

6.証明以外 平面図形の複合問題【2019 年度出題】

【問 1】

次の長さを 3 辺とする三角形のうち、直角三角形を、ア～オから 2 つ選びなさい。

(北海道 2019 年度)

ア 2 cm, 7 cm, 8 cm

イ 3 cm, 4 cm, 5 cm

ウ 3 cm, 5 cm, $\sqrt{30}$ cm

エ $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm, 3 cm

オ $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{10}$ cm

解答欄

解答

イ,オ

解説

3 辺の長さが a , b , c の三角形について

$a^2+b^2=c^2$ が成り立つとき

三平方の定理の逆より, その三角形は直角三角形といえる。

直角三角形では斜辺が最も長い辺となるから

最も長い辺の長さを c , 残りの 2 辺の長さを a , b として

a^2+b^2 の値と c^2 の値を比較する。

ア… $2^2+7^2=53$, $8^2=64$ で, $2^2+7^2<8^2$ だから直角三角形ではない。

イ… $3^2+4^2=25$, $5^2=25$ で, $3^2+4^2=5^2$ だから直角三角形である。

ウ… $3^2+5^2=34$, $(\sqrt{30})^2=30$ で, $3^2+5^2>(\sqrt{30})^2$ だから直角三角形ではない。

エ… $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=5$, $3^2=9$ で, $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2<3^2$ だから直角三角形ではない。

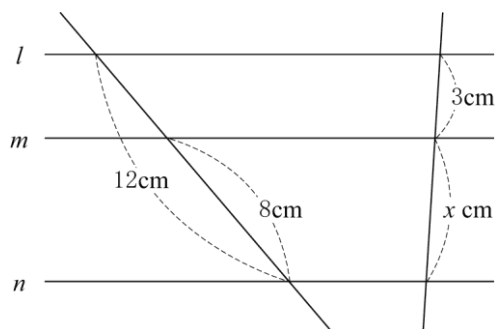
オ… $(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2=10$, $(\sqrt{10})^2=10$ で, $(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2=(\sqrt{10})^2$ だから直角三角形である。

よって, 答えはイとオ

【問 2】

下の図のような 5 つの直線があります。直線 l, m, n が $l \parallel m, m \parallel n$ であるとき、 x の値を求めなさい。

(北海道 2019 年度)



解答欄

$x =$ (cm)

解答

$x=6$ (cm)

解説

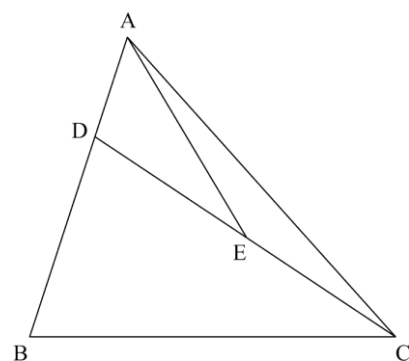
平行線と比の定理より、 $12 : 8 = (3 + x) : x$ $12x = 8(3 + x)$ $12x = 24 + 8x$ $4x = 24$ $x = 6$

【問 3】

右の図の $\triangle ABC$ で、点 D は辺 AB 上にあり、 $AD : DB = 1 : 2$ です。

点 E が線分 CD の中点のとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle AEC$ の面積比を求めなさい。

(岩手県 2019 年度)



解答欄

$\triangle ABC : \triangle AEC =$:

解答

$\triangle ABC : \triangle AEC = 6 : 1$

解説

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ は、それぞれ AB, AD を底辺としたときの高さが等しいから底辺の長さの比が面積の比になる。

したがって、 $\triangle ABC : \triangle ADC = AB : AD = (1 + 2) : 1 = 3 : 1$

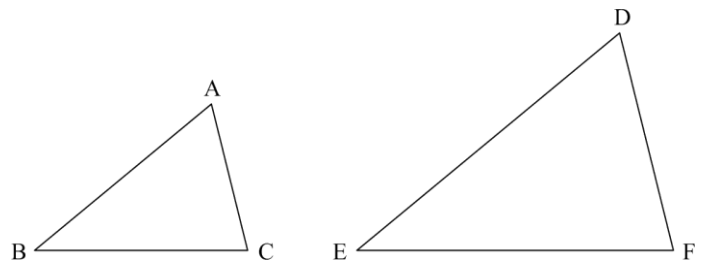
同様に、 $\triangle ADC : \triangle AEC = DC : EC = 2 : 1$

よって、 $\triangle ABC : \triangle AEC = 3\triangle ADC : \frac{1}{2}\triangle ADC = 3 : \frac{1}{2} = 6 : 1$

【問 4】

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似であり、その相似比は $2 : 3$ である。 $\triangle ABC$ の面積が 8 cm^2 であるとき、 $\triangle DEF$ の面積を求めなさい。

(栃木県 2019 年度)



解答欄

cm^2

解答

18 cm^2

解説

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比は $2 : 3$ だから
面積比は $2^2 : 3^2 = 4 : 9$ である。

よって、 $8 : \triangle DEF = 4 : 9$

$\triangle DEF = 18(\text{cm}^2)$

【問 5】

1 辺が 10 cm の正方形がある。この正方形の 1 辺の長さを $a \text{ cm}$ 長くした正方形は、もとの正方形と比べてどれだけ面積が増えるか、 a を用いて表しなさい。

ただし、 $a > 0$ とする。

(群馬県 2019 年度 前期)

