9. 式の証明の問題 （2011 年度出題）

【問 1】

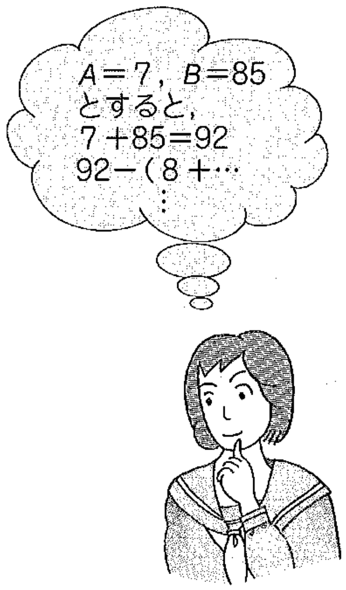
次は，健司さんと美咲さんの会話である。
これを読んで，次の問1～問3に答えなさい。

（秋田県　2011 年度）

健司「1 から 9 までの自然数の中から，1 つ思い浮かべてください。
それを A とするよ。」

美咲「はい。」($A=7$ を思い浮かべる…)

健司「思い浮かべた A を当ててみせるよ。
それでは，2 けたの自然数 B を何か 1 つ考えて，A と B の和を求めてください。」



美咲「はい。」($B=85$ として，$A+B$ を求める…)

健司「次に，A と B の和から，B の各位の数の和をひいた結果を，教えてください。」

美咲「 ㋐ です。」

健司「最初に思い浮かべた自然数 A は，7 ですね。」

美咲「どうしてわかったの？」

健司「2 けたの自然数 B の十の位の数を a，一の位の数を b とすると，
$B=$ ㋑ と表すことができる。これから B の各位の数の和をひくと，
㋑ $-(a+b)=$ ㋒ となり，㋒ は必ず ㋓ の倍数になる。だから，A と B の和から B の各位の数の和をひいた結果を S とすると，B がどんな 2 けたの自然数であっても，S を
㋓ で割ったときの ㋔ から A がわかるんだ。」

美咲「そうか。それでは，S が 41 になったときは，A は ㋕ なのね。」

健司「そのとおり。だけど，S から A を当てるこの方法は，A を 1 から 10 までの自然数から選んでもらうようにすると，困ったことが起こるんだ。A が ㋖ なのか ㋗ なのかの判断がつかなくなってしまうんだ。」

美咲「そうね。でも，A を 1 から 9 までの自然数から選んでもらうのであれば，B が 3 けたの自然数のときも，S から A を当てることができるわね。」

問1　2 人の会話の内容が正しくなるように，㋐～㋓と㋕にはあてはまる数または式を，㋔には適切な言葉を書きなさい。

問2　健司さんは，「判断がつかなくなってしまう」と言っています。このことについて，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　㋖，㋗にあてはまる数を書きなさい。

(2)　判断がつかなくなってしまうのはなぜか，その理由を書きなさい。

問3　美咲さんは，「A を 1 から 9 までの自然数から選んでもらうのであれば，B が 3 けたの自然数のときも，S から A を当てることができる」と言っています。このことの説明と自然数 A の当て方をまとめた内容が正しくなるように，㋘～㋜の $\boxed{}$ に続きを書いて，［美咲さんのレポート］を完成させなさい。ただし，㋛，㋜には数を書きなさい。

［美咲さんのレポート］

1 から 9 までの自然数から選んでもらう数を A,

3 けたの自然数を B,

A と B の和から B の各位の数の和をひいた結果を S とする。

3 けたの自然数 B の百の位の数を a, 十の位の数を b, 一の位の数を c とすると,

$\boxed{\quad ㋘ \quad}$

よって，A は 1 から 9 までの自然数なので，

・S が $\boxed{\quad ㋙ \quad}$ ときは，A は $\boxed{\quad ㋚ \quad}$ になる。

・S が $\boxed{㋛}$ で割り切れるときは，A は $\boxed{㋜}$ になる。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="6">問1</td><td>㋐</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋑</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋒</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋓</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋔</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋕</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td rowspan="2">(1)</td><td>㋖</td><td></td></tr>
<tr><td>㋗</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">問3</td><td>㋘</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋙</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋚</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋛</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>㋜</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

