5.空間図形の複合問題 （長さ・面積・体積・角度ほか）【2005 年度出題】

【問 1】

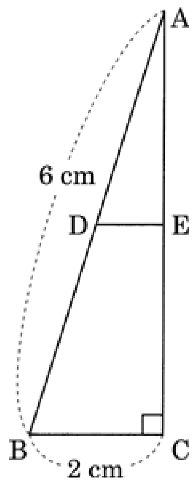
図Ⅰのように，AB＝6 cm，BC＝2 cm，∠C＝90°である直角三角形 ABC があります。辺 AB，AC の中点をそれぞれ点 D，E とするとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。ただし，円周率は π とします。

（岩手県 2005 年度）

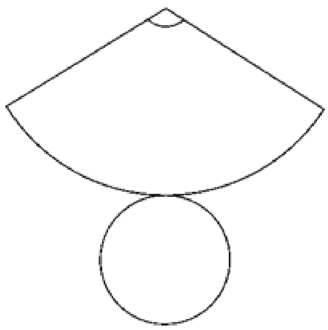
⑴ あとの図Ⅱは，図Ⅰの△ABC を，辺 AC を軸として1回転させてできる立体の展開図です。図Ⅱのおうぎ形の中心角を求めなさい。

⑵ 図Ⅰの中の四角形 DBCE を，あとの図Ⅲのように，辺 EC を軸として1回転させてできる立体の表面積を求めなさい。

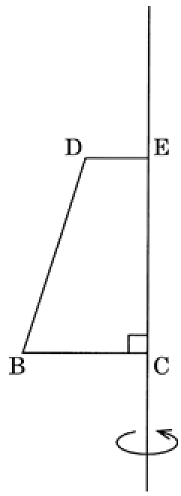
図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅲ



解答欄

(1)	度
(2)	cm^2

解答

(1)　120 度

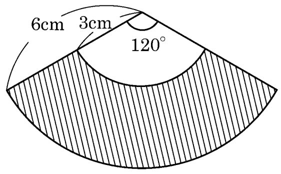
(2)　14π　cm^2

解説

⑴

展開図のおうぎ形の弧の長さは底面の円の円周の長さに等しいので

おうぎ形の中心角を a° とおくと $2\times\pi\times6\times\frac{a}{360}=2\times\pi\times2$ が成り立つ。



これを解くと

$a=120^\circ$

⑵

求める表面積は

DE を半径とする円の面積と BC を半径とする円の面積と図の斜線図の面積である。

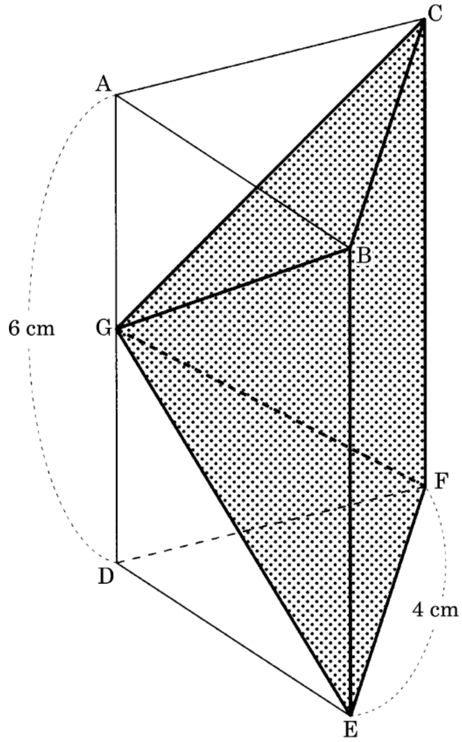
したがって $\pi+4\pi+(36\pi-9\pi)\times\frac{120}{360}=14\pi$　cm^2

【問 2】

図は，側面がすべて長方形の三角柱で，DE＝DF，EF＝4 cm，AD＝6 cm となっています。また，点 G は辺 AD の中点です。

このとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

（岩手県 2005 年度）



⑴ 面 BEFC に垂直な面をすべて書きなさい。

⑵ △GEF が正三角形であるとき，底面が BEFC で頂点が G である四角錐の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

(1) 面 ABC，面 DEF

(2) $8\sqrt{3}$ cm^3

解説

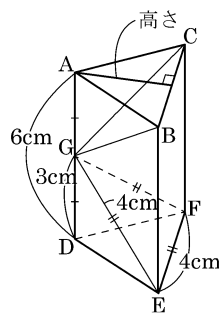
⑴

面 BEFC に垂直な面は三角柱の底面に当たる部分である。

したがって面 ABC と面 DEF である。

⑵

⑴より求める四角錐または立体の高さは図の通りになる。



△GDE で三平方の定理より

DE＝$\sqrt{4^2-3^2}$ ＝$\sqrt{7}$ cm

高さは$\sqrt{7-2^2}$ ＝$\sqrt{3}$ cm

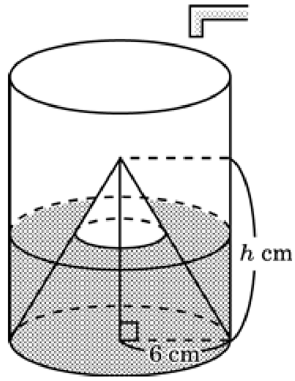
よって$\frac{1}{3}$×4×6×$\sqrt{3}$ ＝8$\sqrt{3}$ cm^3

【問 3】

底面の半径が 6 cm の円柱の形をした容器に，底面の半径が 6 cm で高さが h cm の円錐を，それぞれの底面が重なり合うように置く。図1は，円柱の形をした容器に水を入れたときの様子である。

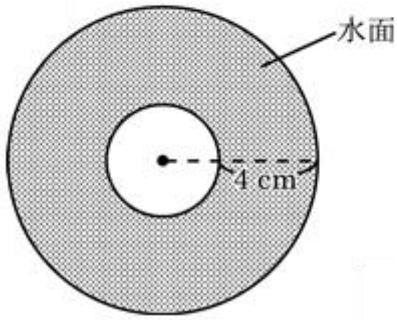
（秋田県 2005 年度）

図1



① 底面から水面までの高さが h cm より低いとき，水面は上から見ると，図2のように大小2つの円に囲まれた形となっている。水面の2つの円の半径の差が 4 cm のとき，底面から水面までの高さを h を用いて表しなさい。

図2



② 底面から水面までの高さが h cm になったとき，入れた水の体積を h を用いて表しなさい。ただし，円周率は π とする。

解答欄

①	cm
②	cm^3

解答

① $\dfrac{2h}{3}$ cm

② $24\pi h$ cm^3

解説

①

底面から水面までの高さを x cm とすると

$(h-x):h=(6-4):6$

$x=\dfrac{2h}{3}$

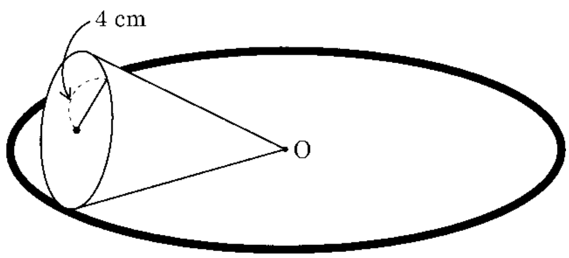
②

$\pi\times6^2\times h-\dfrac{1}{3}\pi\times6^2\times h=24\pi h$ cm^3

【問 4】

図のように，底面の半径が 4 cm の円すいを，頂点 O を中心として平面上で転がしたところ，太線で示した円の上を1周してもとの場所にかえるまでに，ちょうど3回転した。

（福島県　2005 年度）



①　太線で示した円の周の長さを求めなさい。

②　転がした円すいの表面積を求めなさい。

解答欄

①	cm
②	cm^2

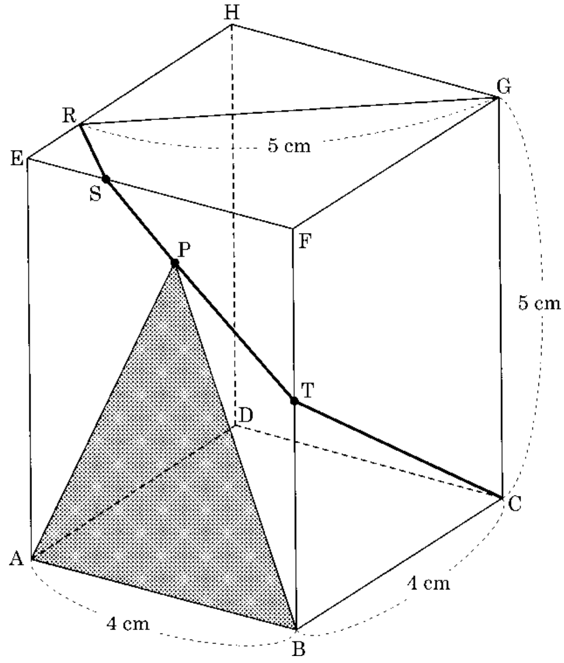
解答
①　24π　cm
②　64π　cm^2
解説
①
半径 4cm の円が3回転したのだから太線の円周の長さは
半径が 4cm の円の円周3つ分の長さである。
ゆえに $2\times4\pi\times3=24\pi$
②
①より太線の円の半径を r とすると
$2\pi r=24\pi$ より
$r=12$
側面積は太線の円の面積の $\frac{1}{3}$ であるから
$12^2\times\pi\times\frac{1}{3}=48\pi$
よって表面積は $16\pi+48\pi=64\pi$

【問 5】

図のように，底面が1辺 4 cm の正方形で，高さが 5 cm の直方体がある。この直方体の辺 EH 上に GR＝5 cm となるように点 R をとる。R から直方体の面に沿って，辺 EF と辺 BF に交わるようにして頂点 C まで最短で結ぶ線をひき，ひいた線が EF と交わる点を S，BF と交わる点を T とする。また，点 P は，このようにして R から C までひいた線上にある点とする。

このとき，次の(1)〜(3)の問いに答えなさい。

（福島県　2005 年度）



(1) AR の長さを求めなさい。

(2) 点 P が ST の中点であるとき△ABP の面積を求めなさい。

(3) △ABP の面積が最小になるように点 P をとるとき，AP の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2
(3)	cm

