5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2010 年度出題】

【問 1】

図1のように，1 辺の長さが 4 cm の立方体 ABCD－EFGH が平面 P の上にあります。辺 CD の中点を M とします。この立方体に，次の **1**，**2** の操作を順に行います。図2は，**1** の操作を行った後の立方体です。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。ただし，円周率は π を用いなさい。

（北海道　2010 年度）

1 辺 EF を軸として，2 点 A，B が平面 P 上の点となるように 90° まわす。 **2** **1** によって動いた図2の立方体の辺 AE を軸として，2 点 D，H が平面 P 上の点となるように 90° まわす。

図1

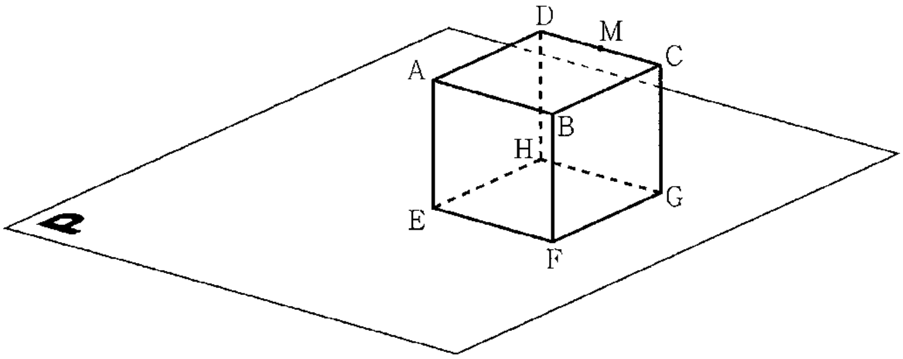
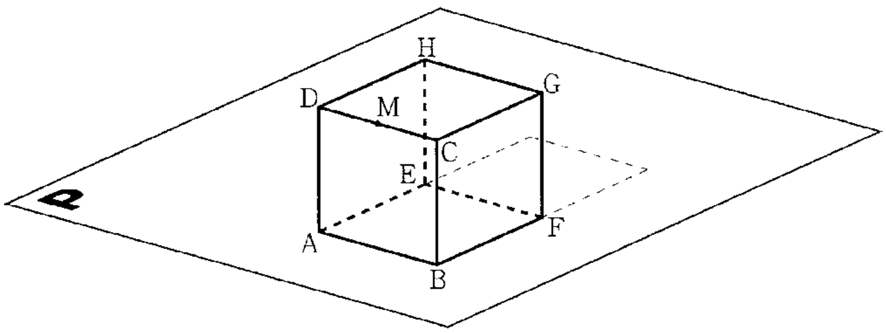


図2



(1) **1**，**2** のそれぞれの操作によって，点 G が動いてできた弧の長さの和を求めなさい。

(2) **1**，**2** のそれぞれの操作によって，線分 DM が動いてできた図形の面積の和を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2

解答

(1) $(2+2\sqrt{2})\pi$ cm

(2) $(1+4\sqrt{2})\pi$ cm^2

解説

(1)

G は F を中心として 90° 回転し，E を中心として 90° 回転する。

よって求める長さは

$$2\pi\times4\times\frac{90}{360}+2\pi\times4\sqrt{2}\times\frac{90}{360}=2\pi+2\sqrt{2}\pi=(2+2\sqrt{2})\pi \text{ cm}$$

(2)

DM の動いた図形は

底面の円の半径が $4\sqrt{2}$ cm 高さが 2 cm の円柱の側面の $\frac{90}{360}$ に

半径が $2\sqrt{5}$ cm 中心角 90° のおうぎ形と△ADM を加え

半径 4 cm 中心角 90° のおうぎ形と△ADM をひいたものになる。

よって

$$2\pi\times4\sqrt{2}\times\frac{90}{360}\times2+\pi\times(2\sqrt{5})^2\times\frac{90}{360}+\frac{1}{2}\times4\times2-\pi\times4^2\times\frac{90}{360}-\frac{1}{2}\times4\times2$$

$=4\sqrt{2}\pi+5\pi+4-4\pi-4$

$=\pi+4\sqrt{2}\pi$

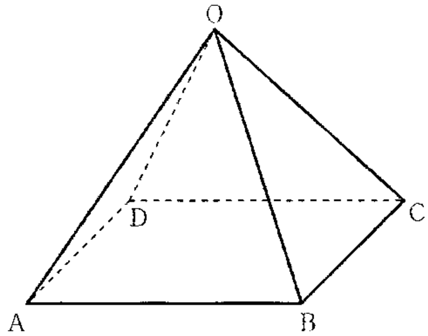
$=(1+4\sqrt{2})\pi$ cm^2

【問 2】

図の正四角すいは OA＝5 cm，AB＝$3\sqrt{2}$ cm である。

次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県 2010 年度 前期）



(1) 対角線 AC の長さを求めなさい。

(2) 点 C と直線 OA の距離を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm

解答

(1) 6

(2) $\dfrac{24}{5}$

解説

(1)

正四角すいの底面は正方形だから

△ABC は AB＝BC＝$3\sqrt{2}$ cm

∠ABC＝90°の直角二等辺三角形なので

AC＝$\sqrt{2}$ AB＝$\sqrt{2}$ ×$3\sqrt{2}$ ＝6 cm

(2)

AC の中点を M とすると AM＝CM＝$\dfrac{6}{2}$ ＝3 cm，OM⊥AC となる。

△OAM で

三平方の定理より OM＝$\sqrt{5^2-3^2}$ ＝4 cm

△OAC＝$\dfrac{1}{2}$ ×6×4＝12 cm^2

点 C と直線 OA の距離を h cm とすると

△OAC＝$\dfrac{1}{2}$ ×OA×h＝$\dfrac{1}{2}$ ×5×h＝$\dfrac{5h}{2}$ cm^2 と表せる。

よって $\dfrac{5h}{2}$ ＝12 h＝$\dfrac{24}{5}$ cm

【問 3】

図1は, 1 辺の長さが 2 cm の正八面体です。また, 図2は, 図1の正八面体の展開図を破線 (----) で示したものに, 図1の辺 AB を実線 (——) でかき入れたものです。

このとき, 次の問1, 問2に答えなさい。

（岩手県 2010 年度）

図1

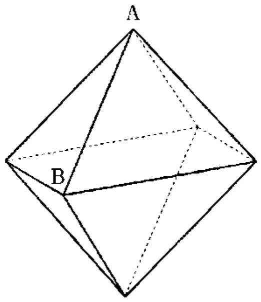
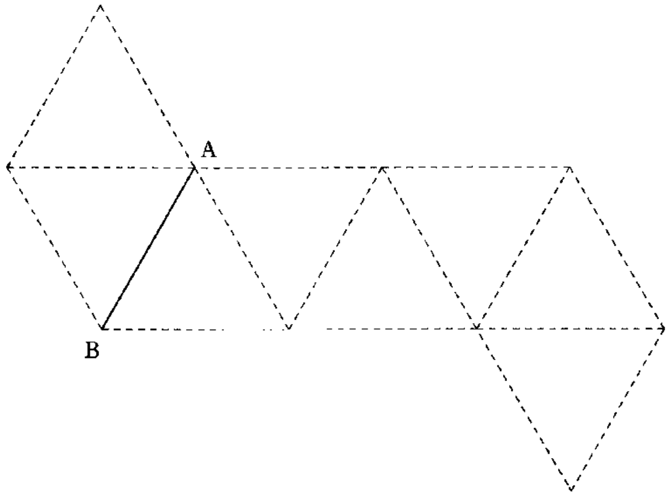


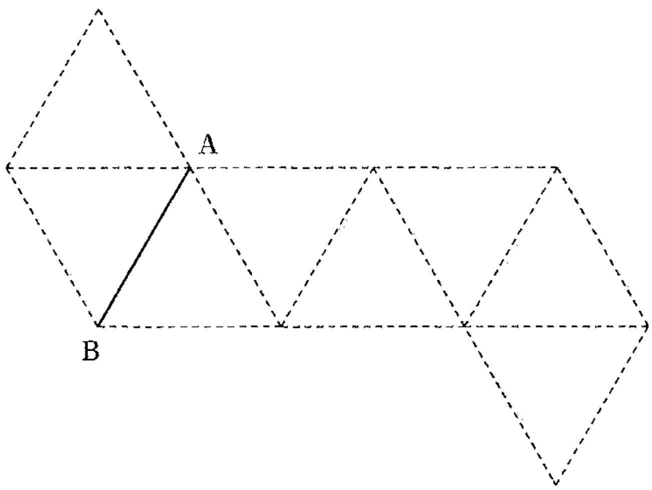
図2

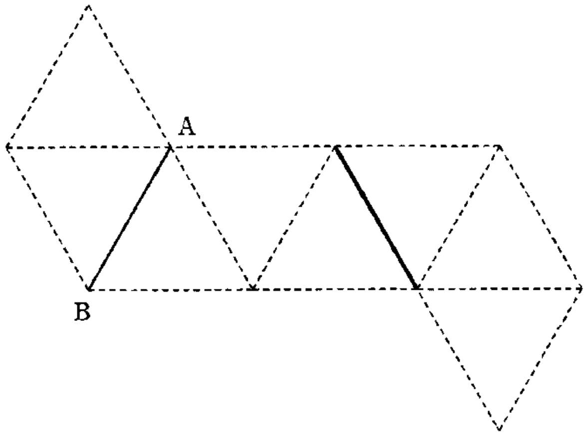


問1 図1で AB と平行な辺は, 図2ではどの線分になりますか。図2に実線でかき入れなさい。

問2 図1の正八面体の体積を求めなさい。

解答欄

問1	
問2	cm^3

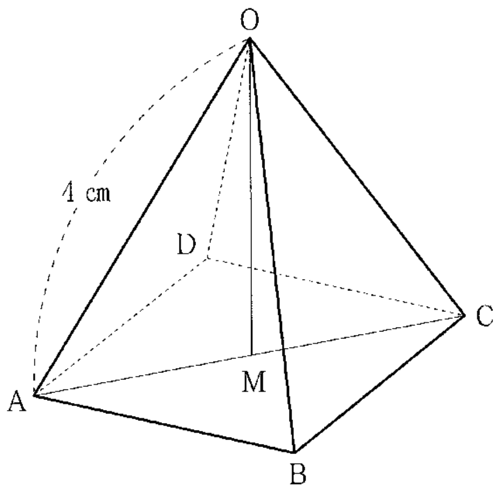
解答
問1


問2　$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ cm^3
解説
問2
正八面体は 2 つの正四角すいを合わせたものである。
正四角すいの底面の正方形を BCDE とし対角線の交点を H とする。
1 辺が 2 cm の正方形の対角線の長さは $2\sqrt{2}$ cm，BH＝$\sqrt{2}$ cm
△ABH で
三平方の定理より AH＝$\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}$ ＝$\sqrt{2}$ cm
よって求める体積は $\dfrac{1}{3}\times 2^2\times\sqrt{2}\times 2=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ cm^3

【問 4】

図のように，正四角錐 O－ABCD において，線分 AC の中点 M と頂点 O を結ぶ線分をひきます。△OAC が 1 辺 4 cm の正三角形であるとき，線分 OM の長さとこの正四角錐の体積を求めなさい。

（宮城県 2010 年度）



解答欄

線分 OM の長さ	cm
正四角錐の体積	cm^3

解答

線分 OM の長さ $2\sqrt{3}$ cm

正四角錐の体積 $\dfrac{16}{3}\sqrt{3}$ cm^3

解説

△OAC は正三角形なので

$AM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ cm

$OM = \sqrt{3}\ AM = 2\sqrt{3}$ cm

また四角形 ABCD は正方形なので

△ABC は直角二等辺三角形だから

$AB = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ cm

正四角錐の体積は $\dfrac{1}{3} \times (2\sqrt{2})^2 \times 2\sqrt{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ cm^3

【問 5】

底面の半径がそれぞれ 2 cm, 3 cm の 2 つの円すい A, B があり, 図1は円すい A, B の展開図である。円すい A, B の展開図におけるおうぎ形の部分を合わせるとすき間や重なりがなく, ちょうど円になり, 図2のようになった。このとき, あとの問いに答えなさい。ただし, 円周率は π とする。

（山形県 2010 年度）

図1

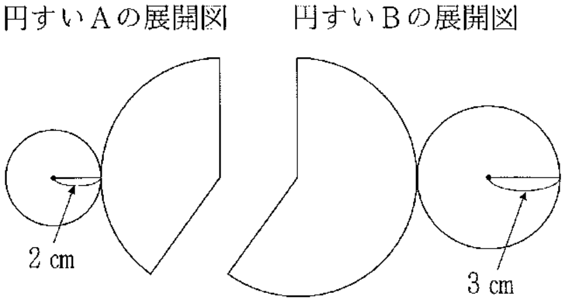
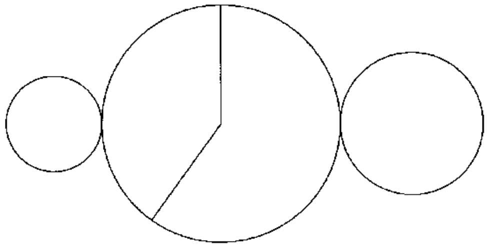