解答

問1

㋐ 79

㋑ $10a+b$

㋒ $9a$

㋓ 9

㋔ 余り

㋕ 5

問2

(1)

㋖ 1

㋗ 10

(2)

どちらの場合も S を 9 で割ったときの余りが 1 になるから

㋘

$B=100a+10b+c$ と表すことができる。

このことから

$S=A+B-(a+b+c)$

$=A+100a+10b+c-(a+b+c)$

$=99a+9b+A$

$=9(11a+b)+A$

$11a+b$ は整数だから $9(11a+b)$ は 9 の倍数である。

問3

㋙ 9 で割りきれない

㋚ S を 9 で割ったときの余り

㋛ 9

㋜ 9

解説

問1

2 けたの自然数 B の十の位を a, 一の位を b とすると $B=10a+b$ と表すことができる。

これから B の各位の和をひくと

$(10a+b)-(a+b)=10a+b-a-b=9a$ となり

$9a$ は必ず 9 の倍数になる。

だから A と B の和から B の各位の和をひいた結果を S とすると

$S=A+B=A+9a$ となるので

B がどんな 2 けたの自然数であっても

S を 9 で割ると余りから A がわかる。

【問 2】

2，3，4 や 5，6，7 のような，中央の数が 3 の倍数である連続する 3 つの整数では，最も大きい数の 2 乗から最も小さい数の 2 乗をひいた差は，12 の倍数になる。このことを証明しなさい。

（栃木県　2011 年度）

解答欄

解答

n を整数とすると中央の数は $3n$ と表せるので
最も小さい数は $3n-1$，最も大きい数は $3n+1$ となる。
最も大きい数の 2 乗から最も小さい数の 2 乗をひいた差は
$(3n+1)^2-(3n-1)^2$
$=(9n^2+6n+1)-(9n^2-6n+1)$
$=12n$
n は整数だから $12n$ は 12 の倍数である。
したがって最も大きい数の 2 乗から最も小さい数の 2 乗をひいた差は，12 の倍数である。

【問 3】

$\sqrt{1+3+5}=\sqrt{9}=3$ のように，連続する 3 つの奇数の和の平方根が整数となる場合を見つけるため，S さんは，次のような方法を考えました。下の各問に答えなさい。

（埼玉県 2011 年度 前期）

Sさんの考えた方法

> n を整数とすれば，連続する 3 つの奇数は，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$ と表される。この 3 つの奇数の和は，
> $(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)=6n+3=3(2n-1)$
> となる。この 3 つの奇数の和の平方根 $\sqrt{3(2n+1)}$ が整数となるので，
> $3(2n+1)=3^2\times(\text{ある数})^2$
> と表される。さらに $2n+1$ は奇数なので，(ある数) を小さい数から順に考えると，
> $3(2n+1)=3^2\times1^2$ これを解くと $n=1$ だから，3 つの奇数は 1，3，5 となる。
> $3(2n+1)=3^2\times3^2$ これを解くと $n=13$ だから，3 つの奇数は 25，27，29 となる。
> $3(2n+1)=3^2\times5^2$ これを解くと $n=$ $\boxed{\text{ア}}$ だから，3 つの奇数は $\boxed{\text{イ}}$ ，$\boxed{\text{ウ}}$ ，$\boxed{\text{エ}}$ となる。

問1 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる数を，それぞれ書きなさい。

問2 連続する 5 つの奇数の和の平方根も，例えば，$\sqrt{1+3+5+7+9}=\sqrt{25}=5$ のように整数となる場合があります。$\sqrt{1+3+5+7+9}$ 以外で最も小さい連続する 5 つの奇数を求めます。途中の説明も書いて答えを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td><td>ウ</td><td></td><td>エ</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="6">〔説明〕