解答欄

cm^2

解答

$a^2 + 20a \text{ (cm}^2\text{)}$

解説

1 辺が 10 cm の正方形の面積は $10^2 = 100(\text{cm}^2)$

1 辺が $(a + 10)\text{cm}$ の正方形の面積は $(a + 10)^2 = a^2 + 20a + 100(\text{cm}^2)$

よって、増える面積は、 $a^2 + 20a + 100 - 100 = a^2 + 20a(\text{cm}^2)$

【問 6】

右の図 1 のように、線分 AB を直径とする半円 O の $\widehat{AB}$ 上に点 P をとります。また、線分 AP 上に $AM : MP = 2 : 1$ となる点 M をとり、線分 BM をひきます。

$AB = 6 \text{ cm}$, $\angle ABP = 60^\circ$ のとき、次の各問に答えなさい。

(埼玉県 2019 年度)

問 1 線分 PM の長さを求めなさい。

図 1

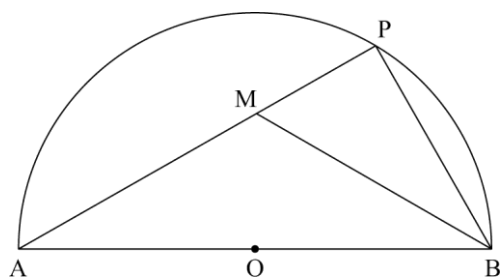
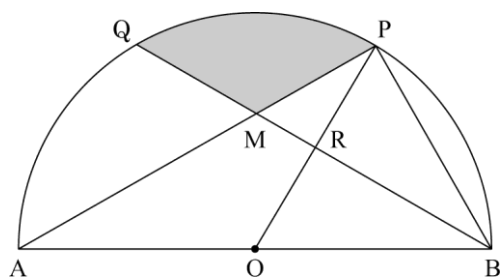


図 2



問 2 右の図 2 のように、線分 BM を延長し、 $\widehat{AP}$ との交点を Q とします。また、線分 OP をひき、線分 BQ との交点を R とします。

このとき、次の (1), (2) に答えなさい。

(1) 半円 O を、線分 BQ を折り目として折ったとき、点 P は点 O と重なります。その理由を説明しなさい。

(2) 図 2 のかげ (■) をつけた部分の面積を求めなさい。
ただし、円周率は π とします。

解答欄

問 1	PM = cm	
問 2	(1)	〔説明〕
	(2)	
		cm ²

解答

問 1 (PM) = $\sqrt{3}$ (cm)

問 2

(1)

〔説明〕

△OBP は

$\angle OBP = 60^\circ$, $OB = OP$

だから、正三角形である。

また、△PBM は 3 辺の長さの比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形だから

$\angle PBM = 30^\circ$

したがって、線分 BQ は線分 OP の垂直二等分線となるので、点 P は点 O と重なる。

(2) $\frac{3\pi - 3\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

解説

問 1

線分 AB は半円 O の直径だから、 $\angle APB = 90^\circ$ よって、△ABP は 60° の角をもつ直角三角形だから

$AB : AP = 2 : \sqrt{3}$ $AP = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ (cm)

また、 $AM : MP = 2 : 1$ より、 $PM : AP = 1 : (2 + 1) = 1 : 3$ $PM = \frac{1}{3} AP = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (cm)

問 2

(1)

OB, OP は半径だから、 $OB = OP = 3$ cm よって、△OBP は底角が 60° の二等辺三角形だから、正三角形であることがわかる。また、△PBM は $\angle MPB = 90^\circ$ で、問 1 より $PM = \sqrt{3}$ cm, $PB = 3$ cm だから、 $PM : PB = \sqrt{3} : 3 = 1 : \sqrt{3}$ したがって、△PBM は $PM : BM : PB = 1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形で、 $\angle PBM = 30^\circ$ だから、線分 BM は正三角形 OBP の $\angle OBP$ の二等分線になる。二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に 2 等分するから、 $OR = PR$, $\angle ORB = \angle PRB = 90^\circ$ よって、線分 BQ を折り目として折ったとき、点 P は点 O と重なる。

(2)

線分 OM を M のほうに延長し、 $\widehat{QP}$ との交点を R とする。かげをつけた部分の図形は、線分 OR を対称の軸とする線対称な図形だから、求める面積は、おうぎ形 ORP の面積から △OMP の面積をひいて、それを 2 倍した値になる。 $\angle ROP = \angle ROB - \angle POB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ で、 $OP = 3$ cm だから、

おうぎ形 ORP の面積は、 $\pi \times 3^2 \times \frac{30}{360} = \frac{3}{4} \pi$ (cm²)

また、△OBM は $\angle OBM = 30^\circ$ の直角三角形だから、 $OM : OB = 1 : \sqrt{3}$ $OM = \frac{1}{\sqrt{3}} OB = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3 = \sqrt{3}$ (cm)

さらに、P から線分 OR に垂線 PS をひくと、△OPS は $\angle POS = 30^\circ$ の直角三角形だから、

$PS : OP = 1 : 2$ $PS = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$ (cm)

よって、 $\triangle OMP = \frac{1}{2} \times OM \times PS = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (cm²)

したがって、かげをつけた部分の面積は、 $\left(\frac{3}{4} \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \times 2 = \frac{3\pi - 3\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

