

4.二次関数と図形関連の複合問題 2018 年度出題

【問 1】

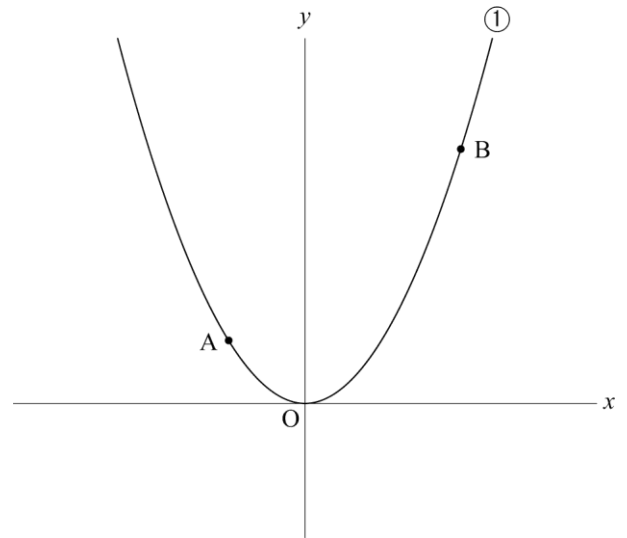
図のように、関数 $y = ax^2$ (a は正の定数) ……① のグラフ上に、2 点 A, B があります。点 A の x 座標を -2 、点 B の x 座標を 4 とします。点 O は原点とします。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2018 年度)

問1 $a=2$ とします。①について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域を求めなさい。

問2 2点 A, B を通る直線の傾きが 1 となるとき, a の値を求めなさい。



問3 $a=1$ とします。点 B と y 座標が等しい y 軸上の点を C とします。①のグラフ上に点 P をとり、点 P の x 座標を t とします。△BCP の面積が 14 となるときの t の値を求めなさい。ただし、 $-2 < t < 4$ とします。

解答欄

問1	
問2	$a =$
問3	(計 算) 答 $t =$

解答

問1 $0 \leq y \leq 32$

問2 $a = \frac{1}{2}$

問3

〔計算〕

B (4, 16), C (0, 16), P (t , t^2) だから

$\triangle BCP$ の面積は $\frac{1}{2} \times 4 \times (16 - t^2) = 14$

$t^2 = 9$

$-2 < t < 4$ より

$t = 3$

答 $t = 3$

解説

問1

x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ だから

$x = 0$ のとき $y = 2 \times 0^2 = 0$

$x = 4$ のとき $y = 2 \times 4^2 = 32$

よって $0 \leq y \leq 32$

問2

2 点 A, B は関数 $y = ax^2$ のグラフ上の点だから A(-2 , $4a$), B(4, $16a$)

2 点 A, B を通る直線の傾きが 1 となるから $\frac{16a - 4a}{4 - (-2)} = 2a$ より

$2a = 1$

$a = \frac{1}{2}$

問3

$a = 1$ のとき B(4, 16)だから C(0, 16)

点 P の x 座標を t とすると P(t , t^2)

BC = 4 であり, 辺 BC を底辺としたときの $\triangle BCP$ の高さは $16 - t^2$ だから

$\triangle BCP$ の面積について,

方程式 $\frac{1}{2} \times 4 \times (16 - t^2) = 14$ が成り立ち

これを整理すると $t^2 = 9$ となる。

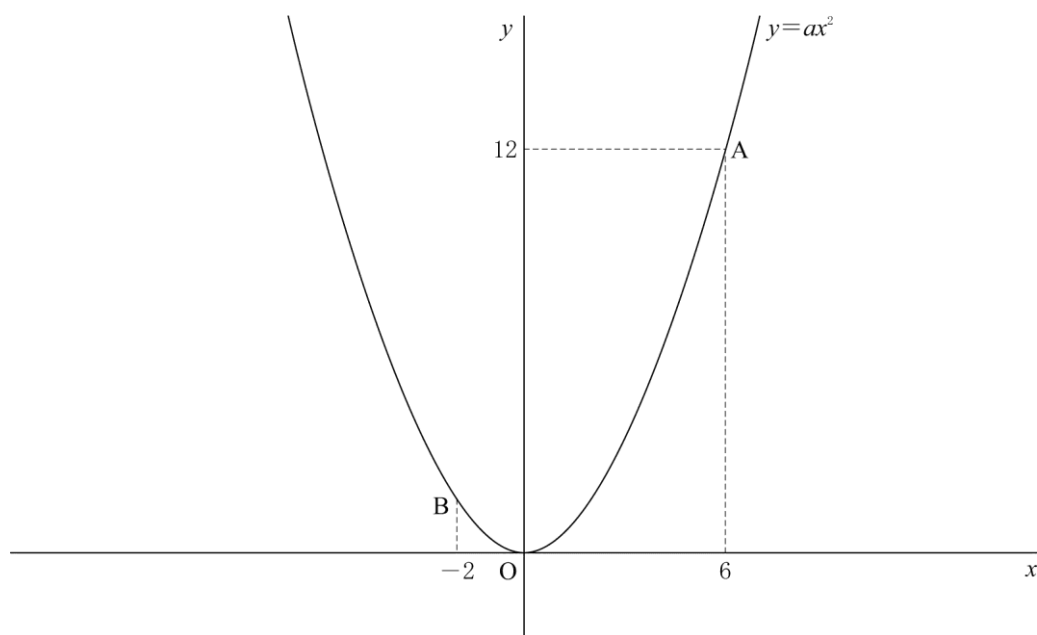
よって $t = \pm 3$ だから

$-2 < t < 4$ より

$t = 3$ である。

【問 2】

次の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に、2 点 A, B があり、点 A の座標は (6, 12) で、点 B の x 座標は -2 です。



このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(岩手県 2018 年度)

問1 a の値を求めなさい。

問2 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 3 点 O, A, B と異なる点 P をとります。点 P を通り線分 AB に平行な直線と x 軸との交点を Q とします。四角形 ABQP が平行四辺形になるとき、点 P の座標をすべて求めなさい。

解答欄

問1	
問2	

解答

問1 $a = \frac{1}{3}$

問2 $\left(4\sqrt{2}, \frac{32}{3}\right), \left(-4\sqrt{2}, \frac{32}{3}\right)$

解説

問1

$y = ax^2$ のグラフは点 (6, 12) を通るから

$$12 = 36a$$

$$a = \frac{1}{3}$$

問2

問1より $y = \frac{1}{3}x^2$ だから、これに $x = -2$ を代入すると $y = \frac{4}{3}$ よって、 $B\left(-2, \frac{4}{3}\right)$

平行四辺形の向かいあう辺は等しく平行であるから、辺 AB と辺 PQ は等しく平行である。

このことから、点 P と点 Q の位置関係は、点 A と点 B の位置関係と同じになる。

したがって、点 P から下に $12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$ 、左に $6 - (-2) = 8$ 進んだ点が点 Q になる。

点 Q は x 軸上の点だから点 P の y 座標は $\frac{32}{3}$ になる。

$$y = \frac{32}{3} \text{ を } y = \frac{1}{3}x^2 \text{ に代入すると } \frac{32}{3} = \frac{1}{3}x^2 \quad x^2 = 32 \quad x = \pm 4\sqrt{2}$$

よって点 P の座標は $\left(4\sqrt{2}, \frac{32}{3}\right)$ と $\left(-4\sqrt{2}, \frac{32}{3}\right)$

【問 3】

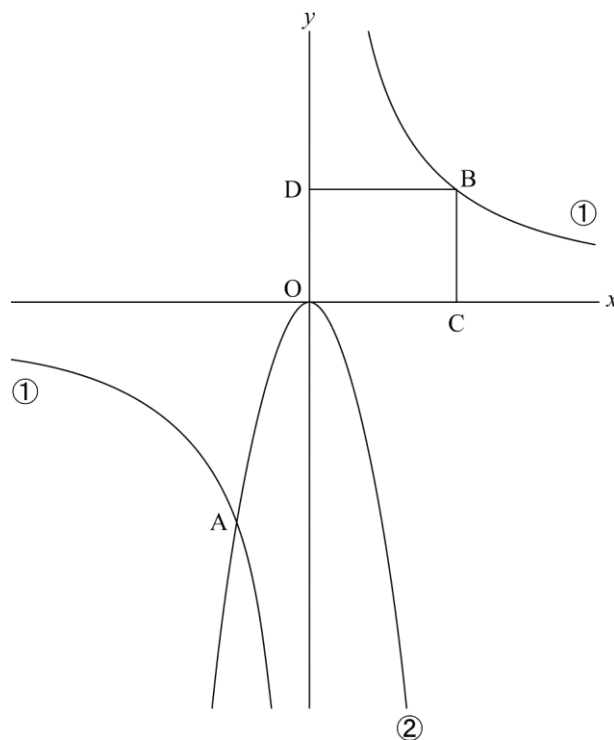
右の図において、①は反比例のグラフ、②は関数 $y = -x^2$ のグラフである。

①と②との交点を A とする。また、①のグラフ上に点 B をとり、B から x 軸、 y 軸に、それぞれ垂線をひき、 x 軸、 y 軸との交点を、それぞれ C、D とする。点 A の x 座標が -3 であるとき、次の問いに答えなさい。

(山形県 2018 年度)

- (1) 関数 $y = -x^2$ について、 x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

- (2) 四角形 OCB D の面積を求めなさい。



解答欄

(1)	
(2)	

解答

(1) -6

(2) 27

解説

(1)

$x=2$ のとき $y = -1 \times 2^2 = -4$

$x=4$ のとき $y = -1 \times 4^2 = -16$ だから

変化の割合は $\frac{-16 - (-4)}{4 - 2} = -\frac{12}{2} = -6$

(2)

点 A は関数 $y = -x^2$ のグラフ上の点で x 座標は -3 だから $A(-3, -9)$

曲線①は点 A を通る反比例のグラフだから

その式を $y = \frac{a}{x}$ として $x = -3$, $y = -9$ を代入すると $-9 = \frac{a}{-3}$ $a = 27$

点 B の x 座標を t とすると $B\left(t, \frac{27}{t}\right)$ だから $OC = t$, $OD = \frac{27}{t}$ より

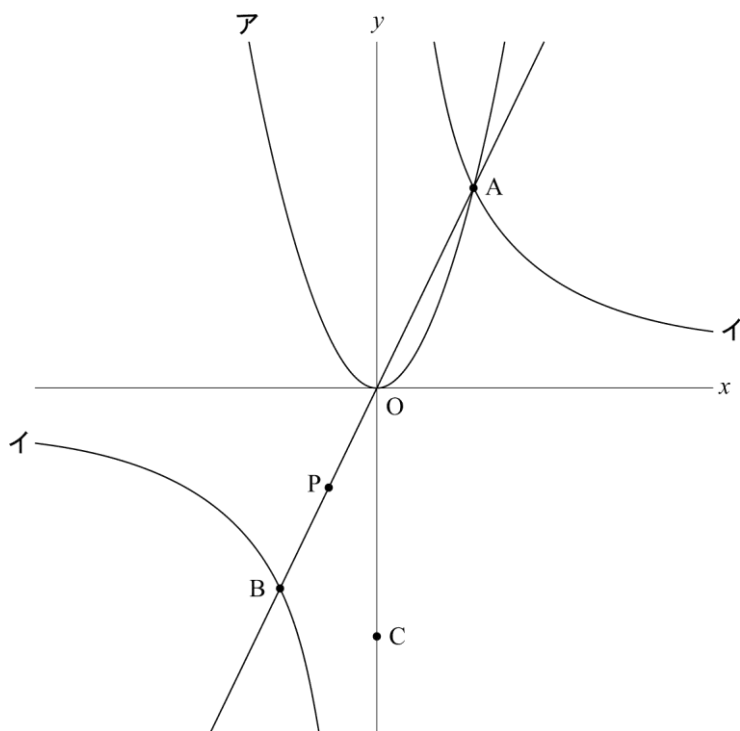
求める面積は $t \times \frac{27}{t} = 27$

【問 4】

下の図において、曲線アは関数 $y=x^2$ のグラフであり、曲線イは関数 $y=\frac{a}{x}$ のグラフである。曲線アと曲線イとの交点を A、原点を通る直線 OA と曲線イとの交点のうち、点 A と異なる点を B とする。y 軸上に点 C をとり、線分 OB 上に点 P をとる。

点 A の x 座標が 2、点 C の y 座標が -5 であるとき、次の問1、問2に答えなさい。ただし、O は原点とする。

(茨城県 2018 年度)



問1 a の値を求めなさい。

問2 $\angle BPC=2\angle BOC$ であるとき、点 P の座標を求めなさい。

解答欄

問1	$a=$
問2	(,)

解答

問1 $a=8$

問2 $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$

解説

問1

点 A の y 座標は $y=x^2$ に $x=2$ を代入すると $y=2^2=4$

よって A(2, 4)

点 A は曲線 Γ 上の点でもあるから

$y=\frac{a}{x}$ に $x=2, y=4$ を代入すると $4=\frac{a}{2}$

$a=8$

問2

$\triangle OPC$ の内角と外角の関係より $\angle BPC = \angle POC + \angle PCO$

また $\angle BPC = 2\angle BOC$

よって $\angle POC = \angle PCO$

2つの角が等しいから $\triangle OPC$ は $PO=PC$ の二等辺三角形になる。

したがって OC の中点を通り x 軸に平行な直線と直線 OA との交点が点 P となる。

$C(0, -5)$ より点 P の y 座標は $-\frac{5}{2}$

また直線 OA の式は $y=2x$ だから

点 P の x 座標は $y=2x$ に $y=-\frac{5}{2}$ を代入すると $-\frac{5}{2}=2x \quad x=-\frac{5}{4}$

よって $P\left(-\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$

【問 5】

右の図1において、曲線①は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフで、曲線②は関数 $y = ax^2 \left(a > \frac{1}{2}\right)$ のグラフです。曲線①上に x 座標が $-2, 3$ である 2 点 A, B をとり、この 2 点を通る直線 ℓ をひきます。直線 ℓ と曲線②との交点のうち x 座標が負である点を C, 正である点を D とし、直線 ℓ と y 軸との交点を E とします。

AC:CE=1:3 のとき、次の各問に答えなさい。

(埼玉県 2018 年度)

問1 直線 ℓ の式を求めなさい。

図1

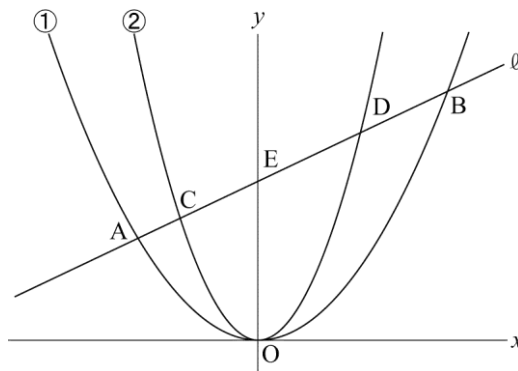
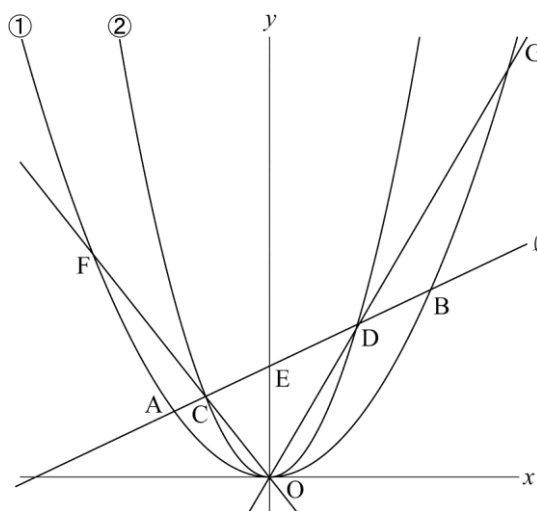


