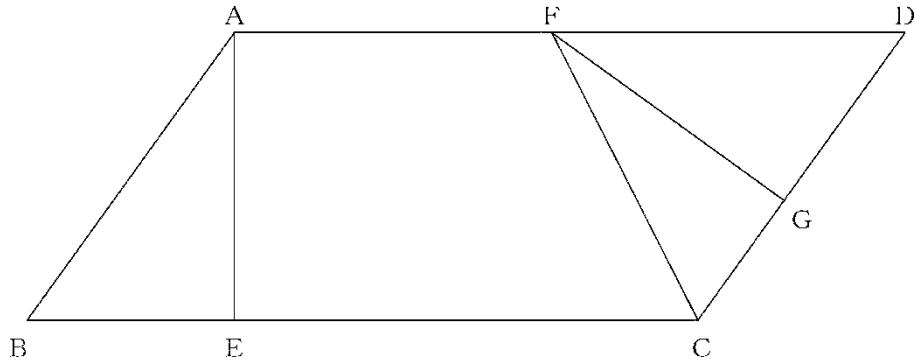


## 5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2013 年度出題】

### 【問 1】

下の図において、四角形  $ABCD$  は平行四辺形である。点  $E$  は点  $A$  から辺  $BC$  にひいた垂線と  $BC$  との交点である。

また、点  $F$  は  $\angle BCD$  の二等分線と辺  $AD$  との交点であり、点  $G$  は  $F$  から辺  $CD$  にひいた垂線と  $CD$  との交点である。



このとき、 $AE=FG$  であることを証明しなさい。

(福島県 2013 年度)

解答欄

〔証明〕

解答

〔証明の例 1〕

$\triangle ABE$  と  $\triangle FDG$  において

仮定より

$$\angle AEB = \angle FGD = 90^\circ \quad (1)$$

平行四辺形の対角は等しいから

$$\angle B = \angle D \quad (2)$$

また, 平行線の錯角は等しいから

$$\angle BCF = \angle DFC \quad (3)$$

仮定より

$$\angle BCF = \angle DCF \quad (4)$$

(3), (4)より

$$\angle DFC = \angle DCF \quad (5)$$

(5)より $\triangle DFC$  は 2 つの角が等しいので二等辺三角形であるから

$$DF = DC \quad (6)$$

平行四辺形の対辺は等しいから

$$AB = DC \quad (7)$$

(6), (7)より

$$AB = FD \quad (8)$$

(1), (2), (8)より, 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABE \equiv \triangle FDG$$

したがって  $AE = FG$

解説

$\triangle ABE$  と  $\triangle FDG$  において, 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいことから合同を示し,  $AE = FG$  を導く。

〔証明の例 2〕

点  $F$  から辺  $BC$  にひいた垂線と  $BC$  との交点を  $H$  とする。

線分  $AE$  と線分  $FH$  の長さは, それぞれ平行な 2 直線の距離だから

$$AE = FH \quad (1)$$

$\triangle FHC$  と  $\triangle FGC$  において

$$\angle FHC = \angle FGC = 90^\circ \quad (2)$$

$FC$  は共通(3)

仮定より

$$\angle FCH = \angle FCG \quad (4)$$

(2), (3), (4)より, 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

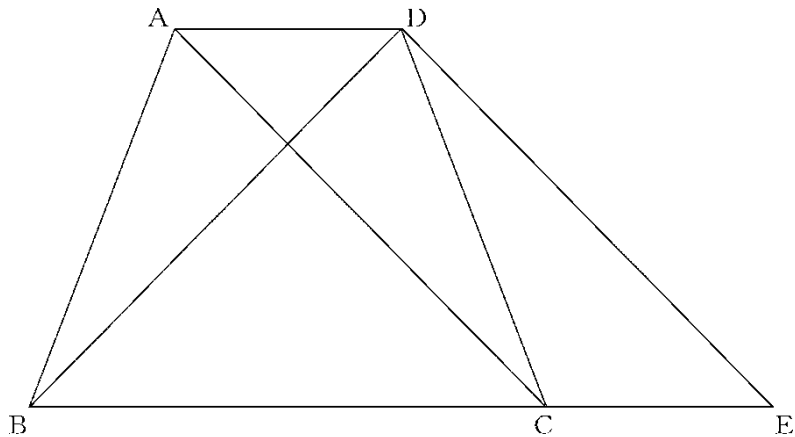
$$\triangle FHC \equiv \triangle FGC$$

したがって  $FH = FG \quad (5)$

(1), (5)より  $AE = FG$

【問 2】

下の図のように、 $AD \parallel BC$ 、 $AC = DB$  である四角形  $ABCD$  がある。辺  $BC$  を  $C$  の方向に延長した直線上に  $AC \parallel DE$  となる点  $E$  をとる。