【問 7】

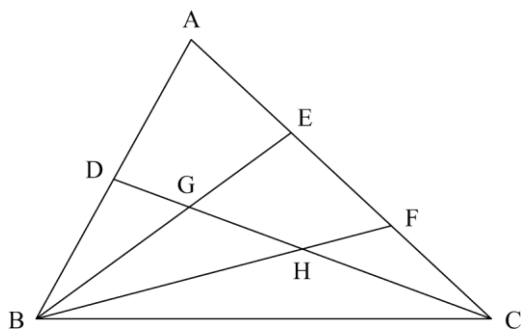
右の図 2 のように、三角形 ABC があり、辺 AB の中点を D とする。

また、辺 AC を 3 等分した点のうち、点 A に近い点を E、点 C に近い点を F とする。

さらに、線分 CD と線分 BE との交点を G、線分 CD と線分 BF との交点を H とする。

三角形 BGD の面積を S、四角形 EGHF の面積を T とするとき、S と T の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

図 2



(神奈川県 2019 年度)

解答欄

S : T = :

解答

S : T = 6 : 11

解説

右の図のように、線分 CD 上に 2 点 I, J をそれぞれ $AB \parallel EI$, $AB \parallel FJ$ となるようにとる。点 D は辺 AB の中点、2 点 E, F は辺 AC を 3 等分する点だから、 $AB \parallel EI$ より、

$BG : EG = BD : EI = AD : EI = AC : EC = 3 : 2$

よって、 $\triangle ABG = \triangle ABE \times \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} \triangle ABE$

$\triangle BGD = \triangle ABG \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \triangle ABE \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \triangle ABE \cdots \textcircled{1}$

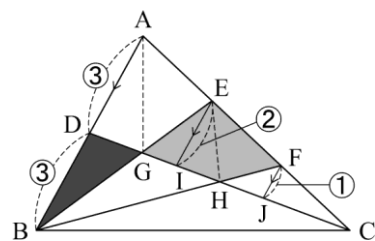
同様に、 $AB \parallel FJ$ より、 $BH : FH = BD : FJ = AD : FJ = AC : FC = 3 : 1$

よって、 $\triangle EHF = \triangle EBF \times \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} \triangle EBF$

また、 $BG : EG = 3 : 2$ より、 $\triangle EGH = \triangle EBH \times \frac{2}{3+2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \triangle EBF \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \triangle EBF$

したがって、四角形 EGHF = $\triangle EHF + \triangle EGH = \frac{1}{4} \triangle EBF + \frac{3}{10} \triangle EBF = \frac{11}{20} \triangle EBF \cdots \textcircled{2}$

ここで、 $AE = EF$ より、 $\triangle ABE = \triangle EBF$ だから、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より、 $S : T = \frac{3}{10} : \frac{11}{20} = 6 : 11$



【問 8】

三角形の面積を 2 等分する直線に関する次の問題に答えなさい。

(山梨県 2019 年度)

問 1 $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M とすると、直線 AM は $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する。図 1 において、辺 BC の中点 M を作図によって求め、直線 AM をかきなさい。

ただし、作図には定規とコンパスを用い、作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

図 1

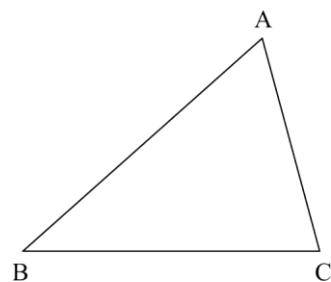
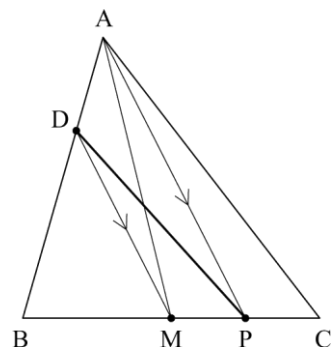


図 2

問 2 図 2 のように、 $\triangle ABC$ の辺 AB 上に $AD : DB = 1 : 2$ となる点 D をとる。このとき、点 D を通り、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する線分 DP は、次の方法でひくことができる。

まず線分 BC の中点 M をとり、線分 DM をひく。次に、点 A を通り、線分 DM に平行な直線をひき、辺 BC との交点を P とする。最後に、線分 DP をひく。



このとき、次の (1)、(2) に答えなさい。

(1) 図 2 において、線分 DP が $\triangle ABC$ の面積を 2 等分することを説明するためには、 $\triangle ABM = \triangle DBP$ が成り立つことを示せばよい。

右の は、 $\triangle ABM = \triangle DBP$ が成り立つことを示したものである。

の③において、 $DM \parallel AP$ より $\triangle ADM = \triangle PDM$ が導かれる理由を説明しなさい。

$\triangle ABM$ と $\triangle DBP$ において

$$\triangle ABM = \triangle DBM + \triangle ADM \cdots \cdots ①$$

$$\triangle DBP = \triangle DBM + \triangle PDM \cdots \cdots ②$$

$\triangle ADM$ と $\triangle PDM$ において

$DM \parallel AP$ より

$$\triangle ADM = \triangle PDM \cdots \cdots ③$$

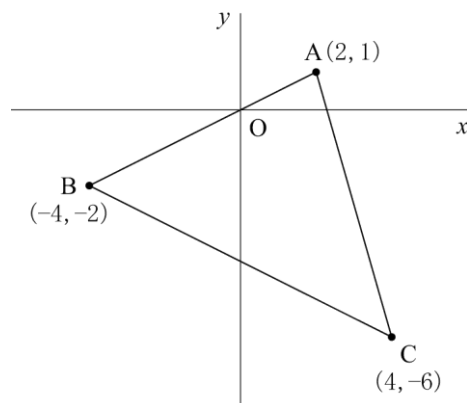
①, ②, ③より、 $\triangle ABM = \triangle DBP$