図2



問2 a の値を、途中の説明も書いて求めなさい。その際、解答用紙の図を用いて説明してもよいものとします。

問3 右の図2のように、直線 OC, OD をひき、曲線①との交点を F, G とします。四角形 CDGF の面積を求めなさい。

ただし、座標軸の単位の長さを 1 cm とします。

解答欄

問1	$y=$
問2	〔説明〕 答え $a=$
問3	cm^2

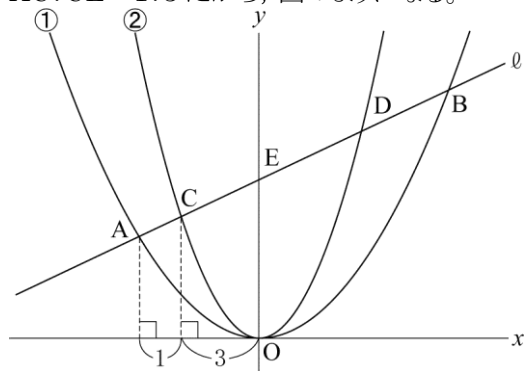
解答

問1 $y = \frac{1}{2}x + 3$

問2

〔説明〕

AC:CE=1:3 だから、図のようになる。



点 A の x 座標は -2 だから, 点 C の x 座標は $-\frac{3}{2}$

点 C は直線 ℓ 上の点だから $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

よって $y=ax^2$ に代入して $a=1$

答え $a=1$

問3 $\frac{63}{4}\text{cm}^2$

解説

問1

点 A は曲線① $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点で $x=-2$ より $A(-2, 2)$

点 B は曲線① $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点で $x=3$ より $B\left(3, \frac{9}{2}\right)$

直線 ℓ の式を $y=mx+n$ とすると $m=\left(\frac{9}{2}-2\right)\div\{3-(-2)\}=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+n$ に $x=-2, y=2$ を代入して $2=\frac{1}{2}\times(-2)+n$ $n=3$

よって $y=\frac{1}{2}x+3$

問2

2 点 A, C から x 軸にひいた垂線と x 軸との交点をそれぞれ A', C' とする。

$AC:CE=1:3$ だから, $A'C':C'O=1:3$

点 A の x 座標は -2 だから, 点 C の x 座標は $-2\times\frac{3}{1+3}=-\frac{3}{2}$

点 C は直線 ℓ の $y=\frac{1}{2}x+3$ 上の点で $x=-\frac{3}{2}$ より $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

点 C は曲線② $y=ax^2$ 上の点でもあるので $\frac{9}{4}=a\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ $\frac{9}{4}a=\frac{9}{4}$ $a=1$

問3

直線 OC は原点を通る直線で $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ だから

その式は $y=-\frac{3}{2}x$

点 F は曲線①と直線 OC との交点のうち, 原点 O と異なる点だから

$y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=-\frac{3}{2}x$ を連立方程式とみて y を消去すると

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{3}{2}x$$

$$x^2+3x=0$$

$$x(x+3)=0$$

$$x=-3, 0$$

$x=0$ が表すのは原点の x 座標だから, 点 F の x 座標は -3

よって $F\left(-3, \frac{9}{2}\right)$

同様に点 D の座標は $(2, 4)$, 点 G の座標は $(4, 8)$ である。

ここで $\triangle OCD$ と $\triangle OFG$ において

$$OC:OF=\frac{3}{2}:3=1:2$$

$$OD:OG=2:4=1:2$$

$\angle COD=\angle FOG$ だから

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OCD\sim\triangle OFG$ であり

相似比は $1:2$

よって面積比は $\triangle OCD:\triangle OFG=1^2:2^2=1:4$

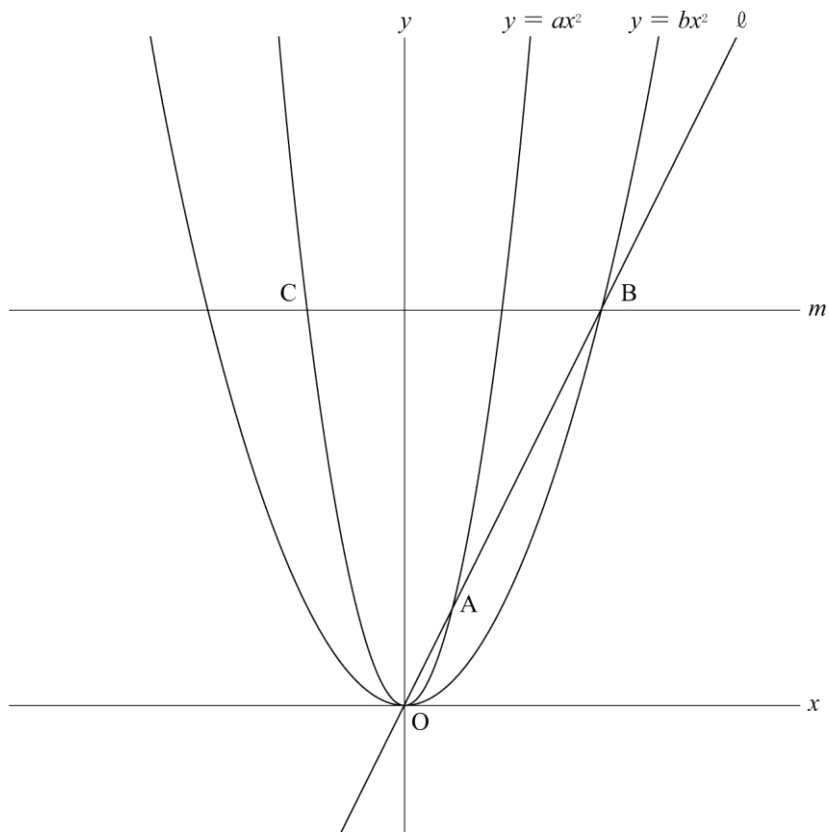
$$\triangle OCD=\triangle OEC+\triangle OED=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 3\times 2=\frac{21}{4}\text{ cm}^2$$

したがって $\triangle OFG=\triangle OCD\times 4=21\text{cm}^2$ だから

$$\text{四角形 CDGF の面積は } 21-\frac{21}{4}=\frac{63}{4}\text{ cm}^2$$

【問 6】

下の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフと関数 $y=bx^2$ のグラフがある。ただし、 a, b はともに正の数で、 $a > b$ とする。関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 A (1, 2) があり、原点 O と点 A を通る直線を ℓ とする。直線 ℓ と関数 $y=bx^2$ のグラフは点 B で交わり、 $OA:OB=1:4$ となった。また、点 B を通り、 x 軸に平行な直線 m と関数 $y=ax^2$ のグラフとの交点のうち、 x 座標が負である点を C とする。



このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(千葉県 2018 年度 前期)

問1 a の値を求めなさい。

問2 x 軸上に点 D を、四角形 OBCD が平行四辺形になるようにとる。

ただし、点 D の x 座標は負とする。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1) 2 点 C, D を通る直線の式を求めなさい。

(2) 辺 CD 上に点 P をとり、台形 OAPD をつくる。台形 OAPD の面積と平行四辺形 OBCD の面積の比が 3:8 となるときの、点 P の座標を求めなさい。

解答欄

問1	$a=$	
問2	(1)	
	(2)	(,)

解答

問1 $a=2$

問2

(1) $y=2x+12$

(2) $(-4, 4)$

解説

問1

$A(1, 2)$ は $y=ax^2$ のグラフ上の点だから $2=a \times 1^2$ $a=2$

問2

(1)

2点 A, B から, x 軸に垂線 AP, BQ をひくと $AP \parallel BQ$ より $OP:OQ=OA:OB=1:4$

$OP=1$ だから $OQ=4OP=4$ よって $Q(4, 0)$

同様に, $AP:BQ=OA:OB=1:4$ $AP=2$ だから $BQ=4AP=4 \times 2=8$ よって $B(4, 8)$

また点 C の y 座標は点 B の y 座標と等しく 8 だから x 座標は $y=2x^2$ に $y=8$ を代入すると

$8=2x^2$ $x^2=4$ $x=\pm 2$ $x<0$ より $x=-2$ よって $C(-2, 8)$

四角形 OBCD は平行四辺形だから $OD=BC=4-(-2)=6$ よって $D(-6, 0)$

2点 $C(-2, 8)$, $D(-6, 0)$ を通る直線の式を $y=cx+d$ とすると $c=\frac{8-0}{-2-(-6)}=2$

$y=2x+d$ に $x=-2$, $y=8$ を代入すると $8=2 \times (-2)+d$ $d=12$

したがって直線 CD の式は $y=2x+12$

(2)

平行四辺形 OBCD は $OD=6$ を底辺とすると高さは 8 だから

面積は $6 \times 8=48$

よって台形 OAPD の面積は $48 \times \frac{3}{8}=18$

台形 OAPD を $\triangle OAD$ と $\triangle PDA$ に分ける。

$\triangle OAD$ は OD を底辺とすると高さは 2 だから, 面積は $\frac{1}{2} \times 6 \times 2=6$

よって $\triangle PDA = \text{台形 OAPD} - \triangle OAD = 18 - 6 = 12$

ここで O と P を結ぶ。

$OB \parallel DC$ より $\triangle PDA$ と $\triangle PDO$ は

PD を底辺とみたときの高さが等しいから面積も等しい。

よって $\triangle PDO = \triangle PDA = 12$

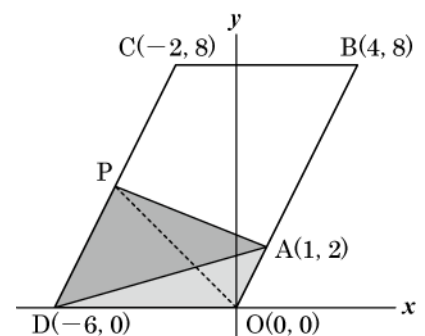
また点 P は直線 CD 上にあつて $P(t, 2t+12)$ とおけるから

$\triangle PDO$ で OD を底辺とみたときの高さは $2t+12$

$\triangle PDO$ の面積について $\frac{1}{2} \times 6 \times (2t+12) = 12$ $6t+36=12$ $6t=-24$ $t=-4$

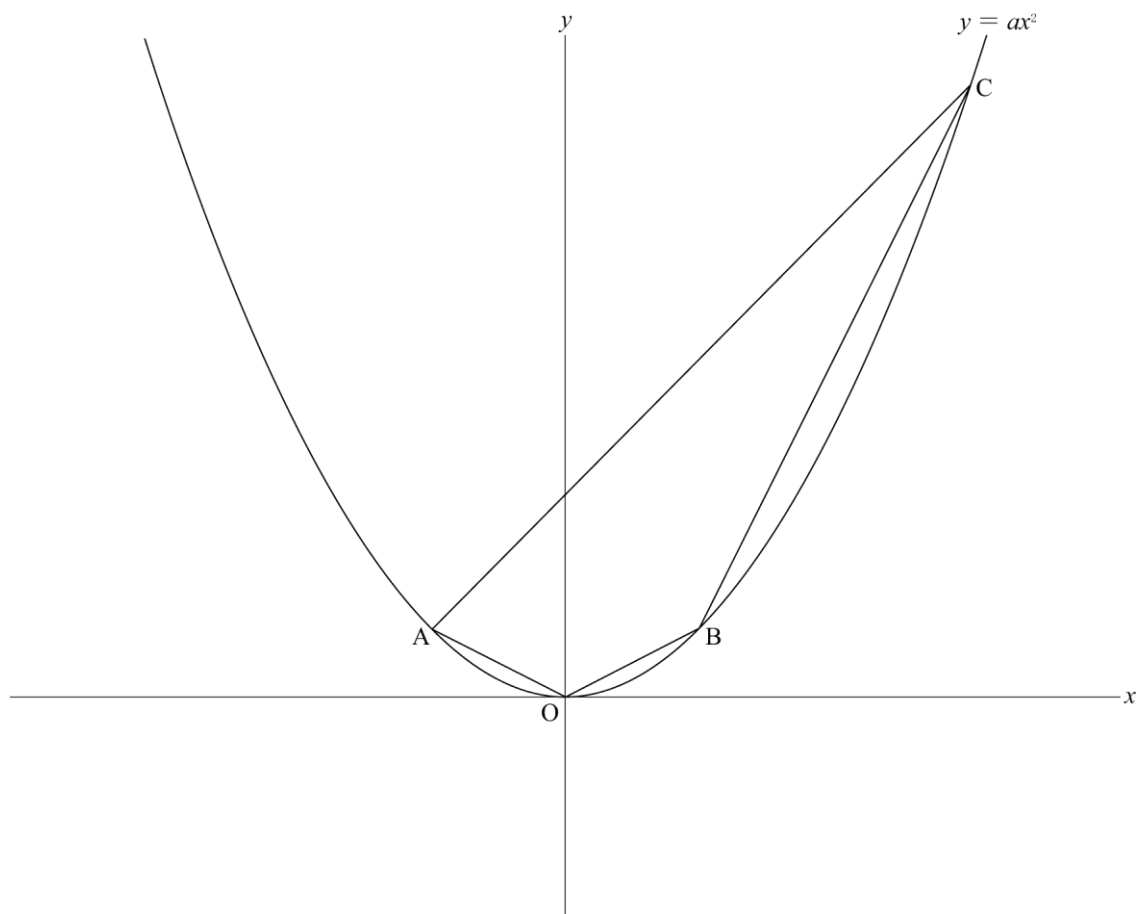
点 P の y 座標は $2 \times (-4) + 12 = 4$

よって $P(-4, 4)$



【問 7】

下の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に、3 点 A, B, C がある。点 A の座標は $(-2, 1)$ で、点 B, C の x 座標は、それぞれ 2, 6 である。また、原点 O, 点 B, C, A を結び、四角形 OBCA をつくる。



このとき、次の問1～問3に答えなさい。ただし、 $a > 0$ とする。

(千葉県 2018 年度 後期)

問1 a の値を求めなさい。

問2 2 点 O, C を通る直線に平行で、点 B を通る直線の式を求めなさい。

問3 点 C を通り、四角形 OBCA の面積を 2 等分する直線と直線 OA の交点の座標を求めなさい。

解答欄

問1	$a =$
問2	
問3	(,)

解答

問1 $a = \frac{1}{4}$

問2 $y = \frac{3}{2}x - 2$

問3 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

解説

問1

$$y = ax^2 \text{ に } x = -2, y = 1 \text{ を代入して } 1 = a \times (-2)^2 \quad 4a = 1 \quad a = \frac{1}{4}$$

問2

点 C は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点で、その x 座標は 6 だから $y = \frac{1}{4}x^2$ に $x = 6$ を代入すると $y = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9$

同様に点 B の x 座標は 2 だから $y = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$

直線 OC の式は $y = \frac{3}{2}x$ で

求める直線の式は、直線 OC と平行だから傾きは $\frac{3}{2}$

また点 B(2, 1)を通るから $y = \frac{3}{2}(x - 2) + 1 = \frac{3}{2}x - 2$

よって求める直線の式は $y = \frac{3}{2}x - 2$

問3

問2で求めた直線と x 軸との交点を D とする。

点 D の x 座標は $0 = \frac{3}{2}x - 2$ より $x = \frac{4}{3}$ よって $D\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

$$\triangle OBC = \triangle ODC \text{ で } \triangle ODC = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 9 = 6 \text{ だから } \triangle OBC = 6 \cdots \textcircled{1}$$

直線 AC の式は $y = \frac{9-1}{6-(-2)}(x+2) + 1 = x + 3$ だから直線 AC と y 軸との交点は(0, 3)

この点を E とすると $\triangle OCA = \triangle OEA + \triangle OCE = \frac{1}{2} \times 3 \times (6+2) = 12 \cdots \textcircled{2}$

求める交点を F とし、その x 座標を $t(t < 0)$ とすると

点 F は直線 OA: $y = -\frac{1}{2}x$ 上の点であることから $F\left(t, -\frac{1}{2}t\right)$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より四角形 } OBCA = \triangle OBC + \triangle OCA = 6 + 12 = 18$$

直線 CF は四角形 OBCA の面積を 2 等分するから四角形 OBCF の面積は 9

$$\triangle OBC = 6 \text{ だから } \triangle OCF = 9 - 6 = 3$$

直線 CF は $y = \frac{9 + \frac{1}{2}t}{6 - t}(x - 6) + 9 = \frac{18 + t}{2(6 - t)}x - \frac{3(18 + t)}{6 - t} + 9$