このとき、 $AB = DC$  であることを次のように証明した。

〔証明〕

仮定から、 $AC \parallel DE$ ①

$AD \parallel BC$  だから、 $AD \parallel CE$ ②

①、②から、2 組の ア がそれぞれ平行だから

四角形  $ACED$  は平行四辺形である。

よって、 $AC = DE$ ③

仮定から、 $AC = DB$ ④

③、④から  $DB = DE$

したがって、2 つの辺が等しくなるので  $\triangle DBE$  は二等辺三角形である。

よって、イ  $= \angle DEB$ ⑤

ウ

次の問1、問2に答えなさい。

(茨城県 2013 年度)

問1 ア には適切なことばを、イ には当てはまる適切な角をそれぞれ書きなさい。

問2 ウ には証明の続きを書き、 $AB = DC$  であることの証明を完成させなさい。

ただし、〔証明〕の中の①～⑤で示されている関係を使う場合は、①～⑤の番号を用いてもよい。また、新たな関係に番号をつける場合は、⑥以降の番号を用いなさい。

解答欄

|    |   |   |
|----|---|---|
| 問1 | ア |   |
|    | イ | ∠ |
| 問2 | ウ |   |

解答

問1

ア 対辺

イ ∠DBE

問2

ウ

△ABCと△DCBで

共通な辺だから

$BC=CB$ …⑥

①から同位角が等しいので

$\angle ACB=\angle DEC$ …⑦

⑤⑦から

$\angle ACB=\angle DBC$ …⑧

④⑥⑧から

2組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC\equiv\triangle DCB$

対応する辺だから

$AB=DC$

解説

問1

アには平行四辺形になる条件から考える。

イには二等辺三角形の底角が等しいという定理から等しい角をあてはめる。

問2

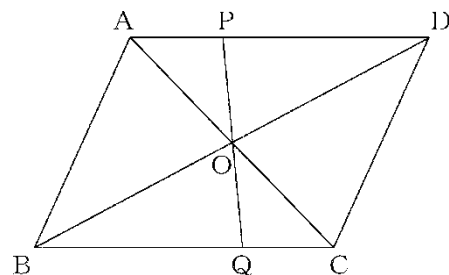
$AB=DC$ を証明するために△ABCと△DCBが合同になることを導く。

【問 3】

右の図のように、平行四辺形 ABCD の対角線の交点 O を通る直線と辺 AD, BC との交点をそれぞれ P, Q とする。

このとき、 $AP=CQ$  であることを証明しなさい。

(栃木県 2013 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle OAP$  と  $\triangle OCQ$  において

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから

$OA=OC$ …①

対頂角は等しいから

$\angle AOP=\angle COQ$ …②

$AD \parallel BC$  より、平行線の錯角は等しいから

$\angle OAP=\angle OCQ$ …③

①, ②, ③より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OAP \equiv \triangle OCQ$

したがって  $AP=CQ$

解説

$\triangle OAP$  と  $\triangle OCQ$  において

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことより合同を示して

$AP=CQ$  を導く。

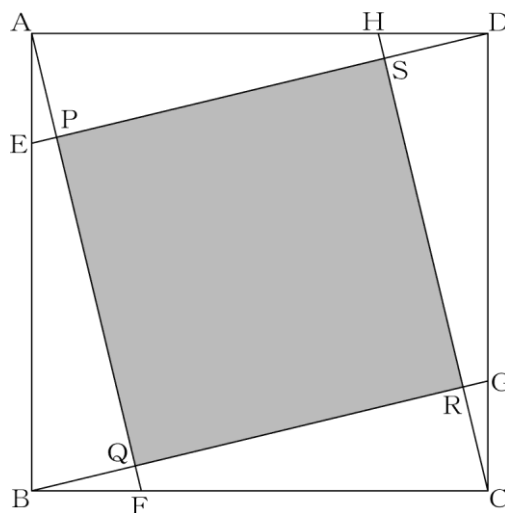
【問 4】

図の四角形  $ABCD$  は、1 辺の長さが  $6\text{ cm}$  の正方形である。辺  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  上に、それぞれ  $AE=BF=CG=DH=x\text{ cm}$  となるように点  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  をとる。