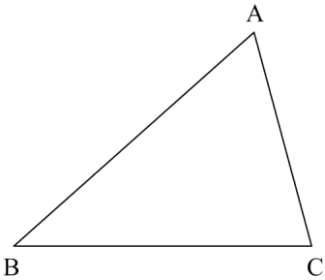
(2) $\triangle ABM$ と $\triangle ABP$ の面積比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

問 3 図 3 において、点 A, B, C の座標はそれぞれ $A(2, 1)$, 図 3

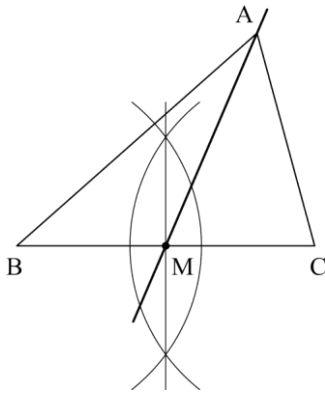
$B(-4, -2)$, $C(4, -6)$ である。

このとき、原点 O を通り、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。



問 1		
問 2	(1)	〔説明〕
	(2)	$\triangle ABM : \triangle ABP$:
問 3	$y =$	

解答
問 1



問 2

(1)

〔説明〕

〔 $\triangle ADM$ と $\triangle PDM$ の〕底辺 DM は同じで、高さが等しいから〔、面積は等しくなる〕。

(2)

$$\triangle ABM : \triangle ABP = 2 : 3$$

問 3 $y = -\frac{5}{2}x$

解説

問 1

辺 BC の垂直二等分線を作図すると、辺 BC と垂直二等分線との交点が M となるので、点 A と点 M を通る直線を引けばよい。

問 2

(1)

2 つの三角形の底辺と高さがそれぞれ等しいことを説明できていればよいので、例えば、

「 $\triangle ADM$ と $\triangle PDM$ の底辺 DM は同じで、高さが等しいから、面積は等しくなる」のように説明すればよい。

(2)

$DM \parallel AP$ で、三角形と比の定理より、 $BM : BP = BD : BA = 2 : (2+1) = 2 : 3$ $\triangle ABM$ と $\triangle ABP$ は底辺をそれぞれ BM 、 BP としたときの高さが同じなので、 $\triangle ABM : \triangle ABP = BM : BP = 2 : 3$

問 3

右の図のように、辺 BC と y 軸との交点を M とする。点 B と x 座標が等しく、点 C と y 座標が等しい点を D とし、線分 DC と y 軸との交点を N とする。このとき、 $BD \parallel MN$ だから、三角形と比の定理より、 $CM : MB = CN : ND = 1 : 1$ よって、点 M は辺 BC の中点である。また、点 A を通り y 軸に平行な直線と辺 BC との交点を P とすると、問 2 より、直線 OP は $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線である。

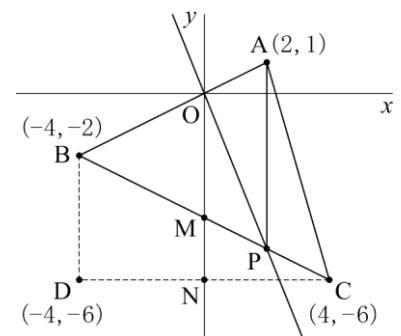
直線 BC の傾きは、 $\frac{-6 - (-2)}{4 - (-4)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$ だから、

直線 BC の式を $y = -\frac{1}{2}x + b$ とし、 $x = 4$ 、

$y = -6$ を代入すると、 $-6 = -\frac{1}{2} \times 4 + b$ $b = -4$ だから、直線 BC の式は、 $y = -\frac{1}{2}x - 4$

点 P は直線 BC 上にあり x 座標が 2 の点だから、 $P(2, -5)$

よって、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線 OP の式は、 $y = -\frac{5}{2}x$



【問 9】

3 辺の長さが a cm, b cm, c cm である三角形がある。この三角形が直角三角形であるかどうかを調べる方法を, a , b , c を使った式を用いて説明しなさい。ただし, この三角形の 3 辺のうち, 一番長い辺の長さは c cm である。

(長野県 2019 年度)

解答欄

解答

3 辺の長さ a , b , c の間に, $a^2+b^2=c^2$ という関係が成り立つかどうかを調べる。

解説

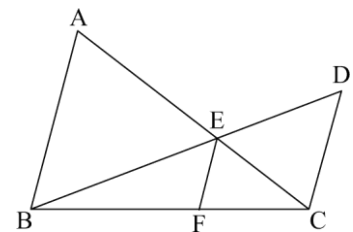
$a^2+b^2=c^2$ が成り立てば, 三平方の定理の逆より, この三角形は c cm の辺を斜辺とする直角三角形になる。

【問 10】

図で, $\triangle ABC$ の辺 AB と $\triangle DBC$ の辺 DC は平行である。また, E は辺 AC と DB との交点, F は辺 BC 上の点で, $AB \parallel EF$ である。

$AB=6$ cm, $DC=4$ cm のとき, 線分 EF の長さは何 cm か, 求めなさい。

(愛知県 A 2019 年度)