よって，連続する 5 つの奇数は，$\boxed{}$ ，$\boxed{}$ ，$\boxed{}$ ，$\boxed{}$ ，$\boxed{}$ となる。</td></tr>
</table>

解答
問1
ア　37
イ　73
ウ　75
エ　77
問2
〔説明〕
n を整数とすれば連続する 5 つの奇数は
$2n-1$, $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$ と表される。
この 5 つの奇数の和は
$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)=10n+15=5(2n+3)$となる。
この 5 つの奇数の和の平方根 $\sqrt{5(2n+3)}$ が整数となるので
$5(2n+3)=5^2\times$(ある数)^2 と表される。
さらに $2n+3$ は奇数なので(ある数)を小さい数から順に考えると
$5(2n+3)=5^2\times1^2$
これを解くと $n=1$ だから
5 つの奇数は 1, 3, 5, 7, 9 となる。
次に $5(2n+3)=5^2\times3^2$
これを解くと $n=21$ である。
よって連続する 5 つの奇数は $\boxed{41}$, $\boxed{43}$, $\boxed{45}$, $\boxed{47}$, $\boxed{49}$ となる。
解説
問2
n を整数とすると連続する 5 つの奇数は $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$ と表せる。
このとき$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)=10n+15=5(2n+3)$
$\sqrt{5(2n+3)}$ が整数になるには $5(2n+3)=5^2\times$(ある数)^2 になる。
$2n+3$ は奇数だからある数も奇数。
小さい順に考えて $5\times(2n+3)=5^2\times1^2$ とすると $n=1$ で
連続する数は, 1, 3, 5, 7, 9
次に小さいのは $5(2n+3)=5^2\times3^2$
$2n+3=45$
$n=21$
連続する数は 41, 43, 45, 47, 49

【問 4】

ある中学校で，S さんが作った問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

（東京都　2011 年度）

［S さんが作った問題］

図1のように，9 つの正方形の枠内に文字 a, b, c, d, e, f, g, h, i を書いた表がある。
図1において，連続する 9 つの自然数を小さい方から順に，a, b, c, d, e, f, g, h, i にそれぞれ代入する。
図2は，図1において，1 から始まる連続する 9 つの自然数をそれぞれ代入した場合を表しており，図3は，図1において，2 から始まる連続する 9 つの自然数をそれぞれ代入した場合を表している。
図1において，連続する 9 つの自然数を小さい方から順に，a, b, c, d, e, f, g, h, i にそれぞれ代入するとき，$a+e+i=30$ となる e の値を調べてみよう。

図1

a	b	c
d	e	f
g	h	i

図2

1	2	3
4	5	6
7	8	9

図3

2	3	4
5	6	7
8	9	10

問1　［S さんが作った問題］で，$a+e+i=30$ となる e の値を求めよ。

先生は，［S さんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

図1において，P と Q をそれぞれ，$P=b\times h+d\times f$, $Q=a\times i+c\times g$ とする。
図2で，P と Q はそれぞれ，$P=2\times 8+4\times 6=40$, $Q=1\times 9+3\times 7=30$ であり，このとき，$P-Q=10$ となる。また，図3で，P と Q はそれぞれ，$P=3\times 9+5\times 7=62$, $Q=2\times 10+4\times 8=52$ であり，このときも，$P-Q=10$ となる。
図1において，連続する 9 つの自然数を小さい方から順に，a, b, c, d, e, f, g, h, i にそれぞれ代入するとき，連続する 9 つの自然数がどの数から始まる場合でも，$P-Q=10$ となることを確かめなさい。