解答

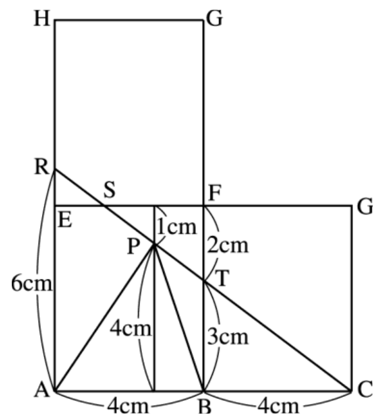
(1)　$\sqrt{26}$ cm

(2)　8 cm^2

(3)　$\dfrac{4\sqrt{34}}{5}$ cm

解説

⑴



三平方の定理より HR＝3

よって ER＝1 であるから AR＝$\sqrt{5^2+1^2}$ ＝$\sqrt{26}$

⑵

展開図を考えればよい。

AB＝BC であるから中点連結定理から BT＝$\dfrac{6}{2}$ ＝3

よって FT＝2

同様に中点連結定理を使うと△ABP の高さは 5－1＝4 である。

したがって△ABP＝4×4÷2＝8

⑶

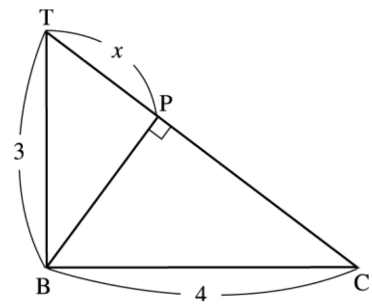
△ABP の面積が最小になるとき点 P は TC 上にあり

BP が最小だから TC⊥BP となる。

三平方の定理より TC＝$\sqrt{3^2+4^2}$ ＝5

TP＝x とすると PC＝5－x

BP の長さに着目して



$TB^2-TP^2=BC^2-PC^2$ だから

$3^2-x^2=4^2-(5-x)^2$

これを解いて

$x=\dfrac{9}{5}$

よって BP＝$\sqrt{3^2-\left(\dfrac{9}{5}\right)^2}$ ＝$\dfrac{12}{5}$

したがってそのときの AP の長さは

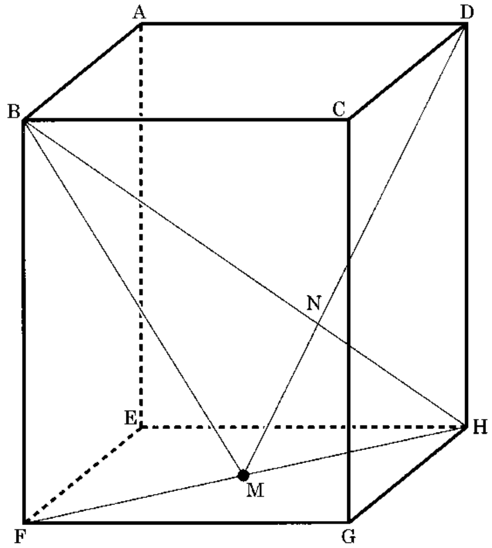
AP＝$\sqrt{4^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}$ ＝$\dfrac{4\sqrt{34}}{5}$

【問 6】

図のように，AB＝3 cm，BC＝4 cm，BF＝5 cm の直方体ABCDEFGH がある。線分 FH の中点を M とし，線分 DM と線分BH との交点を N とする。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（茨城県 2005 年度）



⑴ 線分 DM の長さを求めなさい。

⑵ △BMN の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2

解答

(1) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ cm

(2) $\dfrac{25}{6}$ cm^2

解説

⑴

△FGH に三平方の定理を用いて

FH＝$\sqrt{3^2+4^2}$ ＝5 cm

MH＝$\dfrac{1}{2}$ FH＝$\dfrac{5}{2}$ cm

△DMH に三平方の定理を用いて

DM＝$\sqrt{5^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}$ ＝$\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ cm

⑵

BD∥MH より△BDN∽△HMN となるから

BN : HN＝BD : HM＝2 : 1

よって△BMN : △HMN＝BN : HN＝2 : 1

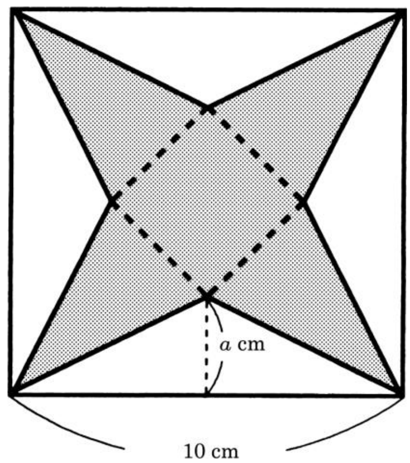
△BMH＝$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times 5$＝$\dfrac{25}{4}$ cm^2 だから

△BMN＝$\dfrac{2}{2+1}$△BMH＝$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{25}{4}=\dfrac{25}{6}$ cm^2

【問 7】

図のように，1辺が 10 cm の正方形の紙から，この正方形の各辺を底辺とする4つの合同な二等辺三角形を切りとると，正四角錐の展開図となる。切りとる二等辺三角形の底辺に対する高さを a cm とするとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（栃木県　2005 年度）



(1) 展開図を組み立ててできる正四角錐の表面積が 50 cm² になるとき，a の値を求めなさい。

(2) $a=2$ のとき，展開図を組み立ててできる正四角錐の高さを求めなさい。

解答欄

(1)	$a=$
(2)	cm

解答

(1) $a=\frac{5}{2}$

(2) $2\sqrt{5}$ cm

解説

(1)

正四角錐の表面積が 50cm² になるとき $10^2-\frac{1}{2}\times10\times a\times4=50$ より $a=\frac{5}{2}$

(2)

$a=2$ のとき正四角錐の底面の正方形の1辺の長さは

$\frac{\sqrt{2}}{2}\times(10-2\times2)=3\sqrt{2}$ cm

側面の二等辺三角形の高さは $\frac{10\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ cm

正四角錐の高さは $\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{98}{4}-\frac{18}{4}}=2\sqrt{5}$ cm

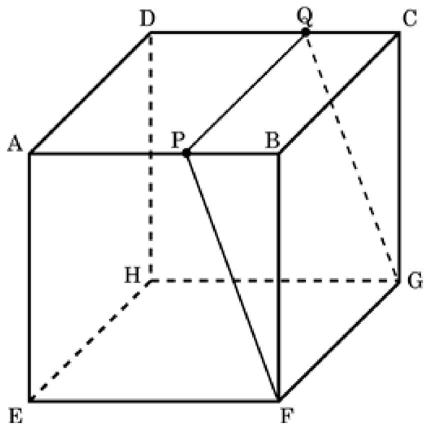
【問 8】

図1に示した立体 ABCD－EFGH は，1辺の長さが 6 cm の立方体である。点 P は，頂点 B を出発し，辺 BA，辺 AE 上を，毎秒 1 cm の速さで動き，12 秒後に頂点 E に到着する。点 Q は，点 P が頂点 B を出発するのと同時に頂点 C を出発し，辺 CD，辺 DH 上を，点 P と同じ速さで動き，12 秒後に頂点 H に到着する。頂点 F と点 P，頂点 G と点 Q，点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

（東京都　2005 年度）

図1



問1. 図2は，図1の立方体の展開図に頂点 E，F，G，H の位置を示したものの1つである。展開図の・は，それぞれ立方体の各辺の中点の位置を示している。図1において，点 P が頂点 B を出発してから3秒後の線分 FP，PQ，QG を，定規を用いて解答欄に示した展開図にかけ。ただし，点 P，Q の位置を示す文字 P，Q も書き入れること。

図2

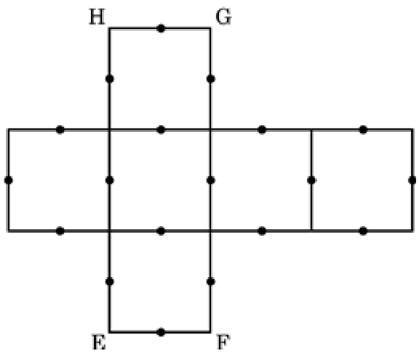
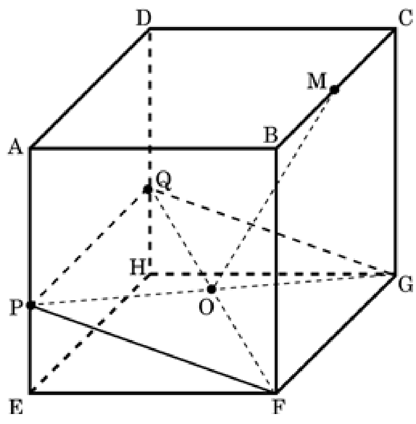
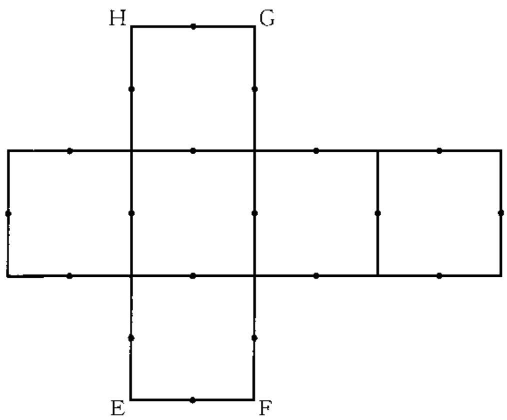


図3



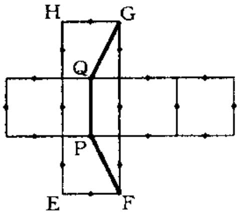
問2. 図3は，図1において，点 P が頂点 B を出発してから 10 秒後のとき，頂点 F と点 Q，頂点 G と点 P をそれぞれ結んだ線分の交点を O，辺 BC の中点を M とし，点 M と点 O を結んだ場合を表している。線分 MO の長さは何 cm か。ただし，答えに根号がふくまれるときは，根号をつけたままで表せ。

解答欄

問1	
問2	cm

解答

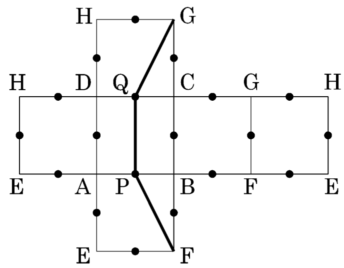
問1



問2 $\sqrt{34}$ cm

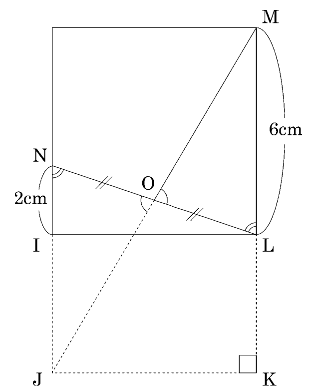
解説

問1



3秒後には点 P は辺 AB の中点，点 Q は辺 CD の中点となる。
展開図に各頂点を書き込むと右図のようになるから
FとP，P と Q，Q と G を結ぶ。

問2



10 秒後には PE＝QH＝6×2－10＝2cm となる。
PQ の中点を N，FG の中点を L として
3点 M，N，L を通る平面を考えると
点 O はこの平面上にある。
右図のように点 I，J，K をとると△OML≡△OJN となるので
JN＝ML＝6 cm
LK＝IJ＝6－2＝4 cm
MK＝6＋4＝10 cm
△MJK おいて
三平方の定理より MJ＝$\sqrt{10^2+6^2}$ ＝2$\sqrt{34}$ cm
よって MO＝$\frac{1}{2}$MJ＝$\sqrt{34}$ cm である。