解答欄

cm

解答

$\frac{12}{5}$ cm

解説

$\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ において, $AB \parallel DC$ より, 平行線の錯角は等しいので $\angle ABE = \angle CDE$, $\angle BAE = \angle DCE$ だから

2 組の角がそれぞれ等しいので, $\triangle ABE \sim \triangle CDE$

よって, $AE : CE = AB : CD = 6 : 4 = 3 : 2$

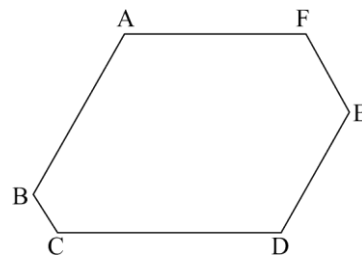
$AB \parallel EF$ だから, 三角形と比の定理より, $CE : CA = EF : AB$ $2 : 5 = EF : 6$ $EF = \frac{12}{5}$ (cm)

【問 11】

図で、六角形 ABCDEF は内角の大きさがすべて等しい。

AB=AF=4 cm, ED=3 cm, FE=2 cm のとき、次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(愛知県 A 2019 年度)



(1) 辺 CD の長さは何 cm か、求めなさい。

(2) 六角形 ABCDEF の面積は何 cm^2 か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2

解答

(1) 5 cm

(2) $\frac{55\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

解説

(1)

六角形の外角の和は 360° で、六角形 ABCDEF は内角の大きさがすべて等しいから、外角の大きさもすべて等しく、 $360^\circ \div 6 = 60^\circ$ によって、右の図のように辺 AB, CD, EF をそれぞれ延長し、交点を G, H, I とすると、 $\triangle AFG$, $\triangle BHC$, $\triangle DIE$, $\triangle GHI$ は正三角形となる。したがって、 $GI = 4 + 2 + 3 = 9(\text{cm})$, $CH = BH = 9 - 4 - 4 = 1(\text{cm})$, $CD = 9 - 3 - 1 = 5(\text{cm})$

(2)

右の図の $\triangle BHC$ について、 $\triangle BHC$ は正三角形であるから、 $\angle HBC$ の二等分線と辺 HC との交点を J とすると、

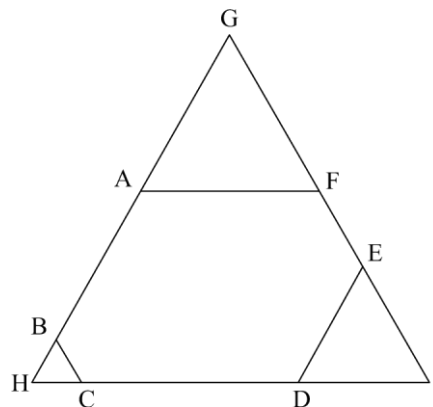
$HJ = \frac{1}{2}\text{cm}$, $\angle BJH = 90^\circ$ である。

三平方の定理より、 $BJ = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$

よって、 $\triangle BHC = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$

$\triangle AFG$, $\triangle DIE$, $\triangle GHI$ はすべて正三角形であり、 $\triangle BHC$ と相似な図形で、 $AF = 4\text{cm}$, $DE = 3\text{cm}$, $GI = 9\text{cm}$ だから、面積比は $\triangle BHC : \triangle AFG : \triangle DIE : \triangle GHI = 1^2 : 4^2 : 3^2 : 9^2 = 1 : 16 : 9 : 81$ となるので、

六角形 ABCDEF の面積は、 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 81 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 9 - \frac{\sqrt{3}}{4} = (81 - 16 - 9 - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{55\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$

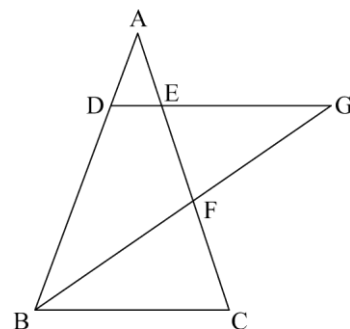


【問 12】

図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形であり、 D 、 E はそれぞれ辺 AB 、 AC 上の点で、 $DE \parallel BC$ である。また、 F 、 G はそれぞれ $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC 、直線 DE との交点である。

$AB=12\text{ cm}$ 、 $BC=8\text{ cm}$ 、 $DE=2\text{ cm}$ のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(愛知県 B 2019 年度)



(1) 線分 DG の長さは何 cm か、求めなさい。

(2) $\triangle FBC$ の面積は $\triangle ADE$ の面積の何倍か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	倍

解答

(1) 9 cm

(2) $\frac{32}{5}$ 倍

解説

(1)

$DE \parallel BC$ だから、三角形と比の定理より、 $AD : AB = DE : BC$ $AD : 12 = 2 : 8$ $AD = 3(\text{cm})$

よって、 $DB = 12 - 3 = 9(\text{cm})$ 直線 BG は $\angle ABC$ の二等分線だから、 $\angle DBG = \angle CBG$ 、 $DE \parallel BC$ より、平行線の錯角は等しいから、 $\angle DGB = \angle CBG$ したがって、 $\angle DBG = \angle DGB$ なので、 $\triangle DBG$ は $DB = DG$ の二等辺三角形である。よって、 $DG = DB = 9\text{cm}$

(2)