問2　［先生が作った問題］で，a, b, c, d, f, g, h, i をそれぞれ e を用いて表し，$P-Q=10$ となることを証明せよ。

解答欄

問1	
問2	〔証明〕 a, b, c, d, f, g, h, i をそれぞれ e を用いて表すと, P－Q＝10

解答
問1　10
問2
〔証明〕
a, b, c, d, f, g, h, i をそれぞれ e を用いて表すと
$a=e-4$, $b=e-3$, $c=e-2$, $d=e-1$, $f=e+1$, $g=e+2$, $h=e+3$, $i=e+4$ と表せる。
P と Q をそれぞれ e を用いて表すと
$\mathrm{P}=b\times h+d\times f$
$=(e-3)(e+3)+(e-1)(e+1)$
$=2e^2-10$…①
$\mathrm{Q}=a\times i+e\times g$
$=(e-4)(e+4)+(e-2)(e+2)$
$=2e^2-20$…②
と表せる。
①, ②より
$\mathrm{P}-\mathrm{Q}=(2e^2-10)-(2e^2-20)$
$=10$
よって
$\mathrm{P}-\mathrm{Q}=10$
解説
問1
a, i は e をもとにすると $a=e-4$…①, $i=e+4$…②と表せる。
よって $a+e+i=30$ に①と②を代入して
$e-4+e+e+4=30$
$3e=30$
$e=10$

【問 5】

太郎さんは，連続する 3 つの整数において，最も大きい整数の 2 乗から，最も小さい整数の 2 乗をひいた差について調べようと思い，下の表をつくりました。

表

連続する 3 つの整数	最も大きい整数の 2 乗から最も小さい整数の 2 乗をひいた差
3，4，5	16
6，7，8	$\boxed{ア}$
11，12，13	$\boxed{イ}$

次の(1)～(3)に答えなさい。

（島根県　2011 年度）

(1) 表の中の，$\boxed{ア}$ ，$\boxed{イ}$ にあてはまる数を答えなさい。

(2) この結果から，太郎さんは，次のように予想しました。

［予想］
連続する 3 つの整数において，最も大きい整数の 2 乗から，最も小さい整数の 2 乗をひいた差は，どんなときでも 4 で割り切れる。

この予想が正しいことを，文字 n を使って説明しなさい。そのとき，解答欄の $\boxed{}$ には，あてはまる言葉や式を書き入れること。

(3) 連続する 3 つの整数において，最も大きい整数の 2 乗から，最も小さい整数の 2 乗をひいた差が 420 になるとき，連続する 3 つの整数を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">　　　　を n とすると
連続する 3 つの整数は
$\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$ と表せる。</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

解答

(1)

ア　28

イ　48

(2)

最も小さい整数　を n とすると

連続する 3 つの整数は

$\boxed{n}$, $\boxed{n+1}$, $\boxed{n+2}$ と表せる。

$(n+2)^2-n^2$

$=(n^2+4n+4)-n^2$

$=4n+4$

$=4(n+1)$

ここで 4×整数となるので 4 で割り切れる。

(3)　104, 105, 106

解説

(3)

最も小さい数を n とすると 3 つの連続する数は n, $n+1$, $n+2$ と表せる。

最も大きい整数の 2 乗から最も小さい整数の 2 乗をひいた差が 420 より

$(n+2)^2-n^2=420$　$n^2+4n+4-n^2=420$　$4n+4=420$　$4n=416$　$n=104$

したがって 3 つの数は 104, 105, 106

【問 6】

2 けたの正の整数がある。この整数の十の位の数と一の位の数を入れかえた整数をつくる。もとの整数を 5 倍した数と，もとの整数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる整数を 4 倍した数との和を N とする。
このとき，N は 9 の倍数であることを，文字式を使って証明せよ。

（香川県　2011 年度）

解答欄

〔証明〕

解答
〔証明〕
もとの整数の十の位の数を x，一の位の数を y とすると，
もとの整数は $10x+y$，入れかえてできる整数は $10y+x$ と表せる。
したがって，$N=5(10x+y)+4(10y+x)$
$=54x+45y$
$=9(6x+5y)$
$6x+5y$ は整数だから，N は 9 の倍数である。

【問 7】

表は，1 から 49 までの奇数を順に並べ，上から 1 段目，2 段目，…，5 段目としたものである。表の 2 段目の 13，23 や 4 段目の 37，47 のように，表の同じ段でとなり合って並んだ 2 つの奇数において，大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひいた差は，40 でわりきれることの証明を，文字を使って $\boxed{}$ の中に完成せよ。