【問 9】

図1のような長方形の紙 ABCD があり，辺 AD の中点を E とする。この紙を図2のように，底面の半径が 3 cm である円柱の側面に，紙が重ならないようにすき間なく，辺 AD と辺 BC の一部分が接するように斜めに巻きつけたところ，紙は円柱の側面を1周し，2点 A，D は円柱の同じ母線上にきてその間の距離は 6 cm となった。

このとき，次の問いに答えなさい。ただし，円周率は π とする。

（神奈川県 2005 年度）

図1

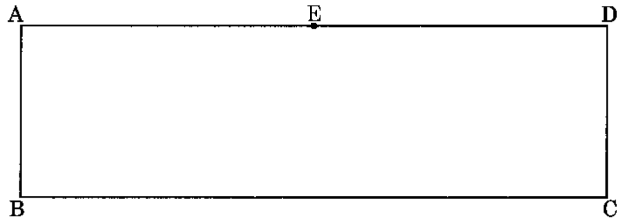
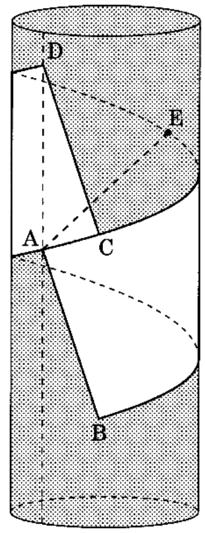


図2



(ア) 図2の円柱において，2点 A，E 間の距離を求めなさい。

(イ) 長方形の紙 ABCD の面積を求めなさい。

解答欄

(ア)	cm
(イ)	cm^2

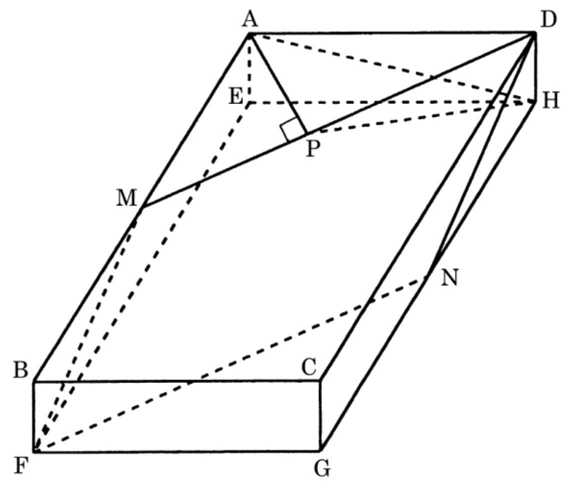
解答
(ア) $3\sqrt{5}$ cm
(イ) 36π cm^2
解説
(ア)
図2で点A，点D，点Eを直線で結んでできる三角形ADEはAE＝DEの二等辺三角形。
点EからADに引いた垂線とADとの交点をHとすると
三角形AEHで
EH＝6 cm
$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}=3$ cm
三平方の定理より
$\mathrm{AE}=\sqrt{\mathrm{AH}^2+\mathrm{EH}^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$ cm
(イ)
図2で
点Bを通るACとの平行線と2点A，Dを通る円柱の母線との交点をIとすると
DC∥AB，DC＝ABより
△DAC≡△AIB
よって長方形ABCDの面積は
縦6cm，横6πcm(円柱の周の長さ)の長方形の面積と等しい。
よって求める面積は$6\times6\pi=36\pi$ cm^2

【問 10】

図のように，AB＝30 cm，AD＝20 cm，AE＝5 cm の直方体 ABCD－EFGH がある。辺 AB，HG の中点をそれぞれ M，N とし，頂点 A から線分 DM に引いた垂線と線分 DM の交点を P とする。

このとき，次の⑴～⑶の問いに答えなさい。

（新潟県 2005 年度）



⑴ 線分 DM と線分 AP の長さを，それぞれ求めなさい。

⑵ 三角すい P－AHD の体積を求めなさい。

⑶ 平行四辺形 MFND の面積を求めなさい。

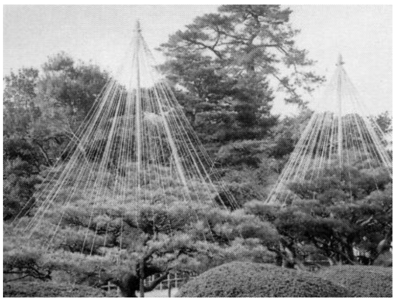
解答欄

(1)	DM＝	cm
	AP＝	cm
(2)		cm^3
(3)		cm^2

解答
(1)
DM　25 cm
AP　12 cm
(2)　160 cm^3
(3)　325 cm^2
解説
⑴
△ADM に三平方の定理を用いて
DM＝$\sqrt{AD^2+AM^2}$ ＝$\sqrt{20^2+15^2}$ ＝$\sqrt{625}$ ＝25 cm
また△ADM＝$\frac{1}{2}$ ×AD×AM＝$\frac{1}{2}$ ×DM×AP より
20×15＝25×AP
AP＝12 cm
⑵
△ADP に三平方の定理を用いて
DP＝$\sqrt{AD^2-AP^2}$ ＝$\sqrt{20^2-12^2}$ ＝$\sqrt{256}$ ＝16 cm
三角すい PAHD＝$\frac{1}{3}$ ×△ADP×DH＝$\frac{1}{3}$ ×($\frac{1}{2}$ ×16×12)×5＝160 cm^3
⑶
DN＝$\sqrt{DH^2+NH^2}$ ＝$\sqrt{5^2+15^2}$ ＝$\sqrt{250}$
MN＝AH＝$\sqrt{AD^2+DH^2}$ ＝$\sqrt{20^2+5^2}$ ＝$\sqrt{425}$
△DMN で
頂点 N から辺 DM に引いた垂線を NQ とする。
MQ＝x cm とすると QD＝25－x
△NMQ と△NQD に三平方の定理を用いて
NQ^2＝MN^2－MQ^2＝DN^2－QD^2
425－x^2＝250－(25－x)^2
425－x^2＝250－625＋50x－x^2
50x＝800
x＝16
よって NQ＝$\sqrt{MN^2-MQ^2}$ ＝$\sqrt{425-16^2}$ ＝$\sqrt{169}$ ＝13
したがって平行四辺形 MFND＝DM×NQ＝25×13＝325 cm^2

【問 11】

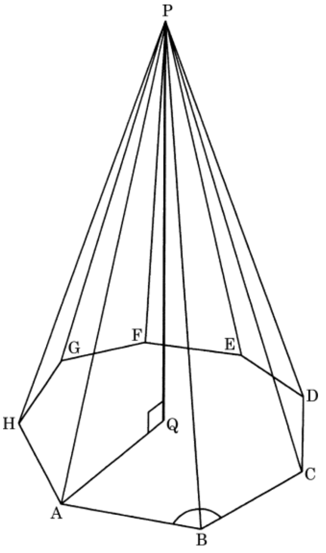
写真は，雪つりの景色であり，図はある木の雪つりを模式的に表したものである。点 A，B，C，…，H は，点 Q を中心とする半径 4 m の円の周を8等分した点であり，線分 PA，PB，PC，…，PH はいずれも長さが等しいものとする。また，線分 PQ は底面に垂直で，長さは 12 m とする。



このとき，次の⑴～⑶に答えなさい。ただし，模式的に表した図には，点 Q を中心とする半径 4 m の円の周は省略してある。

（石川県 2005 年度）

⑴ 線分 PA の長さを求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。



⑵ ∠ABC の大きさを求めなさい。

⑶ 正八角すい P－ABCDEFGH の体積を求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

解答欄

(1)	計算 答	
(2)	∠ABC＝	
(3)	計算 答	

解答

(1) $4\sqrt{10}$ m

(2) 135°

(3) $128\sqrt{2}$ m^3

解説

⑴

〔計算〕

三平方の定理より

$PA^2＝QA^2＋QP^2$

$PA^2＝4^2＋12^2＝16＋144＝160$

$PA＝\pm 4\sqrt{10}$

PA＞0 より

$PA＝4\sqrt{10}$ m

⑵

△AQB は∠AQB＝45° の二等辺三角形だから

∠ABC＝∠QAB＋∠QBA＝180° －45° ＝135°

⑶

〔計算〕

△QAC は∠AQC＝90° の直角三角形

三平方の定理により AC＝$4\sqrt{2}$

△QAB の面積は $4\times 4\sqrt{2}\div 2\div 2＝4\sqrt{2}$

正八角形の面積は $4\sqrt{2}\times 8＝32\sqrt{2}$

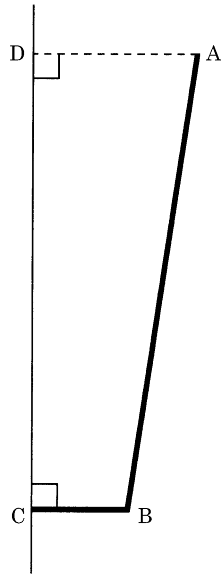
よって体積は $32\sqrt{2}\times 12\times \frac{1}{3}＝128\sqrt{2}$ m^3

【問 12】

図の線分 AB, BC を，直線 CD を軸として1回転させてできたコップについて考える。この図において，BC⊥CD, AD⊥CD, AD＝5 cm, AB＝14 cm, BC＝3 cm とし，コップの厚みは考えないものとする。

このとき，次の1～3に答えなさい。

（山梨県 2005 年度）



1 このコップの高さは何 cm か求めなさい。

2 このコップに水をいっぱいに入れ，ストローをさしたとき，水の中に入っている部分のストローの長さを a cm とする。a が最も大きくなるときの a の値を求めなさい。ただし，ストローは，まっすぐなものであり，折ったり曲げたりしないものとし，太さは考えないものとする。

3 このコップに，コップの高さの半分の高さまで水が入っているとき，入っている水の体積は何 cm³ か求めなさい。

解答欄

1	cm
2	a＝
3	cm^3

解答

1　$8\sqrt{3}$ cm

2　$a=16$

3　$\dfrac{148\sqrt{3}}{3}\pi$　cm^3

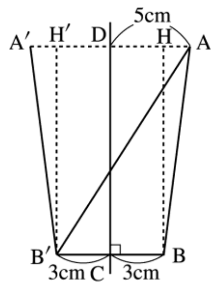
解説

1

点 B から辺 AD に垂線 BH をひく。

△ABH で AB＝14cm, AH＝5－3＝2cm から

三平方の定理を使って BH＝$\sqrt{14^2-2^2}=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$ cm