線分  $AF$  と  $DE$ ,  $BG$  との交点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$  とし、線分  $CH$  と  $BG$ ,  $DE$  との交点をそれぞれ  $R$ ,  $S$  とするとき、次の問1～問3に答えなさい。

(群馬県 2013 年度)

問1  $\angle AED = \angle BFA$  となることを証明しなさい。



問2  $AF^2$  を  $x$  の式で表しなさい。また、三角形  $AEP$  と三角形  $AFB$  の面積の比を  $x$  の式で表しなさい。

問3 四角形  $PQRS$  の面積が四角形  $ABCD$  の面積の半分となるとき、

(1) 三角形  $ABQ$  の面積を求めなさい。

(2)  $x$  の値を求めなさい。

|    |                         |                 |
|----|-------------------------|-----------------|
| 問1 | 〔証明〕                    |                 |
|    |                         |                 |
| 問2 | AF <sup>2</sup> =       |                 |
|    | △AEP:△AFB=            : |                 |
| 問3 | (1)                     | cm <sup>2</sup> |
|    | (2)                     |                 |

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AED$  と  $\triangle BFA$  において

四角形  $ABCD$  は正方形だから

$$\angle DAE = \angle ABF = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

仮定より

$$AD = BA = 6 \text{ cm} \cdots \textcircled{2}$$

$$AE = BF = x \text{ cm} \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AED \equiv \triangle BFA$$

対応する角だから

$$\angle AED = \angle BFA$$

問2

$$AF^2 = x^2 + 36$$

$$\triangle AEP : \triangle AFB = x^2 : x^2 + 36$$

問3

$$(1) \quad \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

$$(2) \quad 12 - 6\sqrt{3}$$

解説

問1

$\triangle AED$  と  $\triangle BFA$  において

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいことから合同を示し

$$\angle AED = \angle BFA \text{ を導く。}$$

問2

$\triangle ABF$  で

$$\text{三平方の定理より } AF^2 = AB^2 + BF^2 = 6^2 + x^2 = x^2 + 36$$

$\triangle AEP$  と  $\triangle AFB$  は

2組の角がそれぞれ等しいので相似だから

相似比は  $AE : AF$  より

$$\text{面積比は } AE^2 : AF^2 = x^2 : (x^2 + 36)$$

問3

(1)

$\triangle ABQ$  の面積を  $S$  とする。

四角形  $PQRS$  の面積が四角形  $ABCD$  の面積の半分より

$$6^2 - 4S = \frac{1}{2} \times 6^2 \quad 4S = 18 \quad S = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

(2)

$\triangle AEP : \triangle ABQ$  の比の関係より

$$\triangle AEP : \frac{9}{2} = x^2 : 36$$

$$\triangle AEP = \frac{9}{2} \times x^2 \div 36 = \frac{1}{8} x^2$$

$\triangle ABF$  の面積に注目して

$$\frac{1}{8} x^2 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \times 6 \times x \quad \frac{1}{8} x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0$$

$$x^2 - 24x + 36 = 0$$

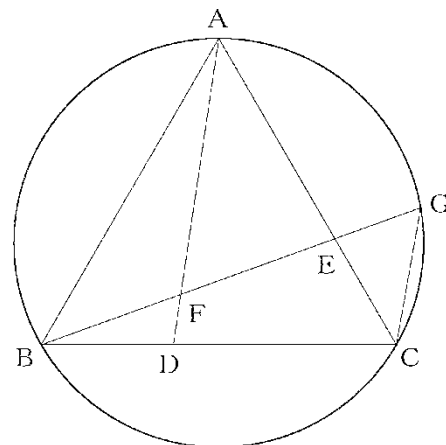
$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \times 1 \times 36}}{2 \times 1} = \frac{24 \pm 12\sqrt{3}}{2} = 12 \pm 6\sqrt{3}$$

$0 < x < 6$  より

$$x = 12 - 6\sqrt{3}$$

【問 5】

図のように、円周上の 3 点 A, B, C を頂点とする正三角形 ABC がある。辺 BC 上に 2 点 B, C と異なる点 D をとり、辺 AC 上に  $BD=CE$  となる点 E をとる。線分 BE と線分 AD との交点を F, 線分 BE の延長線と円との交点を G とする。



