よって, } \triangle EBF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{15}}{8}(\text{cm}^2)$$

$$\text{また } \triangle EBF \text{ で三平方の定理より, } BF^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}, EF^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \text{ だから, } EB = \sqrt{\frac{15}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{10}(\text{cm})$$

問 1 より, $\triangle ACD \sim \triangle EBF$ で, 相似比は $AC : EB = 12 : \sqrt{10}$

したがって, 面積比は $\triangle ACD : \triangle EBF = 12^2 : (\sqrt{10})^2 = 144 : 10 = 72 : 5$

$$\text{よって, } \triangle ACD = \triangle EBF \times \frac{72}{5} = \frac{5\sqrt{15}}{8} \times \frac{72}{5} = 9\sqrt{15}(\text{cm}^2)$$



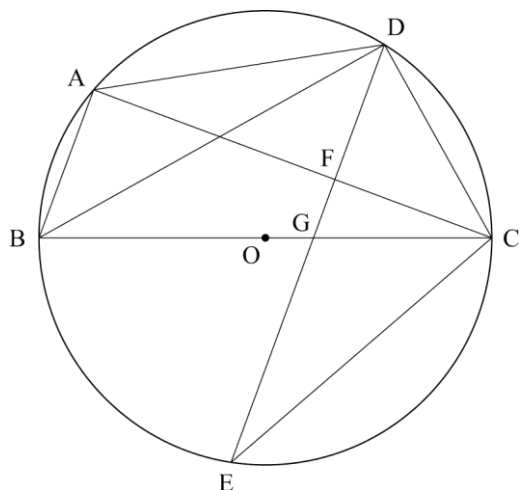
【問 14】

図5において、3点A, B, Cは円Oの円周上の点であり、BCは円Oの直径である。 $\widehat{AC}$ 上に点Dをとり、点Dを通りACに垂直な直線と円Oとの交点をEとする。また、DEとAC, BCとの交点をそれぞれF, Gとする。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(静岡県 2019 年度)

図5



問1 $\triangle DAC \sim \triangle GEC$ であることを証明しなさい。

問2 $\widehat{AD} : \widehat{DC} = 3 : 2$, $\angle BGE = 70^\circ$ のとき, $\angle EDC$ の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	度

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle DAC$ と $\triangle GEC$ で

$\widehat{DC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle DAC = \angle GEC \quad \cdots \textcircled{1}$$

仮定より, $\angle GFC = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{2}$

直径に対する円周角より, $\angle BAC = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{3}$

②, ③より, 同位角が等しいから, $AB \parallel FG \quad \cdots \textcircled{4}$

④より, 平行線の錯角は等しいから

$$\angle ABD = \angle EDB \quad \cdots \textcircled{5}$$

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ABD = \angle ACD \quad \cdots \textcircled{6}$$

$\widehat{BE}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle EDB = \angle ECG \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑤, ⑥, ⑦より, $\angle ACD = \angle ECG \quad \cdots \textcircled{8}$

①, ⑧より, 2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle DAC \sim \triangle GEC$$

問 2 48 度

解説

問 1

$\triangle DAC$ と $\triangle GEC$ の辺の長さの関係について何も記されていないので, 相似条件は「2組の角がそれぞれ等しい」を用いることが予想される。同じ弧に対する円周角は等しいことなどを利用し, 等しい2組の角を見つける。

問 2

円周角の大きさは同じ弧に対する中心角の半分で, 中心角は弧の長さに比例するから, 円周角も弧の長さに比例する。 $\angle ABD$, $\angle DBC$ はそれぞれ $\widehat{AD}$, $\widehat{DC}$ に対する円周角だから, $\widehat{AD} : \widehat{DC} = 3 : 2$ のとき, $\angle ABD = 3a^\circ$, $\angle DBC = 2a^\circ$ とおける。また, 問 1 より, $\angle EDB = \angle ABD = 3a^\circ$

$\triangle BGD$ で, 内角と外角の性質より, $\angle BGE = \angle DBG + \angle GDB$

よって, $2a + 3a = 70 \quad 5a = 70 \quad a = 14$ したがって, $\angle ABD = 3 \times 14^\circ = 42^\circ$

また, $\triangle DFC$ で, 内角と外角の性質より, $\angle FDC = \angle AFD - \angle FCD$

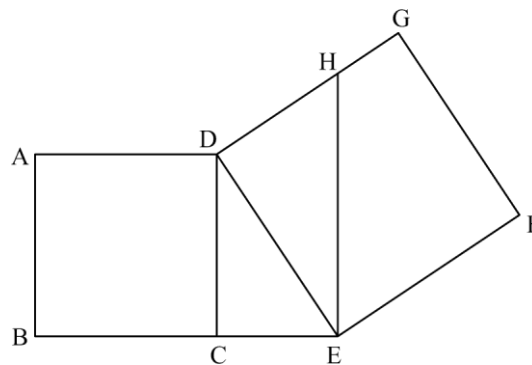
仮定より $\angle AFD = 90^\circ$ で, 問 1 より $\angle FCD = \angle ABD = 42^\circ$ だから, $\angle EDC = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

【問 15】

右図において、四角形 ABCD は 1 辺の長さが 3 cm の正方形である。E は直線 BC 上にあって C について B と反対側にある点であり、 $CE < BC$ である。