2

右の図で線分 AB′ の長さを求める。

△ABH′ で

1から

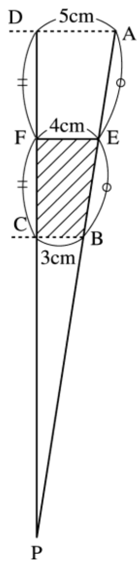
B′ H′ ＝$8\sqrt{3}$ cm

AH′ ＝8 cm

よって三平方の定理から

$(AB')^2=(8\sqrt{3})^2+8^2$

AB′ ＝$\sqrt{256}=16$ cm



3

右の図で AD∥BC から

EF＝$\dfrac{5+3}{2}=4$ cm

また PC＝x cm とすると

$4:3=(x+4\sqrt{3}):x$

$3x+12\sqrt{3}=4x$

$x=12\sqrt{3}$ cm

よって PF＝$12\sqrt{3}+4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ cm から

斜線部分を回転させた体積は

$\dfrac{1}{3}\times4^2\pi\times16\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\times3^2\pi\times12\sqrt{3}$

$=\dfrac{256\sqrt{3}\pi-108\sqrt{3}\pi}{3}$

$=\dfrac{148\sqrt{3}}{3}\pi$　cm^3

【問 13】

図１の展開図を組み立てて，図２の平面で囲まれた立体 ABCDEF をつくった。

（長野県　2005 年度）

① 辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて答えなさい。

② 頂点 A から辺 EF にひいた垂線と EF との交点を H とする。AH の長さを求めなさい。

③ この立体の体積を求めなさい。

図1

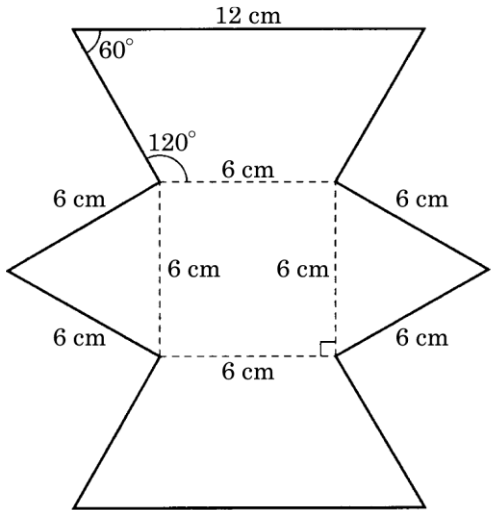
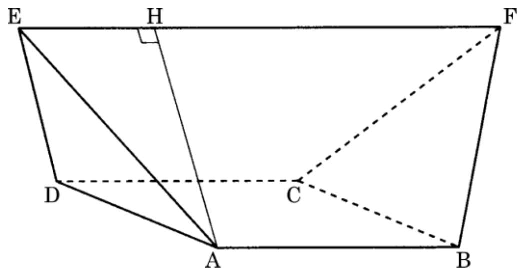


図2



解答欄

①	
②	cm
③	cm^3

解答

① CF, DE

② $3\sqrt{3}$ cm

③ $72\sqrt{2}$ cm^3

解説

①

ねじれの位置にある辺はABと平行でなくかつ交わらない辺だからCFとDE

②

△AHEは

3つの角が30°，60°，90°の直角三角形だから

AH＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$AE＝$3\sqrt{3}$ cm

③

この立体をA, H, Dを通る平面で切断し

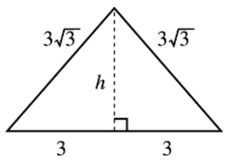
右側の部分も同様に切断して

3つに分けると考えると

3辺の長さが6 cm, $3\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cmの三角形が底面で

高さが3cmの三角すい2つと

同じ三角形を底面とし高さが6cmの三角柱になる。



底面の三角形で底辺を6cmとすると

高さhは

$h^2=(3\sqrt{3})^2-3^2=18$

$h>0$より

$h=3\sqrt{2}$ cm

したがって底面の三角形の面積は

$\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ cm^2

よって立体の体積は$2\times\frac{1}{3}\times9\sqrt{2}\times3+9\sqrt{2}\times6=72\sqrt{2}$ cm^3

【問 14】

図1のように，底面が1辺 2 cm の正方形で，すべての側面が正三角形である四角すい VABCD がある。

次の⑴～⑶の問いに答えなさい。

（岐阜県 2005 年度）

⑴ 図2は，四角すい VABCD の展開図を途中までかいたものである。定規とコンパスを使って展開図を1つ完成させなさい。なお，作図に用いた線は消さずに残しなさい。

⑵ 四角すい VABCD の辺 VB 上に，AP＋PC の長さがもっとも短くなるように点 P をとるとき，

(ア) VP : PB を求めなさい。

(イ) AP＋PC の長さを求めなさい。

⑶ 四角すい VABCD の表面積を求めなさい。

図1

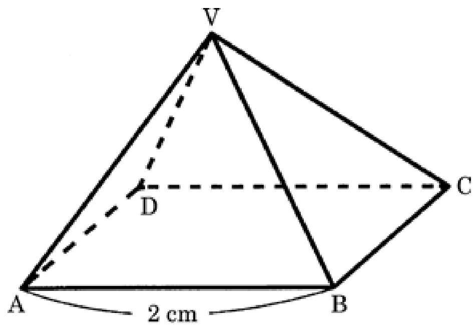
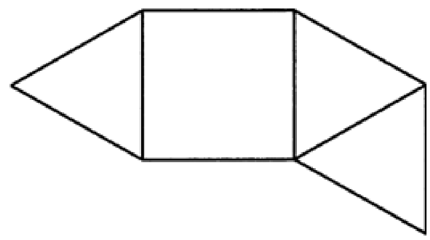
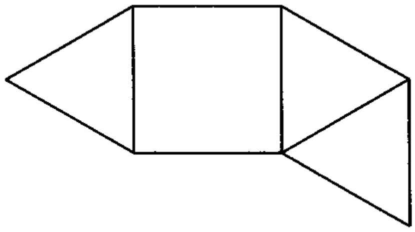
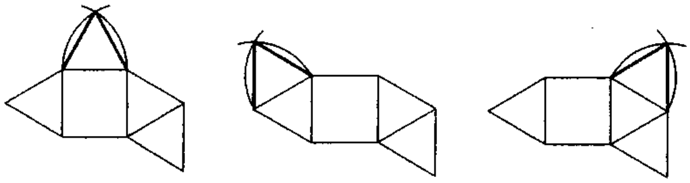
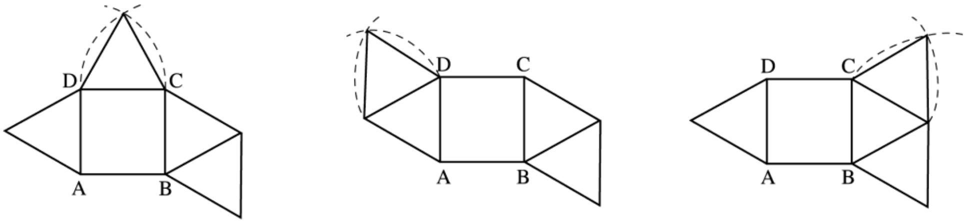


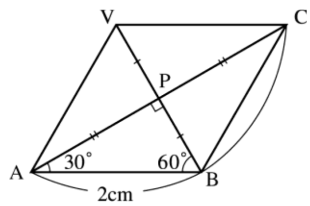
図2



解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>(ア)</td><td>:</td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
</table>

解答
(1)

⑵
(ア)　1 : 1
(イ)　$2\sqrt{3}$
(3)　$4+4\sqrt{3}$ cm^2
解説
⑴
図のように辺 DC に接するように正三角形をつくればよい。
点 C, D を中心にそれぞれ半径が CD となる円をかきその交点と C, D を結ぶ。


⑵
(ア)
次の図のような展開図を考える。
AP＋PC が最小になるのは点 A, P, C が一直線上に並ぶときである。
四角形 VABC は4つの辺がすべて等しいのでひし形である。
ひし形の対角線はそれぞれの中点で交わるから
VP : PB＝1 : 1


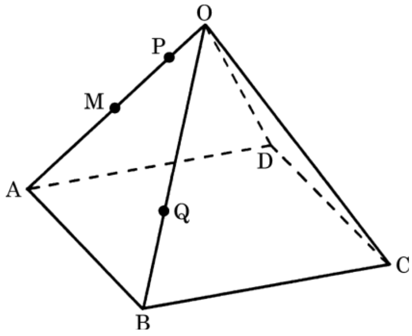
(イ)
AP＋PC は対角線 AC であるから AC の長さを求めればよい。
ひし形の対角線は垂直に交わるから∠ABP＝90°
△ABP は内角が 30°, 60°, 90° の直角三角形であるから
$\mathrm{AP}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ cm
よって AP＋PC＝2AP＝$2\sqrt{3}$ cm
⑶
正三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$ cm^2
したがって四角すい VABCD の表面積は正三角形4つと底面の正方形の面積であるから
$4\sqrt{3}+4$ cm^2

【問 15】

図の立体は，点 O を頂点とし，正方形 ABCD を底面とする四角すいである。この四角すいにおいて，AB＝4 cm，OA＝5 cm で，OA＝OB＝OC＝OD である。

このとき，次の⑴～⑶の問いに答えなさい。

（静岡県 2005 年度）



⑴ この四角すいにおいて，辺 OA とねじれの位置にある辺はどれか。すべて答えなさい。

⑵ 図2において，点 M は辺 OA の中点である。点 P は，頂点 O を出発し，辺 OA 上を点 M まで毎秒 1 cm の速さで移動する。点 Q は，点 B を出発し，辺 BO 上を頂点 O まで毎秒 2 cm の速さで移動する。また，2点 P，Q は，それぞれ2点 O，B を同時に出発する。2点 P，Q を通る直線が，面 ABCD と平行になるのは，2点 P，Q が出発してから何秒後か，答えなさい。

⑶ 図2の四角すいの高さを求めなさい。また，体積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>秒後</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)</td><td>高さ　　　　cm</td></tr>
<tr><td>体積　　　　cm³</td></tr>
</table>

解答

(1) 辺 BC, 辺 CD

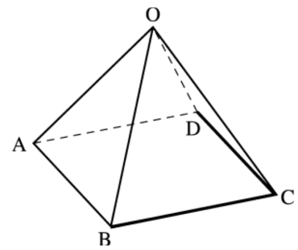
(2) $\dfrac{5}{3}$ 秒後

(3) 高さ $\sqrt{17}$ cm， 体積 $\dfrac{16\sqrt{17}}{3}$ cm^3

解説

⑴

辺 OA と交わることもなく平行でもない辺は辺 BC と辺 CD である。



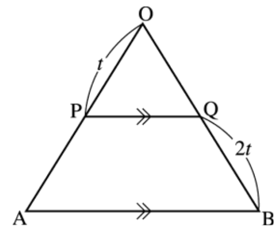
⑵

図のように考えると

t 秒後に PQ と面 ABCD が平行になるとすると

$t+2t=5$

$t=\dfrac{5}{3}$ 秒後



⑶

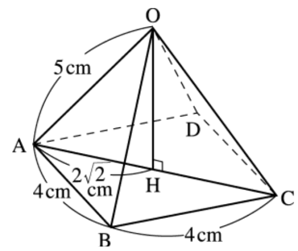
図から AC＝$4\sqrt{2}$ より

AH＝$2\sqrt{2}$ cm

四角すいの高さは三平方の定理より

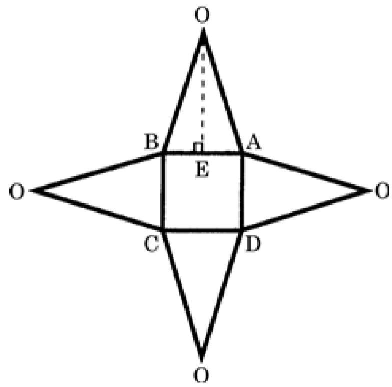
$\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$ cm