図2



(1) 円すい A の展開図におけるおうぎ形の中心角の大きさを求めなさい。

(2) 円すい B の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

(1) $144°$

(2) $12\pi\,cm^3$

解説

(1)

円すい A の弧の長さは底面の円周の長さと等しいので $2\pi \times 2 = 4\pi$ cm

同様に円すい B の弧の長さは $2\pi \times 3 = 6\pi$ cm

2 つの側面のおうぎ形を合わせてできる円の周の長さは $4\pi + 6\pi = 10\pi$ cm

円すい A のおうぎ形の中心角は $360° \times \dfrac{4\pi}{10\pi} = 144°$

(2)

おうぎ形の半径を r cm とすると

$2\pi r = 10\pi$

$r = 5$ cm

円すい B の高さは $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

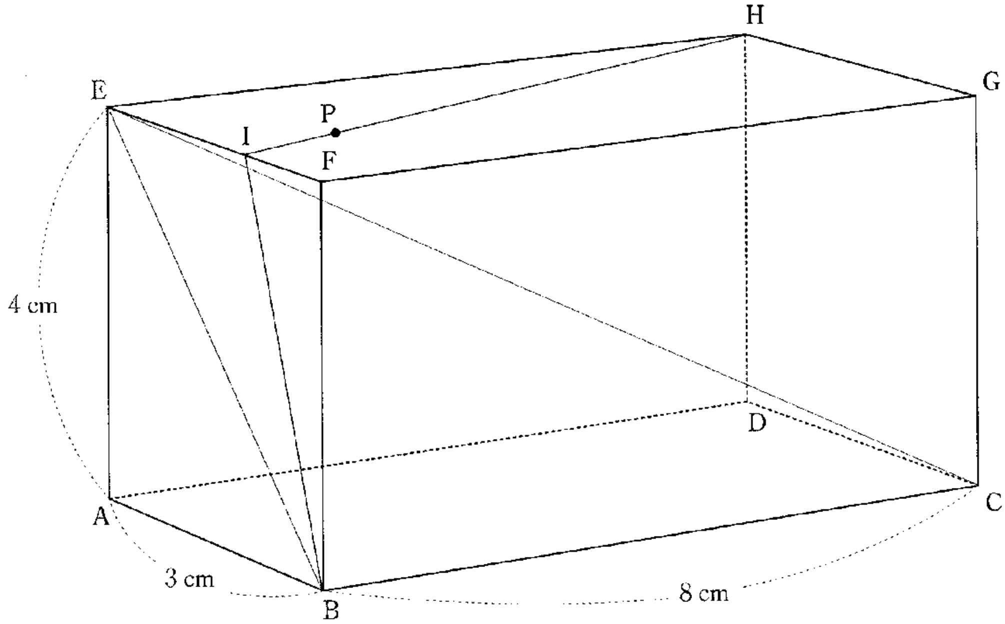
よって求める体積は $\dfrac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$ cm^3

【問 6】

図のような，AB＝3 cm，BC＝8 cm の長方形 ABCD を底面とし，高さが 4 cm の直方体がある。辺 EF 上に，線分 BI と線分 IH の長さの和が最も小さくなるように点 I をとる。また，線分 IH 上に IP：PH＝1：7 となる点 P をとる。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（福島県　2010 年度）



問1　△BCE の面積を求めなさい。

問2　F から線分 BE にひいた垂線と BE との交点を J とするとき，線分 FJ の長さを求めなさい。

問3　4 点 P，B，C，E を結んでできる三角すいの体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm
問3	cm^3

解答
問1　20cm^2
問2　$\dfrac{12}{5}$ cm
問3　$\dfrac{28}{3}$ cm^3
解説
問3
長方形 HEFG と長方形 EABF を EF をつないだまま展開し長方形 HABG をつくる。
I は HB と EF との交点となる。
この長方形において P から EF, FG, EG にそれぞれ垂線 PJ, PK, PL をひく。
PJ : 8＝1 : 8 より PJ＝1 cm
PK : 3＝(4＋1) : 12
PK＝$\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4}$ cm
EG＝$\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}$ cm だから
△PEG＝△GEF－△PEF－△PGF より
$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{73}\times \mathrm{PL}=\dfrac{1}{2}\times3\times8-\dfrac{1}{2}\times3\times1-\dfrac{1}{2}\times8\times\dfrac{5}{4}$
PL＝$\dfrac{11}{\sqrt{73}}$ cm
求める体積は
EBCGF－PEBF－PFBCG－PECG
$=\dfrac{1}{3}\times8\times4\times3-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times4\times1-\dfrac{1}{3}\times4\times8\times\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{73}\times4\times\dfrac{11}{\sqrt{73}}$
$=32-2-\dfrac{40}{3}-\dfrac{22}{3}$
$=\dfrac{28}{3}$cm^3

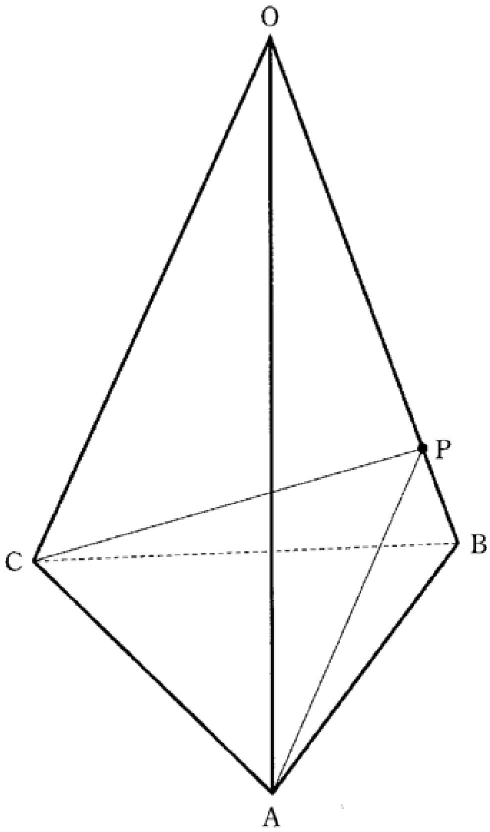
【問 7】

図のように，1 辺が 4 cm の正三角形 ABC を底面とし，OA＝OB＝OC＝8 cm とする正三角すい OABC がある。辺 OB 上に点 P をとる。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2010 年度）

問1　△OAC の面積を求めなさい。



問2　AP＋PC の長さを最も短くしたとき，4 点 P，A，B，C を頂点とする立体の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm^3

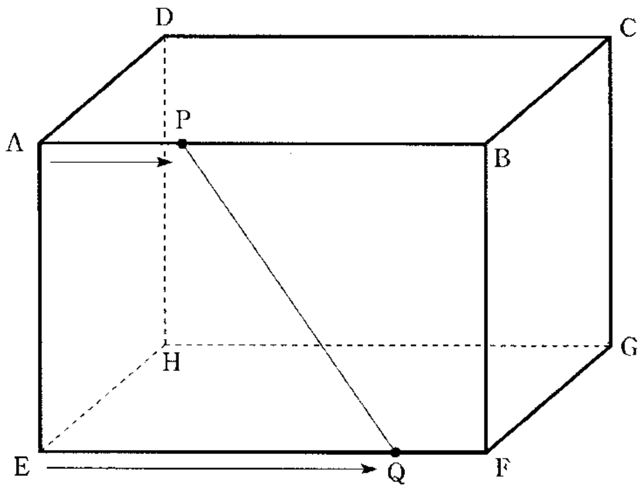
解答
問1　$4\sqrt{15}$ cm^2
問2　$\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$ cm^3
解説
問2
AP＋PC が最も短くなるのは
△OAB と△OBC を OB をつなげたまま展開したとき
直線 AC 上に点 P があるときで
このとき OA＝OC，BA＝BC だから AP＝CP，OB⊥AC である。
このとき三平方の定理を利用して
$OC^2-OP^2=BC^2-BP^2$
$8^2-(8-BP)^2=4^2-BP^2$
これを解いて
BP＝1 cm
AC の中点を M とすると
△ABC は 1 辺が 4 cm の正三角形だから BM＝$2\sqrt{3}$ cm
O から△ABC に垂線 OH をひく。
$OM^2-MH^2=OB^2-BH^2$
$(2\sqrt{15})^2-MH^2=8^2-(2\sqrt{3}-MH)^2$
これを解いて
$MH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm
$OH^2=(2\sqrt{15})^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{176}{3}$
OH＞0 より
$OH=\dfrac{4\sqrt{33}}{3}$ cm
P から△ABC に垂線 PK をひくと PK // OH より
PK : OH＝BP : BO＝1 : 8
よって $PK=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{4\sqrt{33}}{3}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$ cm
求める体積は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{33}}{6}=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$ cm^3

【問 8】

図のように，AB＝8 cm，AD＝3 cm，AE＝6 cm の直方体 ABCDEFGH がある。点 P は点 A を出発し，長方形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA 上を秒速 2 cm で回り続ける。また，点 Q は点 E を出発し，長方形 EFGH の辺 EF，FG，GH，HE 上を秒速 5 cm で回り続ける。2 点 P，Q はそれぞれ 2 点 A，E を同時に出発する。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2010 年度）



問1　2 点 P，Q が出発してから，1 秒後における線分 PQ の長さを求めなさい。

問2　2 点 P，Q が出発してから，初めて PQ＝6 cm になるのは何秒後か求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	秒後

解答
問1　$3\sqrt{5}$ cm
問2　$\dfrac{22}{3}$ 秒後
解説
問2
初めて PQ＝6 cm となるのは Q が 1 周して P の真下に来るときだから
x 秒後とすると
$2x=5x-(8\times2+3\times2)$
$3x=22$
$x=\dfrac{22}{3}$ 秒後

【問 9】

図1のような AB＝20 cm で，縦と横の長さの比が 1: $\sqrt{2}$ の長方形 ABCD の紙を，次の①，②のように折ります。

> ① 辺 AD, BC の中点をそれぞれ M, N とします。図2のように，線分 BM, CM を折り目として，点 A, D が重なり，線分 AM, DM がぴったり重なるように折って三角錐の形の容器をつくります。点 A, D の重なった点を A′ とすると，点 A′ を頂点とし，△MBC を底面とする三角錐となります。
>
> ② 重なった線分 AM, DM を離し，線分 MN をかきます。図3のように，改めて線分 BM, CM を折り目として立体にならないように折り重ねたときの点 A, D の移った点をそれぞれ E, F とします。線分 BE, CF の交点は線分 MN 上にあり，この点を G とします。

このとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県 2010 年度 前期）

図1

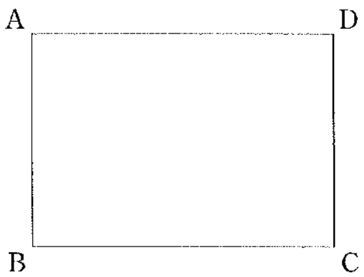


図2

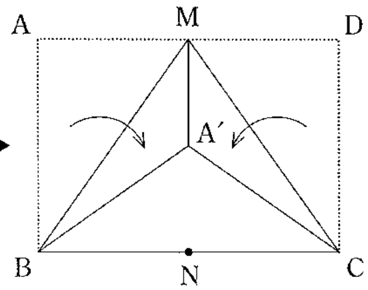
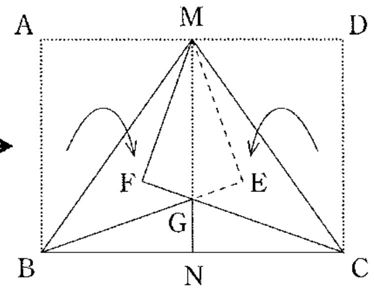
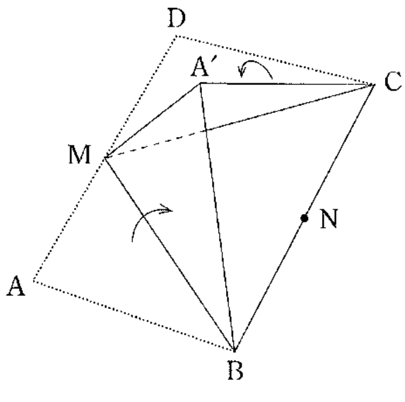


図3



問1 図2でつくられた三角錐は右の図4のようになります。この三角錐の容器の容積を求めなさい。ただし，根号はつけたままで答えなさい。

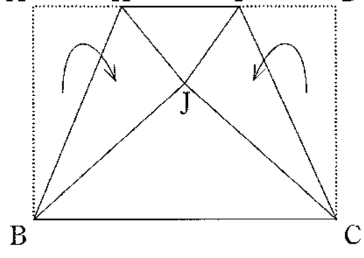
図4



問2 図3において，△FMG と△NCG が合同であることを証明しなさい。

問3 図5のように，長方形 ABCD の紙の辺 AD 上に異なる点 H, I をとり，線分 BH, CI を折り目として折ったとき，点 A, D の移った点が平面 HBCI 上の点 J で重なりました。四角形 HBCI の面積を求めなさい。