F, G は直線 DC について E と同じ側にある点であり、4 点 D, E, F, G を結んでできる四角形 DEFG は正方形である。H は、E を通り辺 DC に平行な直線と線分 DG との交点である。 $CE = x$ cm とし、 $0 < x < 3$ とする。

次の問いに答えなさい。



(大阪府 A 2019 年度)

問 1 正方形 ABCD の対角線 AC の長さを求めなさい。

問 2 $\triangle DCE$ の面積を x を用いて表しなさい。

問 3 次は、 $\triangle DCE \sim \triangle EDH$ であることの証明である。□^㉑□, □^㉒□ に入れるのに適している「角を表す文字」をそれぞれ書きなさい。また、^㉓[] から適しているものを一つ選び、記号を○で囲みなさい。

〔証明〕

$\triangle DCE$ と $\triangle EDH$ において

四角形 ABCD は正方形だから $\angle DCE = 90^\circ \cdots \text{㉑}$

四角形 DEFG は正方形だから $\angle \text{□}^{\text{㉒}} = 90^\circ \cdots \text{㉒}$

㉑, ㉒より $\angle DCE = \angle \text{□}^{\text{㉓}} \cdots \text{㉓}$

DC // HE であり、平行線の錯角は等しいから

$\angle CDE = \angle \text{□}^{\text{㉔}} \cdots \text{㉔}$

㉓, ㉔より、

^㉕[ア 1 組の辺とその両端の角 イ 2 組の辺の比とその間の角 ウ 2 組の角]

がそれぞれ等しいから

$\triangle DCE \sim \triangle EDH$

問 4 $x = 2$ であるときの線分 DH の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

解答欄

問 1	cm	
問 2	cm ²	
問 3	㉠	
	㉡	
	㉢	ア イ ウ
問 4	〔求め方〕 cm	

解答

問1 $3\sqrt{2}$ cm

問2 $\frac{3}{2}x$ cm²

問3

㉑ EDH

㉒ DEH

㉓ ウ

問4

〔求め方〕

$\angle DCE = 90^\circ$ だから $DE^2 = DC^2 + CE^2$

$DE = y$ cm とすると $y^2 = 3^2 + 2^2$

これを解くと、 $y > 0$ より $y = \sqrt{13}$

$\triangle DCE \sim \triangle EDH$ だから

$CE : DH = DC : ED = 3 : \sqrt{13}$

よって $DH = \frac{\sqrt{13}}{3} CE = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ (cm)

$\frac{2\sqrt{13}}{3}$ cm

解説

問1

A と C を結んでできる $\triangle ABC$ は、 $\angle ABC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから、 $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$

よって、 $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$ (cm)

問2

底辺が x cm、高さが 3 cm の三角形だから、面積は、 $\frac{1}{2} \times x \times 3 = \frac{3}{2}x$ (cm²)

問3

㉑ $\angle DCE$ に対応する角が入るから、 $\angle EDH$

㉒ $\angle CDE$ に対応する角が入るから、 $\angle DEH$

㉓ ㉑と㉒で、2組の角がそれぞれ等しいことを示している。

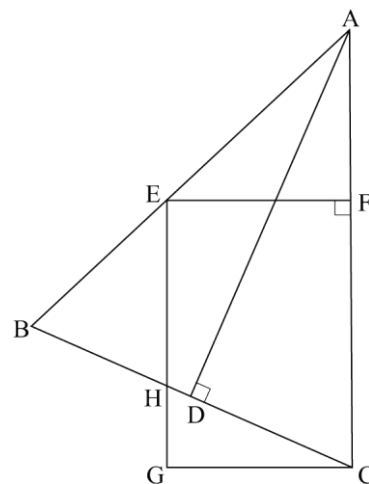
問4

まず、 $\triangle DCE$ で、三平方の定理を使って辺 DE の長さを求める。

次に、相似な図形では対応する辺の長さの比が等しいことを利用して、 DH の長さを求める。

【問 16】

右図において、 $\triangle ABC$ は $AB=AC=11$ cm の二等辺三角形であり、頂角 $\angle BAC$ は鋭角である。D は、A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。E は辺 AB 上にあって A, B と異なる点であり、 $AE > EB$ である。F は、E から辺 AC にひいた垂線と辺 AC との交点である。G は、E を通り辺 AC に平行な直線と C を通り線分 EF に平行な直線との交点である。このとき、四角形 EGCF は長方形である。H は、線分 EG と辺 BC との交点である。このとき、4 点 B, H, D, C はこの順に一直線上にある。



次の問いに答えなさい。

(大阪府 B 2019 年度)

問 1 $\triangle AEF$ の内角 $\angle AEF$ の大きさを a° とするとき、 $\triangle AEF$ の内角 $\angle EAF$ の大きさを a を用いて表しなさい。

問 2 $\triangle ABD \sim \triangle CHG$ であることを証明しなさい。

問 3 $HG=2$ cm, $HC=5$ cm であるとき、

(1) 線分 BD の長さを求めなさい。

(2) 線分 FC の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	度	
問 2	〔証明〕	
問 3	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問 1 $90 - a$ 度

問 2

〔証明〕

$\triangle ABD$ と $\triangle CHG$ において

$AD \perp BC$ だから $\angle ADB = 90^\circ \cdots \textcircled{ア}$

四角形 $EGCF$ は長方形だから

$\angle CGH = 90^\circ \cdots \textcircled{イ}$

$\textcircled{ア}$, $\textcircled{イ}$ より $\angle ADB = \angle CGH \cdots \textcircled{ウ}$