点 E と点 B を結ぶ。 $\triangle ADE$ の面積を S とすると、(1) より、 $AD : DB = 3 : 9 = 1 : 3$ だから、 $\triangle BED = 3S$ $DE \parallel BC$ より、 $\triangle BED$ と $\triangle BCE$ は高さが等しく、底辺の比が $DE : BC = 2 : 8 = 1 : 4$ と見ることができるので、 $\triangle BCE = 4\triangle BED = 12S$

ここで、 $\triangle BCF$ と $\triangle GEF$ において、 $DE \parallel BC$ より、 $\angle FBC = \angle FGE$ 、 $\angle FCB = \angle FEG$ だから、2 組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle BCF \sim \triangle GEF$ よって、 $CF : EF = BC : GE = 8 : (9 - 2) = 8 : 7$

$\triangle FBC = \triangle BCE \times \frac{8}{7+8} = 12S \times \frac{8}{15} = \frac{32}{5}S$ したがって、 $\triangle FBC$ の面積は $\triangle ADE$ の面積の $\frac{32}{5}$ 倍。

【問 13】

右の図 1 のように、 $AB < BC$ である長方形 $ABCD$ を、対角線 AC を折り目として折り返し、点 B が移った点を E 、線分 AD と線分 CE の交点を F とする。次に、右の図 2 のように、折り返した部分をもとにもどす。線分 BD と線分 AC 、線分 CF との交点をそれぞれ G 、 H とすると、 $CH = 12 \text{ cm}$ 、 $GH = 8 \text{ cm}$ である。

このとき、次の問 1 ～問 3 に答えよ。

(京都府 2019 年度 中期)

問 1 $\angle BCG$ と大きさが等しい角を、次の (ア) ～ (カ) からすべて選べ。

- (ア) $\angle CBG$ (イ) $\angle CDH$ (ウ) $\angle DFH$
 (エ) $\angle DHF$ (オ) $\angle FDH$ (カ) $\angle GCH$

問 2 線分 BG の長さを求めよ。

問 3 $\triangle DFH$ の面積を求めよ。

図 1

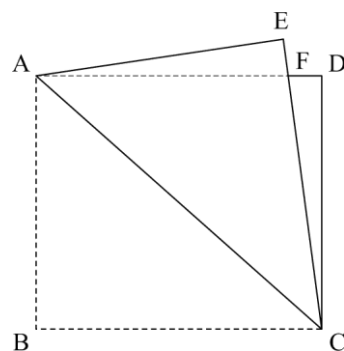
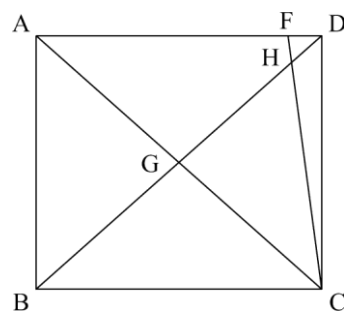


図 2



解答欄

問 1	ア イ ウ エ オ カ
問 2	cm
問 3	cm ²

解答

問1 ア, オ, カ

問2 10 cm

問3 $\frac{5\sqrt{7}}{12}$ cm²

解説

問1

△GBC は二等辺三角形だから、 $\angle BCG = \angle CBG$ ……(ア) また、 $AD \parallel BC$ より、平行線の錯角は等しいから、 $\angle FDH = \angle CBG$ よって、 $\angle BCG = \angle FDH$ ……(オ) さらに、△FAC は二等辺三角形だから、 $\angle GCH = \angle FAC$ で、平行線の錯角が等しいことから、 $\angle BCG = \angle FAC$ よって、 $\angle BCG = \angle GCH$ ……(カ)

問2

$BG = x$ cm とおくと、△CHG ∽ △BHC より、 $CH : BH = HG : HC$ $12 : (x+8) = 8 : 12$ $x+8=18$
 $x=10$ (cm)

問3

△BCH において、 $\angle GCH = \angle BCG$ より、直線 CG は $\angle BCH$ の二等分線である。

よって、 $BG : GH = BC : CH$ $10 : 8 = BC : 12$ $BC = 15$ (cm)

△BCD において、三平方の定理より、 $CD = \sqrt{20^2 - 15^2} = 5\sqrt{7}$ (cm)

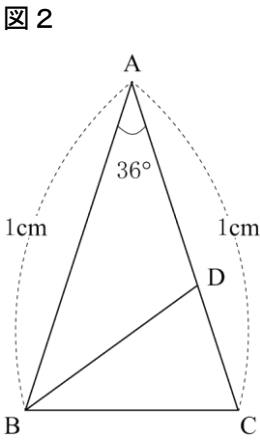
△BCH と △DFH の相似比は、 $18 : 2 = 9 : 1$ だから、 $DF = \frac{1}{9}BC = \frac{5}{3}$ (cm), $FH : HC = 1 : 9$

よって、 $\triangle DFH = \frac{1}{10} \triangle CDF = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 5\sqrt{7} = \frac{5\sqrt{7}}{12}$ (cm²)

【問 14】

図 2 の△ABC は $AB=AC=1\text{ cm}$, $\angle BAC=36^\circ$ の二等辺三角形であり, 点 D は $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC の交点である。次の (1) ~ (3) に答えなさい。

(島根県 2019 年度)



- (1) $\angle BDC$ の大きさを求めなさい。
- (2) 辺 BC と同じ長さの線分をすべて答えなさい。
- (3) $BC=x\text{ cm}$ として, x を求めるための方程式をつくりなさい。また, このときの x の値を求めなさい。