図5



解答欄

問1	cm^3
問2	〔証明〕
問3	cm^2

解答

問1　$\frac{2000}{3}\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

問2

〔証明〕

△FMG と△NCG において

∠FGM＝∠NGC (対頂角)

∠MFG＝∠CNG＝90°　…①

三角形の内角のうちの

2 組の角がそれぞれ等しいので

∠FMG＝∠NCG…②

また MD＝NC で紙を折っているので

FM＝NC…③

よって①～③より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△FMG≡△NCG

問3　$400\mathrm{cm}^2$

解説

問1

$A'B:A'C:BC=20:20:20\sqrt{2}=1:1:\sqrt{2}$ より

$\angle BA'C=90^\circ$

また$\angle BA'M=CA'M=90^\circ$ より

この容器の容積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle BA'M\times A'C=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times20\times10\sqrt{2}\times20=\frac{2000\sqrt{2}}{3}\ \mathrm{cm}^3$$

問3

△JBC において

$JB:JC:BC=20:20:20\sqrt{2}=1:1:\sqrt{2}$

これより△JBC は$\angle BJC=90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

BC の中点 N と J を結ぶと $BN=CN=10\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

△JNC，△JNB も直角二等辺三角形なので $JN=10\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

また△JHI は$\angle HJI=90^\circ$ で

$\angle JIH=180^\circ-\angle JID=180^\circ-(360^\circ-90^\circ\times2-45^\circ)=45^\circ$ より

$JH:JI:IH=1:1:\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形である。

AD の中点 M と J を結ぶと HM＝IM，$\angle JMI=90^\circ$ より

△JMH，△JMI も直角二等辺三角形となる。

よって $HM=IM=MJ=20-10\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

よって四角形 HBCI の面積は

△HBC＋△CHI

$=\frac{1}{2}\times20\sqrt{2}\times20+\frac{1}{2}\times(20-10\sqrt{2})\times2\times20$

$=200\sqrt{2}+20(20-10\sqrt{2})$

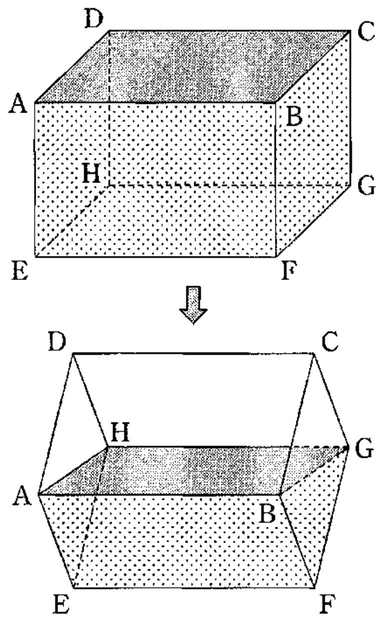
$=200\sqrt{2}+400-200\sqrt{2}$

$=400\ \mathrm{cm}^2$

【問 10】

図のような，容積が 6ℓ の直方体の水そうに水が満たしてあります。この水そうを傾けて水をこぼし，いろいろな量の水を残す方法を考えます。3ℓ の水を残す方法はいくつかありますが，たとえば右の図のように，水面が 4 点 A，B，G，H を通る平面となるように傾けて水をこぼすと，水そうには 3ℓ の水が残ります。水そうに 1ℓ の水を残す方法を 1 つ考えます。下の □ の中の □ にあてはまる記号を書いて，その方法を完成させなさい。ただし，水そうの壁面の厚さは考えないものとし，記号の順序は問いません。

（埼玉県 2010 年度 後期）



水そうに 1ℓ の水を残すには，水面が 3 点 □ ，□ ，□ を通る平面となるように傾けて水をこぼせばよい。

解答欄

3 点 □ ，□ ，□ を通る平面

解答

3 点 $\boxed{A}$ ，$\boxed{F}$ ，$\boxed{H}$ を通る平面

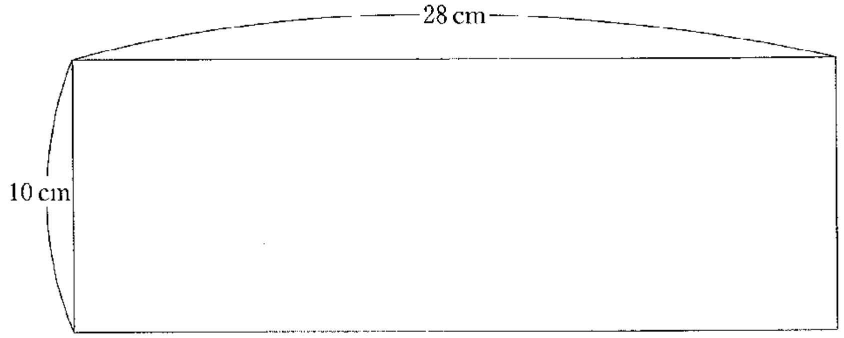
【問 11】

図1は，縦 10 cm，横 28 cm の長方形の紙を表している。この紙を 3 枚の長方形に切り分け，そのうちの 2 枚を底面に，残りの 1 枚を折り曲げて側面全体にして四角柱を組み立てる。ただし，紙の厚さや，のりしろは考えないものとする。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（千葉県 2010 年度）

図1



問1 図1の紙を，図2のように，(ア)，(イ)，(ウ) の長方形に切り分け，図3のように組み立てる。このときできる四角柱の体積を求めなさい。

図2

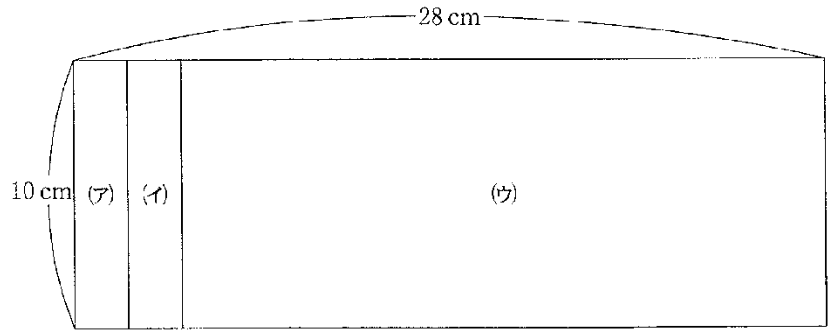
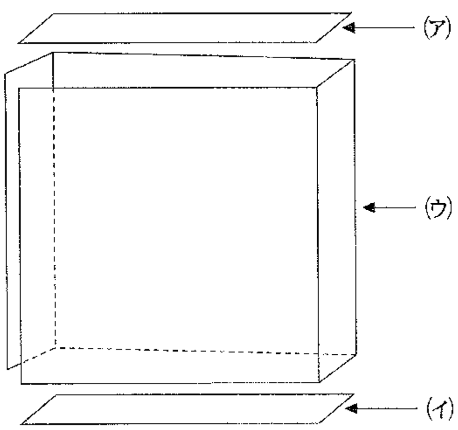
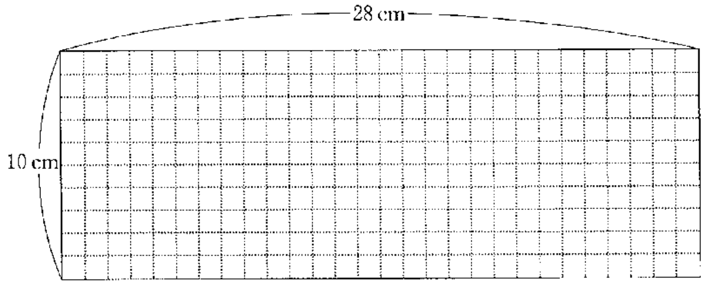


図3

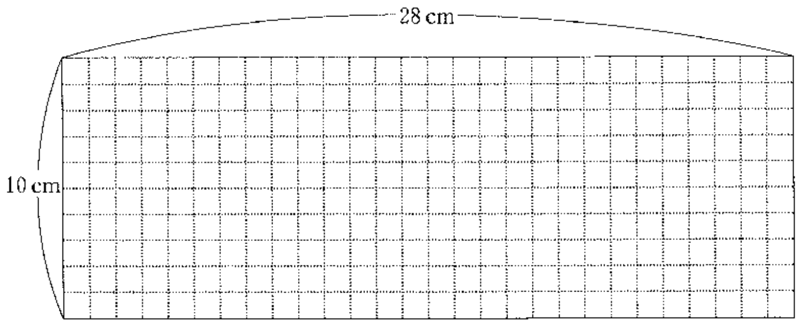


問2　図1の紙を，図2と違う切り分け方をして組み立てたところ，問1とは体積が異なる四角柱ができた。このとき，3 枚の長方形に切り分けた線を図4にひきなさい。ただし，図4の点線は，縦，横ともに 1 cm 間隔でひかれているものとする。

図4



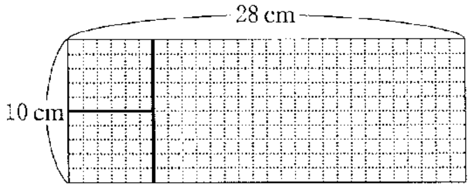
解答欄

問1	cm^3
問2	

解答

問1　200cm^3

問2



解説

問1

(ア)と(イ)の長方形の横の長さを x cm とすると(ウ)の長方形の横の長さは $28-2x$ cm と表せる。

四角柱に組み立てたとき長方形(ア)の周の長さは長方形(ウ)の横の長さと一致するから

$2x+20=28-2x$

$4x=8$

$x=2$

したがって求める体積は $2\times10\times10=200$ cm^3

問2

2 つの底面は合同なので縦は $10\div2=5$ cm

底面の横の長さを x cm とすると

$10+2x=28-x$

$3x=18$

$x=6$ cm

【問 12】

ある中学校の数学の授業で，S さんが作った問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

（東京都　2010 年度）

［S さんが作った問題］

a, h を正の数とする。
右の図1で，四角形 ABCD は 1 辺の長さが a cm の正方形である。
四角形 ABCD の 2 つの対角線の交点を M とする。
右の図2に示した立体は，図1の四角形 ABCD を，四角形 ABCD と垂直な方向に，一定の距離だけ平行に動かしてできた直方体を表している。
点 M が動いてできた線分の長さを h cm，この立体の体積を P cm^3 とするとき，体積 P を a, h を用いた式で表しなさい。

図1

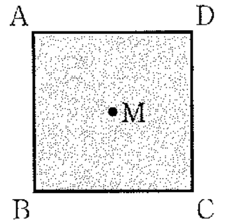
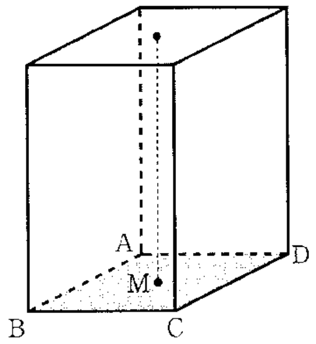


図2



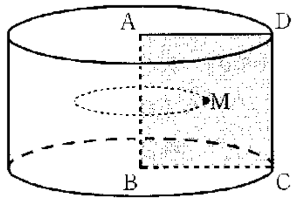
問1　［S さんが作った問題］で，P を a, h を用いた式で表せ。

先生は，［S さんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

a, ℓ を正の数とする。
右の図3に示した立体は，図1の四角形 ABCD を，頂点 A, B を通る直線を軸として 1 回転させてできた円柱を表している。
点 M が動いてできた円の周の長さを ℓ cm，
この立体の体積を V cm^3 とするとき，$V = a^2 \ell$ となることを確かめなさい。

図3



問2　［先生が作った問題］で，V, ℓ をそれぞれ a を使って表し，$V = a^2 \ell$ となることを証明せよ。ただし，円周率は π とする。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td>P＝</td></tr>
<tr><td></td><td>〔証明〕

V＝$a^2\ell$</td></tr>
</table>

解答

問1 $\mathrm{P}=a^2h$

問2

〔証明〕

この立体は底面の半径が a cm 高さが a cm の円柱であるから

体積Vは

$\mathrm{V}=\pi a^2\times a$

$=\pi a^3$…①

また線分ABと点Mとの距離は $\frac{a}{2}$ cm であるから

点Mが通ってできる円周の長さ ℓ は

$\ell=2\pi\times\frac{a}{2}$

$=\pi a$

よって

$a^2\ell=a^2\times\pi a$

$=\pi a^3$…②

①, ②より

$\mathrm{V}=a^2\ell$

解説

問1

直方体の体積＝底面積×高さより

$\mathrm{P}=a^2\times h$

$\mathrm{P}=a^2h$

問2

円柱の体積は

底面積×高さより

$\mathrm{V}=\pi a^2\times a=\pi a^3$…(1)

また点Mが動くと半径 $\frac{a}{2}$ cm の円周になるから

$\ell=2\pi\times\frac{a}{2}=\pi a$…(2)