したがって体積は $\dfrac{1}{3}\times4\times4\times\sqrt{17}=\dfrac{16\sqrt{17}}{3}$ cm^3



【問 16】

たろうさんは，図のような図形を作図し，一辺の長さが 10 cm の正方形を底面とし，合同な4つの二等辺三角形が側面となる正四角すい OABCD をつくることにしました。



側面となる三角形 OAB の頂点 O から辺 AB へひいた垂線を OE とするとき，次の各問いに答えなさい。

（三重県 2005 年度）

① たろうさんは，次のことに注意して作図しました。次の $\boxed{(ア)}$ にあてはまる値を求めなさい。

> 【たろうさんが注意したこと】
>
> OE の長さが，$\boxed{(ア)}$ cm 以下のときは正四角すいをつくることができないから，
>
> OE の長さは，$\boxed{(ア)}$ cm より長くなければいけない。

② たろうさんがつくった正四角すいの体積は，500 cm^3 でした。このとき，OE の長さを求めなさい。なお，答えに $\sqrt{\ }$ がふくまれるときは，$\sqrt{\ }$ を用いて最も簡単な形で書きなさい。

解答欄

①	
②	OE＝　　　　cm

解答

① 5

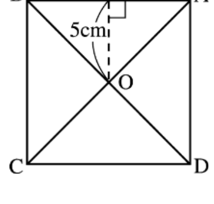
② OE＝$5\sqrt{10}$ cm

解説

①

図のように OE＝5cm として展開図を折り曲げると正方形になる。

したがって正四角すいを作るには OE の長さが 5cm より長くなければならない。



②

正四角すいの底面積は一辺の長さが 10cm の正方形であるから 100cm^2 である。

したがってたろうさんが作った正四角すいの高さは 500×3÷100＝15cm である。

したがって OE の長さは三平方の定理より OE＝$\sqrt{5^2+15^2}$ ＝$\sqrt{250}$ ＝$5\sqrt{10}$ cm

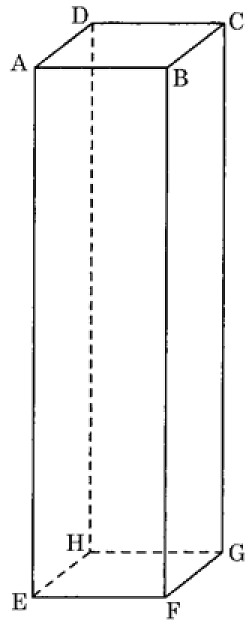
【問 17】

図Ⅰの立体 ABCD－EFGH は，AB＝AD＝1 cm，AE＝4 cm の直方体である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 2005 年度 後期）

図Ⅰ

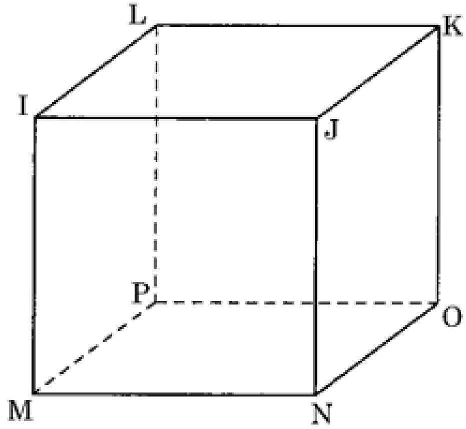


(1) 次のア～エのうち，面 AEFB と垂直な辺はどれですか。一つ選び，記号を書きなさい。

ア 辺 AE	イ 辺 CG	ウ 辺 DC	エ 辺 FG

(2) A と C，E と G とをそれぞれ結んでできる長方形 AEGC の面積を求めなさい。

図Ⅱ



(3) 図Ⅰの直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

(4) 図Ⅱの立体 IJKL－MNOP は1辺の長さが a cm の立方体である。図Ⅰの直方体の表面積と図Ⅱの立方体の表面積とが等しいときの a の値を求めなさい。また，そのとき，図Ⅰの直方体の体積を V cm^3，図Ⅱの立方体の体積を W cm^3 として V の値と W の値とを比べ，＜ ，＞のどちらかの不等号を解答欄の $\boxed{}$ に記入して V と W の大小関係を表しなさい。求め方も書くこと。

解答欄

(1)	
(2)	cm^2
(3)	cm
(4)	求め方 a の値　　　　　，V と W の大小関係　V $\boxed{}$ W

解答

(1)　エ

(2)　$4\sqrt{2}$

(3)　$3\sqrt{2}$

求め方

図Ⅰの直方体の表面積は18 cm^2

図Ⅱの立方体の表面積は$6a^2$ cm^2

図Ⅰの直方体の表面積と図Ⅱの立方体の表面積とが等しいから

$6a^2=18$

これを解くと

$a>0$ より

$a=\sqrt{3}$

したがって

$W=(\sqrt{3})^3=\sqrt{27}$

また $V=1\times1\times4=\sqrt{16}$

$16<27$ より

$\sqrt{16}<\sqrt{27}$ であるから

$V<W$

答　aの値　$\sqrt{3}$

答　VとWの大小関係　$V<W$

解説

⑵

ACは1辺の長さが1cmの正方形の対角線だからAC$=\sqrt{2}$ cm

よって長方形AEGCの面積は $4\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ cm^2

⑶

△ACGに三平方の定理を用いて

AG$=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=3\sqrt{2}$ cm

⑷

図Ⅰの直方体の表面積は 18 cm^2

図Ⅱの立方体の表面積は $6a^2$ cm^2

図Ⅰの直方体の表面積と図Ⅱの立方体の表面積とが等しいから

$6a^2=18$

これを解くと

$a>0$より

$a=\sqrt{3}$

したがってW$=(\sqrt{3})^3=\sqrt{27}$

またV$=1\times1\times4=\sqrt{16}$

$16<27$より

$\sqrt{16}<\sqrt{27}$ であるから

V<W

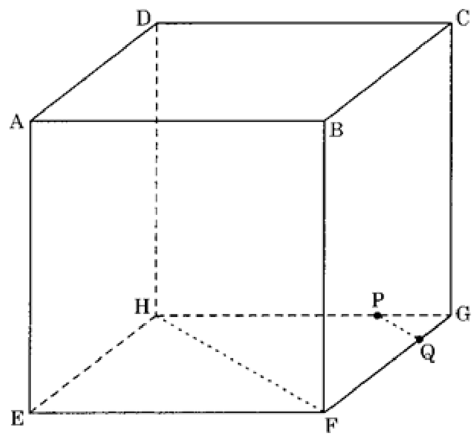
【問 18】

図Ⅰ, 図Ⅱにおいて, 立体ABCD－EFGHは1辺の長さが８cmの立方体である。P, Qは, それぞれ辺GH, GF上にあってGP＝GQとなる点である。HとF, PとQとをそれぞれ結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

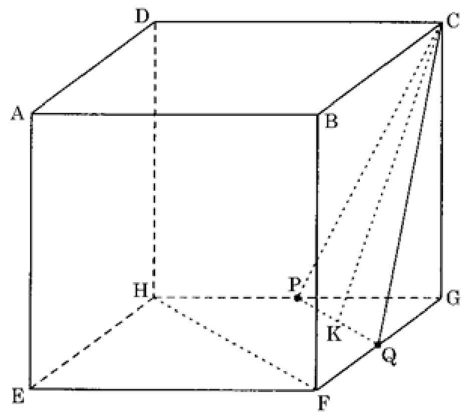
（大阪府 2005年度 後期）

図Ⅰ



⑴ 図Ⅰにおいて, HF＝4PQ である。線分 FQ の長さを求めなさい。

図Ⅱ



⑵ 図Ⅱにおいて, Qは辺GFの中点である。CとP, CとQとをそれぞれ結ぶ。このとき, CP＝CQとなる。Kは, ∠PCQの二等分線と線分PQとの交点である。

① 線分 CQ の長さと線分 CK の長さをそれぞれ求めなさい。求め方も書くこと。

② △CPQの面積を求めなさい。

③ △CQGの内角∠CQGの大きさを a° とするとき,

㋐ EとPとを結んでできる四角形EFQPの内角∠EPQの大きさを a を用いて表しなさい。

㋑ △CPQの内角∠PCQの大きさを a を用いて表しなさい

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="3">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(2)</td><td>①</td><td colspan="2">求め方

線分 CQ の長さ　　　cm，線分 CK の長さ　　　cm</td></tr>
<tr><td>②</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">③</td><td>㋐</td><td>度</td></tr>
<tr><td>㋑</td><td>度</td></tr>
</table>

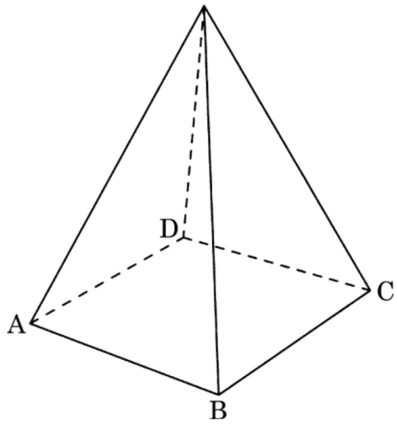
解答
(1)　6
(2)
①
求め方
Q は辺GF の中点だから$GQ=\frac{1}{2}GF=4$cm
$\angle CGQ=90^\circ$ だから$CQ^2=CG^2+GQ^2$
$CQ=x$ cm とすると$x^2=8^2+4^2=80$
これを解くと$x>0$より
$x=4\sqrt{5}$
△GPQ は
$GP=GQ$, $\angle PGQ=90^\circ$ の直角二等辺三角形だから
$PQ=\sqrt{2}\,GQ=4\sqrt{2}$ cm
△CPQ は
$CP=CQ$ の二等辺三角形であり
CK は$\angle PCQ$ の二等分線だから
K は線分PQ の中点であって$CK\perp PQ$ となる。
よって$CK^2=CQ^2-QK^2$, $QK=\frac{1}{2}PQ$
だから$CK=y$ cm とすると
$y^2=(4\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2=72$
これを解くと$y>0$より
$y=6\sqrt{2}$
解答線分CQ の長さ　$4\sqrt{5}$
解答線分 CK の長さ　$6\sqrt{2}$
②　24
③
㋐　$135-a$
㋑　$2a-90$