よって直線 CF の切片は $-\frac{3(18 + t)}{6 - t} + 9$

直線 CF と y 軸の交点を P とし、直線 CF の切片を $\triangle OPC$ と $\triangle OPF$ の底辺とすると

$$\triangle OPC + \triangle OPF = \triangle OCF = \frac{1}{2} \times \left\{ -\frac{3(18 + t)}{6 - t} + 9 \right\} \times (6 - t)$$

$$= 3 \cdot 9(6 - t) - 3(18 + t) = 6$$

$$- 12t = 6$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

よって $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

【問 8】

右の図において、直線①は関数 $y=x+6$ のグラフであり、曲線②は関数 $y=ax^2$ のグラフである。

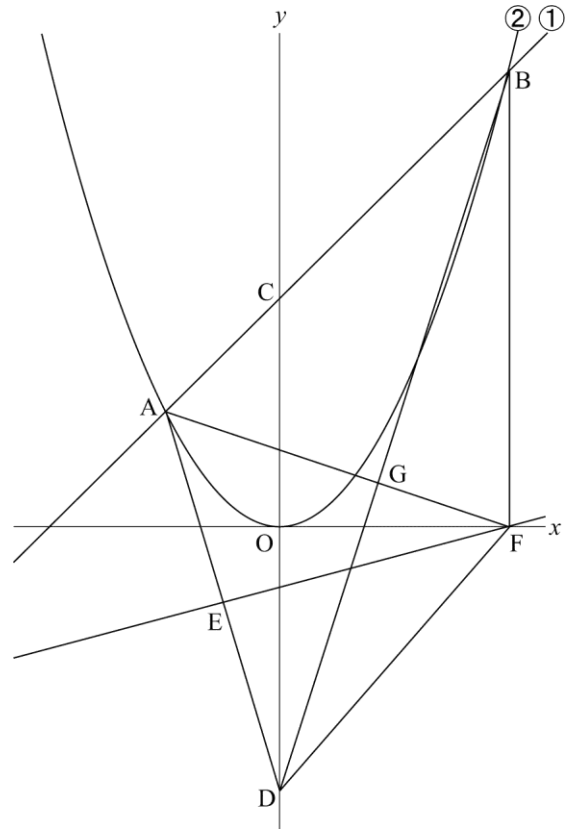
2 点 A, B はともに直線①と曲線②との交点で、点 A の x 座標は -3 , 点 B の x 座標は 6 であり、点 C は直線①と y 軸との交点である。

また、原点を O とするとき、点 D は y 軸上の点で、 $CO:OD=6:7$ であり、その y 座標は負である。点 E は線分 AD 上の点で、 $AE=ED$ である。

さらに、点 F は x 軸上の点で、線分 BF は y 軸に平行である。

このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2018 年度)



問1 曲線②の式 $y=ax^2$ の a の値として正しいものを次の1～6の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 $a=\frac{1}{4}$ | 2 $a=\frac{1}{3}$ | 3 $a=\frac{2}{5}$ |
| 4 $a=\frac{1}{2}$ | 5 $a=\frac{2}{3}$ | 6 $a=\frac{3}{4}$ |

問2 直線 EF の式を $y=mx+n$ とするときの (i) m の値と、(ii) n の値として正しいものを、それぞれ次の1～6の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

(i) m の値

- | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| 1 $m=\frac{1}{15}$ | 2 $m=\frac{2}{15}$ | 3 $m=\frac{1}{5}$ |
| 4 $m=\frac{4}{15}$ | 5 $m=\frac{1}{3}$ | 6 $m=\frac{2}{5}$ |

(ii) n の値

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| 1 $n=-22m=-\frac{28}{15}$ | 2 $n=-\frac{9}{5}$ |
| 3 $n=-\frac{5}{3}$ | 4 $n=-\frac{8}{5}$ |
| 5 $n=-\frac{22}{15}$ | 6 $n=-\frac{22}{15}$ |

問3 線分 AF と線分 BD との交点を G とするとき、三角形 AGB と三角形 DFG の面積の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1		
問2	(i)	
	(ii)	
問3	$\triangle AGB : \triangle DFG =$:	

解答

問1 2

問2

(i) 4

(ii) 5

問3 $\triangle AGB:\triangle DFG=13:6$

解説

問1

点 A は直線① $y=x+6$ 上の点で $x=-3$ より $A(-3, 3)$

点 A は曲線② $y=ax^2$ 上の点でもあるので $3=a \times (-3)^2$ $9a=3$ $a=\frac{1}{3}$

問2

点 A を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を A'

点 E を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を E' とすると

三角形と比の定理より $DE':E'A'=DE:EA=1:1$ だから $DE'=DA' \div 2=\{3-(-7)\} \div 2=5$

よって点 E の y 座標は -2 中点連結定理より $EE'=\frac{1}{2}AA'=\frac{3}{2}$ だから点 E の x 座標は $-\frac{3}{2}$

したがって $E\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ 点 F は x 軸上の点で、線分 BF は y 軸に平行だから $F(6, 0)$

直線 EF の傾きは、 $m=\{0-(-2)\} \div \left\{6-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=\frac{4}{15}$ だから

$y=\frac{4}{15}x+n$ に $x=6, y=0$ を代入すると $0=\frac{4}{15} \times 6+n$ $n=-\frac{8}{5}$

問3

直線 AF の傾きは $\frac{0-3}{6-(-3)}=-\frac{1}{3}$

直線 AF の式を $y=-\frac{1}{3}x+b$ として $x=6, y=0$ を代入すると $0=-\frac{1}{3} \times 6+b$ $b=2$

よって直線 AF の式は $y=-\frac{1}{3}x+2$

点 B は直線① $y=x+6$ 上の点で $x=6$ より $B(6, 12)$

点 C は直線①と y 軸との交点だから $C(0, 6)$ であり

点 D は $OC:OD=6:7$ となる y 軸上の y 座標が負の点だから $D(0, -7)$

したがって直線 BD の式を $y=cx-7$ として $x=6, y=12$ を代入すると $12=c \times 6-7$ $c=\frac{19}{6}$

よって直線 BD の式は $y=\frac{19}{6}x-7$

$y=-\frac{1}{3}x+2$ と $y=\frac{19}{6}x-7$ を連立方程式として解くと $x=\frac{18}{7}, y=\frac{8}{7}$ だから $G\left(\frac{18}{7}, \frac{8}{7}\right)$

よって $BG:GD=\left(6-\frac{18}{7}\right) \div \frac{18}{7}=4:3, AG:GF=\left(3-\frac{8}{7}\right) \div \frac{8}{7}=13:8$

したがって $\triangle AGB=\triangle BGF \times \frac{13}{8}=\triangle DFG \times \frac{4}{3} \times \frac{13}{8}=\frac{13}{6} \triangle DFG$ だから $\triangle AGB:\triangle DFG=13:6$

【問 9】

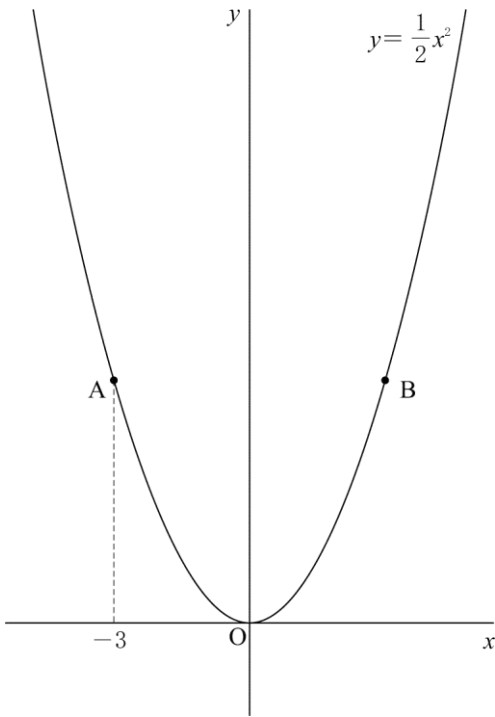
右の図のように、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、点 A の x 座標は -3 、点 B は点 A と y 軸について対称である。
このとき、次の問いに答えなさい。

(富山県 2018 年度)

問1 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-3\leq x\leq 4$ のときの y の変域を求めなさい。

問2 y 軸上に点 C を、四角形 OBCA がひし形となるようにとる。
このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 直線 AC の式を求めなさい。
- (2) 線分 AC 上に点 D をとる。△ODA と四角形 OBCA の面積比が 1:4 となるとき、点 D の座標を求めなさい。



解答欄

問1	$\leq y \leq$	
問2	(1)	
	(2)	(,)

解答

問1 $0 \leq y \leq 8$

問2

(1) $y = \frac{3}{2}x + 9$

(2) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$

解説

問1

y の最小値は $x=0$ のときで $y=0$

最大値は $x=4$ のときで $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

よって y の変域は $0 \leq y \leq 8$

問2

(1)

点 A の y 座標は $y = \frac{1}{2} \times (-3)^2 = \frac{9}{2}$

よって $A\left(-3, \frac{9}{2}\right)$, $B\left(3, \frac{9}{2}\right)$ で

線分 AB と y 軸の交点を E とすると $E\left(0, \frac{9}{2}\right)$ はひし形 OBCA の対角線の交点になる。

OC = 2OE だから C(0, 9)

直線 AC の式は $y = ax + 9$ とおける。

$A\left(-3, \frac{9}{2}\right)$ を通るから

$$\frac{9}{2} = a \times (-3) + 9$$

$$3a = \frac{9}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

よって $y = \frac{3}{2}x + 9$

(2)

$\triangle ODA$: 四角形 OBCA = 1:4 のとき $\triangle ODA$: $\triangle OCA$ = 1:2

したがって $\triangle ODA = \triangle ODC$ となるから点 D は線分 AC の中点になる。

点 A の x 座標が -3 だから、点 D の x 座標は $-\frac{3}{2}$ y 座標は $y = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 9 = \frac{27}{4}$

よって $D\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$

【問 10】

右の図のように、関数 $y = \frac{a}{x}$ ($x > 0$, a は定数) …①

関数 $y = bx^2$ (b は定数) …②のグラフがある。

①のグラフ上に点 A (2, 4) と、 x 座標が 4 である点 B がある。点 A, B から y 軸と平行な直線をひき、②のグラフとの交点を、それぞれ点 C, D とおく。

また、点 C, D から x 軸と平行な直線をひき、②のグラフとの交点のうち、点 C, D と異なる点を、それぞれ点 E, F とおく。

直線 AB と直線 ED が互いに平行であるとき、次の問いに答えよ。

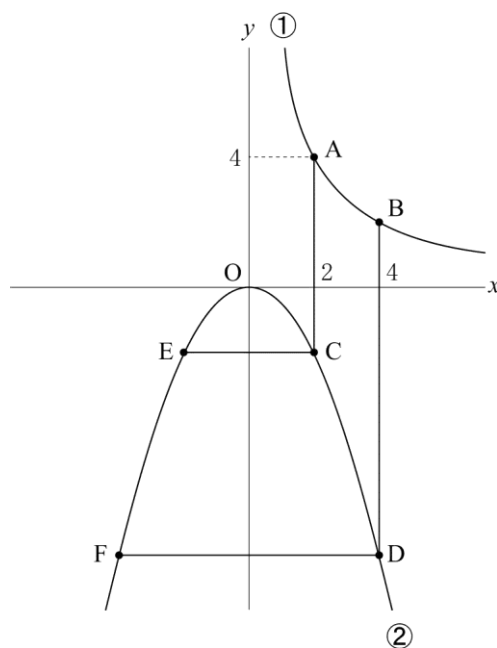
(福井県 2018 年度)

問1 定数 a の値を求めよ。

問2 定数 b の値を求めよ。

問3 直線 AB と直線 FC の交点を G とする。△ACG はどんな三角形であるかを解答欄の () に書き入れ、その理由を言葉や数、式などを使って説明せよ。

問4 点 A を通り、台形 EFDC の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。



解答欄

問1	$a =$	
問2	$b =$	
問3	△ACG は（ ）である。 〔説明〕	
問4	$y =$	

解答

問1 $a=8$

問2 $b=-\frac{1}{2}$

問3

$\triangle ACG$ は ($\angle AGC=90^\circ$ の直角二等辺三角形) である。

[説明]

直線 AB の式は $y=-x+6$

直線 FC の式は $y=x-4$ であるから

直線 AB と直線 FC の交点 G の座標は (5, 1) である。

$AG=3\sqrt{2}$, $CG=3\sqrt{2}$, $AC=6$ であり $AC^2=AG^2+CG^2$ である。

よって三平方の定理の逆より $\angle AGC=90^\circ$ である。

また $AG=CG$ だから $\triangle ACG$ は、直角二等辺三角形である。

問4 $y=\frac{9}{2}x-5$

解説

問1

点 A(2, 4) は関数 $y=\frac{a}{x}$ のグラフ上の点だから $y=\frac{a}{x}$ に $x=2$, $y=4$ を代入して $a=8$

問2

線分 AC は y 軸と平行だから、点 C の x 座標は点 A の x 座標と等しく

点 C は関数 $y=bx^2$ のグラフ上の点だから C(2, $4b$)

同じように考えて点 D の座標は D(4, $16b$)

線分 CE は x 軸と平行で $y=bx^2$ のグラフが y 軸について対称な放物線であることから E(-2, $4b$)

ここで直線 AB の傾きは $\frac{2-4}{4-2} = -1$ で

AB // ED だから直線 ED の傾きは -1

よって $\frac{16b-4b}{4-(-2)} = -1$

$2b = -1$

$b = -\frac{1}{2}$

問3

$\triangle ACG$ が $\angle AGC=90^\circ$ の直角二等辺三角形であることは次のように説明できる。

直線 AB は傾きが -1 で A(2, 4) を通るから、その式は $y=-x+6$ …①

C(2, -2), F(-4, -8) より

直線 FC の傾きは 1 だからその式は $y=x-4$ …②

直線 AB と直線 FC との交点 G の座標は

①, ② を連立方程式として解いて G(5, 1) である。

A(2, 4), G(5, 1) だから

三平方の定理より $AG=\sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2} = 3\sqrt{2}$

C(2, -2), G(5, 1) だから

三平方の定理より $CG=\sqrt{(5-2)^2+\{1-(-2)\}^2} = 3\sqrt{2}$

$AC=6$ だから $AC^2=AG^2+CG^2$ である。

よって三平方の定理の逆より $\angle AGC=90^\circ$ である。

また $AG=CG$ だから $\triangle ACG$ は直角二等辺三角形である。

問4

点 A を通り台形の面積を 2 等分する直線を ℓ とする。

$C(2, -2)$, $D(4, -8)$, $E(-2, -2)$, $F(-4, -8)$ より台形 EFDC は $CE \parallel DF$ の台形であり
 $CE = 2 - (-2) = 4$, $DF = 4 - (-4) = 8$, 高さは, $-2 - (-8) = 6$ だから

台形 EFDC の面積は $\frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 6 = 36$

よって点 A を通る直線によって面積が 18 の図形に分割されることになる。

直線 ℓ と線分 DF との交点を K とすると $\triangle CKD = \frac{1}{2} \times (4 - 2) \times 6 = 6$

直線 ℓ と線分 CE, DF との交点をそれぞれ G, H とすると

四角形 CGHK の面積は $18 - 6 = 12$ であり

$\triangle AGC \sim \triangle AHK$

$AC : AK = 1 : 2$ だから

$\triangle AGC : \triangle AHK = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$

よって $\triangle AGC : (\triangle AGC + 12) = 1 : 4$

$\triangle AGC = 4$

したがって $\frac{1}{2} \times CG \times 6 = 4$

$CG = \frac{4}{3}$

直線 ℓ は傾きが $\frac{AC}{CG} = 6 \div \frac{4}{3} = \frac{9}{2}$ で $A(2, 4)$ を通る直線だから