このとき,  $BF=CG$  となる。その証明を, 下の  の中に途中まで示してある。

証明

$\triangle ABD$  と  $\triangle BCE$  において

仮定から,  $AB = \text{(a)}$  …①

$BD=CE$  …②

$\angle ABD = \text{(b)}$  …③

①, ②, ③より,  (c) ので,

$\triangle ABD \equiv \triangle BCE$  …④

2 点 A, G を結ぶ。

(続く)

次の問1～問3に答えなさい。

(千葉県 2013 年度 後期)

問1  の中の  (a) ,  (b) に入る最も適当なものを, A群のア～カの中から,  (c) に入る最も適当なものを, B群のア～ウの中からそれぞれ一つずつ選び, 符号で答えなさい。

A群

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| ア AC           | イ BC           | ウ BE           |
| エ $\angle AFE$ | オ $\angle BEC$ | カ $\angle BCE$ |

B群

|                      |
|----------------------|
| ア 3 辺がそれぞれ等しい        |
| イ 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい  |
| ウ 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい |

問2  の中の証明の続きを書き, 証明を完成させなさい。

ただし,  の中の①～④に示されている関係を使う場合, 番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

問3  $BD=3\text{ cm}$ ,  $DC=5\text{ cm}$ ,  $AD=7\text{ cm}$  のとき, 線分 BG の長さを求めなさい。

解答欄

|    |     |  |
|----|-----|--|
| 問1 | (a) |  |
|    | (b) |  |
|    | (c) |  |
| 問2 |     |  |
| 問3 | cm  |  |

解答

問1

(a) イ

(b) カ

(c) イ

問2

$\triangle ABF$  と  $\triangle ACG$  において

仮定から

$$AB=AC \cdots \textcircled{5}$$

④より

$$\angle BAF = \angle CBG \cdots \textcircled{6}$$

$\widehat{CG}$  に対する円周角が等しいことから

$$\angle CBG = \angle CAG \cdots \textcircled{7}$$

⑥, ⑦より

$$\angle BAF = \angle CAG \cdots \textcircled{8}$$

$\widehat{AG}$  に対する円周角が等しいことから

$$\angle ABF = \angle ACG \cdots \textcircled{9}$$

⑤, ⑧, ⑨より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABF \equiv \triangle ACG$$

したがって  $BF=CG$

$$\text{問3} \quad \frac{64}{7} \text{ cm}$$

解説

問1

$\triangle ABD$  と  $\triangle BCE$  は 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので合同である。

問2

$\triangle ABF$  と  $\triangle ACG$  において

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいことから合同を導き

$BF=CG$  を示す。

問3

$$BE=AD=7 \text{ cm}, CE=BD=3 \text{ cm}, AE=3+5-3=5 \text{ cm}$$

$\triangle AEG$  と  $\triangle BEC$  において

対頂角が等しいことより

$$\angle AEG = \angle BEC$$

円周角の定理より

$$\angle GAE = \angle CBE$$

よって 2 組の角がそれぞれ等しいので相似だから

$$AE:BE=EG:EC$$

$$5:7=EG:3$$

$$7EG=15$$

$$EG=\frac{15}{7} \text{ cm}$$

$$\text{よって } BG=7+\frac{15}{7}=\frac{64}{7} \text{ cm}$$

【問 6】

ある中学校で、S さんが作った問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

(東京都 2013 年度)

[S さんが作った問題]

$\ell$  を正の数とする。

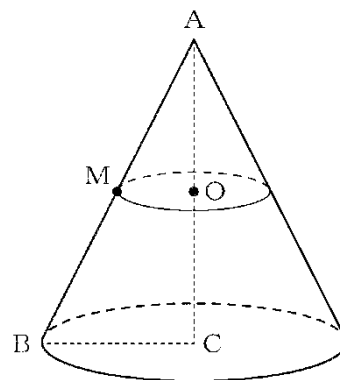
右の図1に示した立体は、 $\angle ACB=90^\circ$  の直角三角形  $ABC$  を、辺  $AC$  を通る直線を軸として 1 回転させたときにできる円すいである。

辺  $AB$  の中点を  $M$  とし、点  $M$  を通り底面に平行な平面と円すいが交わってできる円の中心を  $O$  とする。

円  $O$  の周の長さを  $\ell$  cm, 線分  $AB$  を母線とする円すいの側面積を  $P$   $\text{cm}^2$  とする。

$AB=9$  cm,  $\ell=4\pi$  cm のとき、 $P$  の値を求めてみよう。

図 1



問1 [S さんが作った問題]で、 $P$  の値を求めよ。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