（福岡県　2011 年度）

1 段目	1	11	21	31	41
2 段目	3	13	23	33	43
3 段目	5	15	25	35	45
4 段目	7	17	27	37	47
5 段目	9	19	29	39	49

解答欄

〔証明〕

したがって，表の同じ段でとなり合って並んだ 2 つの奇数において，大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひいた差は，40 でわりきれる。

解答
〔証明〕
n を整数とすると
小さい方の奇数は $2n-1$，大きい方の奇数は $2n+9$ と表される。
大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひいた差は
$(2n+9)^2-(2n-1)^2$
$=4n^2+36n+81-(4n^2-4n+1)$
$=40n+80$
$=40(n+2)$
40×(整数) となる。
解説
となり合う 2 つの数で小さい方の奇数を $2n-1$ (n は整数) とすると，大きい方は $2n-1+10=2n+9$ と表せる。
大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひくと
$(2n+9)^2-(2n-1)^2=40n+80=40(n+2)$

【問 8】

下の[表]のように行と列を決め，数字が書かれたカードを並べる。

まず，1 行目の 1 列目から $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ のカードを

2 行目の 2 列目から $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ のカードを

3 行目の 3 列目から $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ のカードを…

というように各行に 4 枚のカードを規則的に並べていく。

このとき，あとの問1～問3に答えなさい。

（佐賀県 2011 年度 前期）

［表］

行＼列	1列目	2列目	3列目	4列目	5列目	6列目	7列目	8列目	・	・
1行目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$						
2行目		$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$					
3行目			$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$				
4行目				$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$			
5行目					・	・	・	・		
6行目						・	・	・	・	
・							・	・	・	・
・								・	・	・

問1　7 行目の 8 列目に置かれるカードの数字を求めなさい。

問2　$\boxed{40}$ と書かれたカードは，何行目の何列目に並ぶか，求めなさい。

問3　A さん，B さん，C さん，D さんは[表]について，それぞれ次のようなことに気づいた。

このとき，あとの(1)～(3)の各問いに答えなさい。

ただし，カードの左端，右端とは各行ごとに並べた 4 枚のカードのそれぞれ左端，右端にあるカードを表している。

［気づいたこと］（m は自然数とする）

A さん：カードの右端に書かれた数は，4 で割り切れる数です。また，m 行目について，カードの左端に書かれた数は，カードの右端に書かれた数より $\boxed{①}$ 小さい数になっているので，カードの左端に書かれた数は m を使って表すと，$\boxed{②}$ になることがわかります。

B さん：m を 2 以上とすると，m 行目について，カードの左端から 2 番目の数を「基準の数」とし，基準の数とその左右の数の 3 つの数の和を m を使って表すと $\boxed{③}$ になることがわかります。また，基準の数とその上下の数の 3 つの数の和も $\boxed{③}$ になることがわかります。

C さん：B さんが言っている基準の数とその上下左右の数の 5 つの数の和は，基準の数の 5 倍になることがわかります。

D さん：ところで，自然数を 2 乗した数 1，4，9，16，…のうち，偶数の場合はカードの右端にあり，奇数の場合はカードの左端にあることが予想できます。

(1) ［気づいたこと］の中の $\boxed{①}$ ～ $\boxed{③}$ にあてはまる数または式を求めなさい。

(2) C さんは,「B さんが言っている基準の数とその上下左右の数の 5 つの数の和は, 基準の数の 5 倍になる」と言っている。このことを m を用いた式を使って説明しなさい。

(3) D さんは,「自然数を 2 乗した数 1, 4, 9, 16, …のうち, 偶数の場合はカードの右端にあり, 奇数の場合はカードの左端にあることが予想できます。」と言っている。この予想が正しいことを, 次の［説明］のようにして示した。