その式は $y = \frac{9}{2}x - 5$

別解

点 A を通り, 台形 EFDC の面積を 2 等分する直線が辺 CE, DF と交わる点をそれぞれ G, H とし

式を $y = mx + n$ とする。

直線は点 $A(2, 4)$ を通るから $4 = 2m + n$ $n = 4 - 2m$

よって $y = mx + 4 - 2m$

$CG + DH = \frac{1}{2} (CE + DF)$ であればよく

$CE + DF = 2 - (-2) + 4 + (-4) = 12$

よって $CG + DH = 6$

点 G の y 座標は -2 だから x 座標は

$-2 = mx + 4 - 2m$ $x = \frac{2m - 6}{m}$

$CG = 2 - \frac{2m - 6}{m} = \frac{6}{m}$

点 H の y 座標は -8 だから x 座標は

$-8 = mx + 4 - 2m$ $x = \frac{2m - 12}{m}$

$DH = 4 - \frac{2m - 12}{m} = \frac{2m + 12}{m}$

よって $\frac{6}{m} + \frac{2m + 12}{m} = 6$ $2m + 18 = 6m$ $4m = 18$ $m = \frac{9}{2}$

$n = 4 - 2 \times \frac{9}{2} = -5$

求める直線の式は $y = \frac{9}{2}x - 5$

【問 11】

図5において、①は関数 $y=ax^2$ ($a>0$) のグラフであり、②は関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。2点 A, B は、それぞれ放物線①、②上の点であり、その x 座標はともに -4 である。点 C は、放物線①上の点であり、その x 座標は 2 である。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

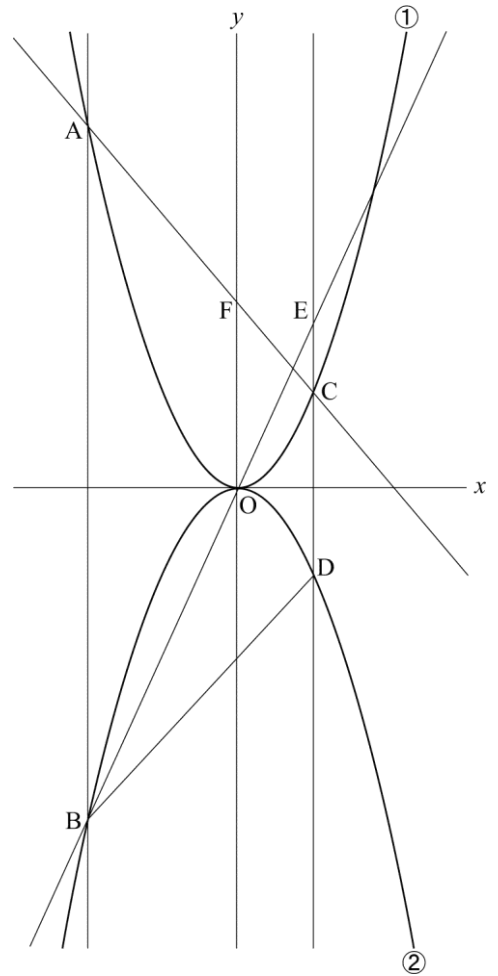
(静岡県 2018 年度)

問1 x の変域が $-1 \leq x \leq 4$ であるとき、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ の y の変域を求めなさい。

問2 点 B を通り, 直線 $y = -x + 2$ に平行な直線の式を求めなさい。

問3 点 C を通り y 軸に平行な直線と放物線②との交点を D とし、直線 BO と直線 CD との交点を E とする。直線 AC と y 軸との交点を F とする。四角形 ABOF の面積と $\triangle EBD$ の面積の比が $8:3$ となるときの、 a の値を求めなさい。求める過程も書きなさい。

図5



解答欄

問1	
問2	
問3	〔求める過程〕 答 $a =$

解答

問1 $-8 \leq y \leq 0$

問2 $y = -x - 12$

問3

〔求める過程〕

条件より, A $(-4, 16a)$, B $(-4, -8)$, C $(2, 4a)$, D $(2, -2)$

B $(-4, -8)$ より, 直線 OB の式は $y = 2x$ だから E $(2, 4)$

また 2 点 A, C を通る直線の式は

$y = -2ax + 8a$ より F $(0, 8a)$

四角形 ABOF は台形より, その面積は $\frac{1}{2} \times \{16a - (-8) + 8a\} \times 4 = 48a + 16$

$\triangle EBD$ の面積は $\frac{1}{2} \times \{4 - (-2)\} \times \{2 - (-4)\} = 18$

よって $(48a + 16) : 18 = 8 : 3$ だから

$$a = \frac{2}{3}$$

答 $a = \frac{2}{3}$

解説

問1

$x = -1$ のとき $y = -\frac{1}{2}$, $x = 4$ のとき $y = -8$

$-1 \leq x \leq 4$ より 0 のとき y の最大値は 0 なので y の変域は $-8 \leq y \leq 0$

問2

$x = -4$ を $y = -\frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y = -8$ だから B $(-4, -8)$

求める直線は直線 $y = -x + 2$ に平行だから, 式は $y = -x + b$ とおける。

点 B を通るから $-8 = 4 + b$ $b = -12$

よって $y = -x - 12$

問3

点 C, D, E の x 座標は 2 だから, y 座標はそれぞれ $y = a \times 2^2 = 4a$, $y = -\frac{1}{2} \times 2^2 = -2$, $y = 2 \times 2 = 4$

また, 点 A の x 座標は -4 だから y 座標は $y = a \times (-4)^2 = 16a$

直線 AC の式は $y = -2ax + 8a$ より F $(0, 8a)$

四角形 ABOF の面積は $\frac{1}{2} \times \{8a + (16a + 8)\} \times 4 = 48a + 16$

$\triangle EBD = \frac{1}{2} \times \{4 - (-2)\} \times 6 = 18$ で

その面積の比は $8 : 3$ だから

$$(48a + 16) : 18 = 8 : 3$$

$$3(48a + 16) = 18 \times 8$$

$$48a + 16 = 48$$

$$3a + 1 = 3$$

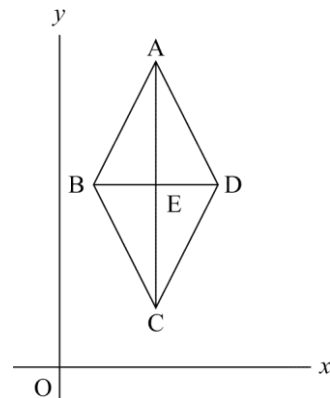
$$a = \frac{2}{3}$$

【問 12】

図で、O は原点、四角形 ABCD は $AC=2BD$ のひし形で、E は対角線 AC と BD との交点である。

点 A, E の座標がそれぞれ $(3, 10)$, $(3, 6)$ で、関数 $y=ax^2$ (a は定数) のグラフがひし形 ABCD の頂点または辺上の点を通るとき、 a がとることのできる値の範囲を、不等号を使って表しなさい。

(愛知県 2018 年度 A)



解答欄

解答

$$\frac{2}{9} \leq a \leq 6$$

解説

A(3, 10), E(3, 6)だから $AE=10-6=4$

よって $AC=4 \times 2=8$ で、点 C の y 座標は $10-8=2$ だから C(3, 2)

また $BD=\frac{1}{2}AC=4$ だから $BE=DE=2$

よって点 B の x 座標は $3-2=1$ だから B(1, 6)

点 D の x 座標は $3+2=5$ だから D(5, 6)

$y=ax^2$ のグラフがひし形 ABCD の頂点または辺上の点を通るとき

a の最小値はグラフが C(3, 2)を通る場合で $2=a \times 3^2$ $a=\frac{2}{9}$

a の最大値はグラフが B(1, 6)を通る場合で $6=a \times 1^2$ $a=6$

よって a の値の範囲は $\frac{2}{9} \leq a \leq 6$

【問 13】

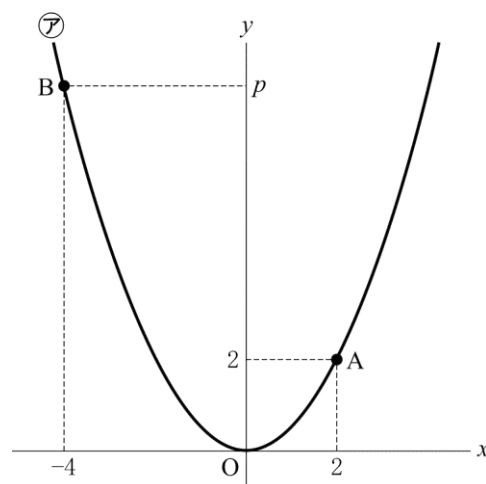
右の図のように、関数 $y=ax^2\cdots\textcircled{ア}$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、点 A の座標が (2, 2)、点 B の座標が $(-4, p)$ である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2018 年度)

(1) a, p の値を求めなさい。

(2) 関数 $\textcircled{ア}$ について、 x の変域が $-1 \leq x \leq 3$ のときの y の変域を求めなさい。



(3) x 軸上に点 C をとり、 $\triangle ABC$ をつくる。 $\triangle ABC$ の面積が $\triangle OAB$ の面積の $\frac{2}{3}$ 倍になるとき、点 C の座標を求めなさい。ただし、原点を O とし、点 C の x 座標は点 A の x 座標より小さいものとする。

解答欄

(1)	$a =$
	$p =$
(2)	$\leq y \leq$
(3)	C (,)

解答

(1)

$$a = \frac{1}{2}$$

$$p = 8$$

$$(2) \quad 0 \leq y \leq \frac{9}{2}$$

$$(3) \quad C \left(\frac{4}{3}, 0 \right)$$

解説

(1)

㊦のグラフは点 A(2, 2)を通るから $4a = 2 \quad a = \frac{1}{2}$

また $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフは点 B(-4, p)を通るから $p = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$

(2)

x の変域が $-1 \leq x \leq 3$ で $x = 0$ を含むから y の最小値は 0

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ に } x = 3 \text{ を代入すると } y = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$$

よって y の変域は $0 \leq y \leq \frac{9}{2}$

(3)

点 C の x 座標を q とする。

2 点 A, B を通る直線の式は $y = -x + 4$

この直線と y 軸の交点を D とする。

また, 点 C を通り y 軸と平行な直線と直線 AB の交点を E とする。

ここで $\triangle OAB = \triangle ODB + \triangle OAD = \frac{1}{2} \times OD \times 4 + \frac{1}{2} \times OD \times 2 = \frac{1}{2} \times 4 \times (4 + 2) = 12$ であり

$\triangle ABC = \triangle CEB + \triangle CAE = \frac{1}{2} \times CE \times (q + 4) + \frac{1}{2} \times CE \times (2 - q) = \frac{1}{2} \times CE \times 6 = 3CE$ である。

$\triangle ABC = \frac{2}{3} \triangle OAB$ より

$$3CE = 8 \quad -q + 4 = \frac{8}{3} \quad q = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

よって点 C の座標は $C \left(\frac{4}{3}, 0 \right)$

【問 14】

関数 $y=ax^2$ のグラフが、点 A (2, 6) を通るとき、次の(1), (2)の各問いに答えなさい。

(滋賀県 2018 年度)

(1) a の値を求めなさい。

(2) グラフの原点 O と点 A との距離を求めなさい。

解答欄

(1)	$a=$
(2)	

解答

(1) $a=\frac{3}{2}$

(2) $2\sqrt{10}$

解説

(1)

$y=ax^2$ に $x=2$, $y=6$ を代入すると $6=a \times 2^2$ $4a=6$ $a=\frac{3}{2}$

(2)

三平方の定理より $\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

【問 15】

右の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 A (−3, 12) がある。関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 B, y 軸上に点 C を、四角形 OBCA がひし形となるようにとる。

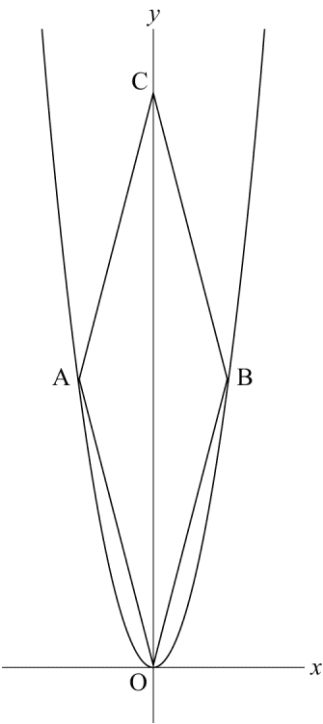
このとき、次の問1～問3に答えよ。

(京都府 2018 年度 前期)

問1 a の値を求めよ。

問2 直線 BC の式を求めよ。

問3 直線 BC 上に x 座標が正である点 D を、 $\triangle ADC$ の面積が 12 となるようにとるとき、点 D の座標を求めよ。



解答欄

問1	$a =$
問2	$y =$
問3	D (,)

解答

問1 $a = \frac{4}{3}$

問2 $y = -4x + 24$

問3 D (1, 20)

解説

問1

点 A(-3, 12)は関数 $y = ax^2$ のグラフ上の点だから $12 = a \times (-3)^2$ $9a = 12$ $a = \frac{4}{3}$

問2

四角形 OBCA はひし形だから、対角線 AB は対角線 OC の垂直二等分線となる。

よって、線分 AB は x 軸に平行だから、点 B の y 座標は点 A の y 座標と等しく 12 となり B(3, 12)

対角線 AB は対角線 OC との交点を M とすると M(0, 12)で $2OM = OC = 24$ だから C(0, 24)

したがって直線 BC の式を $y = mx + 24$ として $x = 3$, $y = 12$ を代入すると $12 = m \times 3 + 24$ $m = -4$

よって $y = -4x + 24$

問3

$AB = 3 - (-3) = 6$, $CM = OM = 12$ だから $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36$

よって $\triangle ADC = 12$ のとき $\triangle ABD = 36 - 12 = 24$ だから

点 D を線分 AB との距離を h とすると

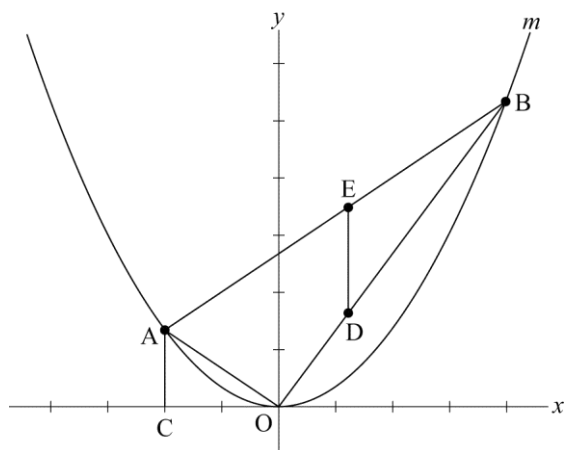
$\triangle ABD$ の面積について $\frac{1}{2} \times 6 \times h = 24$ $h = 8$

したがって点 D の y 座標は $12 + 8 = 20$

点 D は直線 BC 上の点だから D(1, 20)

【問 16】

右図において、 m は $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフを表す。A, B は m 上の点であり、A の x 座標は -2 , B の x 座標は 4 である。O と A, O と B, A と B とをそれぞれ結ぶ。C は x 軸上の点であり、C の x 座標は A の x 座標と等しい。A と C とを結ぶ。D は、線分 OB 上の点である。D の x 座標を t とし、 $0 < t < 4$ とする。E は線分 AB 上の点であり、E の x 座標は D の x 座標と等しい。このとき、E の y 座標は D の y 座標より大きい。D と E とを結ぶ。 $\triangle BED$ の面積が $\triangle OAC$ の面積の 2 倍であるときの t の値を求めなさい。求め方も書くこと。ただし、座標軸の 1 目もりの長さは 1 cm であるとする。



(大阪府 2018 年度 C)

解答欄

[求め方]

t の値

解答

[求め方]

A $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$, B $\left(4, \frac{16}{3}\right)$ だから

直線 AB の式を $y=ax+b$ とすると

$$\frac{4}{3} = -2a + b \quad \textcircled{7}$$

$$\frac{16}{3} = 4a + b \quad \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{ を連立させて解くと } a = \frac{2}{3}, b = \frac{8}{3}$$

よって直線 AB の式は $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ だから

E の y 座標は $\frac{2}{3}t + \frac{8}{3}$ である。

直線 OB の式は $y = \frac{4}{3}x$ だから D の y 座標は $\frac{4}{3}t$ である。

$$\text{よって } ED = \frac{2}{3}t + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}t = \frac{2}{3}(4-t) \text{ cm} \text{ だから}$$

$$\triangle BED = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(4-t) \times (4-t) = \frac{1}{3}(4-t)^2 \text{ cm}^2$$