(1), (2)より $\mathrm{V}=\pi a^3=a^2\times\pi a=a^2\times\ell=a^2\ell$

【問 13】

図1に示した立体 ABCD－EFGH は，1 辺の長さが 6 cm の立方体である。辺 AE 上にある点を P とする。頂点 F と頂点 H，頂点 F と点 P，頂点 H と点 P をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

（東京都　2010 年度）

問1　図1において，点 P が頂点 A に一致するとき，△PFH の内角である∠FPH の大きさは何度か。

図1

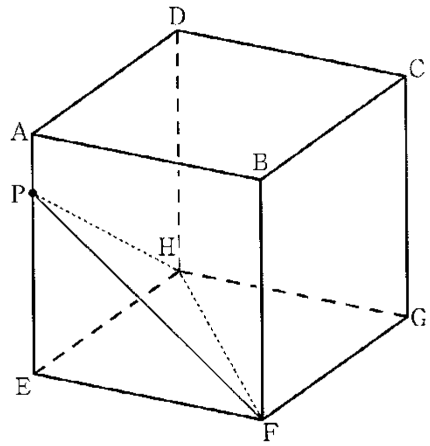
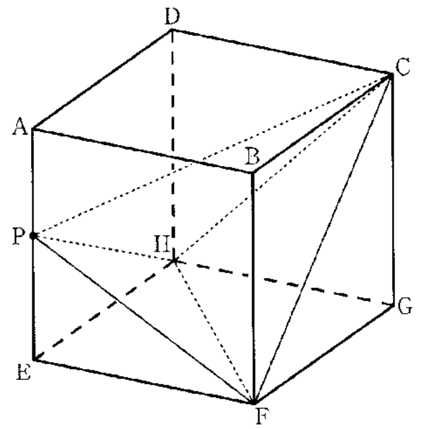


図2



問2　図2は，図1において，頂点 C と頂点 F，頂点 C と頂点 H，頂点 C と点 P をそれぞれ結んだ場合を表している。AP＝3 cm のとき，立体 P－CHF の体積は何 cm^3 か。

解答欄

問1	度
問2	cm^3

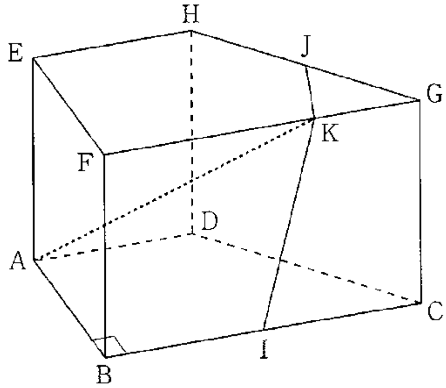
解答
問1　60度
問2　54cm^3
解説
問1
点Pが点Aに一致するとき正方形の対角線より PF＝FH＝PH
よって△PFH は正三角形だから∠FPH＝60°
問2
AC を結ぶ。
立方体の体積＝$(1\text{辺})^3$
角錐の体積＝$\frac{1}{3}$×底面積×高さを利用する。
求める立体の体積は
立方体－(三角錐 F－PEH)－(三角錐 C－HFG)－(三角錐 B－PFC)－(四角錐 C－APHD)
$=6^3-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times3-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times6-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times6+\frac{1}{2}\times6\times6\right)\times6$
$-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times6+\frac{1}{2}\times6\times6\right)\times6$
$=216-18-36-54-54$
$=54\ \text{cm}^3$

【問 14】

図は，AD // BC，AD＝3 cm，BC＝6 cm，∠ABC＝90°の台形 ABCD を底面とし，AE＝BF＝CG＝DH＝4 cm を高さとする四角柱であり，四角形 ABFE は正方形である。また，2 点 I，J はそれぞれ辺 BC，辺 GH の中点である。

このとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県　2010 年度）



問1　この四角柱の表面積を求めなさい。

問2　この四角柱の表面上に，点 I から辺 FG に交わるように点 J まで線を引く。このような線のうち，長さが最も短くなるように引いた線が，辺 FG に交わっている点を K とするとき，2 点 A，K 間の距離を求めなさい。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm

解答

問1　108 cm^2

問2　$4\sqrt{3}$ cm

解説

問2

四角形 EFGH と四角形 FBCG を辺 FG はつなげたまま展開する。

IJ が最短より展開図上で線分 IJ と FG との交点が K となる。

HI と FG との交点を L とおくと EH＝BI＝FL＝3 cm

L と J，I と G を結ぶと HL＝LI＝4 cm

HJ＝JG より

中点連結定理から LJ // IG，LJ : IG＝1 : 2

よって LK : KG＝1 : 2　LK＝$\frac{1}{3}$LG＝$\frac{1}{3}$×3＝1 cm

よって FK＝3＋1＝4 cm

△EFK で三平方の定理より EK＝$4\sqrt{2}$ cm

△AEK で三平方の定理より $AK^2=(4\sqrt{2})^2+4^2=48$

AK＞0 より

AK＝$4\sqrt{3}$ cm

【問 15】

図1のように，1 辺の長さが 4 cm の立方体があり，辺 BC，CD の中点をそれぞれ I，J とする。図2は図1の立方体から 4 点 C，I，J，G を結んでできる三角すいを切り取ってできた立体であり，辺 IJ の中点を M とする。また，点 P は，線分 GM 上を，点 G から点 M まで移動する点である。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（新潟県　2010 年度）

図1

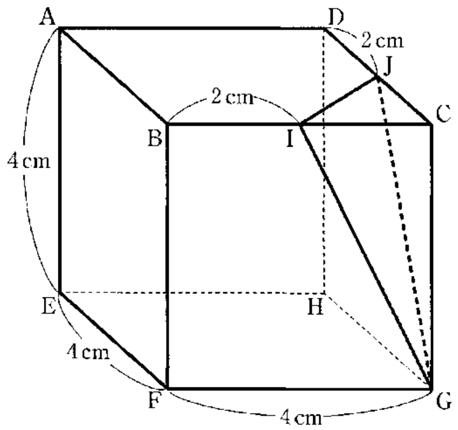
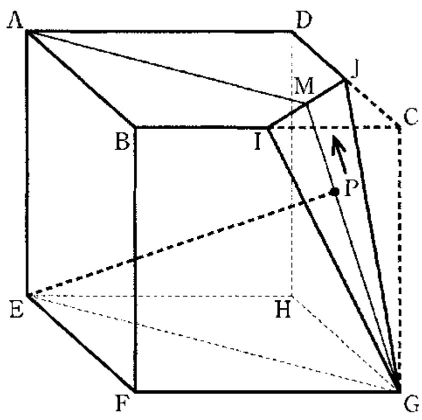


図2



問1　図1の三角すい CIJG の体積を求めなさい。

問2　図2の線分 EG，線分 AM の長さを，それぞれ求めなさい。

問3　図2の線分 EP の長さが最も小さくなるとき，その長さを求めなさい。

解答欄

問1		cm^3
問2	EG＝	cm
	AM＝	cm
問3	EP＝	cm

解答

問1　$\frac{8}{3}cm^3$

問2

EG＝$4\sqrt{2}$ cm

AM＝$3\sqrt{2}$ cm

問3　EP＝$\frac{16}{3}$cm

解説

問2

EG は正方形の対角線だから EG＝$\sqrt{2}$ EF＝$4\sqrt{2}$ cm

△ABI，△ADJ で

三平方の定理を利用して AI＝AJ＝$\sqrt{4^2+2^2}$ ＝$2\sqrt{5}$ cm

△CBD で中点連結定理より IJ＝$\frac{1}{2}$BD＝$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}$ ＝$2\sqrt{2}$ cm

M は中点より IM＝JM＝$\sqrt{2}$ cm

△AIJ は二等辺三角形だから AM⊥IJ

よって△AMI で

三平方の定理より AM＝$\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$ ＝$3\sqrt{2}$ cm

問3

EP が最も短くなるとき EP⊥GM

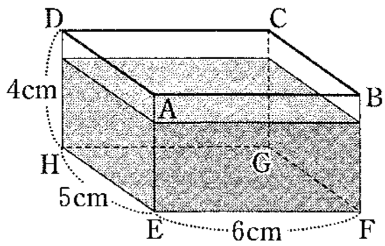
△EGM の面積から$\frac{1}{2}$×EG×AE＝$\frac{1}{2}$×GM×EP　GM＝AM＝$3\sqrt{2}$ cm だから

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times$EP　EP＝$\frac{16}{3}$cm

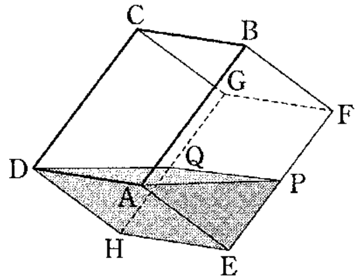
【問 16】

図のように，EF＝6 cm，EH＝5 cm，DH＝4 cm の直方体 ABCD－EFGH の容器に水が入っている。この容器を静かに傾けて，水を流し出すとき，次の問いに答えなさい。ただし，容器の厚さは考えないものとする。

（富山県　2010 年度）



(1) 辺 EF，HG の中点をそれぞれ P，Q とする。右の図のように，辺 EH を水平な台につけ，水を流し出したところ，水面が四角形 APQD となった。このとき，四角形 APQD はどのような四角形になるか，次のア～エから最も適切なものを選び，記号で答えなさい。



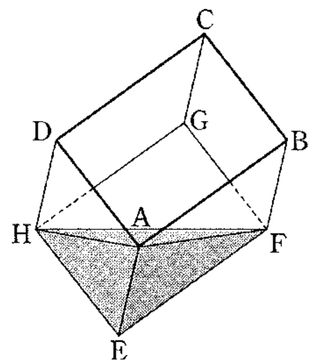
ア 正方形

イ 長方形

ウ ひし形

エ 平行四辺形

(2) (1)の状態から，右の図のように，点 E を水平な台につけ，水を流し出したところ，水面が△AFH となった。このとき，(1)の状態から，流れ出た水の体積を求めなさい。



解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

(1) ア

(2) 10 cm^3

解説

(2)

三角柱 AEP-DHQ の体積は

$\frac{1}{2}\times 4\times 3\times 5=30$ cm^3

三角すい A-HEF の体積は

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 5\times 6\times 4=20$ cm^3

よって流れ出た水の体積は

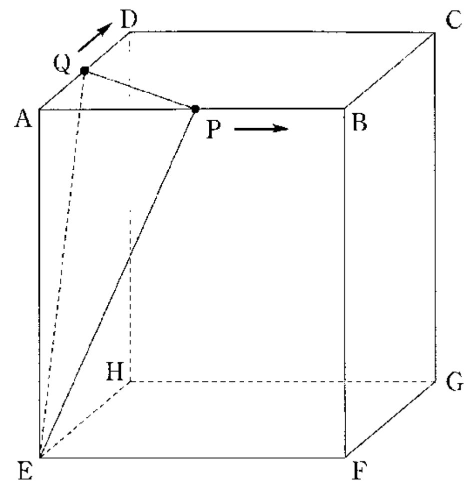
$30-20=10$ cm^3

【問 17】

図のように，AB＝16 cm，AD＝8 cm，AE＝18 cm の直方体 ABCD－EFGH がある。点 P，Q は頂点 A を同時に出発し，点 P は毎秒 2 cm の速さで辺 AB 上を B まで，点 Q は毎秒 1 cm の速さで，辺 AD 上を D まで動く。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（石川県　2010 年度）



問1　点 P，Q が頂点 A を出発してから 1 秒後のとき，線分 PQ の長さを求めなさい。

問2　点 P，Q が頂点 A を出発してから 3 秒後のとき，三角錐 EAPQ の体積を求めなさい。

問3　線分 PE と線分 QE の中点をそれぞれ M，N とする。P，Q が A を出発して 4 秒後から 6 秒後までの 2 秒間に線分 MN が通ってできる部分の面積を求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

解答欄

問1	cm
問2	cm^3
問3	〔計算〕 答　　　　　cm^2

解答
問1　$\sqrt{5}$ cm
問2　54cm^3
問3
〔計算〕
辺 AE の中点を L とすると
4 秒後の△LMN の面積 $\frac{1}{2}\times4\times2=4$
6 秒後の△LMN の面積 $\frac{1}{2}\times6\times3=9$
$9-4=5$
答　5 cm^2
解説
問1
P, Q が A を出発して 1 秒後
AP＝2×1＝2 cm, AQ＝1 cm
△APQ は∠PAQ＝90°より
三平方の定理を利用して PQ＝$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ cm
問2
P, Q が A を出発して 3 秒後
AP＝2×3＝6 cm, AQ＝3 cm
三角錐 EAPQ の体積は
$\frac{1}{3}\times\triangle APQ\times EA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times3\times18=54$ cm^3
問3
AE の中点を L とおく。
PM:ME＝QN:NE＝AL:LE＝1:1 だから
△LMN は L を通る四角形 ABCD に平行な平面上にあるといえる。
中点連結定理より
4 秒後
LM＝$\frac{1}{2}$AP＝$\frac{1}{2}\times2\times4=4$ cm
LN＝$\frac{1}{2}$AQ＝$\frac{1}{2}\times4=2$ cm
△LMN＝$\frac{1}{2}\times4\times2=4$ cm^2
6 秒後
LM＝$\frac{1}{2}$AP＝$\frac{1}{2}\times2\times6=6$ cm
LN＝$\frac{1}{2}$AQ＝$\frac{1}{2}\times6=3$ cm
△LMN＝$\frac{1}{2}\times6\times3=9$ cm^2
よって求める面積は 9－4＝5 cm^2