先生は、[S さんが作った問題]をもとにして、次の問題を作った。

[先生が作った問題]

$a, \ell$  を正の数とする。

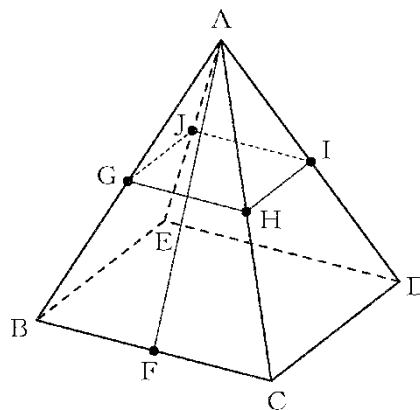
右の図2に示した立体  $A-BCDE$  は、底面  $BCDE$  が正方形で、 $AB=AC=AD=AE$  の正四角すいである。

辺  $BC$  の中点を  $F$  とし、頂点  $A$  と点  $F$  を結ぶ。

辺  $AB$ , 辺  $AC$ , 辺  $AD$ , 辺  $AE$  の中点をそれぞれ  $G, H, I, J$  とし、点  $G$  と点  $H$ , 点  $H$  と点  $I$ , 点  $I$  と点  $J$ , 点  $J$  と点  $G$  をそれぞれ結ぶ。

$AF=a$  cm,  $GH+HI+IJ+JG=\ell$  cm, 立体  $A-BCDE$  の側面積を  $Q$   $\text{cm}^2$  とするとき、 $Q=a\ell$  となることを確かめなさい。

図 2



問2 [先生が作った問題]で、 $Q=a\ell$  となることを証明せよ。

## 解答欄

|    |                                                                          |
|----|--------------------------------------------------------------------------|
| 問1 | $P =$                                                                    |
| 問2 | 〔証明〕<br><br><div style="margin-top: 80px;"><math>Q = a \ell</math></div> |

### 解答

問1  $P=36\pi$

問2

〔証明〕

立体 A-BCDE は正四角すいなので

$$\triangle ABC \equiv \triangle ACD \equiv \triangle ADE \equiv \triangle AEB \cdots (1)$$

点 G, H, I, J はそれぞれ辺 AB, AC, AD, AE の中点であるから

中点連結定理より  $GH=HI=IJ=JG$

また  $\text{GH} + \text{HI} + \text{IJ} + \text{JG} = \ell$  であるから  $\text{GH} = \frac{1}{4} \ell$

$$\text{よって BC} = 2\text{GH} = 2 \times \frac{1}{4} \ell = \frac{1}{2} \ell$$
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \ell \times a = \frac{1}{4} a \ell \cdots (2)$$

(1), (2)より  $Q = 4 \times \triangle ABC = 4 \times \frac{1}{4} a \ell$

$$Q = a \ell$$

解説

問1

側面の展開図のおうぎ形において中心角を  $x^\circ$  とすると  $AM = \frac{9}{2}$  cm だから

$$\ell = 4\pi \text{ cm より } 2\pi \times \frac{9}{2} \times \frac{x}{360} = 4\pi \quad x = 160^\circ \quad \text{よって } P = \pi \times 9^2 \times \frac{160}{360} = 36\pi \text{ cm}^2$$

問2

$\triangle ABC$  は  $AB=AC$  の二等辺三角形で  $G, H$  は  $AB, AC$  の中点だから

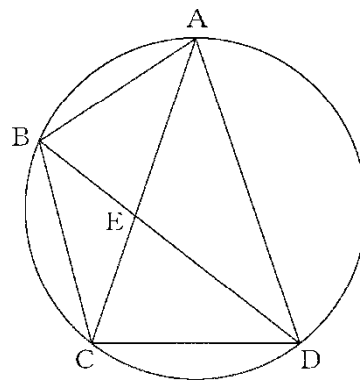
中点連結定理より  $BC=2GH$   $GH=HI=IJ=JG=\frac{\ell}{4}$  cm だから  $BC=CD=DE=EB=\frac{\ell}{2}$  cm

AB=AC より AF ⊥ BC だから,  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{\ell}{2} \times a = \frac{a\ell}{4}$  よって,  $Q = 4 \times \frac{a\ell}{4} = a\ell$

【問 7】

右の図のように、円周上に、4 点  $A, B, C, D$  をこの順にとり、 $AC=AD$ ,  $\widehat{BC}=\widehat{CD}$ とする。また、線分  $AC$  と線分  $BD$  との交点を  $E$  とする。  
このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2013 年度)