$\triangle BED$ の面積が $\triangle OAC$ の面積の 2 倍だから

$$\frac{1}{3}(4-t)^2 = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{よって } (4-t)^2 = 8$$

これを解くと $0 < t < 4$ より

$$t = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$t \text{ の値 } 4 - 2\sqrt{2}$$

解説

点 A の座標は $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$, B の座標は $\left(4, \frac{16}{3}\right)$ と表すことができる。

よって直線 OB を表す式は $y = \frac{4}{3}x$

直線 AB を表す式は $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ だから

D $\left(t, \frac{4}{3}t\right)$, E $\left(t, \frac{2}{3}t + \frac{8}{3}\right)$ となる。

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\triangle BED = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}t + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}t\right) \times (4-t) = \frac{1}{3}(4-t)^2 \text{ で}$$

$\triangle BED = 2\triangle OAC$ だから

$$(4-t)^2 = 8$$

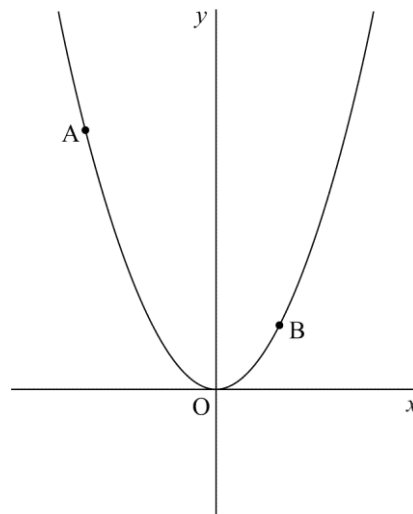
$0 < t < 4$ より

$$t = 4 - 2\sqrt{2}$$

【問 17】

右の図の放物線は、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフであり、点 O は原点である。2 点 A, B は放物線上の点であり、その座標はそれぞれ $(-4, 8), (2, 2)$ である。各問いに答えよ。

(奈良県 2018 年度)



問1 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めよ。

問2 次のア～オの関数のうち、そのグラフを右の図にかき入れたとき、グラフが線分 AB と交わるものを、次のア～オからすべて選び、その記号を書け。

ア $y = \frac{1}{2}x$

イ $y = \frac{6}{x}$

ウ $y = 3x + 2$

エ $y = 2x^2$

オ $y = \frac{1}{4}x^2$

問3 点 A を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を C 、点 B を通り x 軸に平行な直線と放物線との交点のうち、 B と異なる点を D とする。このとき、点 O を通り四角形 $ADBC$ の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

問4 $\triangle AOB$ を、 x 軸を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、円周率は π とする。

解答欄

問1	
問2	
問3	
問4	

解答

問1 $0 \leq y \leq 8$

問2 ウ, エ

問3 $y = -5x$

問4 80π

解説

問1

グラフより y の最小値は $x=0$ のときで $y=0$

最大値は $x=-4$ のときで $y=\frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$

よって y の変域は $0 \leq y \leq 8$

問2

右の図のようにア～オの関数のグラフをかいて考えるとよい。

グラフが線分 AB と交わるのはウ, エ

問3

A(-4, 8), B(2, 2), C(0, 8), D(-2, 2)より

$AC = 0 - (-4) = 4$

$DB = 2 - (-2) = 4$

よって四角形 ADBC は $AC \parallel DB$, $AC = DB$ より

1 組の対辺が平行でその長さが等しいから平行四辺形である。

平行四辺形の面積を 2 等分する直線は 2 本の対角線の交点を通る。

また対角線の交点是对角線 AB の中点だから

これを M とすると M の x 座標は A の x 座標 -4 と B の x 座標 2 の真ん中の値になる。

$2 - (-4) = 6$ だから M の x 座標は -4 より $\frac{6}{2} = 3$ だけ大きく $-4 + 3 = -1$

同様に M の y 座標は A の y 座標 8 と B の y 座標 2 の真ん中の値になる。

$8 - 2 = 6$ だから M の y 座標は 8 より $\frac{6}{2} = 3$ だけ小さく $8 - 3 = 5$

よって M(-1, 5)

2 点 O, M を通る直線の式を $y = ax$ として $x = -1$, $y = 5$ を代入すると $5 = a \times (-1)$ $a = -5$

よって $y = -5x$

問4

直線 AB の式を $y = cx + d$ とすると $c = \frac{2-8}{2-(-4)} = -1$

点 B を通ることから $y = -x + d$ に $x = 2$, $y = 2$ を代入して $2 = -2 + d$ $d = 4$

よって $y = -x + 4$

直線 AB と x 軸の交点を E とすると E の x 座標は $0 = -x + 4$ より $x = 4$ よって E(4, 0)

また A, B から x 軸に垂線 AF, BG をひくと F(-4, 0), G(2, 0)

$\triangle AOB$ を x 軸を軸として 1 回転させてできる立体は

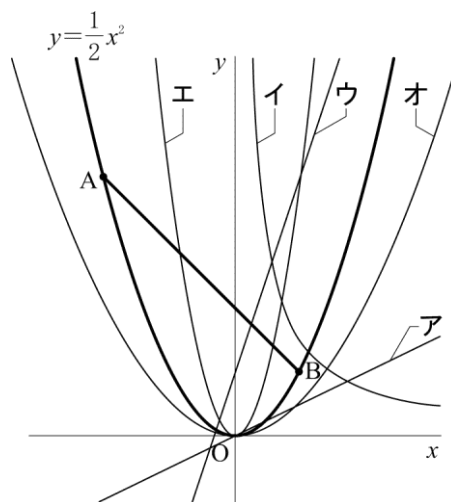
$\triangle AFE$ を 1 回転させてできる三角錐から

$\triangle OAF$ を 1 回転させてできる円錐, $\triangle OBG$ を 1 回転させてできる円錐, $\triangle EBG$ を 1 回転させてできる円錐を取り除いた立体になる。

よってその体積は $\frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times \{4 - (-4)\} - \frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times \{0 - (-4)\} - \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times (2 - 0) - \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times (4 - 2)$

$= \frac{512}{3}\pi - \frac{256}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi$

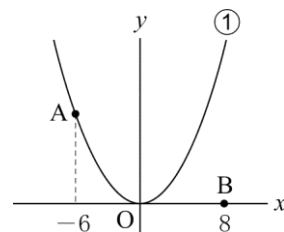
$= 80\pi \text{ cm}^3$



【問 18】

右の図のように、 $y=\frac{1}{4}x^2$ …①のグラフ上に点 A があり、その x 座標は -6 である。また、 x 軸上に点 B があり、その x 座標は 8 である。

①のグラフ上に点 P をとり、 $\triangle OPB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積の $\frac{1}{4}$ 倍となるような P の座標をすべて求めなさい。



(和歌山県 2018 年度)

解答欄

解答

$$\left(3, \frac{9}{4}\right), \left(-3, \frac{9}{4}\right)$$

解説

$$x = -6 \text{ を①に代入すると } y = \frac{1}{4} \times (-6)^2 = \frac{1}{4} \times 36 = 9$$

$$\text{よって点 A の座標は } A(-6, 9) \text{ だから } \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 = 36$$

$$\text{点 P の } y \text{ 座標を } y \text{ とすると } \triangle OPB = \frac{1}{2} \times 8 \times y = 4y$$

$$\triangle OPB \text{ の面積は } \triangle OAB \text{ の面積の } \frac{1}{4} \text{ 倍だから } 4y = 36 \times \frac{1}{4} = 9 \quad y = \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{9}{4} \text{ を①に代入すると } \frac{9}{4} = \frac{1}{4} x^2 \quad x^2 = 9 \quad x = \pm 3$$

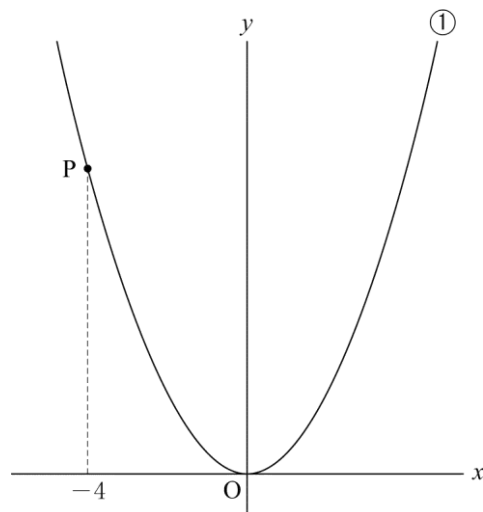
$$\text{よって点 P の座標は } \left(3, \frac{9}{4}\right), \left(-3, \frac{9}{4}\right)$$

【問 19】

図2のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ のグラフ上に点 P があり、その x 座標は -4 である。下の(1)～(3) に答えなさい。

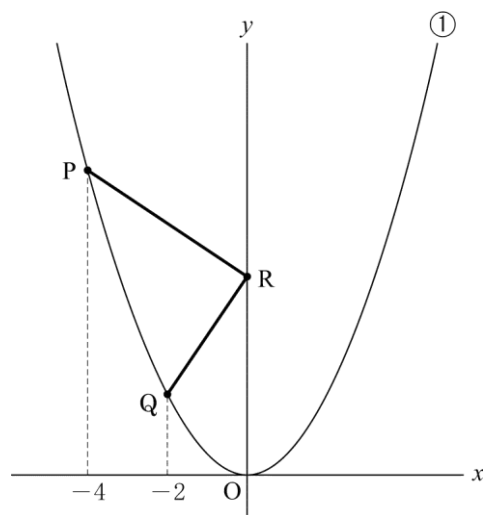
(島根県 2018 年度)

- (1) 点 P の座標を求めなさい。
- (2) 関数①について、 x の変域を $-4 \leq x \leq a$ とする。 y の変域が $0 \leq y \leq 10$ となるような a の値を求めなさい。



- (3) 図3のように、関数①のグラフ上に x 座標が -2 である点 Q をとり、 y 軸上の点 R について、 $PR + RQ$ の長さを考える。 y 軸上を点 R が動くとき、次の (i), (ii) に答えなさい。

図3



- (i) $PR + RQ$ の長さが最小となる点 R の位置はどのようにとればよいか、その方法を説明しなさい。
- (ii) $PR + RQ$ の長さが最小となるとき、その長さを求めなさい。

解答欄

(1)	P (,)	
(2)	$a =$	
(3)	(i)	〔説明〕
	(ii)	

解答

(1) P (−4, 8)

(2) $a=2\sqrt{5}$

(3)

(i)

〔説明〕

点 Q と y 軸について対称な点を S とするとき、点 R を直線 PS と y 軸の交点の位置にとる。

(ii) $6\sqrt{2}$

解説

(1)

点 P は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にある。

x 座標が −4 の点なので $y=\frac{1}{2} \times (-4)^2=8$ より P(−4, 8)

(2)

y の変域に $y=0$ を含むので a の値は正の数である。

また(1)より $x=-4$ のとき $y=8$ なのでグラフの形から考えると $x=a$ のとき $y=10$ であればよい。

$y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=a$, $y=10$ を代入して

$$10=\frac{1}{2}a^2$$

$$a^2=20$$

$$a=\pm 2\sqrt{5}$$

$$a>0 \text{ より}$$

$$a=2\sqrt{5}$$

(3)

(i)

点 Q と y 軸について対称な点を S とすると $RQ=RS$ だから $PR+RQ=PR+RS$

$PR+RS$ の長さが最小となるのは 3 点 P, R, S が 1 つの直線上に並ぶときだから

点 R を直線 PS と y 軸との交点の位置にとればよい。

(ii)

点 Q は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にある。

x 座標が −2 の点なので $y=\frac{1}{2} \times (-2)^2=2$ より Q(−2, 2)

(i)より点 S は Q と y 軸について対称な点だから S(2, 2)

$PR+RS$ の長さが最小となるのは 3 点 P, R, S が 1 つの直線上に並ぶときだから

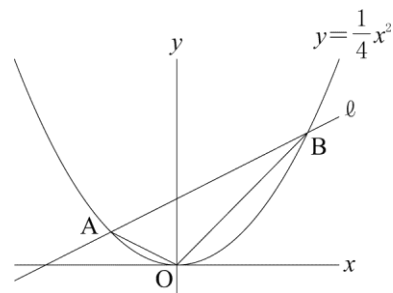
求める最小の長さは線分 PS の長さに等しい。

$$\text{よって } PS=\sqrt{\{2-(-4)\}^2+(8-2)^2}=6\sqrt{2}$$

【問 20】

次の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、点 A の x 座標は -2 、点 B の y 座標は 4 である。ただし、点 B の x 座標は正とする。また、2 点 A, B を通る直線を ℓ とする。原点 O と点 A, B とをそれぞれ結ぶ。問1～問3の に適当な数または式を書き入れなさい。問4は指示に従って答えなさい。

(岡山県 2018 年度)



問1 点 A の座標は $(-2, \text{ (1) })$ であり、点 B の座標は $(\text{ (2) }, 4)$ である。

問2 直線 ℓ の式は $y = \text{ }$ である。

問3 線分 AB の長さは である。

問4 点 O と直線 ℓ との距離は、次のように求めることができる。 (1) には適当な数を書き入れなさい。

また、 (2) には点 O と直線 ℓ との距離を求めなさい。ただし、 (2) は答えを求めるまでの過程も書きなさい。

点 O から直線 ℓ に垂線 OH をひくと、線分 OH の長さが、点 O と直線 ℓ との距離である。

$\triangle OAB$ の面積は (1) だから、 $\triangle OAB$ について、

(2)

解答欄

問1	(1)	
	(2)	
問2		
問3		
問4	(1)	
	(2)	

解答

問1

(1) 1

(2) 4

問2 $\frac{1}{2}x+2$

問3 $3\sqrt{5}$

問4

(1) 6

(2)

線分 AB を底辺とみると、線分 OH が高さとなるから

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times AB \times OH \text{ と表される。}$$

$$\triangle OAB = 6, AB = 3\sqrt{5} \text{ だから}$$

$$6 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times OH$$

$$OH = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

解説

問1

(1)

$$\text{点 A の } y \text{ 座標は } y = \frac{1}{4}x^2 \text{ に } x = -2 \text{ を代入して } y = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$$

(2)

$$\text{点 B の } x \text{ 座標は } y = \frac{1}{4}x^2 \text{ に } y = 4 \text{ を代入して } 4 = \frac{1}{4}x^2 \quad x^2 = 16 \quad x > 0 \text{ より, } x = 4$$

問2

直線 l の式を $y = ax + b$ とする。

$$A(-2, 1), B(4, 4) \text{ より } a = \frac{4-1}{4-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{直線 } y = \frac{1}{2}x + b \text{ は } A(-2, 1) \text{ を通るから } 1 = \frac{1}{2} \times (-2) + b \quad b = 2$$

$$\text{よって } y = \frac{1}{2}x + 2$$

問3

点 A を通り x 軸に平行な直線と、点 B を通り y 軸に平行な直線との交点を C とする。

$\triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形で $AC = 4 - (-2) = 6$, $BC = 4 - 1 = 3$ だから

三平方の定理より

$$AB^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$

$AB > 0$ より

$$AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

問4

(1)

直線 $\square$ と y 軸の交点を D とすると $D(0, 2)$

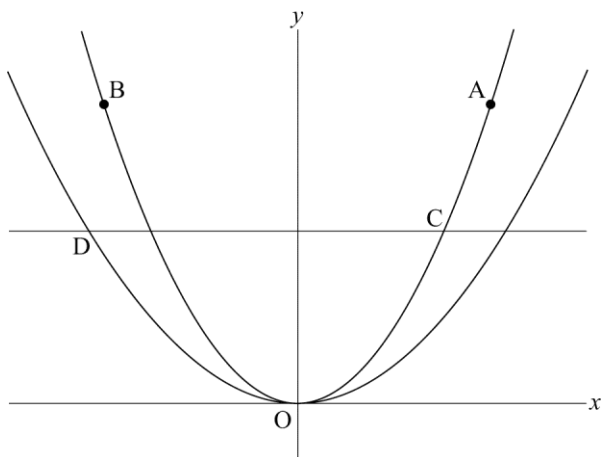
$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 6$$