$\boxed{④}$ ～ $\boxed{⑥}$ にあてはまる数または式を求めなさい。

［説明］

1, 4, 9, 16, …はそれぞれ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, …であり,
偶数を 2 乗した数は偶数, 奇数を 2 乗した数は奇数となるので,
2 乗する前の数に着目して考える。

・2 乗する前の数が偶数のとき

偶数は $2n$ (n は自然数) と表され, 偶数を 2 乗すると,

$$(2n)^2 = 4n^2$$

となり, n は自然数だから, n^2 も自然数となり 4 で割り切れる。
よって, 偶数を 2 乗した数はカードの右端にあることがいえる。…㋐

・2 乗する前の数が奇数のとき

奇数は $\boxed{④}$ (n は自然数) と表され, 奇数を 2 乗すると,

$$\begin{aligned} &(\boxed{④})^2 \\ &= \boxed{⑤}\, n^2 - \boxed{⑤}\, n + 1 \\ &= \boxed{⑤}\,(n^2 - n + 1) - \boxed{⑥} \end{aligned}$$

となり, n は自然数だから, $n^2 - n + 1$ も自然数となる。
よって, 奇数を 2 乗した数はカードの左端にあることがいえる。…㋑

㋐, ㋑よりすべての自然数について, D さんの予想が正しいことが説明できる。

解答欄

問1			
問2	行目の　　　　列目		
問3	(1)	①	
		②	
		③	
	(2)		
	(3)	④	
		⑤	
		⑥	

解答
問1 26
問2 10 行目の 13 列目
問3
(1)
① 3
② $4m-3$
③ $12m-6$
(2)
基準の数は m 行目について $4m-2$ と表せる。
また基準の数とその左右の数の 3 つの数の和と
基準の数とその上下の数の 3 つの数の和は等しいので
基準の数とその上下左右の数の 5 つの数の和は
$2(12m-6)-(4m-2)=20m-10$
$=5(4m-2)$
よって $4m-2$ は自然数なので
基準の数とその上下左右の数の 5 つの数の和は，基準の数の 5 倍になる。
(3)
④ $2n-1$
⑤ 4
⑥ 3
解説
問2
$40\div4=10$ より 10 行目のいちばん右。
10 行目は 10，11，12，13 列目に並ぶから 13 列目。
問3
(1)
m 行目の右端の数は $4m$ と表せる。
左端の数は $4m$ より 3…①小さいので $4m-3$…②と表せる。
カードの左端から 2 番目は $4m-2$，左から 3 番目は $4m-1$ と表されるので
$4m-2$ を基準の数とすると
基準の数とその左右の数の和は
$(4m-3)+(4m-2)+(4m-1)=12m-6$…③となる。
また基準の数の上の数は $4m-2-3=4m-5$
下の数は $4m-2+3=4m+1$ より
基準の数とその上下の数の和は
$(4m-5)+(4m-2)+(4m+1)=12m-6$…③となる。
(3)
n が自然数のとき奇数は $2n-1$…④と表せる。
$(2n-1)^2=4n^2-4n+1=4(n^2-n+1)-3$
よって⑤は 4
⑥は 3
これより 4 の倍数より 3 小さい数になるので
右端から 3 つ左にあるから
奇数の 2 乗は左端にあるといえる。

【問 9】

次の(1), (2)に答えよ。

（長崎県　2011 年度）

(1) 3 けたの自然数 723 は，100×7＋10×2＋1×3 と表せる。このように，百の位が a，十の位が b，一の位が c である 3 けたの自然数を，a，b，c を用いて表せ。

(2) 百の位の数が一の位の数より大きい 3 けたの自然数 432 から，その数の百の位の数字と一の位の数字を入れかえてできる数 234 をひくと，その差は 198 となり 99 の倍数になる。
このように，「百の位の数が一の位の数より大きい 3 けたの自然数から，その数の百の位の数字と一の位の数字を入れかえてできる数をひくと，その差は 99 の倍数になる」ことを文字を使って説明せよ。
ただし，説明は解答用紙の「もとの 3 けたの自然数の百の位を a，十の位を b，一の位を c とおき，a は c より大きいものとする。」に続けて完成させよ。