問1  $AB=AE$  であることを証明せよ。

問2  $AC=6\text{ cm}$ ,  $DE=4\text{ cm}$  のとき、

(1) 線分  $AB$  の長さを求めよ。

(2) 四角形  $ABCD$  の面積を求めよ。

解答欄

|    |      |                 |
|----|------|-----------------|
| 問1 | 〔証明〕 |                 |
|    |      |                 |
| 問2 | (1)  | cm              |
|    | (2)  | cm <sup>2</sup> |

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABC$  と  $\triangle AED$  で

仮定より

$$AC=AD\cdots①$$

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BCA=\angle EDA\cdots②$$

また  $\widehat{BC}=\widehat{CD}$ より等しい弧に対する円周角は等しいから

$$\angle BAC=\angle EAD\cdots③$$

①, ②, ③から

一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC\equiv\triangle AED$$

よって  $AB=AE$

問2

$$(1) \frac{10}{3} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{112\sqrt{2}}{9} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle ABC$  と  $\triangle AED$  が合同であることから  $AB=AE$  を示す。

問2

(1)

$\triangle ACD$  と  $\triangle DCE$  は相似な二等辺三角形であるから

$$CE=x \text{ cm とすると}$$

$$6:4=4:x$$

$$6x=16 \quad x=\frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって } AE=6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3} \text{ cm}$$

(2)

A から辺 CD に垂線をひき、交点を H とする。

$\triangle ACD$  は  $AC=AD$  の二等辺三角形だから

$$CH=DH=4\div 2=2 \text{ cm}$$

$$\text{三平方の定理より } AH=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ACD=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$AE:EC=\frac{10}{3}:\frac{8}{3}=5:4 \text{ だから}$$

$$\triangle ADE=\frac{5}{9}\triangle ACD=\frac{5}{9}\times 8\sqrt{2}=\frac{40\sqrt{2}}{9} \text{ cm}^2$$

$\triangle ABC=\triangle AED$  だから

$$\text{四角形 } ABCD \text{ の面積は } \frac{40\sqrt{2}}{9}+8\sqrt{2}=\frac{112\sqrt{2}}{9} \text{ cm}^2$$

【問 8】

定規とコンパスを用いて、次の手順Ⅰ～Ⅲで△ABCに直線BPを作図する。下の図は、手順Ⅰまで作図したものである。

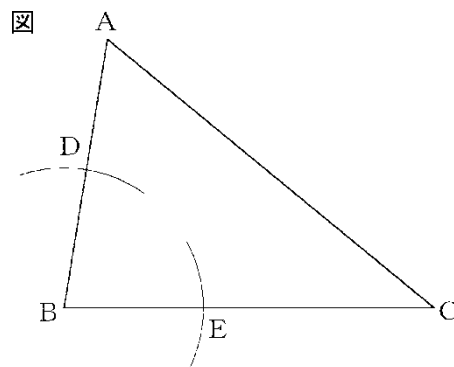
このとき、あとの各問いに答えなさい。

(鳥取県 2013 年度)

手順Ⅰ 頂点 B を中心として、辺 AB, BC の両方に交わる円をかき、その円と辺 AB, BC との交点をそれぞれ D, E とする。

手順Ⅱ 点 D, E それぞれを中心として、互いに交わるように等しい半径の円をかき、その交点の 1 つを P とする。

手順Ⅲ 頂点 B と点 P を通る直線をひく。



問1 手順Ⅰ，Ⅱを根拠にして、△DBP と△EBP において  $\angle DBP = \angle EBP$  であることを、解答欄の内に示し、直線 BP が  $\angle B$  の二等分線であることを証明しなさい。

問2 辺 AC の垂直二等分線と直線 BP が一致するためには、△ABC の辺について、少なくともどのような条件が成り立つことが必要か、式で答えなさい。

解答欄

|    |                                                                                                                                                                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 問1 | <p>〔証明〕</p> <p>△DBP と△EBP において</p> <div style="border: 1px solid black; height: 150px; margin: 10px 0;"></div> <p>よって、<math>\angle DBP = \angle EBP</math><br/>したがって、直線 BP は <math>\angle B</math> の二等分線である。</p> |
| 問2 |                                                                                                                                                                                                                  |