(2)

問3で求めた AB の長さを使う。

【問 21】

下の図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に、2 点 A (2, 4), B (−2, 4) と $0 < x < 2$ の範囲で動く点 C があります。
点 C を通り x 軸に平行な直線と、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフとの 2 つの交点のうち、 x 座標が小さい方を D とします。



これについて、次の問1・問2に答えなさい。

(広島県 2018 年度)

問1 四角形 BDCA が平行四辺形となるとき、線分 CD の長さを求めなさい。

問2 $\triangle BDC$ と $\triangle DOC$ の面積が等しくなるとき、直線 OD の式を求めなさい。

解答欄

問1	
問2	

解答

問1 4

問2 $y = -x$

解説

問1

$$CD = AB = 2 - (-2) = 4$$

問2

$\triangle BDC$ と $\triangle DOC$ は DC が共通だから、これを底辺とみると、面積が等しいとき高さも等しくなる。

B(−2, 4)より、点 D の y 座標は $\frac{4}{2} = 2$

よって、点 D の x 座標は、 $y = \frac{1}{2}x^2$ に $y = 2$ を代入して、 $2 = \frac{1}{2}x^2$ $x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

点 D の x 座標はこのうちの小さい方だから −2 よって D(−2, 2)

直線 OD の式を $y = ax$ とする。

$$x = -2, y = 2 \text{ を代入して } 2 = a \times (-2) \quad a = -1$$

よって $y = -x$

【問 22】

図のように、点 $A(-2, 1)$ と、2 つの関数 $y=x^2$, $y=-2x^2$ のそれぞれのグラフ上に x 座標が a である点 B, C がある。また、線分 BC と x 軸との交点を D とする。問1～問4に答えなさい。ただし、 $a>0$ とする。

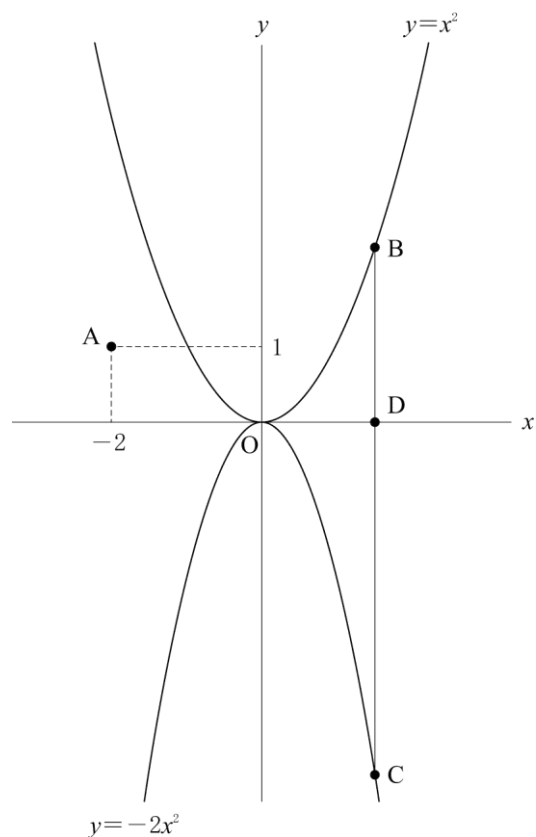
(徳島県 2018 年度)

問1 点 O を回転の中心として、点 A を点対称移動した点の座標を求めなさい。

問2 $\triangle ABD$ が $AB=AD$ の二等辺三角形となるときの点 B の座標を求めなさい。

問3 $a=2$ のとき、点 B を通り、直線 AC に平行な直線の式を求めなさい。

問4 a が整数のとき、線分 BC 上の点で、 y 座標が整数である点の個数が、109 個となる a の値を求めなさい。



解答欄

問1	(,)
問2	B (,)
問3	
問4	$a=$

解答

問1 $(2, -1)$

問2 B $(\sqrt{2}, 2)$

問3 $y = -\frac{9}{4}x + \frac{17}{2}$

問4 $a=6$

解説

問1

点 O を回転の中心として点対称移動した点は

x 座標, y 座標とも, もとの点と絶対値が等しく符号が逆になるから $(2, -1)$

問2

A を通り x 軸に平行な直線と BD との交点を E とすると

線分 AE は二等辺三角形 ABD の頂角 A から底辺にひいた垂線だから E は BD の中点になる。

E(a , 1)より B(a , 2)

また B は $y=x^2$ のグラフ上の点だから $y=x^2$ に $x=a$, $y=2$ を代入すると $2=a^2$

$a>0$ だから $a=\sqrt{2}$

よって B($\sqrt{2}$, 2)

問3

点 B の y 座標は $y=2^2=4$ よって B(2, 4)

点 C の y 座標は $y=-2 \times 2^2=-8$ よって C(2, -8)

また A(-2, 1)より, 直線 AC の傾きは $\frac{-8-1}{2-(-2)} = -\frac{9}{4}$

平行な直線の傾きは等しいから

点 B を通り直線 AC に平行な直線の式は $y = -\frac{9}{4}x + b$ とおける。

この式に $x=2$, $y=4$ を代入すると $4 = -\frac{9}{4} \times 2 + b$ $b = \frac{17}{2}$

よって $y = -\frac{9}{4}x + \frac{17}{2}$

問4

B(a , a^2), C(a , $-2a^2$)より $BC = a^2 - (-2a^2) = 3a^2$

たとえば $a=1$ のとき B(1, 1), C(1, -2), $BC=3$ で

線分 BC 上で y 座標が整数である点は

(1, 1), (1, 0), (1, -1), (1, -2) の 4 個。

このように, 線分 BC 上で y 座標が整数である点の個数は, 線分 BC の長さを表す数値より 1 多い。

よって線分 BC 上で y 座標が整数である点が 109 個のときの線分 BC の長さは 108

$3a^2=108$

$a^2=36$

$a>0$ だから

$a=\sqrt{36}=6$

【問 23】

右の図で、点 O は原点であり、放物線①は関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフである。放物線②は関数 $y=ax^2$ のグラフで、 $a<0$ である。

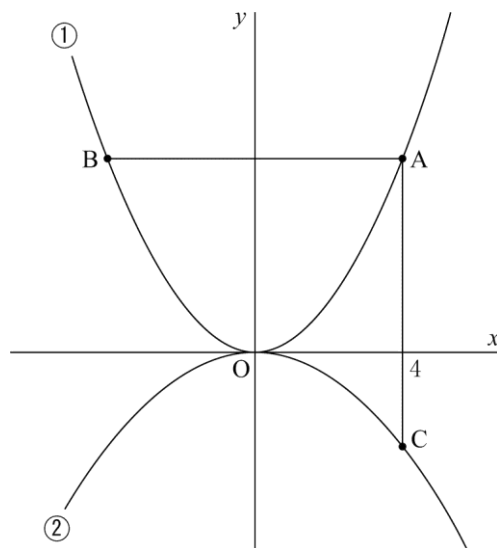
2 点 A, B は放物線①上の点で、点 A の x 座標は 4 であり、線分 AB は x 軸に平行である。また、点 A を通り、 y 軸に平行な直線をひき、放物線②との交点を C とする。

これについて、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(香川県 2018 年度)

- (1) 関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ について、 x の値が 1 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

- (2) 線分 AB の長さと、線分 AC の長さが等しくなるとき、 a の値を求めよ。



解答欄

(1)	
(2)	$a=$

解答

(1) 2

(2) $a=-\frac{1}{6}$

解説

(1)

$x=1$ のとき、 $y=\frac{1}{3} \times 1^2=\frac{1}{3}$, $x=5$ のとき、 $y=\frac{1}{3} \times 5^2=\frac{25}{3}$ だから

変化の割合は $\left(\frac{25}{3}-\frac{1}{3}\right) \div (5-1)=8 \div 4=2$

(2)

点 A は関数 $y=\frac{1}{3} x^2$ のグラフ上にある。

x 座標が 4 の点なので、 $y=\frac{1}{3} x^2$ に $x=4$ を代入すると $y=\frac{1}{3} \times 4^2=\frac{16}{3}$ だから $A\left(4, \frac{16}{3}\right)$

関数 $y=\frac{1}{3} x^2$ のグラフは y 軸について対称だから $B\left(-4, \frac{16}{3}\right)$

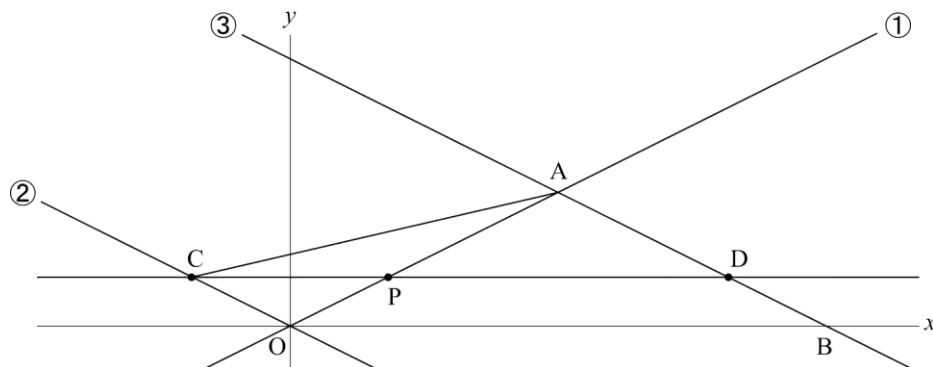
点 C の x 座標は点 A の x 座標と等しく 4

$AC=AB=4-(-4)=8$ だから、点 C の y 座標は $\frac{16}{3}-8=-\frac{8}{3}$ よって $C\left(4, -\frac{8}{3}\right)$

点 C は関数 $y=ax^2$ のグラフ上にある点なので $y=ax^2$ に $x=4, y=-\frac{8}{3}$ を代入して $-\frac{8}{3}=a \times 4^2$ $a=-\frac{1}{6}$

【問 24】

下の図において、直線①, ②はそれぞれ関数 $y=\frac{1}{2}x$, $y=ax$ のグラフであり、②は、①を、 y 軸を対称の軸として対称移動したものである。直線③は、直線①上の点 $A(4, 2)$ と x 軸上の点 $B(8, 0)$ を通る。また、点 P は、原点 O を出発して、直線①上を点 A まで動く点であり、点 P を通り x 軸に平行な直線と直線②, ③との交点をそれぞれ C , D とする。



このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2018 年度)

問1 a の値を求めよ。

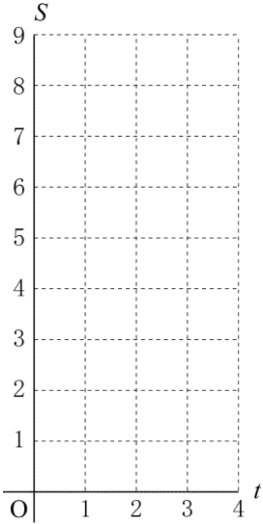
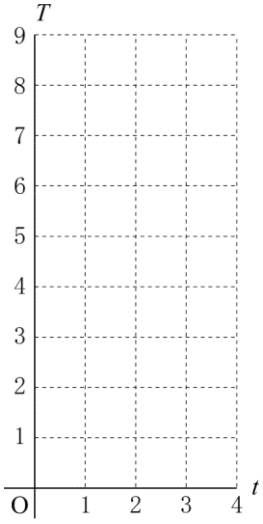
問2 直線③の式を求めよ。

問3 点 P の x 座標を t , $\triangle OPC$ の面積を S , $\triangle ACD$ の面積を T とする。ただし、 $t=0$ のとき、 $S=0$ とし、 $t=4$ のとき、 $T=0$ とする。このとき、

(1) S を t の式で表し、そのグラフをかけ。

(2) T を t の式で表し、そのグラフをかけ。

問4 $\triangle APD$ の面積が $\triangle OPC$ の面積の 4 倍となるとき、点 P の座標を求めよ。

問1	$a=$	
問2		
問3	(1)	式 $S=$
		
問3	(2)	式 $T=$
		
問4		

解答

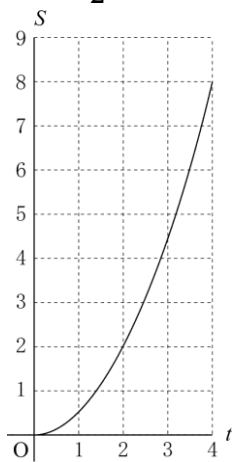
問1(a=) $-\frac{1}{2}$

問2 $y = -\frac{1}{2}x + 4$

問3

(1)

式 $S = \frac{1}{2}t^2$



問4 $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

解説

問1

点 A(4, 2)は①上の点だから、①の式は $y = \frac{1}{2}x$ である。

y 軸について、点 A と対称な位置にある点は(-4, 2)なので $y = ax$ に $x = 4, y = 2$ を代入して $2 = -4a$ $a = -\frac{1}{2}$

問2

直線③は点 A(4, 2), 点 B(8, 0)を通るから、傾きは $\frac{0-2}{8-4} = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + b$ に $x = 8, y = 0$ を代入して $0 = -\frac{1}{2} \times 8 + b$ $b = 4$ よって $y = -\frac{1}{2}x + 4$

問3

(1)

点 P は直線①上の点だから、点 P の x 座標が t のとき y 座標は $\frac{1}{2}t$ $P(t, \frac{1}{2}t)$ だから、 $C(-t, \frac{1}{2}t)$

よって $S = \frac{1}{2}\{t - (-t)\} \times \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t^2$

グラフは(0, 0), (2, 2), (4, 8)を通る放物線をかけばよい。

(2)

$y = -\frac{1}{2}x + 4$ に $y = \frac{1}{2}t$ を代入すると $\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}x + 4$ $t = -x + 8$ $x = -t + 8$ $D(-t + 8, \frac{1}{2}t)$

$T = \frac{1}{2}\{(-t + 8)\} - (-t)\} \times \left(2 - \frac{1}{2}t\right) = -2t + 8$ グラフは(0, 8), (4, 0)を通る直線をかけばよい。

問4

$\triangle APD = \frac{1}{2} \times (-t + 8 - t) \times \left(2 - \frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{2}(4 - t)^2$

$\triangle APD = 4\triangle OPC = 4S$ より $\frac{1}{2}(4 - t)^2 = 2t^2$ $(4 - t)^2 = 4t^2$ $3t^2 + 8t - 16 = 0$

$t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 3 \times (-16)}}{2 \times 3}$ $t = -4, \frac{4}{3}$

$0 < t < 4$ より $t = \frac{4}{3}$ よって $P(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

【問 25】

図は、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフで、点 A, B, C はこのグラフ上の点である。点 A, B, C の x 座標はそれぞれ -3 , -2 , 4 である。このとき、次の問1～問3に答えなさい。

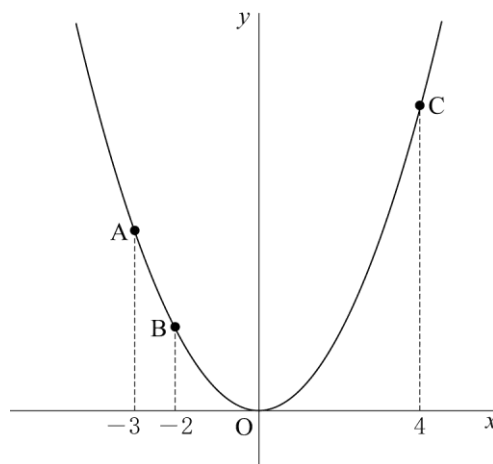
(高知県 2018 年度 A)

問1 点 B の座標を求めよ。

問2 2 点 A, C を通る直線の式を求めよ。

問3 このグラフ上に、 x 座標が 3 である点 D をとる。このとき、直線 BD の傾きは $\frac{1}{2}$ である。

このことからわかる 2 直線 AC と BD の位置関係を利用すると、三角形 ABD の面積と三角形 CBD の面積は等しいことが言える。その理由を、2 直線 AC と BD の位置関係を述べたうえで、言葉で説明せよ。