【問 18】

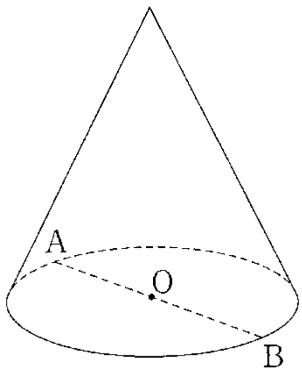
図1は，底面の円の半径が 3 cm，母線の長さが 6 cm の円錐で，点 O は底面の円の中心，線分 AB は底面の円の直径である。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（山梨県　2010 年度）

問1　図1の円錐の側面の展開図はおうぎ形になる。このおうぎ形の中心角の大きさを求めなさい。

図1



問2　図2は，図1の円錐の底面の円周上に∠AOP＝120° となるように点 P をとり，ひもの長さが最も短くなるように，点 A から円錐の側面にそって点 P までひもをかけたものである。このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1)　ひもの長さを求めなさい。

(2)　図3は，図2の側面のうち，ひもと底面の円周とで囲まれた部分を示したものである。この部分の面積を求めなさい。

図2

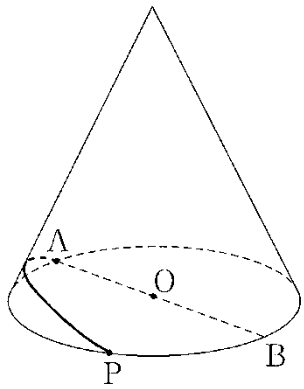
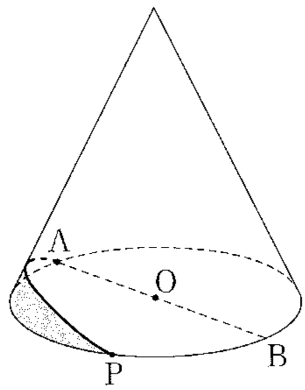


図3

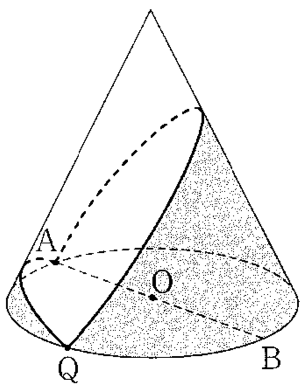


問3　図4は，図1の底面の円周上に点 A と異なる点 Q をとり，ひもの長さが最も短くなるように，点 A から円錐の側面にそって点 Q までひもをかけ，さらに点 Q から反対側の側面にそって点 A までひもをかけたものである。側面のうち，ひもと底面の円周とで囲まれた部分の面積の和が，最も小さくなるように点 Q をとったとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1)　∠AOQ の大きさを求めなさい。

(2)　面積の和を求めなさい。

図4



解答欄

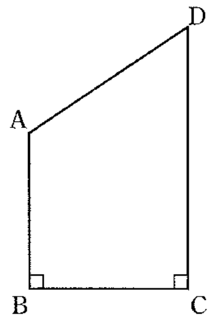
問1		
問2	(1)	cm
	(2)	cm^2
問3	(1)	∠AOQ＝
	(2)	cm^2

解答
問1　180°
問2
(1)　6 cm
(2)　$(6\pi-9\sqrt{3})$ cm^2
問3
(1)　∠AOQ＝180°
(2)　$(18\pi-36)$ cm^2
解説
問2
(1)
$180°\times\frac{120}{360}=60°$ より
展開図において側面のおうぎ形の中心角を 60° にしたときの弦 AP がひもの長さとなる。
おうぎ形の中心を T とすると TA＝TP＝6 cm，∠ATP＝60° より
△ATP は正三角形になるので AP＝6 cm
(2)
求める面積は半径 6 cm，中心角 60° のおうぎ形から
正三角形 TAP の面積をひいたものである。
正三角形 TAP において T から AP に垂線 TX をひく。
AX＝PX＝3 cm，TX＝$\sqrt{3}$ AX＝$3\sqrt{3}$ cm
よって求める面積は$\pi\times6^2\times\frac{60}{360}-\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=6\pi-9\sqrt{3}$ cm^2
問3
(1)
側面のおうぎ形は半径が 6 cm の半円である。
かげをつけた部分の面積はその半円から底辺を半円の直径とする三角形を除いたものだから
面積が最も小さくなるのは三角形の面積つまり高さが最も大きくなるときである。
だから Q が B と一致するとき。
よって∠AOQ＝180°
(2)
面積の和は$\frac{1}{2}\times\pi\times6^2-\frac{1}{2}\times12\times6=18\pi-36$ cm^2

【問 19】

図は，AB // DC の台形で，AB＝3 cm，DC＝5 cm，AD＝4 cm，∠ABC＝∠BCD＝90° である。

（長野県　2010 年度）



(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

(2) 直線 AB を軸として 1 回転させてできる立体をア，直線 DC を軸として 1 回転させてできる立体をイとする。このとき，アとイの体積についてまとめた次の文の，$\boxed{\text{Ⅰ}}$ にはアとイのいずれかの記号を，$\boxed{\text{Ⅱ}}$ には当てはまる値を書きなさい。ただし，円周率は π とする。

アとイの体積を比べると，$\boxed{\text{Ⅰ}}$ の方が $\boxed{\text{Ⅱ}}$ cm^3 大きい。

解答欄

(1)		cm
(2)	Ⅰ	
	Ⅱ	cm^3

解答

(1)　$2\sqrt{3}$ cm

(2)

Ⅰ　ア

Ⅱ　8π　cm^3

解説

(1)

A から CD に垂線 AH をひく。

DH＝5－3＝2 cm

△ADH で

三平方の定理より AH＝$\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ cm

よって BC＝AH＝$2\sqrt{3}$ cm

(2)

立体アの体積は

$\pi\times(2\sqrt{3})^2\times5-\frac{1}{3}\times\pi\times(2\sqrt{3})^2\times2=60\pi-8\pi=52\pi$　cm^3

立体イの体積は

$\pi\times(2\sqrt{3})^2\times3+\frac{1}{3}\times\pi\times(2\sqrt{3})^2\times2=36\pi+8\pi=44\pi$　cm^3

$52\pi-44\pi=8\pi$　cm^3

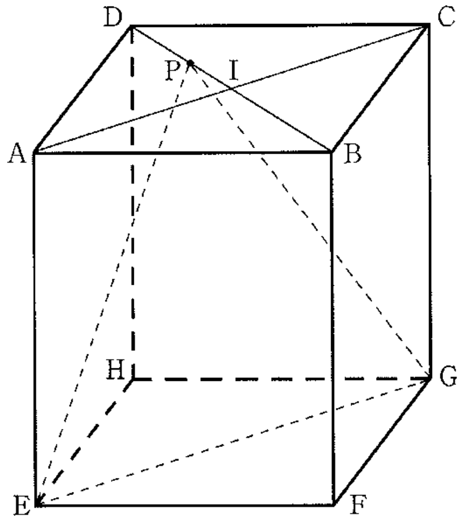
よってアの方が 8πcm^3 大きい。

【問 20】

図の立体は，AB＝AD＝6 cm，AE＝7 cm の直方体である。面ABCD において，2 つの対角線 AC と BD の交点を I とする。また，点 P は線分 ID 上の点である。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（静岡県　2010 年度）



問1　四角すい PEFGH の体積を求めなさい。

問2　3 点 A，P，C が，点 B を中心とする同じ円の円周上にあるとき，∠APC の大きさは何度か。180° より小さい角で答えなさい。

問3　△PEG が正三角形となるときの，IP の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm^3
問2	度
問3	cm

解答
問1　84cm^3
問2　135度
問3　$\sqrt{5}$ cm
解説
問2
$\angle\text{ABC}=90^\circ$ より円周角の定理を利用して $\angle\text{APC}=\dfrac{1}{2}(360^\circ-90^\circ)=135^\circ$
問3
$\triangle\text{PEG}$ が正三角形になるので
$\text{PE}=\text{PG}=\text{EG}=\sqrt{2}\ \text{EF}=6\sqrt{2}$ cm
$\triangle\text{APE}$ で
三平方の定理より $\text{AP}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2-7^2}=\sqrt{23}$ cm
$\triangle\text{API}$ において
$\angle\text{AIP}=90^\circ$, $\text{AI}=\dfrac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ cm だから
三平方の定理を利用して $\text{IP}=\sqrt{(\sqrt{23})^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$ cm

【問 21】

図1のように，高さがともに 24 cm である円すい形の容器 A と，正四角柱の鉄のおもり B がある。容器 A を底面が水平になるようにして水で満たし，その中に鉄のおもり B を底面を水平にして静かに沈めたところ，図2のようにおもり B はその高さの $\frac{1}{2}$ まで沈んだところで容器 A に 4 点で触れて静止した。あふれ出た水の体積が 600 cm^3 であったとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，容器 A の厚さは考えないものとする。円周率は π とする。また，答えは根号をつけたままでよい。

図1

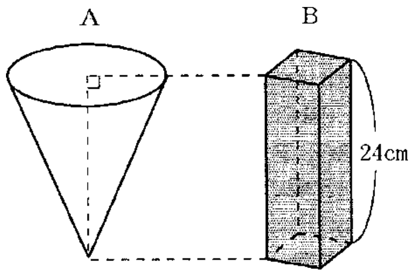
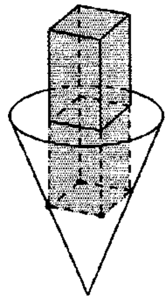


図2



（愛知県 2010 年度 A）

(1) おもり B の底面の正方形の 1 辺の長さは何 cm か，求めなさい。

(2) 容器 A の側面積は何 cm^2 か，求めなさい。

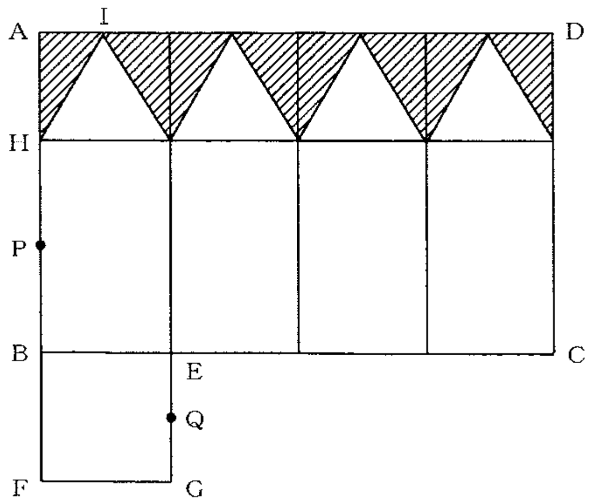
解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2

解答
(1) $5\sqrt{2}$ cm
(2) 260π cm^2
解説
(1)
あふれ出た水の体積はおもりの半分の体積と等しいから
正方形の 1 辺を x cm とすると
$x^2 \times 12 = 600$
$x^2 = 50$
$x > 0$ だから
$x = 5\sqrt{2}$ cm
(2)
平行線と線分の比の定理より
容器 A の底面の直径 ： 正方形の対角線＝24:12
容器 A の底面の直径: $5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2:1$
容器 A の底面の直径＝20 cm
容器 A の底面の半径は 10 cm
三平方の定理より側面のおうぎ形の半径の長さは $\sqrt{10^2+24^2} = 26$ cm
よって側面積は $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 10 \times 26 = 260\pi$ cm^2

【問 22】

図で，四角形 ABCD は長方形，E は辺 BC 上の点で，$BE=\frac{1}{4}BC$，四角形 BFGE は正方形である。また H，I はそれぞれ辺 AB，AD 上の点で，$AH=\frac{1}{3}AB$，$AI=\frac{1}{8}AD$ である。この図から△AHI と合同な 8 つの三角形（図の部分）を切り取って，底面が正方形で，底面に隣り合う面が 4 つの長方形，残りの面が 4 つの二等辺三角形である九面体の展開図をつくる。AB＝15 cm，BC＝24 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。答えは根号をつけたままでよい。



（愛知県 2010 年度 B）

(1) 線分 HB，EG の中点をそれぞれ P，Q とする。この展開図を組み立てて九面体をつくったとき，線分 PQ の長さは何 cm か，求めなさい。

(2) この展開図を組み立ててできる九面体の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1)　$\sqrt{70}$ cm

(2)　408 cm^3

解説

(1)