解答

問1

〔証明〕

$\triangle DBP$  と  $\triangle EBP$  において

手順Ⅰより  $DB=EB$ …①

手順Ⅱより  $DP=EP$ …②

共通な辺だから  $BP=BP$ …③

①, ②, ③から

3 (組の) 辺がそれぞれ等しいので

$\triangle DBP \equiv \triangle EBP$

よって  $\angle DBP = \angle EBP$

したがって直線  $BP$  は  $\angle B$  の二等分線である。

問2  $BA=BC$

解説

問1

$\triangle DBP$  と  $\triangle EBP$  において

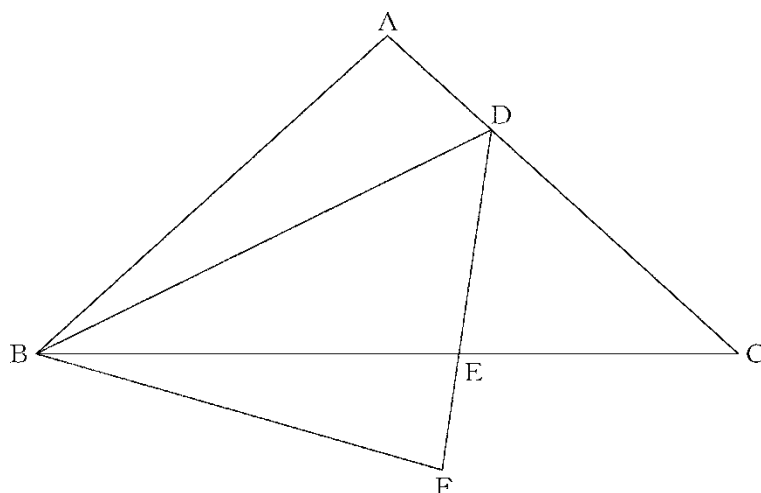
3 組の辺がそれぞれ等しいことより  $\triangle DBP \equiv \triangle EBP$  を示し  $\angle DBP = \angle EBP$  を導く。

問2

$\angle ABC$  の二等分線が辺  $AC$  を垂直に 2 等分するのは  $BA=BC$  であるとき

【問 9】

下の図のように、 $AB=AC$  である二等辺三角形  $ABC$  の辺  $AC$  上に点  $D$  があります。辺  $BC$  上に  $\angle BDE = \angle CDE$  となるように点  $E$  をとります。また、線分  $DE$  の延長上に  $\angle DBF = \angle ABC$  となるように点  $F$  をとります。



これについて、次の問1・問2に答えなさい。

(広島県 2013 年度)

問1  $\triangle BFE$  は二等辺三角形であることを証明しなさい。

問2  $AB=6$  cm,  $\triangle AFC$  の面積が  $10$   $\text{cm}^2$ , 四角形  $BFCD$  の面積が  $15$   $\text{cm}^2$  のとき,  $BD+DC$  は何 cm ですか。

解答欄

|    |                                                                                                                                                                                         |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 問1 | <p>〔仮 定〕<br/>図において, <math>AB=AC</math>, <math>\angle BDE = \angle CDE</math>, <math>\angle DBF = \angle ABC</math></p> <p>〔結 論〕<br/><math>\triangle BFE</math> は二等辺三角形</p> <p>〔証 明〕</p> |
| 問2 | <div>cm</div>                                                                                                                                                                           |

解答

問1

〔仮 定〕

図において  $AB=AC$ ,  $\angle BDE=\angle CDE$ ,  $\angle DBF=\angle ABC$

〔結 論〕

$\triangle BFE$  は二等辺三角形

〔証 明〕

$AB=AC$  であるから

$$\angle ABC=\angle ACB\cdots①$$

$\angle DBF=\angle ABC$  であることと①より

$$\angle DBF=\angle ACB\cdots②$$

$$\angle BFD=180^\circ-(\angle DBF+\angle BDE)\cdots③$$

$$\angle CED=180^\circ-(\angle ACB+\angle CDE)\cdots④$$

$\angle BDE=\angle CDE$  であることと②, ③, ④より

$$\angle BFD=\angle CED\cdots⑤$$

対頂角は等しいから

$$\angle BEF=\angle CED\cdots⑥$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6}\text{より}\angle BFD=\angle BEF\cdots\textcircled{7}$$