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形だから

$\angle ABD = \angle ACD \cdots \textcircled{エ}$

$EG \parallel AC$ であり, 平行線の錯角は等しいから

$\angle CHG = \angle ACD \cdots \textcircled{オ}$

$\textcircled{エ}$, $\textcircled{オ}$ より $\angle ABD = \angle CHG \cdots \textcircled{カ}$

$\textcircled{ウ}$, $\textcircled{カ}$ より, 2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \sim \triangle CHG$

問 3

(1) $\frac{22}{5}$ cm

(2) $\frac{27}{4}$ cm

解説

問 1

$\angle AFE = 90^\circ$ だから, $\angle EAF = 180^\circ - 90^\circ - a^\circ = 90^\circ - a^\circ$ よって, $(90 - a)$ 度

問 2

二等辺三角形の性質や平行線の性質を利用して, 2 組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問 3

(1)

$\triangle ABD \sim \triangle CHG$ より, $AB : CH = BD : HG$ よって, $BD = x$ cm とすると,

$$11 : 5 = x : 2 \quad 5x = 22 \quad x = \frac{22}{5}$$

(2)

$$BC = 2BD = 2 \times \frac{22}{5} = \frac{44}{5} \text{ (cm)} \quad \text{よって, } BH = BC - HC = \frac{44}{5} - 5 = \frac{44}{5} - \frac{25}{5} = \frac{19}{5} \text{ (cm)}$$

また, $\triangle ABC$ で, $EH \parallel AC$ より, $EH : AC = BH : BC$ よって, $EH = y$ cm とすると

$$y : 11 = \frac{19}{5} : \frac{44}{5} \quad y : 11 = 19 : 44 \quad 44y = 11 \times 19 \quad y = \frac{11 \times 19}{44} = \frac{19}{4}$$

$$FC = EG = EH + HG = \frac{19}{4} + 2 = \frac{27}{4} \text{ (cm)}$$

【問 17】

図3は次のような手順1～5でかけられたものである。ただし、手順4の
については図3にかかれていない。下の(1)～(3)に答えなさい。

(島根県 2019 年度)

図3のかき方

手順1…点Oを中心とし、半径2 cm の円 O_1 をかく。

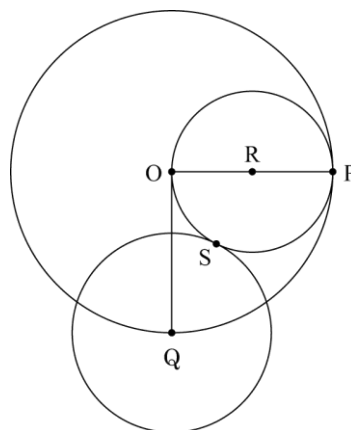
手順2…円 O_1 の周上に2点P, Qを $\angle POQ = 90^\circ$ となるようにとる。

手順3…線分OPの中点Rを中心とし、半径1 cm の円 O_2 をかく。

手順4… を点Sとする。

手順5…点Qを中心として点Sで円 O_2 と接する円 O_3 をかく。

図3

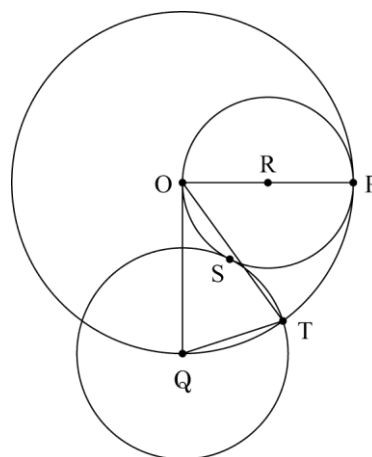


(1) に、点Sをどのようにとればよいか説明することがらをかき入れ、手順4を完成させなさい。

(2) 円 O_3 の半径を求めなさい。

(3) 図4のように、円 O_1 と円 O_3 の交点のうち、点Pに近い方の交点を点Tとする。図4の $\triangle OQT$ と問2で考えた図2の $\triangle ABC$ が相似であることを、次のように証明した。この証明を完成させなさい。

図4



【証明】

$\triangle OQT$ と $\triangle ABC$ において

2点Q, Tは円 O_1 の周上の点だから、 $OQ = OT = 2$ cm

問2より、 $AB = AC = 1$ cm

よって、 $OQ : AB = OT : AC = 2 : 1$ …①

$\triangle OQT \sim \triangle ABC$

(1)	手順 4…	を点 S とする。
(2)	cm	
(3)	[証明] $\triangle OQT$ と $\triangle ABC$ において 2 点 Q, T は円 O_1 の周上の点だから, $OQ = OT = 2 \text{ cm}$ 問 2 より, $AB = AC = 1 \text{ cm}$ よって, $OQ : AB = OT : AC = 2 : 1 \quad \cdots \textcircled{1}$ $\triangle OQT \sim \triangle ABC$	

解答

(1) 手順 4…線分 QR と円 O_2 の交点を点 S とする。

(2) $(\sqrt{5}-1)$ cm

(3)

〔証明〕

$\triangle OQT$ と $\triangle ABC$ において

2 点 Q, T は円 O_1 の周上の点だから,

$OQ=OT=2$ cm

問 2 より, $AB=AC=1$ cm

よって, $OQ:AB=OT:AC=2:1$ …①

また, 点 T は円 O_3 の周上の点だから,

$QT=(\sqrt{5}-1)$ cm

問 2 の (3) より, $BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ cm

よって, $QT:BC=2:1$ …②

①, ②より 3 組の辺の比がすべて等しいので

$\triangle OQT \sim \triangle ABC$

解説

(1)