PQ は直角三角形 PBQ の斜辺になる。

また BQ は直角三角形 BEQ の斜辺である。

$\text{BE}=\dfrac{24}{4}=6$ cm，$\text{EQ}=\dfrac{6}{2}=3$ cm より

三平方の定理を利用して $\text{BQ}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$ cm

$\text{PB}=\dfrac{15}{3}=5$ cm より

$\text{PQ}=\sqrt{5^2+(3\sqrt{5})^2}=\sqrt{70}$ cm

(2)

九面体は正四角柱と正四角錐でできている。

正四角錐の底面の正方形の 1 辺は 6 cm より対角線は $6\sqrt{2}$ cm

側面の二等辺三角形の等しい辺の長さは $\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$ cm

高さは $\sqrt{(\sqrt{34})^2-\left(\dfrac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2}=4$ cm

よって求める体積は $6\times6\times10+\dfrac{1}{3}\times6\times6\times4=360+48=408$ cm^3

【問 23】

図1のように，各辺の長さがすべて 4 cm の正四角すい ABCDE があり，辺 BC の中点を M とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。なお，各問いにおいて，答えに $\sqrt{\ }$ がふくまれるときは，$\sqrt{\ }$ の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

（三重県　2010 年度）

図1

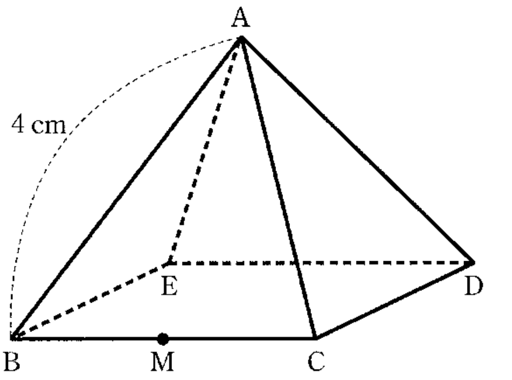
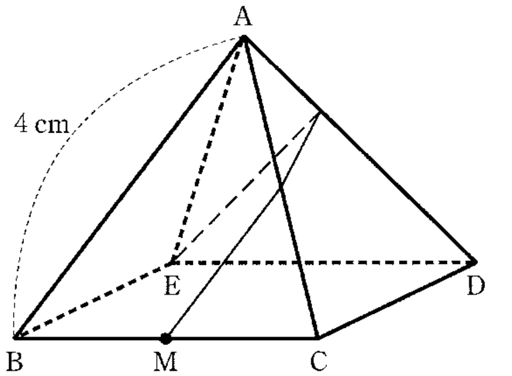


図2



(1) 底面 BCDE の対角線 BD の長さを求めなさい。

(2) この正四角すい ABCDE の体積を求めなさい。

(3) 図2のように，この正四角すい ABCDE の側面に，点 M から頂点 E まで，辺 AC，辺 AD に交わるようにひもをかける。かけたひもの長さがもっとも短くなるときのひもの長さを求めなさい。

解答欄

(1)	BD＝　　　　cm
(2)	cm^3
(3)	cm

解答

(1)　BD＝$4\sqrt{2}$ cm

(2)　$\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$ cm^3

(3)　$2\sqrt{13}$ cm

解説

(2)

正方形 BCDE の対角線の交点を H とすると BH＝$\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ cm

AB＝AD より AH⊥BD

△ABH において

三平方の定理より AH＝$\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ cm

よって求める体積は $\dfrac{1}{3}\times 4^2\times 2\sqrt{2}=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$ cm^3

(3)

△ABC と△ACD と△ADE を AC，AD をつなげたまま展開する。

ひもがもっとも短くなるのはこの展開図の一部で EM が直線になるときである。

△EMB は，MB＝2 cm，EB＝8 cm，∠MBE＝60° の三角形で

M から EB に垂線 MK をひくと

BK＝$\dfrac{\mathrm{MB}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ cm

MK＝$\sqrt{3}$ BK＝$\sqrt{3}$ cm

EK＝8－1＝7 cm

EM＝$\sqrt{(\sqrt{3})^2+7^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ cm

【問 24】

図1のように，AB＝8 cm，BC＝9 cm，DA＝3 cm，∠ADC＝∠BCD＝90° である台形ABCDがあり，線分BAを延長した直線と線分CDを延長した直線との交点をEとする。

このとき，次の問1・問2に答えよ。ただし，円周率はπとする。

（京都府　2010 年度）

図1

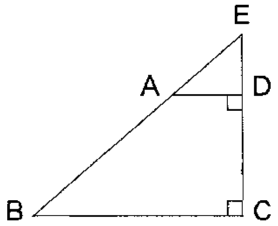
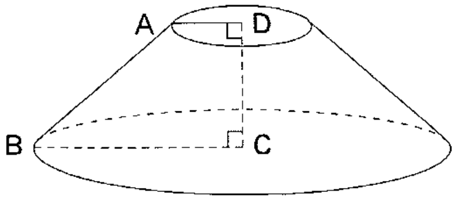


図2



問1　線分CDの長さを求めよ。また，線分DEの長さを求めよ。

問2　図1の台形ABCDを線分CDを軸として 1 回転させてできる立体は，右の図2のようになる。この立体の体積を求めよ。

解答欄

問1	CD＝　　　　　　cm
問1	DE＝　　　　　　cm
問2	cm^3

解答
問1
CD＝$2\sqrt{7}$ cm
DE＝$\sqrt{7}$ cm
問2　$78\sqrt{7}\pi$ cm^3
解説
問1
AからBCに垂線をひきその交点をHとする。
CH＝DA＝3 cm，BH＝9－3＝6 cm
△ABHで
三平方の定理よりAH＝$\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$ cm　CD＝AH＝$2\sqrt{7}$ cm
AD//BCより
DE:(DE＋DC)＝AD:BC
DE:(DE＋$2\sqrt{7}$)＝3:9
9DE＝3DE＋$6\sqrt{7}$
6DE＝$6\sqrt{7}$
DE＝$\sqrt{7}$ cm
問2
求める体積は
△EBCを回転させてできる円錐から△EADを回転させてできる円錐を除いたものだから
$$\frac{1}{3}\times\pi\times9^2\times(\sqrt{7}+2\sqrt{7})-\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times\sqrt{7}$$
$=81\sqrt{7}\pi-3\sqrt{7}\pi$
$=78\sqrt{7}\pi$ cm^3

【問 25】

図1，図2において，立体 ABC－DEF は三角柱である。△ABC と△DEF は，合同な正三角形であり，AB＝2 cm である。四角形 ADEB, BEFC, ADFC は合同な長方形であり，AD＝4 cm である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 2010 年度 前期）

図1

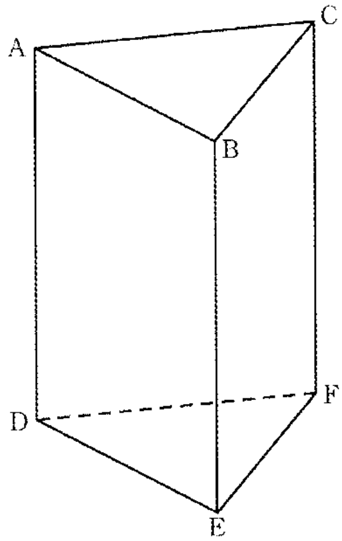
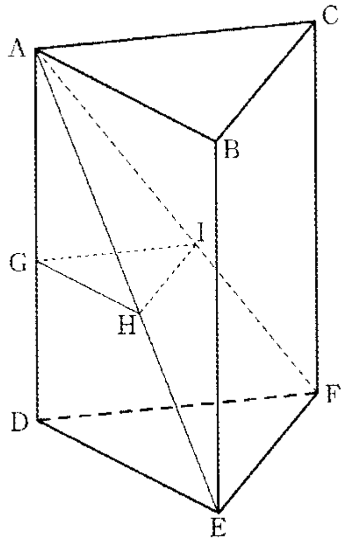


図2



問1 図1において，

(1) 次のア～オのうち，辺 AB と平行な辺，辺 AB とねじれの位置にある辺はそれぞれどれですか。一つずつ選び，記号を書きなさい。

ア 辺 BC

イ 辺 CA

ウ 辺 CF

エ 辺 AD

オ 辺 DE

(2) 三角柱 ABC－DEF の表面積を求めなさい。求め方も書くこと。

問2 図2において，G は辺 AD 上にあって A, D と異なる点である。H は，G を通り辺 DE に平行な直線と直線 AE との交点である。I は，G を通り辺 DF に平行な直線と直線 AF との交点である。H と I とを結ぶ。AG＝x cm とし，$0<x<4$ とする。線分 HI の長さを x を用いて表しなさい。

解答欄

問1	(1)	平行な辺	
		ねじれの位置にある辺	
		〔求め方〕 答え　　　　　　　　cm^2	
問2	cm		

解答
問1
(1)
平行な辺　オ
ねじれの位置にある辺　ウ
(2)
〔求め方〕
A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を J とすると
AJ＝$\sqrt{3}$ cm だから
△ABC の面積は
$\frac{1}{2}$ ×BC×AJ＝$\sqrt{3}$ cm^2
また長方形 ADEB の面積は
AD×AB＝8 cm^2
よって三角柱 ABC－DEF の表面積は
$\sqrt{3}$ ×2＋8×3＝24＋ 2$\sqrt{3}$ cm^2
答え 24＋ 2$\sqrt{3}$ cm^2
問2 $\frac{1}{2}x$ cm
解説
問1
(2)
四角形 ADEB≡四角形 BEFC≡四角形 ADFC より
AB＝BC＝CA
よって△ABC は 1 辺が 2 cm の正三角形である。
∠BAC の二等分線をひき BC との交点を K とすると
AK⊥BC, BK＝CK＝$\frac{2}{2}$ ＝1 cm
△ABK において∠AKB＝90°，∠ABK＝60° だから
AK＝ $\sqrt{3}$ BK＝ $\sqrt{3}$ cm
よって△ABC＝ $\frac{1}{2}$ ×2× $\sqrt{3}$ ＝ $\sqrt{3}$ cm^2
したがって三角柱の表面積は 2× $\sqrt{3}$ ＋3×4×2＝24＋ 2$\sqrt{3}$ cm^2
問2
GH // DE より
AH : HE＝AG : GD
GI // DF より
AI : IF＝AG : GD
よって AH : HE＝AI : IF より
HI // EF
HI : EF＝AH : AE＝AG : AD
HI : 2＝x : 4
4HI＝2x
HI＝ $\frac{1}{2}x$ cm

【問 26】

写真のような鉛筆立てをモデルにした問題である。図1，図2において，立体 ABCD－EFGH は直方体である。AB＝4 cm，AD＝2 cm であり，AE＝a cm とする。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 2010 年度 後期）

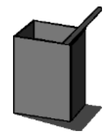


図1

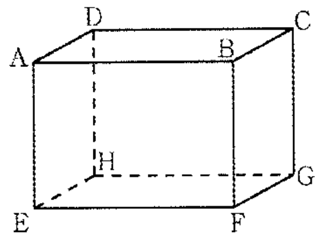
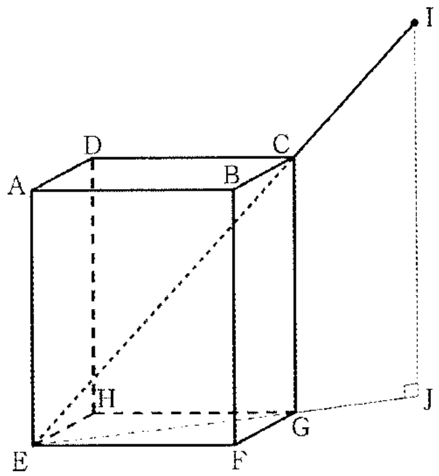


図2



問1 図1において，

(1) 直方体 ABCD－EFGH の体積を a を用いて表しなさい。

(2) 次のア～オのうち，面 AEFB と平行な辺はどれですか。すべて選び，記号を書きなさい。

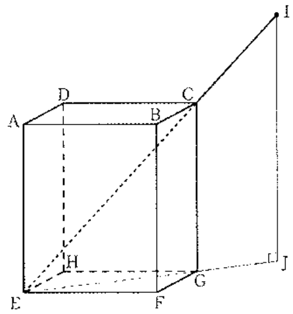
ア 辺 AD
イ 辺 BC
ウ 辺 CG
エ 辺 FG
オ 辺 GH

問2 図2は，a＝5 であるときの状態を示している。図2において，I は，直線 CE 上にあって C について E と反対側にある点であり，EI＝10 cm である。J は，I から直線 EG にひいた垂線と直線 EG との交点である。このとき，CG // IJ である。

(1) 線分 CE の長さを求めなさい。

(2) 線分 IJ の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

解答欄

問1	(1)	cm^3
	(2)	
問2	(1)	cm
	(2)	〔求め方〕  答え　　　　　　cm

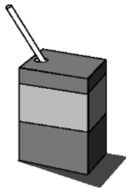
解答
問1
(1)　$8a\ \mathrm{cm}^3$
(2)　ウ, オ
問2
(1)　$3\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$
(2)
〔求め方〕
CG // IJ だから
CG : IJ＝EC:EI＝$3\sqrt{5}$: 10
よって IJ＝$\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$ CG
＝$\dfrac{10}{3}\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$
答え　$\dfrac{10}{3}\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$
解説
問2
(1)
三平方の定理より CE＝$\sqrt{2^2+4^2+5^2}$ ＝$3\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$
(2)
CG // IJ より平行線と線分の比の定理から
CG : IJ＝EC : EI
5 : IJ＝$3\sqrt{5}$: 10
$3\sqrt{5}$ IJ＝50
IJ＝$\dfrac{10}{3}\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$