⑦より $\triangle BFE$  は, 2 つの角が等しい三角形であるから二等辺三角形である。

問2 9cm

解説

問1

$\triangle BFE$  において  $\angle BFD=\angle BEF$  になることを示す。

問2

点 B を通り DF に平行な直線と CA の延長線の交点を P とする。

BP // FD より

$$\angle BPD=\angle CDE$$

$$\angle PBD=\angle BDE$$

$$\angle BDE=\angle CDE \text{ より}$$

$$\angle BPD=\angle PBD$$

$$\text{よって } BD=PD \quad BD+DC=PD+DC=PC$$

また BP // FD より

$$\text{四角形 BFCD の面積は } \triangle BDF+\triangle FCD=\triangle PDF+\triangle FCD=\triangle PFC$$

$$\text{よって } AC:PC=\triangle AFC:\triangle PFC=10:15=2:3 \quad 6:PC=2:3$$

$$PC=9\text{cm}$$

$$\text{したがって } BD+DC=9\text{cm}$$

【問 10】

右の図のように、正方形  $ABCD$  があり、点  $C$  を中心として、半径  $BC$  の円をかく。辺  $AB$  の中点を  $E$  とし、 $\widehat{BD}$  上に点  $B$  と異なる点  $F$  を、 $EB = EF$  となるようにとり、点  $C$  と点  $E$ 、点  $C$  と点  $F$  をそれぞれ結ぶ。

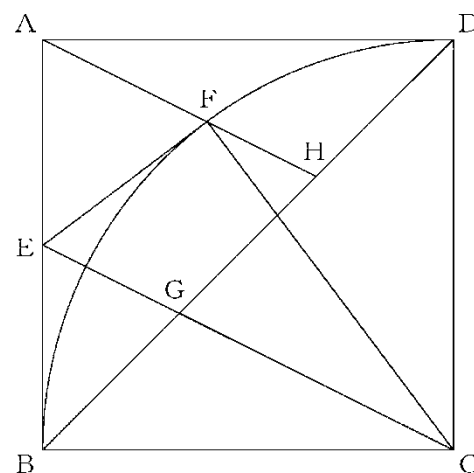
また、対角線  $BD$  と線分  $CE$ 、対角線  $BD$  と直線  $AF$  との交点をそれぞれ  $G$ 、 $H$  とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(香川県 2013 年度)

問1  $\angle BEC = \angle FEC$  であることを証明せよ。

問2  $BG = GH = HD$  であることを証明せよ。



解答欄

|    |      |
|----|------|
| 問1 | 〔証明〕 |
| 問2 | 〔証明〕 |

解答

問1

〔証明〕

$\triangle BEC$  と  $\triangle FEC$  において

仮定より,  $BE=EF$

$CE$  は共通

円  $C$  の半径だから  $CB=CF$

3 辺がそれぞれ等しいから

$\triangle BEC = \triangle FEC$

よって  $\angle BEC = \angle FEC$

問2

〔証明〕

$\triangle GBE$  と  $\triangle GDC$  において

$BE \parallel DC$  だから  $BE:DC = BG:DG$

$BE = \frac{1}{2} AB$ ,  $DC = AB$  だから  $BE:DC = 1:2$

よって  $BG:DG = 1:2 \cdots \textcircled{1}$

仮定より  $EA=EB$ ,  $EB=EF$  だから  $\triangle AEF$  は  $EA=EF$  の二等辺三角形

よって  $\angle EAF = \angle EFA$

$\angle BEF = \angle EAF + \angle EFA$  だから  $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BEF$

問1より  $\angle BEC = \angle FEC$  だから  $\angle BEC = \frac{1}{2} \angle BEF$

よって  $\angle EAF = \angle BEC$

同位角が等しいから  $EC \parallel AH \cdots \textcircled{2}$

$\triangle BAH$  において

$\textcircled{2}$ より  $EG \parallel AH$  だから  $BE:EA = BG:GH$

$BE:EA = 1:1$  だから  $BG:GH = 1:1$

よって  $BG = GH \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{3}$ より  $HD = DG - GH = 2BG - BG = BG \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ より  $BG = GH = HD$

解説

問1

$\triangle BEC$  と  $\triangle FEC$  において

3 辺がそれぞれ等しいことより合同を示し  $\angle BEC = \angle FEC$  を導く。

問2

$AB \parallel DC$  より

$BG:GD = BE:CD = 1:2 \cdots \textcircled{1}$

$\triangle AEF$  は  $EA=EF$  の二等辺三角形だから  $\angle EAF = \angle EFA = (180^\circ - \angle AEF) \div 2 = \angle BEG$

よって同位角が等しいので  $EG \parallel AH$

これより  $BG:GH = BE:EA = 1:1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ より

$BG:GH:HD = 1:1:(2-1) = 1:1:1$

よって  $BG = GH = HD$