線分 QR と円 O_2 との交点が S となる。

補足

線分 QR と円 O_2 との交点を X とし, 円 O_2 の下側の $\widehat{OP}$ 上に X とは異なる位置にある点 S をとると, 直線 QR に対して点 S と対称な位置にある点 S' がとれて $QS=QS'$ となる。中心が点 Q, 半径が QS の円は, 2 点 S, S' を通るため, 円 O_2 と 2 点で交わってしまうので, 2 つの円は接しているとはいえない。点 S を点 X の位置にとると, 点 S' は点 S と一致するので, 円 O_2 と点 S で接する円がかける。

(2)

$\triangle OQR$ は $OR=1$ cm, $OQ=2$ cm, $\angle QOR=90^\circ$ の直角三角形だから, 三平方の定理より

$QR=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ (cm) (1)より, 点 S は線分 QR と円 O_2 との交点だから, 円 O_3 の半径 QS は

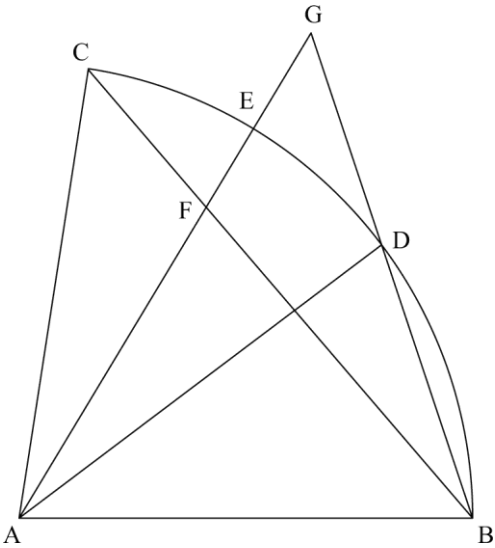
$QS=QR-RS=\sqrt{5}-1$ (cm)

(3)

$\triangle ABC$ は 3 辺の長さ, 3 つの内角の大きさがすべてわかっているのに対して, $\triangle OQT$ は 3 辺の長さがわかっているが, 角度に関する情報が全く与えられていないことから, 相似条件の「3 組の辺の比がすべて等しい」が使えるように証明を進めていくとよい。

【問 18】

下の図のような、おうぎ形 ABC があり、 $\widehat{BC}$ 上に点 D をとり、 $\widehat{DC}$ 上に点 E を、 $\widehat{DE}=\widehat{EC}$ となるようにとる。また、線分 AE と線分 BC の交点を F 、線分 AE の延長と線分 BD の延長の交点を G とする。



次の問 1、問 2 に答えなさい。

(山口県 2019 年度)

- 問 1 $\triangle GAD \sim \triangle GBF$ であることを証明しなさい。
- 問 2 おうぎ形 ABC の半径が 8 cm、線分 EG の長さが 2 cm であるとき、線分 AF の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2		cm

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle GAD$ と $\triangle GBF$ で

共通な角だから

$$\angle DGA = \angle FGB \cdots ①$$

$\widehat{DE} = \widehat{EC}$ から, $\widehat{DE} = \frac{1}{2}\widehat{DC}$ なので

$$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle DAC \cdots ②$$

また, 円周角と中心角の関係から

$$\angle DBC = \frac{1}{2}\angle DAC \cdots ③$$

②, ③から

$$\angle DAE = \angle DBC$$

よって

$$\angle DAG = \angle FBG \cdots ④$$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle GAD \sim \triangle GBF$

問 2 $\frac{32}{5}$ cm

解説

問 1

円周角の大きさは, 同じ弧に対する中心角の大きさの $\frac{1}{2}$ であることなどを利用して, 2つの三角形で 2組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問 2

$\triangle GAD$ と $\triangle CAF$ において, $\widehat{DE} = \widehat{EC}$ より, $\angle DAE = \angle EAC$ よって, $\angle DAG = \angle FAC \cdots ⑤$

また, $\triangle GAD \sim \triangle GBF$ より, $\angle GDA = \angle GFB \cdots ⑥$ 対頂角は等しいから, $\angle GFB = \angle CFA \cdots ⑦$

⑥, ⑦より, $\angle GDA = \angle CFA \cdots ⑧$ ⑤, ⑧より, 2組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle GAD \sim \triangle CAF$

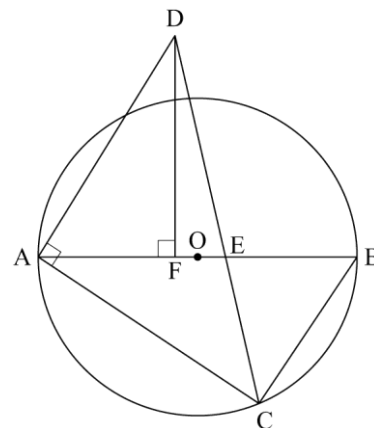
よって, $AG : AC = AD : AF$ $AG = 8 + 2 = 10(\text{cm})$, $AC = AD = 8\text{cm}$ だから, $AF = x\text{cm}$ とすると,

$$10 : 8 = 8 : x \quad 10x = 64 \quad x = \frac{32}{5}$$

【問 19】

図のように、線分 AB を直径とする円 O がある。円 O の周上に点 C をとり、 $BC < AC$ である三角形 ABC をつくる。三角形 ACD が $AC = AD$ の直角二等辺三角形となるような点 D をとり、辺 CD と直径 AB の交点を E とする。また、点 D から直径 AB に垂線をひき、直径 AB との交点を F とする。このとき、次の問 1・問 2 に答えなさい。