【問 27】

右の写真のような紙パック飲料をモデルにした問題である。図1～図3において，立体 ABCD－EFGH は直方体であり，AB＝4 cm，AD＝3 cm，AE＝6 cm である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 2010 年度 後期）

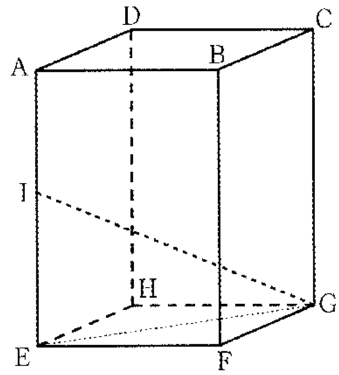


問1 図1において，I は，辺 AE 上にあって A，E と異なる点である。E と G，I と G とをそれぞれ結ぶ。IG＝6 cm である。

(1) 線分 EG の長さを求めなさい。

(2) E と直線 IG との距離を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

図1



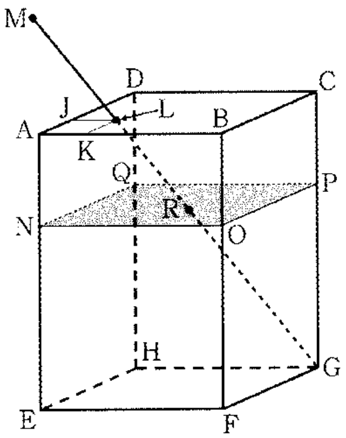
問2 図2，図3において，J，K は，それぞれ辺 AD，AB 上の点であり，AJ＝AK＝1 cm である。L は，J を通り辺 AB に平行な直線と K を通り辺 AD に平行な直線との交点である。

(1) 図2において，M は，直線 LG 上にあって L について G と反対側にある点であり，MG＝10 cm である。N は，辺 AE 上にあって A，E と異なる点である。O，P，Q はそれぞれ辺 BF，CG，DH 上にあって，NE＝OF＝PG＝QH となる点である。NE＝x cm とし，$0<x<6$ とする。このとき，4 点 N，O，P，Q は同じ平面上にあって，この 4 点を結んでできる四角形 NOPQ は長方形である。R は，平面 NOPQ と直線 MG との交点である。

① 線分 ML の長さを求めなさい。

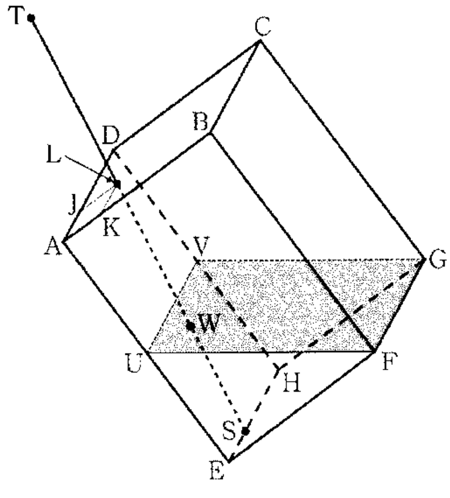
② 線分 RG の長さを x を用いて表しなさい。

図2

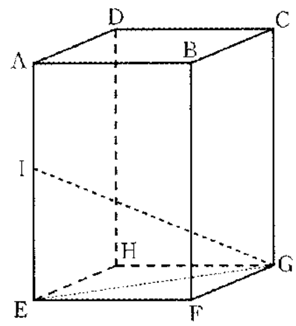


(2) 図3は，図2中の直方体 ABCD－EFGH を直線 EH を軸として回転させた状態を示している。図3において，S は，辺 EH 上の点であり，ES＝1 cm である。T は，直線 LS 上にあって L について S と反対側にある点であり，TS＝10 cm である。U，V は，それぞれ辺 AE，DH の中点である。このとき，4 点 U，F，G，V は同じ平面上にあって，この 4 点を結んでできる四角形 UFGV は長方形である。W は，平面 UFGV と直線 TS との交点である。線分 WS の長さを求めなさい。

図3



解答欄

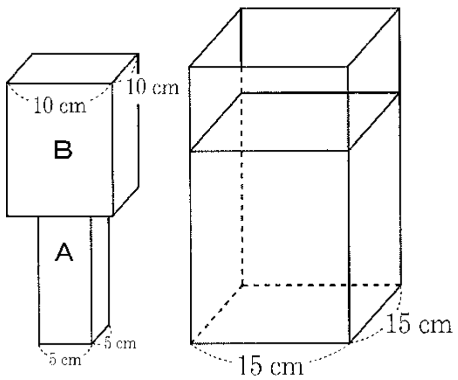
<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(1)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">〔求め方〕

cm</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td rowspan="2">(1)</td><td>①</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>②</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
</table>

解答
問1
(1)　5 cm
(2)
〔求め方〕
$\angle$IEG＝90° だから
$IE^2 = IG^2 - EG^2$
IE＝y cm とすると
$y^2 = 6^2 - 5^2 = 11$
これを解くと
$y > 0$ より
$y = \sqrt{11}$
E から直線 IG にひいた垂線と直線 IG との交点を X とし△IEG の面積を考えると
$\frac{1}{2} \times IG \times EX - \frac{1}{2} \times EG \times IE$
EX＝z cm とすると
$\frac{1}{2} \times 6 \times z - \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{11}$
これを解くと $z = \frac{5}{6}\sqrt{11}$
答え　$\frac{5}{6}\sqrt{11}$ cm
問2
(1)
①　3 cm
②　$\frac{7}{6}x$ cm
(2)　$\frac{4}{9}\sqrt{37}$ cm
解説
問2
(1)
①
EH 上に E J′＝1 cm となる点 J′，EF 上に E K′＝1 cm となる K′とする。
J′を通り EF に平行な直線と K′を通り EH に平行な直線との交点を L′とする。
三平方の定理より G L′＝$\sqrt{(3-1)^2+(4-1)^2} = \sqrt{13}$ cm
GL＝$\sqrt{(\sqrt{13})^2+6^2} = 7$ cm
ML＝10－7＝3 cm
②
R から G L′ に垂線をひき交点を R′とする。
R R′ // L L′ より RG : LG＝R R′ : L L′＝x : 6
よって RG＝$\frac{x}{6}$LG＝$\frac{x}{6} \times 7 = \frac{7}{6}x$ cm
(2)
BC 上に BX＝1 cm となる点 X，FG 上に FY＝1 cm となる点 Y をとり平面 JSYX 上で考える。
三平方の定理より LS＝$\sqrt{1^2+6^2} = \sqrt{37}$ cm
直線 YW と UV の交点を Z とし YZ の延長線と XJ の延長線の交点を Y′とする。
Y′J : YS＝JZ : ZS＝1 : 1
よって Y′J＝YS＝4 cm
WS : WL＝SY : L Y′＝4 : 5
よって WS＝$\frac{4}{9}$LS＝$\frac{4}{9} \times \sqrt{37} = \frac{4}{9}\sqrt{37}$ cm

【問 28】

高さが等しい 2 つの直方体A，Bがある。直方体Aの底面は一辺 5 cm の正方形で，直方体Bの底面は一辺 10 cm の正方形である。図1のような直方体A，Bを合わせた立体物を，図2のような底面が一辺 15 cm の正方形である水の入った直方体の水そうに沈め，水面の変化を調べた。

図1　　　図2

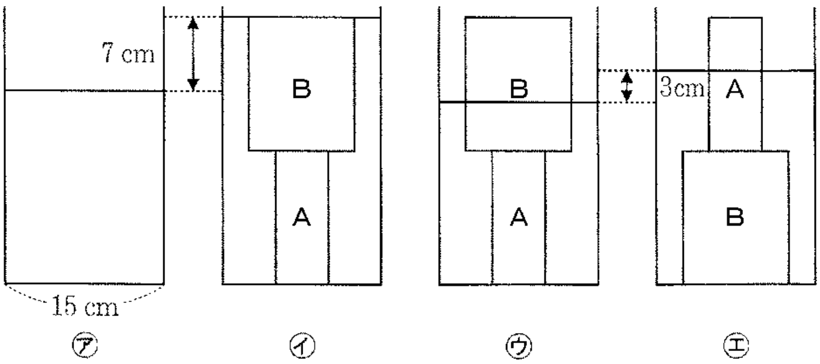


次の問いに答えなさい。ただし，立体物は水に浮くことはなく，水そうの厚さは考えないものとする。また，図3の㋐～㋓は，水そうに立体物を入れたときのようすを正面から見た図である。

（兵庫県　2010 年度）

問1　図3の㋐の水そうに，図3の㋑のように立体物を沈めると，水面が 7 cm 上がり，水の深さと立体物の高さがちょうど同じになった。立体物の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

図3　水そうの正面図



問2　図3の㋑の状態のとき，水の深さは何 cm か，求めなさい。

問3　図3の㋑の状態のとき，誤って水を少しこぼしてしまったため，図3の㋒のようになった。そこで，こぼした水の体積を調べるため，図3の㋓のように立体物をひっくり返して入れなおしたところ，図3の㋒より水面が 3 cm 上がった。こぼした水の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm
問3	cm^3

解答
問1 1575 cm^3
問2 25.2 cm
問3 1000 cm^3
解説
問2
A と B の立体の高さを x cm とする。
$5^2\times x+10^2\times x=1575$
$125x=1575$
$x=12.6$ cm
よって水の深さは 12.6×2＝25.2 cm
問3
㋑と㋒の水面の高さの違いを y cm とする。
$15^2\times y-10^2y=15^2(y-3)-5^2(y-3)$　$y=8$ cm
よってこぼした水の量は $15^2\times8-10^2\times8=1000$ cm^3

【問 29】

図1のように，1 辺の長さが 4 cm の，透明なガラス板をはり合わせて組み立てられた正四面体 OABC において，辺 AB，辺 OB，辺 OC，辺 AC の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，ガラス板の厚みは考えないものとする。

（鳥取県 2010 年度）

図1

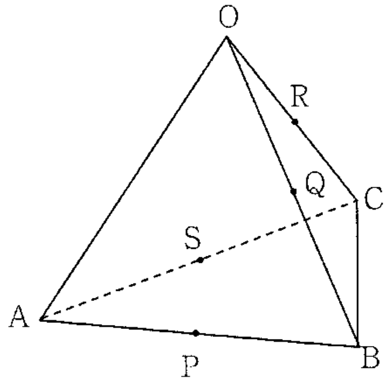


図2

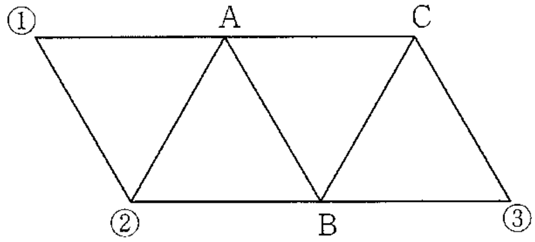
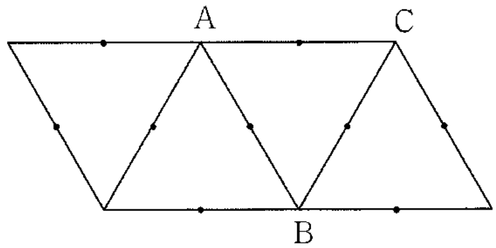


図3



問1 OP の長さを求めなさい。

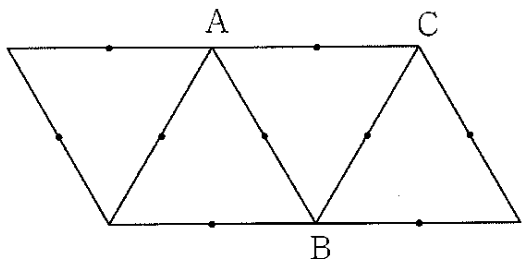
問2 △OPC の面積を求めなさい。

問3 四面体 OPCA の体積を求めなさい。

問4 図1の正四面体 OABC を図2のように展開するとき，頂点 O と一致する点を①，②，③からすべて選び，番号で答えなさい。

問5 図1の正四面体 OABC 上に，点 P と点 Q，点 Q と点 R，点 R と点 S，点 S と点 P を結ぶ線分をそれぞれ油性マーカーでかいた後に，図3のように展開するとき，油性マーカーでかかれた線分の見え方を，定規を用いて解答用紙の図の中にかきなさい。なお，図3および解答欄の〔図〕の・は図1の正四面体のそれぞれの辺の中点を表すものとする。