解説
⑴
$GP:GH=GQ:GF$ となるから
$\triangle GPQ \backsim \triangle GHF$
よって $GQ:GF=PQ:HF=1:4$ より
$GQ:FQ=1:3FQ=\frac{3}{4}GF=\frac{3}{4}\times 8=6$ cm
⑵
①
Q は辺 GF の中点だから
$GQ=\frac{1}{2}GF=4$cm
$\angle CGQ=90^\circ$ だから
$CQ^2=CG^2+GQ^2$
$CQ=x$ cm とすると
$x^2=8^2+4^2=80$
これを解くと
$x>0$ より
$x=4\sqrt{5}$
$\triangle GPQ$ は $GP=GQ$, $\angle PGQ=90^\circ$ の直角二等辺三角形だから
$PQ=\sqrt{2}GQ=4\sqrt{2}$ cm
$\triangle CPQ$ は $CP=CQ$ の二等辺三角形であり
CK は $\angle PCQ$ の二等分線だから
K は線分 PQ の中点であって $CK\perp PQ$ となる。
よって $CK^2=CQ^2-QK^2$
$QK=\frac{1}{2}PQ$ だから
$CK=y$ cm とすると
$y^2=(4\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2=72$
これを解くと
$y>0$ より
$y=6\sqrt{2}$
②
$\triangle CPQ=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}=24$ cm^2
③
㋐
$\triangle EHP\equiv\triangle CGQ$ となることから
$\angle EPH=a^\circ$
また $\angle GPQ=45^\circ$ だから
$\angle EPQ=180-a-45=135-a$ 度
㋑
$EP=EQ=CP=CQ$ より
$\triangle EPQ\equiv\triangle CPQ$ となるので
$\angle PCQ=\angle PEQ=180-\angle EPQ\times 2=180-(135-a)\times 2=2a-90$ 度

【問 19】

図のように，底面が正方形 ABCD で，高さが 6 cm の四角すいがあります。この四角すいの高さを変えないで，辺 AD，BC を 1 cm 長く，辺 AB，CD を 1 cm 短くした長方形を底面とする四角すいをつくります。このときできる四角すいの体積は，もとの四角すいの体積より 2 cm^3 小さくなります。このわけを正方形 ABCD の1辺の長さを a cm として，a を使った式を用いて説明しなさい。ただし $a>1$ とします。

（広島県 2005 年度）



解答欄

説明

解答
正方形 ABCD の面積は $a^2 cm^2$ であるから
もとの四角すいの体積は $\frac{1}{3}\times a^2\times 6=2a^2$ cm^3 である。
つくる四角すいの底面となる長方形の面積は $(a+1)\times(a-1)=a^2-1 cm^2$ であるから
この四角すいの体積は $\frac{1}{3}\times(a^2-1)\times 6=2a^2-2$ cm^3
となりもとの四角すいの体積より 2 cm^3 小さくなる。

【問 20】

(1) 図1のように，底面が正三角形で，側面が正方形の三角柱があり，線分 AE と線分 CE がかき入れてある。図2は，この三角柱の展開図である。図1における線分 AE と線分 CE を，図2にかき入れなさい。

（山口県 2005 年度）

図1

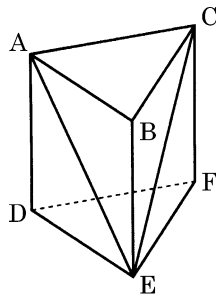
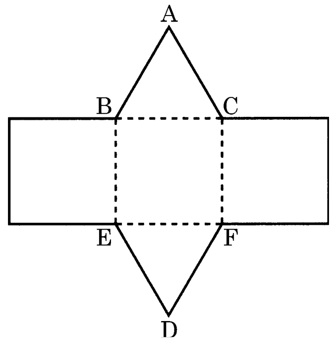


図2



(2) 図1のように，底面の半径が 6 cm の円柱の容器に水が入っている。この容器に，底面の半径が 3 cm，母線の長さが 4 cm の円すいの形をした鉄のおもりを入れたところ，図2のように,水があふれることなく，完全に沈めることができた。このとき，水面の高さは何 cm 上昇したか。求めなさい。

図1

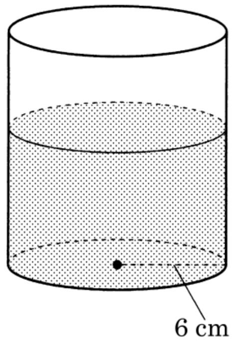
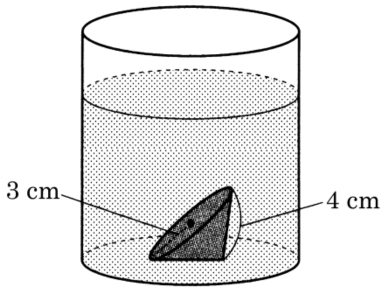
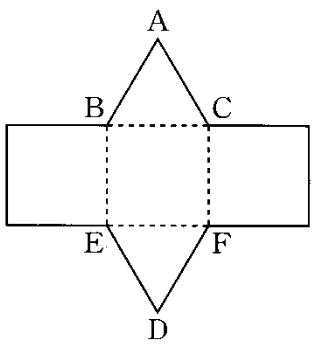
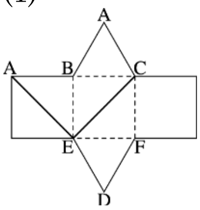


図2



解答欄

(1)	
(2)	cm

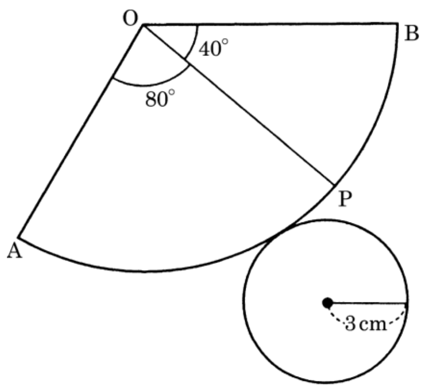
解答
(1)


(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{12}$ cm
解説
⑵
鉄のおもりの体積は
$9\pi \times \sqrt{7} \times \dfrac{1}{3} = 3\sqrt{7}\pi$ cm^3
x cm 上昇したとすると
$36\pi \times x = 3\sqrt{7}\pi$ から
$x = \dfrac{\sqrt{7}}{12}$ cm

【問 21】

図は，底面の円の半径が 3 cm の円すいの展開図である。$\overset{\frown}{AB}$ 上に点 P をとり，点 O と点 P を結ぶ。$\angle AOP = 80^\circ$，$\angle BOP = 40^\circ$ であるとき，次のア，イの問いに答えよ。なお，円周率には π をそのまま用いよ。

（香川県　2005 年度）



ア　$\overset{\frown}{AB}$ の長さは $\overset{\frown}{AP}$ の長さの何倍か。

イ　この展開図を組み立てたときにできる円すいの体積は何 cm^3 か。

解答欄

ア	倍
イ	cm^3

解答

ア　$\dfrac{3}{2}$ 倍

イ　$18\sqrt{2}\pi$　cm^3

解説

ア

おうぎ形の弧の長さの比は

おうぎ形の中心角の比に等しいので

$\overset{\frown}{AB}$ の長さは $\overset{\frown}{AP}$ の長さの $(80+40)\div 80 = 1.5$ 倍

イ

側面のおうぎ形の弧の長さは底面の円周の長さに等しいので

$\pi \times 3 \times 2 = 6\pi$　cm

側面のおうぎ形の中心角が 120° で $2\pi r \times \dfrac{中心角}{360}$ ＝おうぎ形の周の長さだから

側面のおうぎ形の半径すなわち円すいの母線の長さは

$6\pi \times \dfrac{360}{120} \div 2\pi = 9$ cm

円すいの頂点 O から底面の円の中心に下ろした垂線を OH とすると△OAH は直角三角形となる。

よって△OAH に三平方の定理を用いて

$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$ cm

これは円すいの高さにあたるので

求める体積は $\dfrac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ cm^3

【問 22】

図1は，AC＝8 cm，BC＝6 cm，∠ACB＝90° の直角三角形 ABC に，辺 AB の中点 D，辺 AC の中点 E をとり，点 D と点 E を結んだものである。図2は，図1の直角三角形 ABC を，辺 AC を軸として1回転させてできた回転体を表しており，点 B と点 C を通る直線と，円 C の円周との交点のうち，点 B と異なる点を F としたものである。また，円 C に平行で，点 E を中心とし，線分 ED を半径とする円を円 E とする。

次の⑴～⑶の $\boxed{}$ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし，π は円周率を表す。

（福岡県　2005 年度）

図1

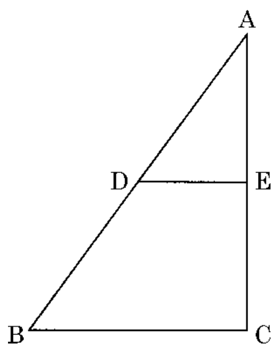
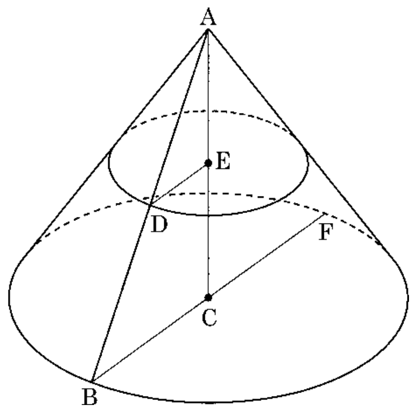


図2



⑴ 図1に示す図形で，線分 AB の長さは $\boxed{\text{cm}}$ である。

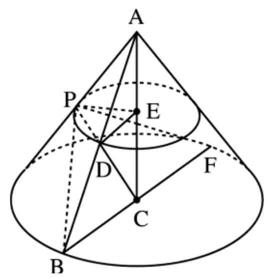
⑵ 図2に示す回転体において，円 C を底面とし，線分 AC を高さとする円すいの体積は $\boxed{\pi\,\text{cm}^3}$ である。

⑶ 図2に示す回転体において，円 E の円周上に点 P を，△BPF の面積が最も大きくなるようにとる。このとき，△BPF の面積は $\boxed{\text{cm}^2}$ である。

解答欄

⑴	
⑵	
⑶	

解答
⑴　10
⑵　96
⑶　30
解説
⑴
△ABC で
三平方の定理から
$AB^2=AC^2+BC^2$
$AB=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$ cm
⑵
円すいの体積＝$\frac{1}{3}$×底面積×高さより
$\frac{1}{3}\times 6^2\pi\times 8=96\pi$　cm³
⑶
円 E の円周上の点 P が辺 BF より最も遠い位置にあるときは BP＝FP のときである。
よって図で△PEC は $PE=\frac{1}{2}BC=3$ cm
$EC=\frac{1}{2}AC=4$cm より