(高知県 A 2019 年度)



問1 $\triangle ABC \sim \triangle DAF$ を証明せよ。

問2 AB=10 cm, BC=6 cm, CA=8 cm とするとき, 線分 FE の長さを求めよ。

解答欄

問 1	〔証明〕 $\triangle ABC$ と $\triangle DAF$ において したがって $\triangle ABC \sim \triangle DAF$
問 2	cm

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle DAF$ において

直径 AB に対する円周角は 90° であることから

$$\angle ACB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

仮定から

$$\angle DFA = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle ACB = \angle DFA \cdots \textcircled{3}$$

$\triangle ACD$ は, $AC = AD$ の直角二等辺三角形より

$$\angle DAC = \angle BAC + \angle DAF = 90^\circ \cdots \textcircled{4}$$

$\triangle ABC$ において, 3つの内角の和は 180° であり

①より $\angle ACB = 90^\circ$ であることから

$$\angle BAC + \angle ABC = 90^\circ \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より

$$\angle ABC = \angle DAF \cdots \textcircled{6}$$

③, ⑥より

2組の角がそれぞれ等しい

したがって $\triangle ABC \sim \triangle DAF$

問 2 $\frac{32}{35}$ cm

解説

問 1

直径に対する円周角は 90° であることなどを利用して, 2組の角がそれぞれ等しいことを導く。

問 2

$\triangle ABC \sim \triangle DAF$ より, $AB : DA = BC : AF$ $AB = 10\text{cm}$, $DA = CA = 8\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$ だから

$$10 : 8 = 6 : AF \quad 10AF = 48 \quad AF = \frac{24}{5}\text{cm}$$

また, $\angle ABC = \angle DAF$ で, 錯角が等しいから, $AD \parallel CB$

$$\text{よって, } AE : BE = AD : BC = 8 : 6 = 4 : 3 \text{ だから, } AE = AB \times \frac{4}{4+3} = 10 \times \frac{4}{7} = \frac{40}{7}(\text{cm})$$

$$FE = AE - AF = \frac{40}{7} - \frac{24}{5} = \frac{200}{35} - \frac{168}{35} = \frac{32}{35}(\text{cm})$$

【問 20】

図 1～図 4 のように、円 O の周上に 2 点 A , B があり、 $AB=2\sqrt{3}$ cm, $\angle AOB=120^\circ$ である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2019 年度)

問 1 $\angle OAB$ の大きさは何度か。

問 2 図 2～図 4 のように、線分 AO の延長と円 O との交点を C とする。さらに、点 O を通り線分 AB に平行な直線と線分 BC との交点を D とする。このとき、次の (1)～(3) に答えよ。

(1) 線分 AC の長さは何 cm か。

(2) 線分 OD の長さは何 cm か。

(3) 図 3, 図 4 のように、線分 AD と線分 OB との交点を E とするとき、次の①, ②に答えよ。

① $\triangle ODE \sim \triangle BAE$ であることを証明せよ。

② 図 4 のように、点 E を通り線分 AB に平行な直線と線分 AC , 線分 BC との交点をそれぞれ P , Q とする。このとき、四角形 $OPQD$ の面積は何 cm^2 か。

図 1

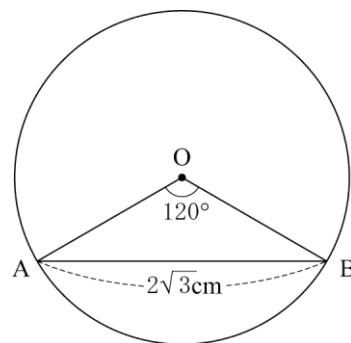


図 2

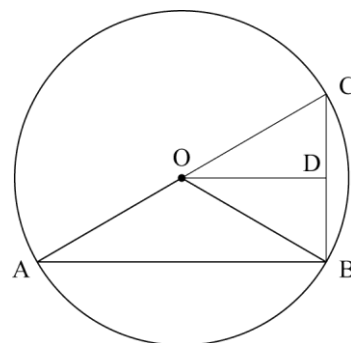


図 3

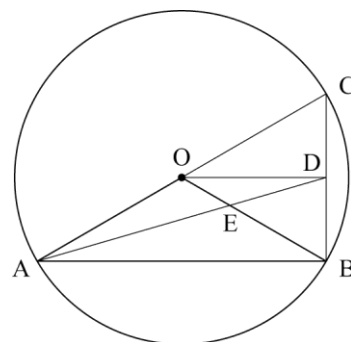
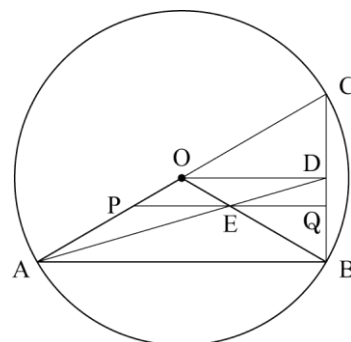