解答欄

問1	(,)
問2	
問3	

解答

問1 $(-2, 2)$

問2 $y = \frac{1}{2}x + 6$

問3

問2から、直線 AC の傾きは $\frac{1}{2}$ であり、直線 AC の傾きと直線 BD の傾きは等しいので $AC \parallel BD$ である。

$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ において

辺 BD を底辺とすると $AC \parallel BD$ から

$\triangle ABD$ の高さ $\triangle CBD$ の高さは等しいと言える。

よって底辺が同じで高さが等しい三角形の面積は等しいので

$\triangle ABD$ の面積 $\triangle CBD$ の面積は等しい。

解説

問1

$x = -2$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$

よって点 B の座標は $B(-2, 2)$

問2

$x = -3, x = 4$ をそれぞれ $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y = \frac{9}{2}, y = 8$

よって 2 点 A, C の座標は $A\left(-3, \frac{9}{2}\right), C(4, 8)$

直線 AC の式を $y = ax + b$ とする。

点 A を通るから $\frac{9}{2} = -3a + b \cdots \textcircled{1}$

点 B を通るから $8 = 4a + b \cdots \textcircled{2}$

①, ②を連立方程式として解いて

$a = \frac{1}{2}, b = 6$

よって $y = \frac{1}{2}x + 6$

問3

直線 BD の傾きは $\frac{1}{2}$ より、直線 AC の傾きと等しいから $AC \parallel BD$

辺 BD を底辺として考えると

$AC \parallel BD$ より $\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ の高さは等しい。

底辺が同じで高さの等しい三角形の面積は等しいから

$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ の面積は等しくなる。

【問 26】

図のように、関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。点 A の x 座標は -6 、点 B の x 座標は 3 であり、2 点 A, B を通る直線と x 軸との交点を C とする。

このとき、次の問1～問6に答えなさい。

(佐賀県 2018 年度 一般)

問1 点 B の y 座標を求めなさい。

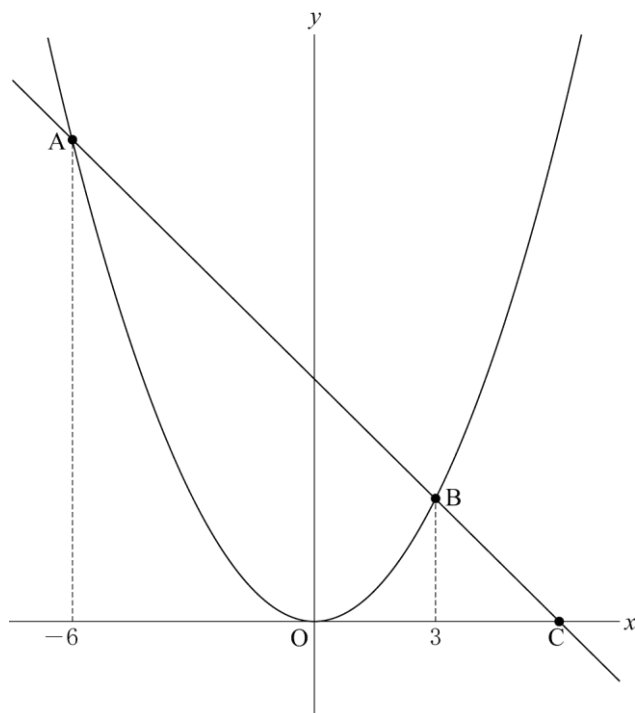
問2 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ について、 x の変域が $-6 \leq x \leq 3$ のときの y の変域を求めなさい。

問3 2 点 A, B を通る直線の式を求めなさい。

問4 点 C の x 座標を求めなさい。

問5 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

問6 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上に点 P がある。 $\triangle POC$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるような点 P の x 座標を すべて求めなさい。



解答欄

問1	
問2	
問3	
問4	
問5	
問6	

解答

問1 3

問2 $0 \leq y \leq 12$

問3 $y = -x + 6$

問4 6

問5 27

問6 $3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$

解説

問1

$$y = \frac{1}{3}x^2 \text{ に } x = 3 \text{ を代入して } y = \frac{1}{3} \times 3^2 = 3$$

問2

$$y \text{ の値は } x = 0 \text{ のとき最小で } 0, x = -6 \text{ のとき最大で } y = \frac{1}{3} \times (-6)^2 = 12$$

よって y の変域は $0 \leq y \leq 12$

問3

求める直線の式を $y = ax + b$ とする。

$$A(-6, 12), B(3, 3) \text{ より } a = \frac{3-12}{3-(-6)} = -1$$

$$y = -x + b \text{ に } x = 3, y = 3 \text{ を代入して } 3 = -3 + b \quad b = 6 \quad \text{よって } y = -x + 6$$

問4

$$y = -x + 6 \text{ に } y = 0 \text{ を代入して } 0 = -x + 6 \quad x = 6 \quad \text{よって点 } C \text{ の } x \text{ 座標は } 6$$

問5

直線 AB と y 軸の交点を D とすると D(0, 6)

$$\triangle OAB = \triangle OAD + \triangle OBD \text{ で}$$

$\triangle OAD$ と $\triangle OBD$ の底辺を $OD = 6$ と見たとき

高さはそれぞれ A, B の x 座標の絶対値になるから

$$\triangle OAB = \triangle OAD + \triangle OBD = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 27$$

問6

$\triangle POC$ で, $OC = 6$ を底辺と見たときの高さは点 P の y 座標の値になる。

点 P の x 座標を t とすると y 座標は $\frac{1}{3}t^2$ だから

$$\triangle POC = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{1}{3}t^2 = t^2$$

$$\text{よって } t^2 = 27$$

$$t = \pm \sqrt{27}$$

$$= \pm 3\sqrt{3}$$

【問 27】

図1, 図2のように, 関数 $y=x^2$ のグラフ上に x 座標が 4 である点 A があり, x 軸上に点 B $(-4, 0)$ がある。原点を O として, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2018 年度)

問1 点 A の y 座標を求めよ。

問2 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

問3 関数 $y=x^2$ について, x の値が 1 から 2 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

問4 直線 AB の式を求めよ。

問5 図2のように, 線分 AB 上に点 P をとる。

$\triangle OAP$ の面積が $\frac{29}{2}$ となるとき, 点 P の x 座標を求めよ。

図1

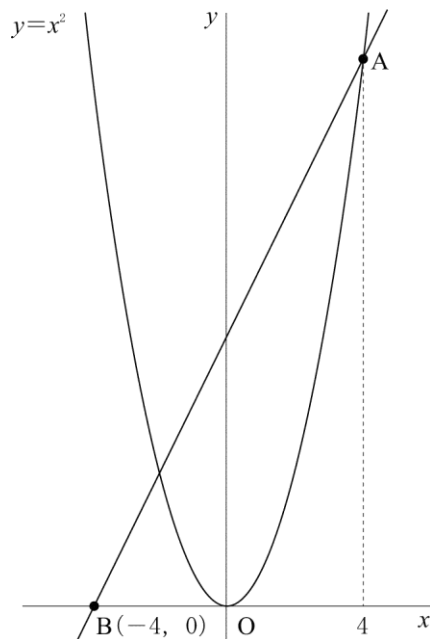
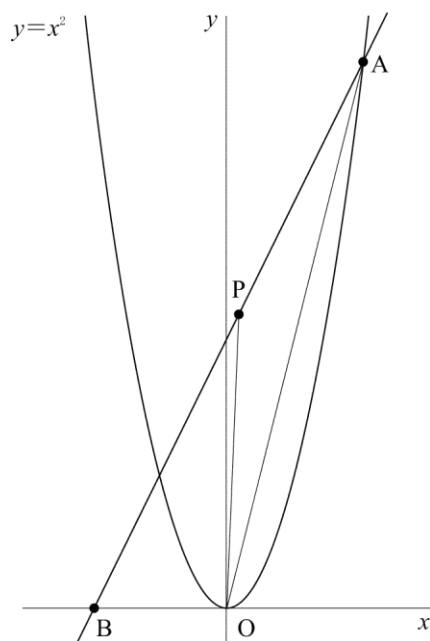


図2



解答欄

問1	
問2	
問3	
問4	$y=$
問5	

解答

問1 16

問2 32

問3 3

問4 $y=2x+8$

問5 $\frac{3}{8}$

解説

問1

$y=x^2$ に $x=4$ を代入すると $y=4^2=16$

問2

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 4 \times 16 = 32$$

問3

$$\text{変化の割合} = \frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 4 - 1 = 3$$

問4

$$y = \frac{16}{4 - (-4)} \{x - (-4)\} = 2(x + 4) = 2x + 8 \cdots \text{①}$$

問5

$$\text{問2より} \triangle OAB = 32 \text{ なので } \triangle OBP = \triangle OAB - \triangle OAP = 32 - \frac{29}{2} = \frac{35}{2}$$

点 P から x 軸に垂線 PH をひく。

$$\triangle OBP = \frac{1}{2} \times OB \times PH = \frac{35}{2} \quad 4PH = 35 \quad PH = \frac{35}{4}$$

よって P の y 座標は $\frac{35}{4}$ だから $y = \frac{35}{4}$ を①に代入すると

$$\frac{35}{4} = 2x + 8$$

$$2x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

【問 28】

図1～図3のように、2つの関数 $y=ax^2$ と $y=ax+b$ のグラフが2点 A, B で交わり、2点 A, B の x 座標はそれぞれ $-1, 2$ である。原点を O として、次の問いに答えなさい。ただし、 $a>0$ とする。

(長崎県 2018 年度)

問1 $a=1$ とするとき、次の(1), (2)に答えよ。

(1) b の値を求めよ。

(2) 図2のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上の点 C $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ を通り、 y 軸に平行な直線が関数 $y=x+b$ のグラフと交わる点を D とする。

このとき、次の①, ②に答えよ。

① 点 D の y 座標を求めよ。

② $\triangle ACD$ の面積を求めよ。

問2 $b=4$ とするとき、次の(1), (2)に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 図3のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に2点 L, M, 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に点 N がある。2点 M, N の x 座標が等しく、 $\triangle LMN$ は正三角形で、その面積が $\frac{49\sqrt{3}}{36}$ であるとき、次の①, ②に答えよ。ただし、点 L の x 座標は負の数とする。

① $\triangle LMN$ の1辺の長さを求めよ。

② 点 L の x 座標を求めよ。

図1

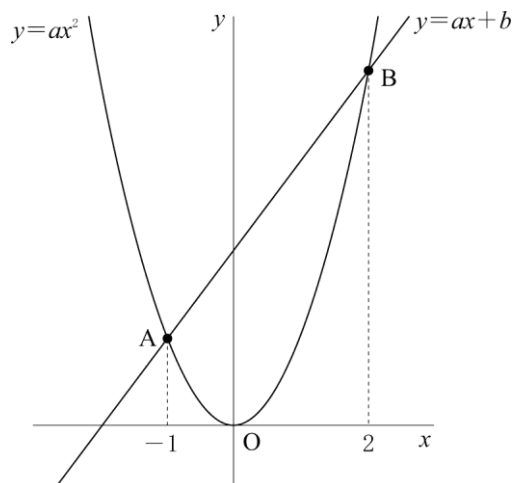


図2

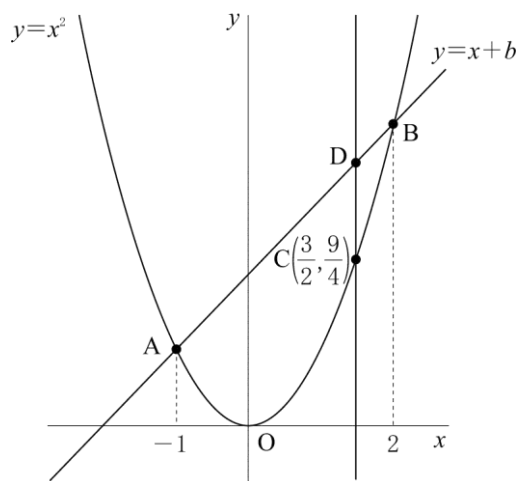
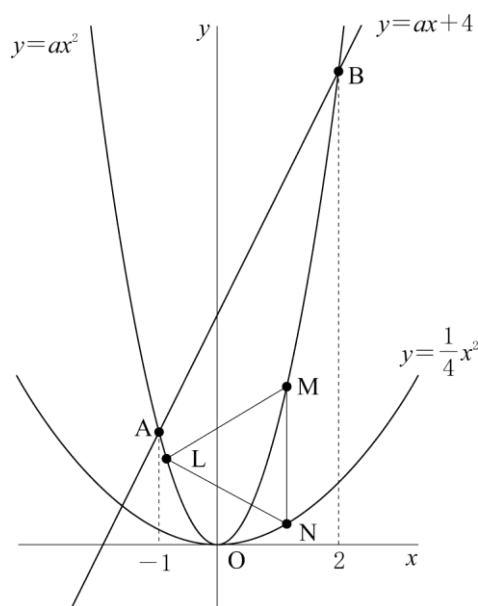


図3



解答欄

問1	(1)	$b=$	
	(2)	①	
		②	
問2	(1)	$a=$	
	(2)	①	
		②	

解答

問1

(1) $b=2$

(2)

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{25}{16}$

問2

(1) $a=2$

(2)

① $\frac{7}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解説

問1

(1)

$a=1$ だから, $y=x^2 \cdots \textcircled{1}$, $y=x+b \cdots \textcircled{2}$ に $x=-1$ を代入すると $y=1$
 $x=-1$, $y=1$ を $\textcircled{2}$ に代入すると $1=-1+b$ $b=2$

(2)

①

(1)より $b=2$ だから $y=x+2 \cdots \textcircled{2}'$ に $x=\frac{3}{2}$ を代入すると $y=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$

②

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{2} - \frac{9}{4} \right) \times \left\{ \frac{3}{2} - (-1) \right\} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{16}$$

問2

(1)

$b=4$ だから, $y=ax+4 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{3}$ に $x=-1$ を代入すると $y=-a+4$ よって $A(-1, -a+4)$

$y=ax^2$ は点 A を通るから $-a+4=a$ $a=2$

(2)

①

一般的に 1 辺の長さが a の正三角形 ABC の面積について考える。

点 A から辺 BC に垂線をひき, 辺 BC との交点を H とすると

$\triangle ABH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形だから $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

よって $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\triangle LMN$ は正三角形でその面積が $\frac{49\sqrt{3}}{36}$ だから $\triangle LMN$ の 1 辺の長さを x とすると $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{49\sqrt{3}}{36}$

$x > 0$ より $x = \frac{7}{3}$

②

$\triangle LMN$ について, 点 L から辺 MN に垂線をひき, 辺 MN との交点を H とすると

点 M の x 座標を $t (> 0)$ とおくと $MN = 2t^2 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{7}{4}t^2$

$\triangle LMN$ の 1 辺の長さは $\frac{7}{3}$ だから $\frac{7}{4}t^2 = \frac{7}{3}$ $t > 0$ より $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

点 N の x 座標は $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ だから $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると $y = \frac{1}{3}$

よって H の y 座標は $\frac{1}{3} + \frac{7}{6} = \frac{3}{2}$

これは点 L の y 座標と等しいから $y = \frac{3}{2}$ を $y = 2x^2$ に代入すると $x < 0$ だから $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

【問 29】

右の図のように、関数 $y=ax^2$ (a は定数)…①のグラフ上に点 A があり、 A の座標は $(4, 12)$ である。また、 A を通り、切片が 4 の直線と x 軸との交点を B とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

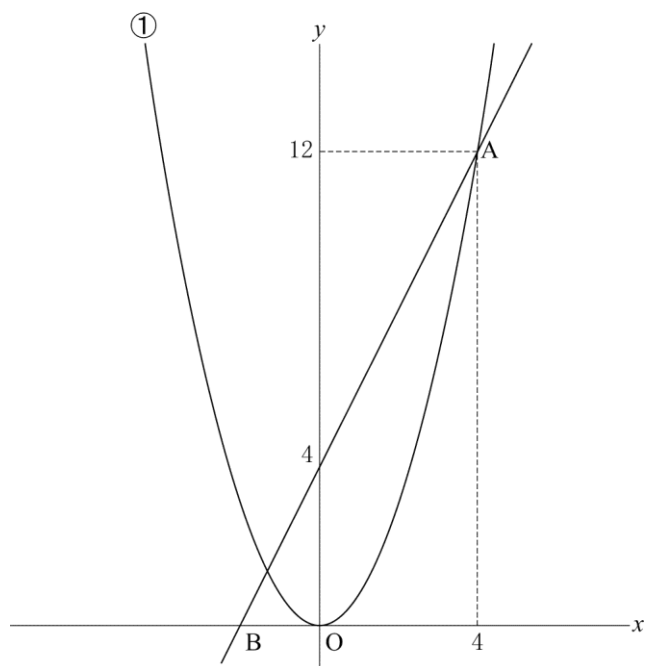
(熊本県 2018 年度)