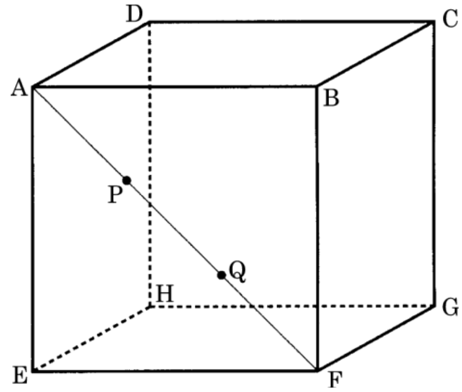
三平方の定理を用いて
$PC=\sqrt{PE^2+EC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ cm
△BPF の面積は
底辺 BF＝12cm に対して高さは PC＝5cm だから
$\frac{1}{2}\times 12\times 5=30$ cm²

【問 23】

図のような1辺の長さが 6 cm の立方体がある。正方形 AEFB の対角線 AF 上に AP＝PQ＝QF となるように2点 P, Q をとる。

このとき, 次の(ア)～(ウ)の各問いに答えなさい。

（佐賀県 2005 年度）



(ア) PD の長さを求めなさい。

(イ) 4点 A, D, E, P を結んでできる三角すいの体積を求めなさい。

(ウ) 四角形 PQGD を直線 PQ を軸として1回転させてできる回転体の体積を求めなさい。

解答欄

(ア)	cm
(イ)	cm^3
(ウ)	cm^3

解答

(ア) $2\sqrt{11}$ cm

(イ) 12 cm^3

(ウ) $168\sqrt{2}\,\pi$ cm^3

解説

(ア)

△APD に三平方の定理を用いて

$$PD=\sqrt{6^2+\left(\frac{6\sqrt{2}}{3}\right)^2}=2\sqrt{11}\ \text{cm}$$

(イ)

$$\triangle AEP=\frac{1}{3}\triangle AEF=6\ \text{cm}^2$$

$$\text{三角すい D－AEP}=\frac{1}{3}\times 6\times 6=12\ \text{cm}^3$$

(ウ)

底面の半径 AD 高さ AF の円柱の体積から

底面の半径 AD 高さ AP の円すい2つ分の体積をひけばよいから

$$\pi\times 6^2\times 6\sqrt{2}-\left(\frac{1}{3}\times\pi\times 6^2\times 2\sqrt{2}\right)\times 2=168\sqrt{2}\,\pi\ \text{cm}^3$$

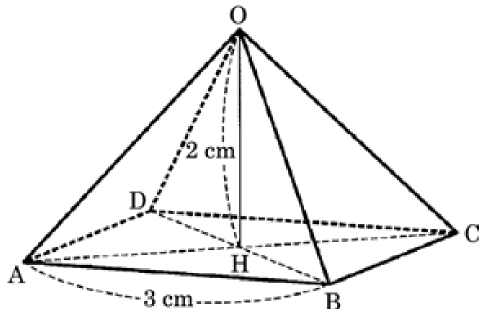
【問 24】

図1，図2のように，底面 ABCD が1辺の長さ 3 cm の正方形で，側面がすべて合同な二等辺三角形である正四角すい OABCD がある。また，正方形 ABCD の対角線の交点を H とすると，線分 OH の長さは 2 cm である。

このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県　2005 年度）

図1



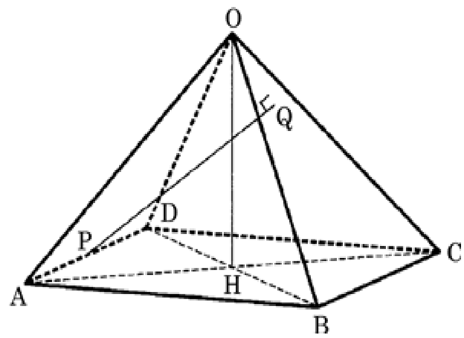
問1．正四角すい OABCD の辺のうち，辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて答えよ。

問2．正四角すい OABCD の体積は何 cm³か。

問3．三角形 OAB の面積は何 cm²か。

問4．図2のように，辺 AD 上の点 P から3点 O，B，C をふくむ平面にひいた垂線とこの平面との交点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さは点 P の位置に関係なく一定である。線分 PQ の長さは何 cm か。

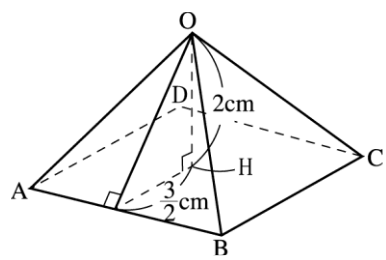
図2



解答欄

問1	
問2	cm^3
問3	cm^2
問4	cm

解答
問1　辺 OC, 辺 OD
問2　6
問3　$\dfrac{15}{4}$
問4　$\dfrac{12}{5}$
解説
問1
辺 AB と交わることもなく平行でもないものは辺 OC と辺 OD である。
問2
$\dfrac{1}{3}\times 3\times 3\times 2=6\ \text{cm}^3$
問3
図のように△OAB の高さは三平方の定理より



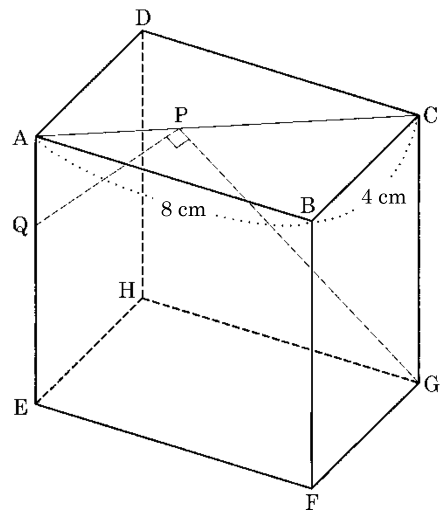
$\sqrt{2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{2}$ cm であるから
$\triangle\text{OAB}=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{4}\ \text{cm}^2$
問4
正四角すい O－ABCD
＝三角すい A－OBC＋三角すい A－ODC
$=\triangle\text{OBC}\times\text{PQ}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 3\times 3\right)\times 2=\dfrac{5}{4}\text{PQ}+3$ である。
正四角すい O－ABCD の体積は
問2より 6 であるから
$\dfrac{5}{4}\text{PQ}+3=6$
$\dfrac{5}{4}\text{PQ}=3$
よって　$\text{PQ}=\dfrac{12}{5}$ cm である。

【問 25】

図のように，AB＝8 cm，BC＝4 cm の直方体 ABCD－EFGH がある。底面 ABCD の対角線 AC 上に AP：PC＝3：5 となる点 P をとり，辺 AE 上に AQ：QE＝1：2 となる点 Q をとると，∠QPG＝90° となる。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県　2005 年度）



⑴ 線分 AP の長さを求めなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

⑵ 直方体 ABCD－EFGH の表面積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2

解答

(1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ cm

(2) 244 cm^2

解説

⑴

$AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$

$AP=\dfrac{3}{8}AC=\dfrac{3}{8}\times 4\sqrt{5}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ cm

⑵

AQ＝x とおくと三平方の定理が成り立つから

$QP^2=x^2+\dfrac{45}{4}$

$PG^2=9x^2+\dfrac{125}{4}$

$QG^2=4x^2+80$ より

△QPG において

$4x^2+80=x^2+\dfrac{45}{4}+9x^2+\dfrac{125}{4}$

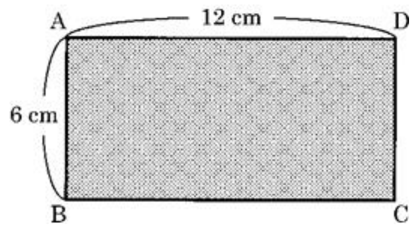
よって $x=\dfrac{5}{2}$ cm

したがって直方体の高さは $\dfrac{15}{2}$

表面積$=2\times(8\times4)+2\times(\dfrac{15}{2}\times8)+2\times(\dfrac{15}{2}\times4)=244$ cm^2

【問 26】

図Ｉのような長方形 ABCD の折り紙がある。AB＝6 cm，AD＝12 cm として，次の⑴～⑶の問いに答えなさい。ただし，紙の厚さは考えないものとする。

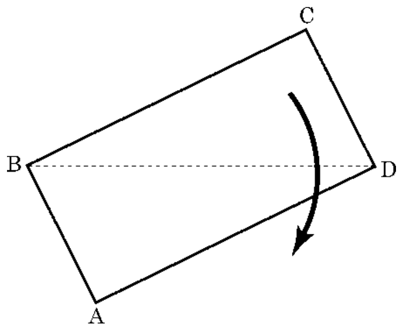


（宮崎県 2005 年度）

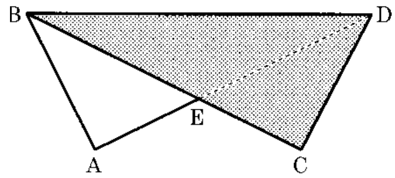
⑴ 図Ｉにおいて，対角線 BD の長さを求めなさい。

⑵ 図Ｉの折り紙を裏返して，図Ⅱのように置き，BD を折り目として折ると図Ⅲのようになる。線分 BC と AD との交点を E として，次のア，イの問いに答えなさい。

図Ⅱ

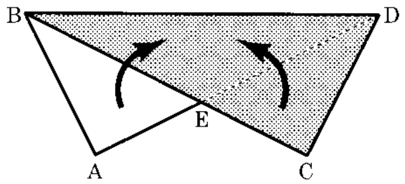


図Ⅲ



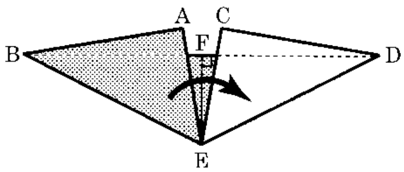
図Ⅳ

①



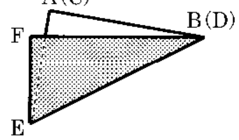
EB，EDを折り目として折る。

②

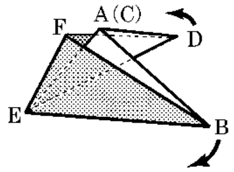


点Eから線分BDにひいた垂線をEFとする。
EFを折り目として折り，点BとDを重ねる。

③

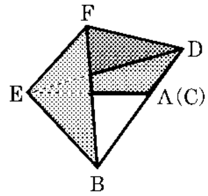


④



線分AEとCEを重ねたまま点BとDを遠ざけ，点B，A(C)，Dが一直線上に並ぶようにする。

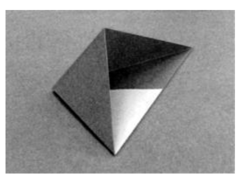
⑤



できあがり

ア △AEB の周の長さを求めなさい。

イ △BED の面積を求めなさい。



⑶ 図Ⅲのように折った折り紙で，図Ⅳのような形をつくる。図 IV の①～⑤は，その手順を示したものである。図 IV の⑤において，4点 F，E，B，D を頂点とする三角錐の体積を求めなさい。