図 4



解答欄

問 1	$\angle OAB = \quad \circ$		
問 2	(1)	cm	
	(2)	cm	
	(3)	①	
		②	

解答

問 1 $\angle OAB = 30$ $[\text{°}]$

問 2

(1) 4 $[\text{cm}]$

(2) $\sqrt{3}$ $[\text{cm}]$

(3)

①

$\triangle ODE$ と $\triangle BAE$ において

$\angle OED = \angle BEA$ (対頂角) $\cdots$ ①

$\angle ODE = \angle BAE$ (平行線の錯角) $\cdots$ ②

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ODE \sim \triangle BAE$

② $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ $[\text{cm}^2]$

解説

問 1

OA, OB は半径だから, $\triangle OAB$ は $OA = OB$ の二等辺三角形である。

よって, $\angle OAB = (180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 30^\circ$

問 2

(1)

線分 AC は円 O の直径になるから, $\angle ABC = 90^\circ$ 問 1 より $\angle OAB = 30^\circ$ だから, $\triangle ABC$ は 30°

と 60° の角をもつ直角三角形で, $AC : AB = 2 : \sqrt{3}$ $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}AB = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = 4(\text{cm})$

(2)

$\triangle CAB$ で, $OD \parallel AB$ より, $OD : AB = CO : CA = 1 : 2$ $OD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(\text{cm})$

(3)

①

$\triangle ODE$ と $\triangle BAE$ で, 対頂角は等しいから, $\angle OED = \angle BEA \cdots$ ①

また, $OD \parallel AB$ で, 平行線の錯角は等しいから, $\angle ODE = \angle BAE \cdots$ ②, $\angle DOE = \angle ABE \cdots$ ③

①, ②, ③のうち, いずれか2つを使って, 2組の角がそれぞれ等しいことを示せばよい。

②

(1)より, $\angle ABC = 90^\circ$ で, OD, PQ は AB に平行だから, 四角形 OPQD は $\angle ODQ = \angle PQD = 90^\circ$ の台形になる。(2)より, $OD = \sqrt{3}\text{cm}$

また, ①より, $\triangle ODE \sim \triangle BAE$ だから, $OE : BE = DE : AE = OD : BA = 1 : 2$

したがって, $\triangle OAB$ で, $PE : AB = OE : OB = 1 : (1+2) = 1 : 3$ $PE = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$

同様に, $\triangle DAB$ で, $EQ : AB = DE : DA = 1 : (1+2) = 1 : 3$ $EQ = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$

さらに, $DQ : DB = DE : DA = 1 : 3$ $DQ = \frac{1}{3}DB$ ここで, $CD : DB = CO : OA = 1 : 1$ より,

$DB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = 1(\text{cm})$ よって, $DQ = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}(\text{cm})$

四角形 OPQD $= \frac{1}{2} \times (OD + PQ) \times DQ = \frac{1}{2} \times (OD + PE + EQ) \times DQ = \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{18}(\text{cm}^2)$

【問 21】

図 1～図 3 のように、円周上に 3 点 A, B, C があり、 $AB=AC=3$ cm, $BC=2$ cm である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2019 年度)

問 1 図 2 のように、点 A から線分 BC にひいた垂線と線分 BC との交点を H とするとき、線分 AH の長さは何 cm か。

問 2 図 3 のように、点 B をふくまない弧 AC 上に $\angle BAC = \angle CAD$ となる点 D をとり、線分 AC と線分 BD との交点を E とする。このとき、次の (1)～(4) に答えよ。

- (1) $\triangle ABC \sim \triangle BEC$ であることを証明せよ。
- (2) $\triangle ABE$ の面積は何 cm^2 か。
- (3) $\angle AEB$ と大きさが等しい角を、次の①～④の中から 1 つ選び、その番号を書け。
 - ① $\angle ABC$
 - ② $\angle BCD$
 - ③ $\angle ADC$
 - ④ $\angle BAD$
- (4) 四角形 ABCD の面積は何 cm^2 か。

図 1

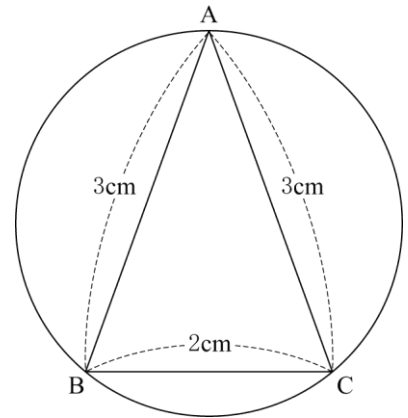


図 2

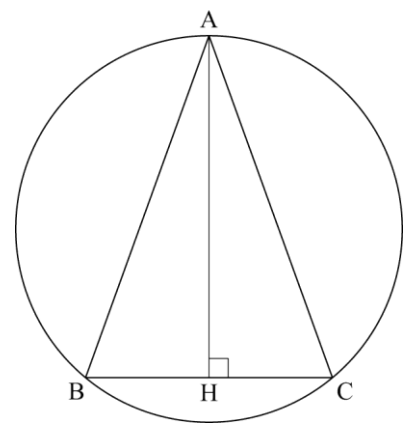
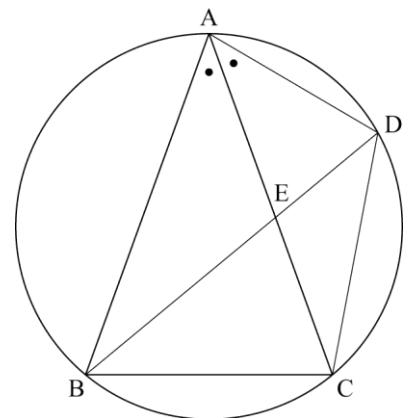