問1 a の値を求めなさい。

問2 直線 AB の式を求めなさい。

問3 点 B の x 座標を求めなさい。

問4 関数①のグラフ上において、2 点 O 、 A の間に点 P をとる。また、 x 軸上に x 座標が 6 である点 Q をとる。 $\triangle PBQ$ の面積が $\triangle ABO$ の面積と等しくなるときの P の座標を求めなさい。



解答欄

問1	$a=$
問2	$y=$
問3	
問4	(,)

解答

問1 $a = \frac{3}{4}$

問2 $y = 2x + 4$

問3 -2

問4 $(2, 3)$

解説

問1

A(4, 12)は①のグラフ上の点だから $y = ax^2$ に $x = 4$, $y = 12$ を代入して $12 = a \times 4^2$ $a = \frac{3}{4}$

問2

切片が 4 だから $y = bx + 4$ とおける。

A(4, 12)を通るから $12 = b \times 4 + 4$ $b = 2$

よって $y = 2x + 4$

問3

$y = 2x + 4$ に $y = 0$ を代入して $0 = 2x + 4$ $x = -2$

問4

$\triangle ABO$ は、BO を底辺とみると、高さは点 A の y 座標の値になる。

B(-2, 0), O(0, 0)より $BO = 0 - (-2) = 2$

よって $\triangle ABO = \frac{1}{2} \times 2 \times 12 = 12$

また $\triangle PBQ$ は、BQ を底辺とみると、高さは点 P の y 座標の値になる。

点 P の x 座標を t とすると $P\left(t, \frac{3}{4}t^2\right)$

また B(-2, 0), Q(6, 0)より $BQ = 6 - (-2) = 8$

よって $\triangle PBQ = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{3}{4}t^2 = 3t^2$

$\triangle PBQ = \triangle ABO$ のとき

$3t^2 = 12$

$t^2 = 4$

$t = \pm 2$

$0 \leq t \leq 4$ だから

$t = 2$

点 P の y 座標は $\frac{3}{4} \times 2^2 = 3$

よって P(2, 3)

【問 30】

右の図のように、2 つの関数

$$y = ax^2 \quad (a \text{ は定数}) \cdots \textcircled{ア}$$

$$y = x + 6 \cdots \textcircled{イ}$$

のグラフがある。

2 点 A, B は関数 $\textcircled{ア}$, $\textcircled{イ}$ のグラフの交点で、A の x 座標は -3, B の y 座標は A の y 座標より 9 だけ大きい。点 C は関数 $\textcircled{ア}$ のグラフ上にあって、C の x 座標は 2 である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2018 年度)

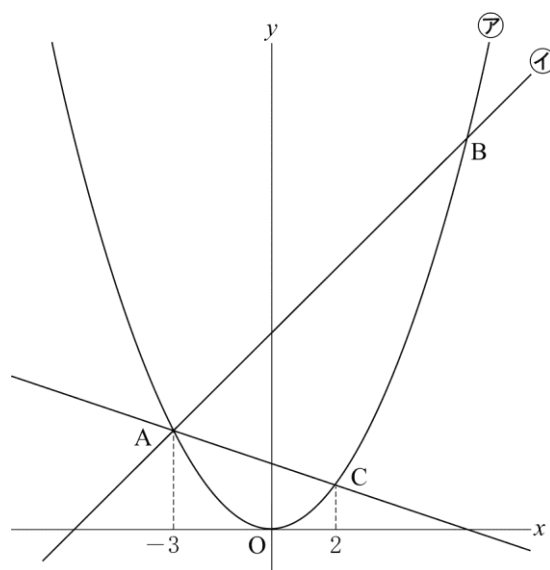
問1 a の値を求めなさい。

問2 直線 AC の式を求めなさい。

問3 y 軸上に、 y 座標が正である点 P を、 $\triangle ACP$ の面積が $\triangle ACB$ の面積と等しくなるようにとるとき、

(1) 点 P の y 座標を求めなさい。

(2) $\triangle ACB$ と $\triangle ACP$ が重なる部分の面積は、 $\triangle ACB$ の面積の何倍であるか、求めなさい。



解答欄

問1	$a =$	
問2	$y =$	
問3	(1)	
	(2)	倍

解答

問1 $a = \frac{1}{3}$

問2 $y = -\frac{1}{3}x + 2$

問3

(1) 14

(2) $\frac{5}{11}$ 倍

解説

問1

点 A は④のグラフ上の点だから、その y 座標は $y = x + 6$ に $x = -3$ を代入して $y = -3 + 6 = 3$ よって $A(-3, 3)$

また、点 A は⑦のグラフ上の点でもあるから $y = ax^2$ に $x = -3, y = 3$ を代入して $3 = a \times (-3)^2$ $a = \frac{1}{3}$

問2

点 C の y 座標は $y = \frac{1}{3}x^2$ に $x = 2$ を代入して $y = \frac{1}{3} \times 2^2 = \frac{4}{3}$ よって $C(2, \frac{4}{3})$

直線 AC の式を $y = bx + c$ とする。

$A(-3, 3)$ を通るから $3 = -3b + c \cdots \textcircled{7}$

$C(2, \frac{4}{3})$ を通るから $\frac{4}{3} = 2b + c \cdots \textcircled{8}$

⑦, ⑧を連立方程式として解く。

$$\textcircled{7} \times 3 - \textcircled{8} \times 3 \text{ より } 5 = -15b \quad b = -\frac{1}{3}$$

これを⑦に代入して $3 = -3 \times (-\frac{1}{3}) + c$ $c = 2$ よって $y = -\frac{1}{3}x + 2$

問3

(1)

$\triangle ACP$ と $\triangle ACB$ は AC が共通だから、これを底辺とみたときの高さが等しければ、面積も等しくなる。このとき $AC \parallel PB$ で、点 P は B を通り直線 AC に平行な直線と y 軸との交点になる。

平行な直線の傾きは等しいから B を通り直線 AC に平行な直線は

$$y = -\frac{1}{3}x + d \text{ とおける。}$$

点 B の y 座標は点 A の y 座標より 9 大きいから $3 + 9 = 12$

x 座標は $y = x + 6$ に $y = 12$ を代入して $12 = x + 6$ $x = 6$

よって $B(6, 12)$ だから $y = -\frac{1}{3}x + d$ に $x = 6, y = 12$ を代入して $12 = -\frac{1}{3} \times 6 + d$ $d = 14$

$y = -\frac{1}{3}x + 14$ と y 軸との交点は $(0, 14)$ だから、点 P の y 座標は 14

(2)

線分 AB と線分 PC の交点を Q とすると $\triangle ACB$ と $\triangle ACP$ が重なる部分は $\triangle ACQ$

また $\triangle ACB = \triangle ACP$ より $\triangle ACQ : \triangle ACB = \triangle ACQ : \triangle ACP = QC : PC$

ここで直線 PC の式を $y = ex + 14$ とすると $C(2, \frac{4}{3})$ を通るから

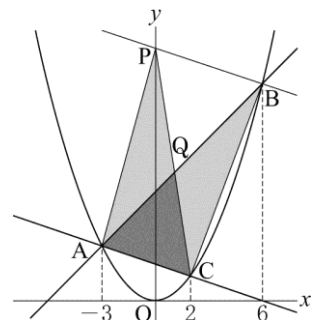
$$\frac{4}{3} = e \times 2 + 14 \quad e = -\frac{19}{3}$$

$$\text{よって } y = -\frac{19}{3}x + 14$$

点 Q の座標は $y = -\frac{19}{3}x + 14$ と $y = x + 6$ を連立方程式として解いて $x = \frac{12}{11}, y = \frac{78}{11}$ より $Q(\frac{12}{11}, \frac{78}{11})$

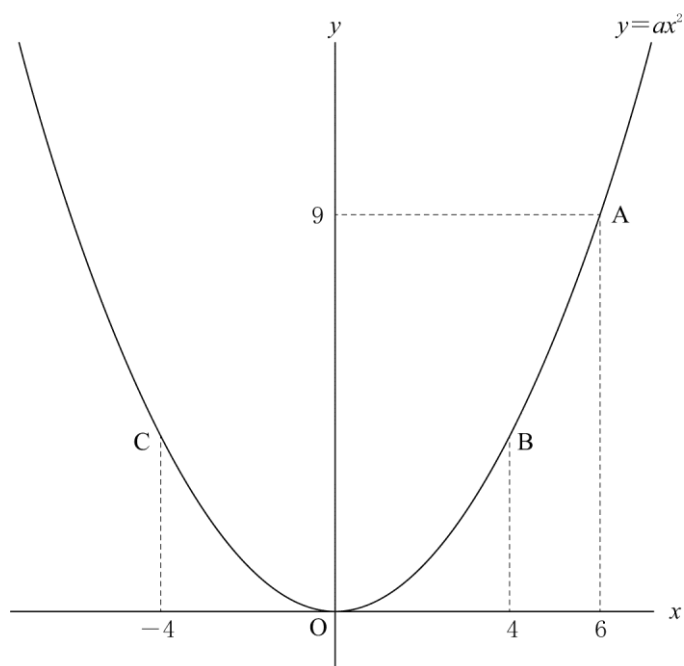
よって $QC : PC = (2 - \frac{12}{11}) : 2 = \frac{10}{11} : 2 = 5 : 11$ より

$\triangle ACQ$ の面積は $\triangle ACB$ の面積の $\frac{5}{11}$ 倍。



【問 31】

次の図のように、関数 $y=ax^2$ ($a>0$) のグラフ上に 3 点 A, B, C があり、点 A の座標は (6, 9)、点 B の x 座標は 4、点 C の x 座標は -4 である。



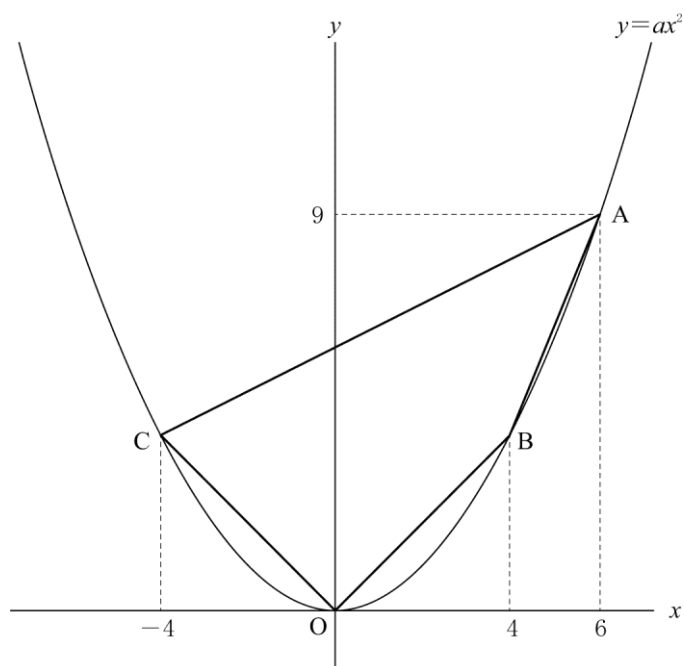
次の問1～問3に答えなさい。

(大分県 2018 年度)

問1 a の値を求めなさい。

問2 直線 AC の式を求めなさい。

問3 点 B を通り、四角形 OBAC の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。



解答欄

問1	$a=$
問2	
問3	

解答

問1 $a=\frac{1}{4}$

問2 $y=\frac{1}{2}x+6$

問3 $y=-\frac{1}{14}x+\frac{30}{7}$

解説

問1

$y=ax^2$ のグラフは点 A(6, 9)を通るから $9=36a$ $a=\frac{1}{4}$

問2

点 C の x 座標は -4 だから $x=-4$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{4}\times(-4)^2=4$ よって C(-4 , 4)

直線 AC の式を $y=mx+n$ とすると $m=\frac{9-4}{6-(-4)}=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+n$ に $x=6$, $y=9$ を代入すると $9=\frac{1}{2}\times 6+n$ $n=6$

よって $y=\frac{1}{2}x+6$

問3

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times\{4-(-4)\}\times 4=16$

$\triangle ACB=\frac{1}{2}\times\{4-(-4)\}\times 5=20$ より

$\triangle ACB$ の面積の方が $\triangle OBC$ の面積より大きいから

四角形 OBAC の面積を 2 等分する直線は線分 AC と交わり、その交点を D とする。

点 D の y 座標を t とすると $\triangle BDC=\frac{1}{2}\times 8\times(t-4)$

また $\triangle BDC=(20-16)\times\frac{1}{2}=2$

よって $4(t-4)=2$ $4t=18$ $t=\frac{9}{2}$

点 D の y 座標は $\frac{9}{2}$ だから $y=\frac{1}{2}x+6$ に $y=\frac{9}{2}$ を代入すると $x=-3$ よって、点 D(-3 , $\frac{9}{2}$)

直線 BD の式を $y=ax+b$ とすると、傾きは $\left(4-\frac{9}{2}\right)\div\{4-(-3)\}=-\frac{1}{14}$ よって $a=-\frac{1}{14}$

$y=-\frac{1}{14}x+b$ に $x=4$, $y=4$ を代入すると $b=\frac{30}{7}$

したがって直線 BD の式は $y=-\frac{1}{14}x+\frac{30}{7}$

【問 32】

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。2 点 A, B の x 座標がそれぞれ $-1, 4$ であるとき、次の各問いに答えなさい。

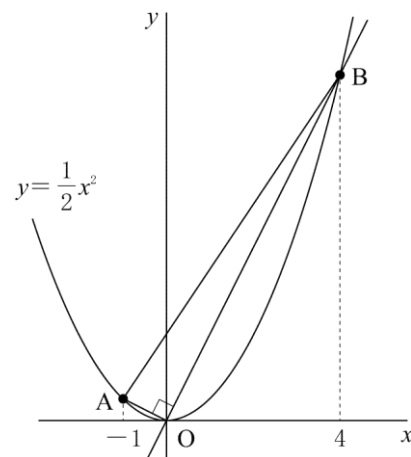
(沖縄県 2018 年度)

問1 点 B の y 座標を求めなさい。

問2 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-1 \leq x \leq 4$ のときの y の変域を求めなさい。

問3 直線 OB の式を求めなさい。

問4 $\triangle AOB$ は $\angle AOB = 90^\circ$ の直角三角形である。 $\triangle AOB$ を直線 OB を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。



解答欄

問1	B (4 ,)
問2	$\leq y \leq$
問3	$y =$
問4	

解答

問1 B (4, 8)

問2 $0 \leq y \leq 8$

問3 $y = 2x$

問4 $\frac{5\sqrt{5}}{3} \pi$

解説

問1

$x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y=\frac{1}{2} \times 4^2=8$

問2

x の変域が 0 をまたいでいるから y の値の最小値は 0

また $x=-1$ のとき $y=\frac{1}{2}$ で, $x=4$ のとき $y=8$ だから

求める y の変域は $0 \leq y \leq 8$

問3

直線 OB は原点 O と点 B を通るから $y=\frac{8}{4}x=2x$

問4

点 $(-1, 0)$ を C とおき $\triangle OAC$ に三平方の定理を用いると

$$OA^2 = OC^2 + AC^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$OA > 0$ より

$$OA = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

また, 点 $(4, 0)$ を D とおき $\triangle ODB$ に三平方の定理を用いると

$$OB^2 = OD^2 + BD^2 = 16 + 64 = 80$$

$OB > 0$ より

$$OB = 4\sqrt{5}$$

よって求める立体の体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times \frac{5}{4} \times 4\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \pi$