解答欄

(1)	°
(2)	
(3)	[方程式]
	[x の値] $x=$

解答

(1) 72°

(2) 線分 BD, 線分 AD

(3)

〔方程式〕 $x^2 + x - 1 = 0$

〔 x の値〕 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

解説

(1)

$\triangle ABC$ は $AB = AC$, $\angle BAC = 36^\circ$ の二等辺三角形だから,

$\angle ABC = \angle ACB = (180^\circ - 36^\circ) \div 2 = 72^\circ$ 直線 BD は $\angle ABC$ の二等分線だから,

$\angle CBD = 72^\circ \div 2 = 36^\circ$ $\triangle BCD$ の内角の和は 180° だから, $\angle BDC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$

(2)

(1) より, $\angle BCD = \angle BDC = 72^\circ$ だから, $\triangle BCD$ は $BC = BD$ の二等辺三角形。

また, $\angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$ より, $\angle ABD = \angle BAD = 36^\circ$ だから, $\triangle ABD$ は $AD = BD$ の二等辺三角形。

したがって, 辺 BC と同じ長さの線分は線分 BD と線分 AD

(3)

$\triangle ABC$ と $\triangle BDC$ において, $\angle BAC = \angle DBC$, $\angle C$ は共通だから, 2 組の角がそれぞれ等しいので, $\triangle ABC$

$\sim \triangle BDC$ よって, $AC : BC = BC : CD$ が成り立つ。ここで $BC = x \text{ cm}$ とすると,

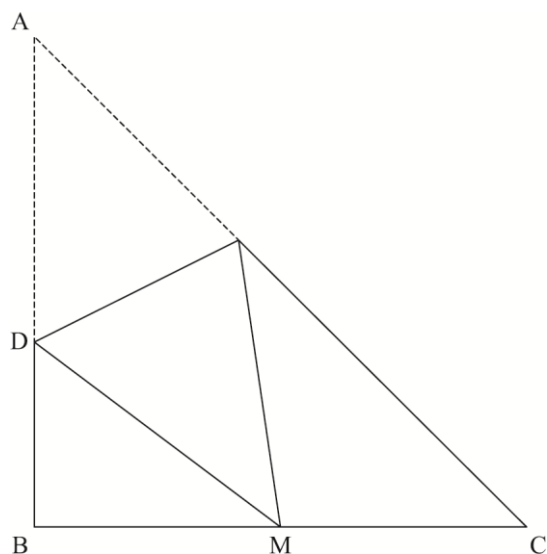
(2) より, $BC = BD = AD = x \text{ cm}$ だから, $1 : x = x : (1 - x)$ $x^2 = 1 - x$ $x^2 + x - 1 = 0$

2 次方程式の解の公式より, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $x > 0$ より, $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

【問 15】

下の図のように、 $AB=BC=6\text{ cm}$ の直角二等辺三角形 ABC を、頂点 A が辺 BC の中点 M に重なるように折りました。折り目の直線と辺 AB との交点を D とします。このとき、線分 BD の長さは何 cm ですか。なお、答えを求める過程も分かるように書きなさい。

(広島県 2019 年度)



解答欄

(求める過程)

(答) $BD =$ cm

解答

$BD=x$ とすると、 $AD=DM=6-x$

点 M は辺 BC の中点だから、 $BM=3$

$\triangle DBM$ は、 $\angle DBM=90^\circ$ の直角三角形だから、

$$x^2+3^2=(6-x)^2$$

これを解くと、 $x=\frac{9}{4}$

$x=\frac{9}{4}$ は問題に適している。

$$BD=\frac{9}{4}$$

解説

$BD=x\text{cm}$ とすると、 $AD=6-x(\text{cm})$ 線分 MD は線分 AD を折り返した線分だから、長さは等しく、 $MD=6-x(\text{cm})$ また、点 M は辺 BC の中点だから、 $BM=3\text{cm}$

$\triangle DBM$ は $\angle DBM=90^\circ$ の直角三角形だから、三平方の定理より、 $x^2+3^2=(6-x)^2$ が成り立つ。

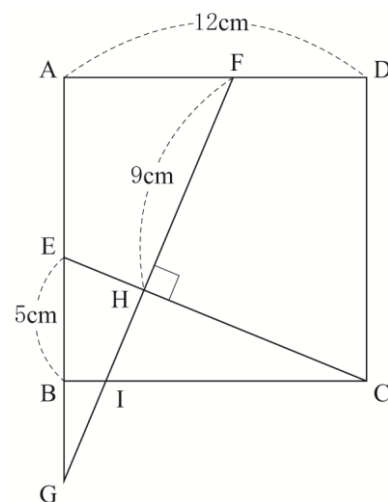
よって、 $x^2+9=x^2-12x+36$ $12x=27$ $x=\frac{9}{4}$ $0<x<6$ だから、 $x=\frac{9}{4}$ は問題に適している。

【問 16】

右の図のような、正方形 $ABCD$ があり、2 点 E , F はそれぞれ辺 AB , 辺 AD 上の点である。辺 AB を B の方に延長した直線上に点 G をとる。線分 FG と線分 EC , 辺 BC との交点をそれぞれ H , I とする。

$\angle CHF = 90^\circ$, $AD = 12\text{ cm}$, $BE = 5\text{ cm}$, $FH = 9\text{ cm}$ であるとき、線分 CH の長さは何 cm か。

(香川県 2019 年度)