解答欄

(1)	
(2)	もとの 3 けたの自然数の百の位を a，十の位を b，一の位を c とおき，a は c より大きいものとする。

解答

(1)　$100a+10b+c$

(2)

もとの3けたの自然数の百の位を a，十の位を b，一の位を c とおき，a は c より大きいものとする。

もとの数は $100a+10b+c$

入れかえてできる数は $100c+10b+a$ となるので

その差は

$100a+10b+c-(100c+10b+a)$

$=99a-99c$

$=99(a-c)$

$a-c$ は自然数だから $99(a-c)$ は99の倍数である。

したがって百の位の数が一の位の数より大きい3けたの自然数から

その数の百の位の数字と一の位の数字を入れかえてできる数をひくと

その差は99の倍数になる。

【問 10】

図1のように，O を頂点とし，底面の半径が r，母線の長さが $4r$ の円すいがある。このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県　2011 年度）

問1　底面の円周の長さを r の式で表せ。

図1

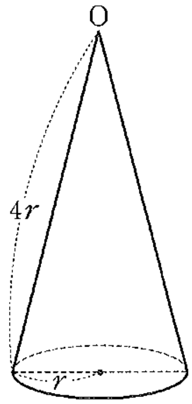
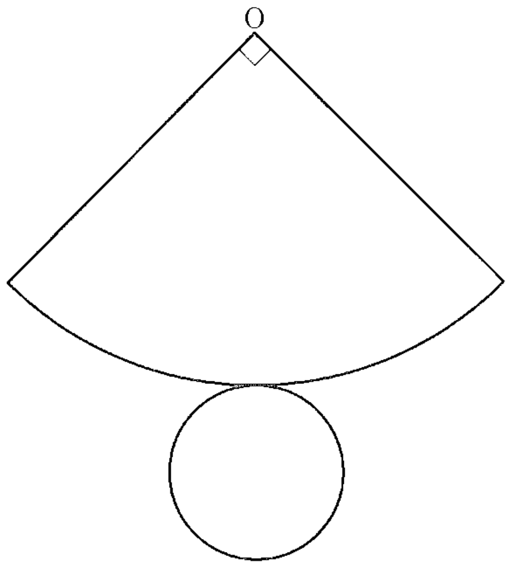


図2



問2　図2は図1の円すいの展開図である。この展開図において，おうぎ形の中心角の大きさが 90° となることを説明せよ。

問3　図3のように，図1の円すいの底面の直径をABとする。2点C，D は，それぞれ母線 OA，OB 上にあり，AC＝BD＝a である。また，線分 AC，BD の中点をそれぞれ E，F とする。この円すいの側面に，底面に平行で線分 CD を直径とする円の円周となる線をひき，この線で側面を 2 つに分ける。このうち，点Aを含む部分（図3の　　で示した部分）の面積を S とする。底面に平行で線分 EF を直径とする円の円周の長さを ℓ とするとき，S＝$a\ell$ となることを証明せよ。なお，図3の円すいの展開図のうち，側面になる部分を図4で示している。

図3

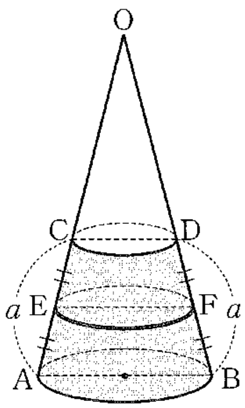
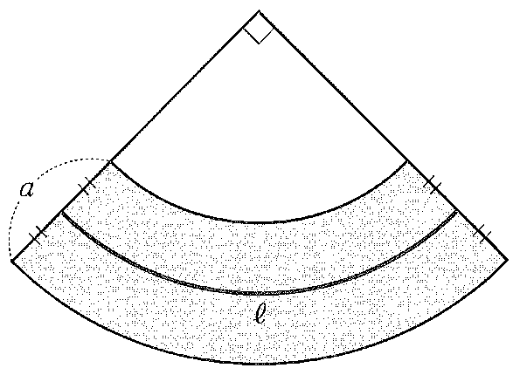