解答欄

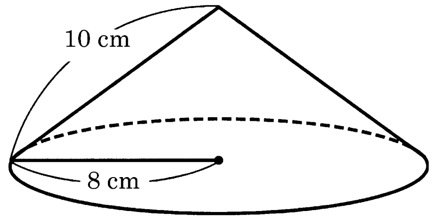
<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">BD＝　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>ア</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>イ</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2">cm^3</td></tr>
</table>

解答
(1)　BD＝$6\sqrt{5}$　cm
(2)
ア　18 cm
イ　$\frac{45}{2}$ cm²
(3)　$9\sqrt{5}$ cm³
解説
⑴
三平方の定理より BD＝$\sqrt{6^2+12^2}$＝$6\sqrt{5}$ cm
⑵
ア
問題の図Ⅱにおいて
AD∥BC より∠ADB＝∠CBD(錯角)だから
図Ⅲにおいて
EB＝ED
△AEB と△CED において
∠BAE＝∠DCE＝90°，EB＝ED，AB＝CD より
2つの直角三角形において
斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから
△AEB≡△CED
よって AE＝CE
△AEB の周の長さは AE＋EB＋BA＝CE＋EB＋BA＝12＋6＝18 cm
イ
E から BD に垂線 EF をひくと
△BAD と△EFD において
∠BAD＝∠EFD＝90°
∠ADB＝∠FDE（共通）より
2組の角がそれぞれ等しいから
△BAD∽△EFD
よって EF:FD＝BA:AD＝6:12＝1:2
FD＝$\frac{1}{2}$BD＝$3\sqrt{5}$ cm より
EF＝$\frac{1}{2}$FD＝$\frac{3\sqrt{5}}{2}$cm
△BED＝$\frac{1}{2}\times 6\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}$＝$\frac{45}{2}$cm²
⑶
∠EFB＝∠EFD＝90°　より
EF は面 BDF に垂直だから面 BDF を底面として考える。
問題の図Ⅳ⑤の△FBA に三平方の定理を用いると
FA＝$\sqrt{(3\sqrt{5})^2-6^2}$＝3 cm
よって△FBD＝$\frac{1}{2}\times(6+6)\times 3$＝18 cm²
EF＝$\frac{3\sqrt{5}}{2}$cm だから
求める立体の体積は$\frac{1}{3}\times 18\times\frac{3\sqrt{5}}{2}$＝$9\sqrt{5}$ cm³

【問 27】

図は，底面の円の半径が 8 cm，母線の長さが 10 cm の円すいである。次の⑴，⑵の問いに答えよ。ただし，円周率は π とする。

（鹿児島県　2005 年度）



⑴ 側面の展開図のおうぎ形について，その中心角の大きさは何度か。

⑵ この円すいの体積は何 cm^3 か。

解答欄

(1)	度
(2)	cm^3

解答

(1)　288 度

(2)　128π　cm^3

解説

⑴

おうぎ形の中心角の大きさを $x°$ とする。

おうぎ形の円周と底面の円の円周が等しいから

$16\pi = 20\pi \times \frac{x}{360}$　$x = 288$ 度

⑵

円すいの高さを x cm とする。

三平方の定理より

$10^2 = 8^2 + x^2$

$x > 0$ だから

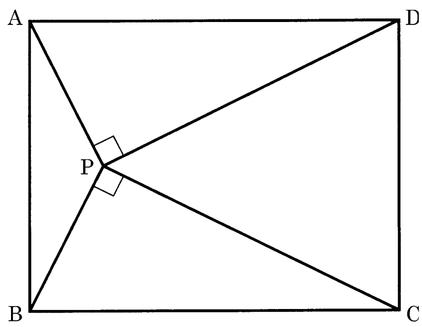
$x = 6$

円すいの体積は $8^2\pi \times 6 \times \frac{1}{3} = 128\pi$　cm^3

【問 28】

図は，長方形 ABCD の内部に点 P を，PA＝PB，∠APD＝∠BPC＝90° となるようにとったものである。このとき，次の1～3の問いに答えなさい。

（鹿児島県 2005 年度）



1 長方形ABCDは線対称であり，点対称な図形でもある。図の中から線対称であるが，点対称ではない図形を1つあげよ。

2 点 P から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を H とするとき，次の⑴，⑵の問いに答えよ。

⑴ △PBH∽△CPH であることを次のように証明した。$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ にそれぞれあてはまる角を文字を用いて表せ。

（証明） △PBH と△CPH において

∠ $\boxed{ア}$ ＝∠ $\boxed{イ}$ ＝90° …①

△PBH は直角三角形だから

∠PBH＋∠ $\boxed{ウ}$ ＝90° …②

∠BPC＝90° だから

∠ $\boxed{ウ}$ ＋∠ $\boxed{エ}$ ＝90° …③

②，③より

∠PBH＝∠ $\boxed{エ}$ …④

①，④より2組の角がそれぞれ等しいから

△PBH∽△CPH

⑵ AB＝12 cm，BC＝15 cm のとき，BH の長さを x cm として，BH の長さを求めよ。ただし，BH の長さは CH の長さより短いものとし，x についての方程式と計算過程も書くこと。

3．2の⑵のとき，長方形 ABCD から△PAB を切り取り，PC，PD を折り目として，2点 A，B が重なるように折り曲げ，三角すいの形をした容器を作る。2点 A，B が重なった点を Q とし，3点 Q，C，D を含む平面を S とするとき，点 P と平面 S との距離は何 cm か。

解答欄

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="2">(1)</td><td>ア</td><td>イ</td><td>ウ</td><td>エ</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="4">式と計算

答　　　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="5">cm</td></tr>
</table>

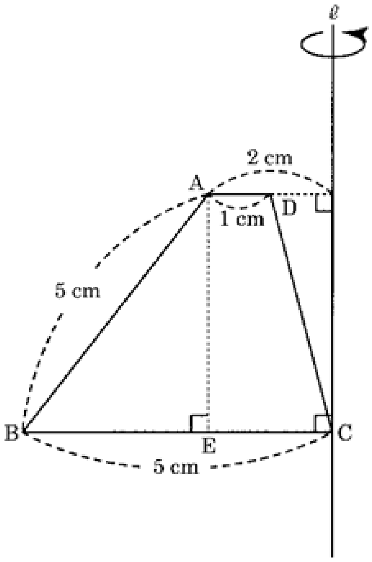
解答
1　△PAB
2
(1)　ア　BHP　　イ　PHC　　ウ　HPB　　エ　CPH
(2)
式と計算
△PBH∽△CPH であるから
BH:PH＝PH:CH
BH＝x, CH＝15－x, PH＝6　だから
x:6＝6:(15－x)
36＝x(15－x)
$x^2-15x+36=0$
$(x-3)(x-12)=0$
$x=3$, $x=12$
$0<x<7.5$より
$x=3$
答　3 cm
3　$\frac{4\sqrt{105}}{7}$ cm
解説
1
△PAB と△PCD が考えられる。
2
⑴
①は PH⊥BC から
②は△PBH において∠BHP＝90°から
③は②から
④は②と③に共通するウをひけばよい。
⑵
⑴
（式と計算）
△PBH∽△CPH であるから BH:PH＝PH:CH
BH＝x, CH＝15－x
PH＝6 だから x:6＝6:（15－x)
36＝x(15－x)
$x^2-15x+36=0$
$(x-3)(x-12)=0$
$x=3$, 12
$0<x<7.5$ より
$x=3$
3
三角すいの PQ の長さは三平方の定理より
$PQ^2=3^2+6^2$
$PQ=3\sqrt{5}$
PQ＞0 から
三角すいの体積は底面を△PCD とするとき 1 2×12×$\frac{1}{2}$×3$\sqrt{5}$×$\frac{1}{3}$＝72$\sqrt{5}$ cm^3
同様に△DQC（平面 S)を底面として考えると高さは△DQC（平面 S)と点 P との距離になる。
DC を底辺としたときの△DQC の高さを z とすると三平方の定理より $15^2=6^2+z^2$
$z=3\sqrt{21}$
△DQC（平面 S)と点 P との距離を x cm とすると
$72\sqrt{5}=12\times3\sqrt{21}\times\frac{1}{2}\times x\times\frac{1}{3}$　から $x=\frac{4\sqrt{105}}{7}$

【問 29】

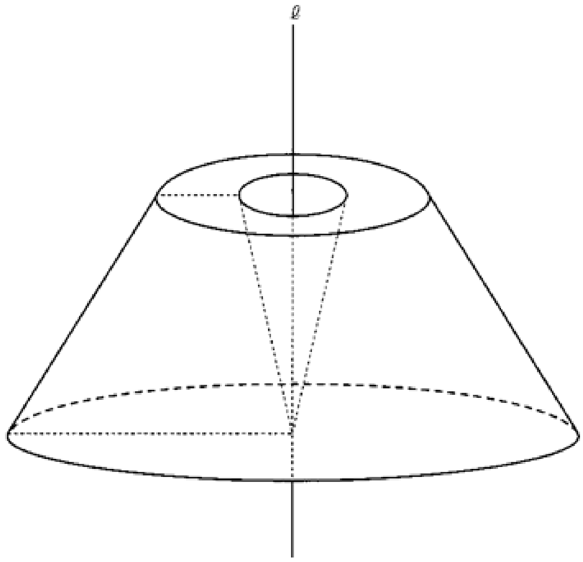
図Ⅰのような台形 ABCD がある。頂点 A から辺 BC に垂線 AE をひく。台形 ABCD を直線ℓ を軸として1回転させて図Ⅱのような回転体をつくるとき，次の各問いに答えなさい。(ただし，円周率はπのまま計算すること。)

（沖縄県 2005 年度）

図Ⅰ



図Ⅱ



問1. AE の長さを求めなさい。

問2. 回転体の内側にできる円すいの体積を求めなさい。

問3. 回転体の体積を求めなさい。

解答欄

問1	AE＝　　　　cm
問2	cm^3
問3	cm^3

解答

問1　AE＝4 cm

問2　$\frac{4}{3}\pi$　cm^3

問3　$\frac{152}{3}\pi$　cm^3

解説

問1

AE＝$\sqrt{5^2-(5-2)^2}$＝4 cm

問2

$\frac{1}{3}\times\pi\times(2-1)^2\times4=\frac{4}{3}\pi$　cm^3

問3

BA の延長とℓ との交点を F

AD の延長とℓ との交点を G とし

FG＝x cm とすると

△FAG∽△FBC だから

$x:(x+4)=2:5$

$x=\frac{8}{3}$

よって回転体の体積は$\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times(4+\frac{8}{3})-\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\pi=(\frac{500}{9}-\frac{32}{9}-\frac{12}{9})\pi=\frac{152}{3}\pi$　cm^3