図 3



解答欄

問 1	cm	
問 2	(1)	
	(2)	cm ²
	(3)	
	(4)	cm ²

解答

問 1 $2\sqrt{2}$ cm

問 2

(1)

$\triangle ABC$ と $\triangle BEC$ において

$\angle ACB = \angle BCE$ (共通) …①

$\angle BAC = \angle CAD$

$\angle CAD = \angle EBC$ (弧 CD に対する円周角)

より

$\angle BAC = \angle EBC$ …②

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \sim \triangle BEC$

(2) $\frac{10\sqrt{2}}{9}$ [cm^2]

(3) ③

(4) $\frac{28\sqrt{2}}{9}$ [cm^2]

解説

問 1

$\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ で, $\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$, $AB = AC$, $AH = AH$ (共通) 直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから, $\triangle ABH \cong \triangle ACH$ よって, $BH = CH = 1\text{cm}$

$\triangle ABH$ で, 三平方の定理より, $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 3^2 - 1^2 = 8$ $AH > 0$ だから, $AH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}(\text{cm})$

問 2

(1)

同じ弧に対する円周角は等しいことなどを利用して, 2組の角がそれぞれ等しいことを示す。

(2)

(1)より, $\triangle ABC \sim \triangle BEC$ で, 相似比は, $AC : BC = 3 : 2$ よって, 面積の比は $3^2 : 2^2 = 9 : 4$

$\triangle ABC$ の面積は, $\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\text{cm}^2)$

よって, $\triangle BEC = \frac{4}{9} \triangle ABC = \frac{4}{9} \times 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{9}(\text{cm}^2)$

$\triangle ABE = \triangle ABC - \triangle BEC = 2\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{9} = \frac{10\sqrt{2}}{9}(\text{cm}^2)$

(3)

$\triangle AED$ の内角と外角の性質より, $\angle AEB = \angle EAD + \angle ADE$

仮定より, $\angle EAD = \angle BAC$ また, $\widehat{BC}$ に対する円周角だから, $\angle BAC = \angle BDC$

よって, $\angle EAD + \angle ADE = \angle BDC + \angle ADE = \angle ADC$

したがって, $\angle AEB$ と大きさの等しい角は③の $\angle ADC$

(4)

$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ で, $AB = AC$, $\angle BAE = \angle CAD$, $\widehat{AD}$ に対する円周角だから, $\angle ABE = \angle ACD$

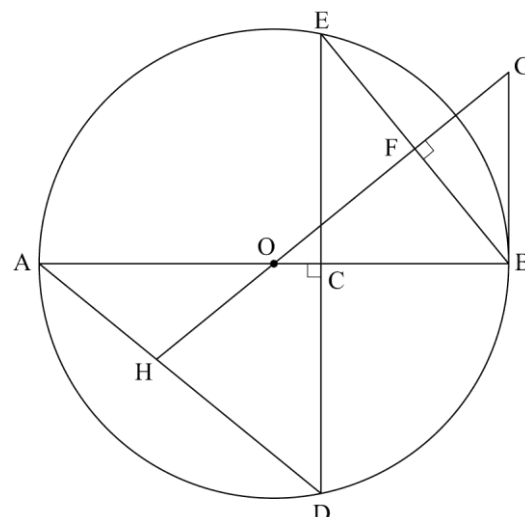
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから, $\triangle ABE \cong \triangle ACD$

よって, (2)より, $\triangle ACD = \frac{10\sqrt{2}}{9}(\text{cm}^2)$

四角形 $ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD = 2\sqrt{2} + \frac{10\sqrt{2}}{9} = \frac{28\sqrt{2}}{9}(\text{cm}^2)$

【問 22】

右の図は、点 O を中心とする円で、線分 AB は円の直径である。点 C は線分 OB 上にあり、2 点 D, E は、 C を通る線分 OB の垂線と円 O との交点である。点 F は線分 BE 上にあつて、 $OF \perp BE$ である。また、点 G は OF の延長と B における円 O の接線との交点であり、点 H は FO の延長と線分 AD との交点である。



このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2019 年度)

問 1 $\triangle ADC \sim \triangle BGF$ であることを証明しなさい。

問 2 $AB = 10 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ のとき、

(1) 線分 CE の長さを求めなさい。

(2) 線分 DH の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle ADC$ と $\triangle BGF$ において

$AB \perp DC$ だから

$$\angle DCA = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$OF \perp BE$ だから

$$\angle GFB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle DCA = \angle GFB \cdots \textcircled{3}$$

$\angle DAC$ と $\angle DEB$ は $\widehat{DB}$ に対する円周角だから

$$\angle DAC = \angle DEB \cdots \textcircled{4}$$

BG は円の接線で, AB は円の直径だから

$\angle ABG = 90^\circ$ であって, ①から, $DE \parallel BG$ である。

よって

$$\angle DEB = \angle GBF \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より

$$\angle DAC = \angle GBF \cdots \textcircled{6}$$

③, ⑥より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADC \sim \triangle BGF$$

問 2

$$(1) 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{7\sqrt{15}}{6} \text{ cm}$$

解説

問 1

同じ弧に対する円周角は等しいことと, 円の接線は接点を通る半径に垂直であることを利用して 2組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問 2