解答欄

cm

解答

$$\frac{48}{5} \text{ cm}$$

解説

直線 AD と直線 EC の交点を J とする。 $\triangle EBC$ において、 $EB : BC : CE = 5 : 12 : 13$ であり、

$$\triangle EBC \sim \triangle CDJ \text{ より } CD : CJ = 5 : 13 \quad CD = 12\text{cm} \text{ だから } CJ = \frac{12 \times 13}{5} (\text{cm})$$

$$\text{また, } \triangle EBC \sim \triangle FHJ \text{ より } FH : HJ = 5 : 12 \quad 9 : HJ = 5 : 12 \quad HJ = \frac{9 \times 12}{5} (\text{cm})$$

$$\text{よって, } CH = CJ - HJ = \frac{12 \times 13}{5} - \frac{9 \times 12}{5} = \frac{48}{5} (\text{cm})$$

【問 17】

かずおさんは、プロジェクターで映し出した画面の大きさと視聴者が見やすい位置について考えることにした。

下の図 1 のように、教室の前方の壁にプロジェクターで映し出した画像を画面とし、図 2 のように、プロジェクターのレンズから画面までの距離を投影距離とする。

図 1

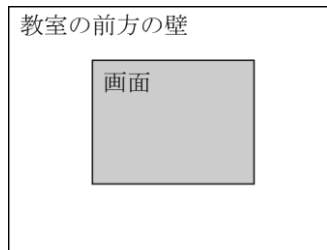
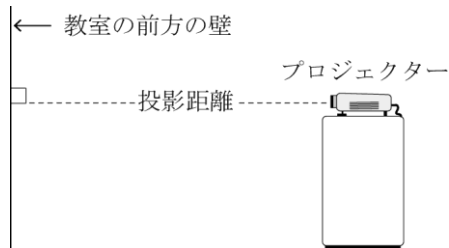


図 2



下の表は、かずおさんが、投影距離に対して、画面の縦の長さや横の長さを調べた結果をまとめたものの一部である。

次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(大分県 2019 年度)

表

投影距離、画面の縦の長さや横の長さ

投影距離 [m]	2	3	4	5
画面の縦の長さ [m]	1	$\frac{3}{2}$	2	ア
画面の横の長さ [m]	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{8}{3}$	イ

問 1 かずおさんは、表から投影距離と画面の縦の長さ、投影距離と画面の横の長さの間には、それぞれ関係があることに気づいた。

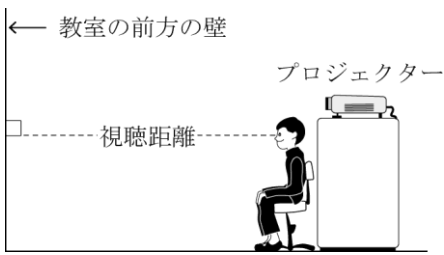
表の中の ア , イ に適する数を、求めなさい。

問 2 かずおさんは、表から縦の長さや横の長さの積で求められる画面の面積と、投影距離の間には関係があることに気づいた。

投影距離が x m のときの画面の面積を y m^2 として、 y を x の式で表しなさい。

問3 下の図3のように、視聴者の目の位置から画面までの距離を視聴距離とする。

図3



かずおさんは、投影距離が $\frac{3}{2}\text{m}$ の位置にプロジェクターを設置して映してみたところ、教室の後ろの席から画面を見ると画面が小さすぎて見づらかった。そこで、投影距離が $\frac{3}{2}\text{m}$ のときの画面の面積の2倍となる位置に、プロジェクターを設置しなおし固定した。

プロジェクターの位置を決めたことで、投影距離も決まった。

ところが、今度は、教室の前の席から画面を見ると画面が大きすぎて見づらかった。そこで、プロジェクターの位置を変えずに、見やすい視聴距離を考えることにした。

視聴距離を決める目安の1つとして、下の「基準」を用いた。

「基準」 視聴距離が画面の対角線の長さより長くなると見やすい。

「基準」に沿って、視聴距離は何 m より長いとよいか、求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2		
問3	(m より長い)	

解答

問 1

ア $\frac{5}{2}$

イ $\frac{10}{3}$

問 2 $y = \frac{1}{3}x^2$

問 3 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (m より長い)

解説

問 1

表から投影距離が 1m 長くなると、画面の縦の長さは $\frac{1}{2}$ m、横の長さは $\frac{2}{3}$ m 長くなることがわかる。

よって、投影距離が 5m のとき、画面の縦の長さは $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (m)、横の長さは $\frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ (m)

問 2

表から投影距離の $\frac{1}{2}$ 倍が画面の縦の長さで、 $\frac{2}{3}$ 倍が画面の横の長さだから、投影距離が x m のとき画面の縦の長さは $\frac{1}{2}x$ m、横の長さは $\frac{2}{3}x$ m である。よって、画面の面積は $y = \frac{1}{2}x \times \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x^2$ (m²)

問 3

投影距離が $\frac{3}{2}$ m のとき、画面の面積は $\frac{3}{4}$ m² である。画面の面積が $\frac{3}{4}$ m² の 2 倍の $\frac{3}{2}$ m² だから、そのときの投影距離は $\frac{1}{3}x^2 = \frac{3}{2}$ $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (m)

よって、画面の縦の長さは $\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ (m)、横の長さは $\frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ (m) である。

したがって、このときの画面の対角線の長さは三平方の定理より、 $\sqrt{\frac{9}{8} + 2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ (m)

よって、視聴距離は $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ m より長いとよい。