図4



解答欄

問1	
問2	
問3	

解答
問1　$2\pi r$
問2
おうぎ形の弧の長さは，問1で求めた円周に等しく $2\pi r$ である。
半径 $4r$ の円の円周は，$2\pi\times 4r=8\pi r$ であるので
弧の長さは半径 $4r$ の円周の $\dfrac{2\pi r}{8\pi r}$
すなわち $\dfrac{1}{4}$ である。
弧の長さは中心角に比例するので
中心角は $360^\circ\times\dfrac{1}{4}=90^\circ$ となる。
問3
半径が $4r$，中心角が 90° であるおうぎ形の面積は
$\pi\times(4r)^2\times\dfrac{1}{4}=4\pi r^2$
半径が $4r-a$，中心角が 90° であるおうぎ形の面積は
$\pi\times(4r-a)^2\times\dfrac{1}{4}=4\pi r^2-2\pi ar+\dfrac{1}{4}\pi a^2$
よって
$S=4\pi r^2-\left(4\pi r^2-2\pi ar+\dfrac{1}{4}\pi a^2\right)$
$=2\pi ar-\dfrac{1}{4}\pi a^2$…①
弧の長さが ℓ のおうぎ形の半径は
$4r-\dfrac{a}{2}$ であるので
$\ell=2\pi\times\left(4r-\dfrac{a}{2}\right)\times\dfrac{1}{4}=2\pi r-\dfrac{1}{4}\pi a$
したがって
$a\ell=2\pi ar-\dfrac{1}{4}\pi a^2$…②
①，②より $S=a\ell$ が成り立つ。
解説
問3
S は半径が $4r$ で中心角が 90° のおうぎ形の面積から
半径が $(4r-a)$，中心角が 90° のおうぎ形の面積をひいたもので
ℓ は半径 $\left(4r-\dfrac{a}{2}\right)$，中心角が 90° のおうぎ形の弧の長さである。

【問 11】

貴史君は,『式の計算の利用』の学習の中で, 次の連続する 3 つの整数の性質について, その証明を下のように学びました。

このとき, 下の(1), (2)の問いに答えなさい。

（宮崎県 2011 年度）

【連続する 3 つの整数の性質】

もっとも小さい数ともっとも大きい数の積は, まん中の数の 2 乗から 1 をひいた差に等しい。

【証明】

n を整数とし, 連続する 3 つの整数を $n-1$, n, $n+1$ と表す。
このとき, もっとも小さい数ともっとも大きい数の積は,
$(n-1)(n+1)=$ $\boxed{\text{ア}}$
だから, この積はまん中の数の 2 乗から 1 をひいた差に等しい。

(1) $\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる式をかきなさい。

(2) 貴史君は, 連続する 4 つの整数には次のような性質があることを知り, 下のように証明しました。

【連続する 4 つの整数の性質】

もっとも小さい数ともっとも大きい数の積は, 残りの 2 数の積から 2 をひいた差に等しい。

【貴史君の証明】

$\boxed{\text{イ}}$

だから, この積は残りの 2 数の積から 2 をひいた差に等しい。

このとき, 貴史君の証明が正しくなるように, $\boxed{\text{イ}}$ に証明をかき, 完成させなさい。

解答欄

(1)	ア	
(2)	イ	

解答
(1)
ア　n^2-1
(2)
イ
〔証明〕
n を整数とし連続する 4 つの整数を
$n-1,\ n,\ n+1,\ n+2$ と表す。
このときもっとも小さい数ともっとも大きい数との積は
$(n-1)\ (n+2)$
$=n^2+n-2$
$=n\ (n+1)-2$
解説
(2)
n を整数とし連続する 4 つの整数を $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$ とすると
最も小さい数ともっとも大きい数の積は
$n(n+3)=n^2+3n=n^2+3n+2-2=(n+1)(n+2)-2$ だから
この積は残りの 2 数の積から 2 をひいた差に等しい。