(1)

O と E を結ぶ。OB, OE は円 O の半径だから, $OB = OE = 10 \div 2 = 5(\text{cm})$

また, $OC = OB - BC = 5 - 4 = 1(\text{cm})$

$\triangle OCE$ は $\angle OCE = 90^\circ$ の直角三角形だから, 三平方の定理より, $CE^2 = OE^2 - OC^2 = 5^2 - 1^2 = 24$

$CE > 0$ だから, $CE = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$

(2)

$$AC = AB - BC = 10 - 4 = 6(\text{cm})$$

円は直径について対称で, $AB \perp DE$ だから $CD = CE = 2\sqrt{6}\text{cm}$

$\triangle ADC$ で, 三平方の定理より $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 6^2 + (2\sqrt{6})^2 = 60$

$AD > 0$ だから, $AD = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}(\text{cm})$

右図のように, H から AB に垂線 HI をひくと $HI \parallel DC$

よって, $\triangle ADC$ で, $AH : AD = AI : AC \cdots \textcircled{7}$

また, $\triangle BGF$ と $\triangle OGB$ において,

$\angle BFG = \angle OBG = 90^\circ$, $\angle BGF = \angle OGB$ (共通) より

$$\angle GBF = \angle GOB$$

対頂角は等しいから, $\angle GOB = \angle HOA$ よって, $\angle GBF = \angle HOA$

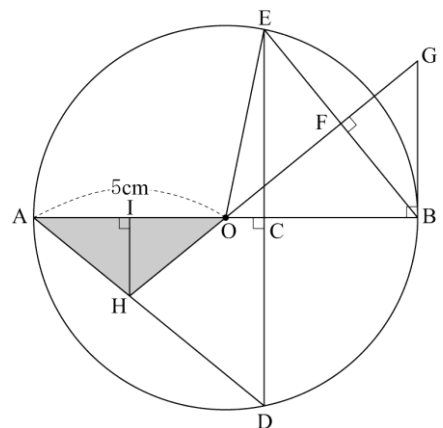
問 1 より, $\angle GBF = \angle HAO$ よって, $\angle HOA = \angle HAO$

$\triangle OAH$ は 2つの角が等しいから

$$OH = AH \text{ の二等辺三角形で, } AI = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}(\text{cm})$$

$$\text{よって, } \textcircled{7} \text{ より, } AH : 2\sqrt{15} = \frac{5}{2} : 6 \quad 6AH = 5\sqrt{15} \quad AH = \frac{5\sqrt{15}}{6} \text{ cm}$$

$$DH = AD - AH = 2\sqrt{15} - \frac{5\sqrt{15}}{6} = \frac{7\sqrt{15}}{6}(\text{cm})$$

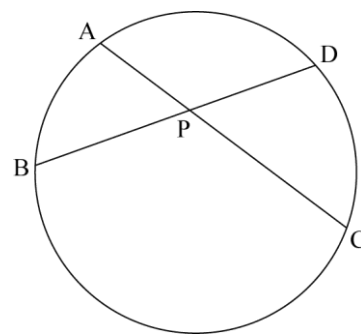


【問 23】

右の図のように、円周上に 4 点 A, B, C, D をとり、線分 AC と BD の交点を P とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2019 年度)



問 1 $PA : PD = PB : PC$ であることを次のように証明した。空らんをうめて証明を完成させなさい。

ただし、証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

【証明】

$\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ において

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle PAB = \angle PDC \cdots \text{①}$$

...②

①, ②より

$$\triangle PAB \sim \triangle PDC$$

相似である 2 つの三角形の対応する は等しいから

$$PA : PD = PB : PC$$

問 2 線分 PC の長さは線分 PA の長さの 2 倍である。PB = 6 cm, PD = 5 cm のとき、次の問いに答えなさい。

(1) $PA : PD = PB : PC$ を用いて、線分 PA の長さを求めなさい。

(2) $\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ の面積の比を求めなさい。

問 1	$\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ において $\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから $\angle PAB = \angle PDC \cdots \textcircled{1}$	
	...$\textcircled{2}$	
問 2	(1)	cm
	(2)	$\triangle PAB : \triangle PDC =$:

解答

問 1

$\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ において

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから

$\angle PAB = \angle PDC \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいから

$\angle APB = \angle DPC \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PAB \sim \triangle PDC$

相似である 2 つの三角形の対応する 辺の比 は等しいから

$PA : PD = PB : PC$

問 2

(1) $\sqrt{15}$ cm

(2) $\triangle PAB : \triangle PDC = 3 : 5$

解説

問 1

円周角の定理から 2 組の角がそれぞれ等しいことを示せばよい。

$\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ において, $\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから $\angle PAB = \angle PDC \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいから $\angle APB = \angle DPC \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より, 2 組の角がそれぞれ等しいから $\triangle PAB \sim \triangle PDC$

相似である 2 つの三角形の対応する辺の比は等しいから $PA : PD = PB : PC$

問 2

(1)

線分 PA の長さを xcm とすると, $PA : PD = PB : PC$ より, $x : 5 = 6 : 2x$ $2x^2 = 30$ $x^2 = 15$

$x > 0$ より, $x = \sqrt{15}(\text{cm})$

(2)

$\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ の面積の比は相似比の 2 乗の比だから $\triangle PAB : \triangle PDC = (\sqrt{15})^2 : 5^2 = 15 : 25 = 3 : 5$