解答欄

問1	cm
問2	cm^2
問3	cm^3
問4	
問5	

解答

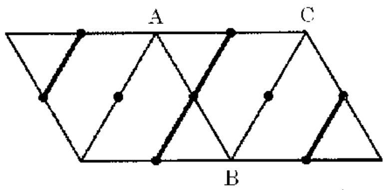
問1　$2\sqrt{3}$ cm

問2　$4\sqrt{2}$ cm^2

問3　$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ cm^3

問4　②, ③

問5



解説

問2

△OPC は OP＝CP＝$2\sqrt{3}$ cm の二等辺三角形なので PR⊥OC

よって PR＝$\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ cm

△OPC＝$\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ cm^2

問3

△OPC⊥△ABC だから O から△ABC に垂線 OH をひくと H は CP 上にある。

△OPC＝$4\sqrt{2}$　cm^2 より

$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times \mathrm{OH}=4\sqrt{2}$

OH＝$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ cm

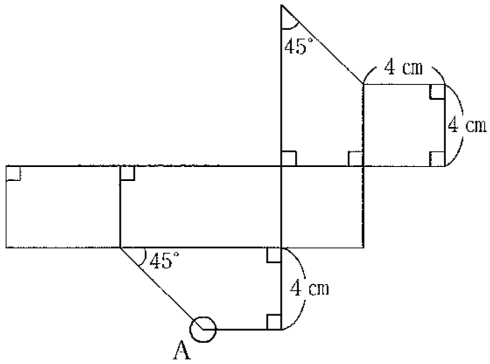
よって四面体 OPCA の体積は $\dfrac{1}{3}\times$△APC$\times$OH＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ cm^3

【問 30】

図は，ある立体の展開図である。

次の(1)～(3)に答えなさい。

（島根県　2010 年度）

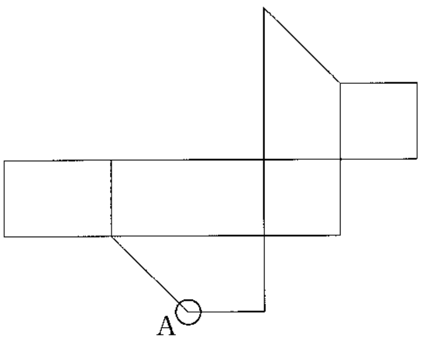


(1) この展開図をもとにして立体をつくるとき，頂点 A と重なり合う点すべてに○をつけなさい。

(2) この立体の体積を求めなさい。

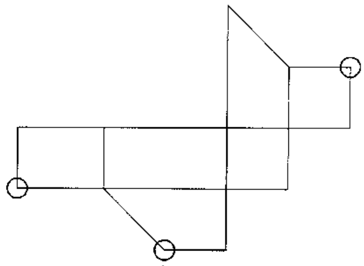
(3) この立体をいくつか組み合わせて，できるだけ小さい立方体をつくりたい。このとき，この立体は全部で何個必要か，答えなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3
(3)	個

解答

(1)


A

(2) 96 cm^3

(3) 18 個

解説

(2)

台形の上底は 4 cm 高さは 4 cm

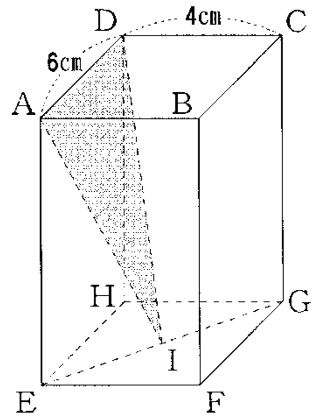
A から下底に垂線をひくと 1 辺が 4 cm の正方形と等しい辺が 4 cm の直角二等辺三角形に分かれるので

台形の面積は $4^2+\frac{1}{2}\times4\times4=16+8=24$ cm^2

よって求める体積は $24\times4=96$ cm^3

【問 31】

図のような直方体があり，AD＝6 cm，DC＝4 cm である。点 E と点 G を結び，線分 EG の中点を I とし，点 A と点 I，点 D と点 I をそれぞれ結ぶ。△AID の面積が 21 cm^2 であるとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。



（香川県　2010 年度）

(1)　点 A と点 C を結ぶ線分 AC の長さは何 cm か。

(2)　この直方体の体積は何 cm^3 か。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1)　$2\sqrt{13}$ cm

(2)　$72\sqrt{5}$ cm^3

解説

(2)

△AEI と△DHI は合同なので AI＝DI

I から AD に垂線 IK をひくと

△AID＝21cm^2 より $\dfrac{1}{2}\times 6\times$IK＝21　IK＝7 cm

また AK＝DK　EH の中点を M とおくと IM＝$\dfrac{4}{2}$＝2 cm

△KMI は∠KMI＝90° の直角三角形なので

三平方の定理を利用して KM＝$\sqrt{7^2-2^2}$ ＝$\sqrt{45}$ ＝$3\sqrt{5}$ cm

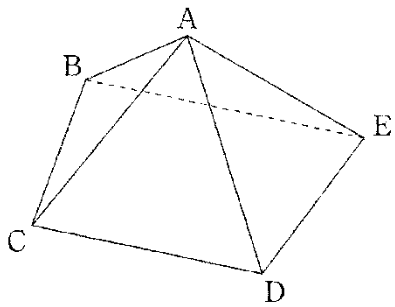
よって求める体積は $4\times6\times3\sqrt{5}$ ＝$72\sqrt{5}$ cm^3

【問 32】

図は，点 A，B，C，D，E を頂点とし，AB＝AC＝AD＝AE＝BC＝CD＝DE＝8 cm，BE＝10 cm，BE // CD の四角すいを表している。

次の問1～問3の $\boxed{}$ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし，根号を使う場合は $\sqrt{}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県　2010 年度）



問1　図に示す立体において，辺 BC とねじれの位置にある辺は全部で $\boxed{\qquad \text{本}}$ ある。

問2　図に示す立体において，△ABD の面積は $\boxed{\qquad \text{cm}^2}$ である。

問3　図に示す立体において，辺 BC 上に BF＝5 cm となる点 F をとり，辺 ED 上に EG＝3 cm となる点 G をとる。辺 AC 上に点 P，辺 AD 上に点 Q を，FP＋PQ＋QG の長さが最も短くなるようにとる。このとき，FP＋PQ＋QG の長さは $\boxed{\qquad \text{cm}}$ である。

解答欄

問1	本
問2	cm^2
問3	cm

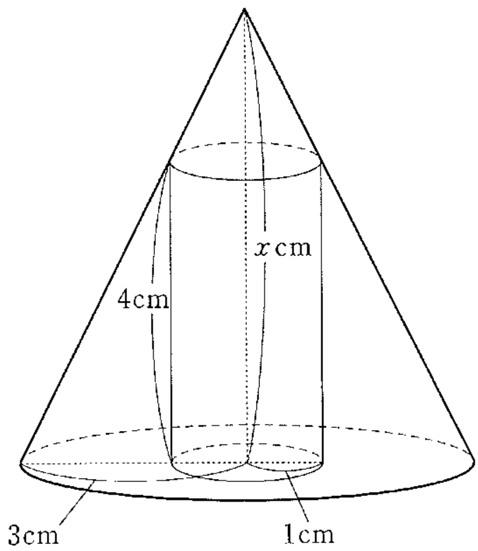
解答
問1　2
問2　$12\sqrt{7}$
問3　$7\sqrt{3}$
解説
問2
C から BE に垂線をひき交点を H とする。
BH＝(10－8)÷2＝1 cm
三平方の定理より CH＝$\sqrt{8^2-1^2}=3\sqrt{7}$ cm
よって△CBD＝$\frac{1}{2}\times8\times3\sqrt{7}=12\sqrt{7}$ cm^2
△ABD と△CBD は 3 辺がそれぞれ等しいので合同だから
△ABD＝$12\sqrt{7}$ cm^2
問3
3 つの正三角形△ABC，△ACD，△ADE をつなげた展開図の一部，四角形 BCDE で考える。
FP＋PQ＋QG が最短になるのは FG が直線になるとき
F, G からそれぞれ BE に垂線をひき交点をそれぞれ R, S とする。
BF＝5 cm より
BR＝$\frac{5}{2}$ cm，FR＝$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm　GE＝3 cm より
SE＝$\frac{3}{2}$ cm，GS＝$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm
よって FG＝$\sqrt{\left(8+8-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{12^2+(\sqrt{3})^2}=7\sqrt{3}$ cm

【問 33】

図のように，底面の半径が 3 cm の円すいの中に，底面の半径が 1 cm，高さが 4 cm の円柱がある。円柱の上面は円すいの側面に接し，底面は円すいの底面に固定されている。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（佐賀県 2010 年度 前期）



(1) 円すいの高さを x cm とするとき，x の値を求めなさい。

(2) 円すいから円柱を除いた部分の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

(1) 6

(2) 14π cm^3

解説

(1)

平行線と比の性質より

$1:3=(x-4):x$

$3(x-4)=x$

$3x-12=x$

$2x=12$

$x=6$

(2)

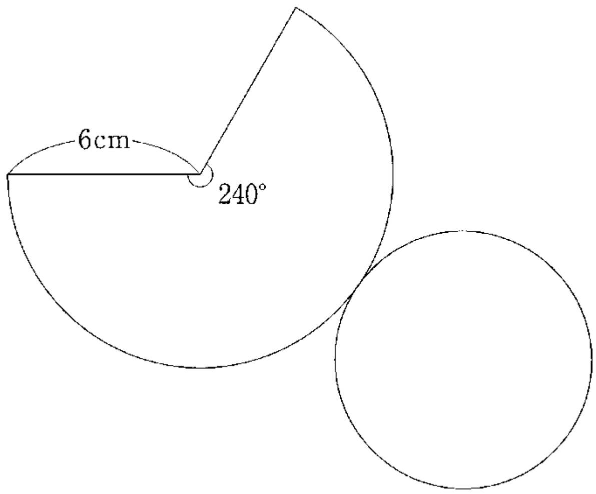
求める体積は$\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times6-\pi\times1^2\times4=18\pi-4\pi=14\pi$ cm^3

【問 34】

図のような円すいの展開図がある。側面の展開図は，半径が 6 cm，中心角が 240° のおうぎ形である。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（佐賀県 2010 年度 後期）



(1) 底面の半径を求めなさい。

(2) 円すいの体積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) 4 cm

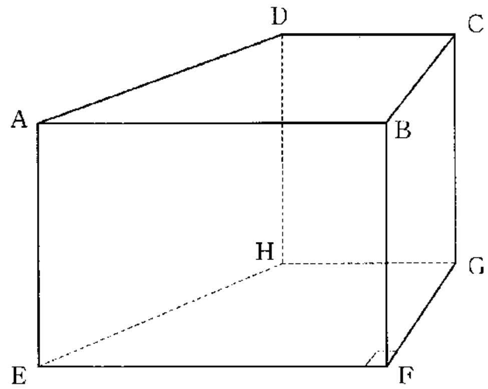
(2) $\dfrac{32\sqrt{5}}{3}\pi$ cm^3

【問 35】

図のように，底面が EF // HG，∠EFG＝90° の台形 EFGH である四角柱がある。

BC＝BF とするとき，次の問1～問3に答えなさい。

（佐賀県 2010 年度 後期）



問1 辺 AB とねじれの位置にある辺はどれか，すべて答えなさい。

問2 AC＝AF であることを証明しなさい。

問3 AB＝8 cm，CD＝4 cm，DA＝ $4\sqrt{3}$ cm とするとき，次の(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

(2) AG の長さを求めなさい。

(3) △ACF の面積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">問3</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>cm²</td></tr>
</table>

解答
問1　CG, DH, FG, EH
問2
△ABC と△ABF で
BC＝BF…①
共通な辺だから
AB＝AB…②
∠ABC＝∠EFG＝90°　で
角柱の側面は長方形だから
∠ABF＝90°
よって∠ABC＝∠ABF…③
①, ②, ③から
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABC≡ △ABF
よって AC＝AF
問3
(1)　$4\sqrt{2}$ cm
(2)　$8\sqrt{2}$ cm
(3)　$16\sqrt{5}$ cm^2
解説
(3)
$AC=AF=\sqrt{8^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}$ cm
$CF=4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=8$ cm
AC＝AF より
A から CF に垂線 AM をひくと
$CM=FM=\dfrac{8}{2}=4$ cm
$AM=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-4^2}=4\sqrt{5}$ cm
$\triangle ACF=\dfrac{1}{2}\times8\times4\sqrt{5}=16\sqrt{5}$ cm^2

【問 36】

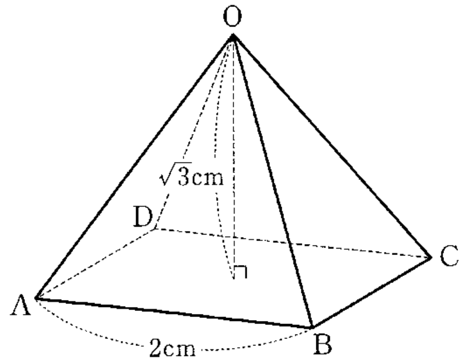
図1, 図2のように, 底面 ABCD が 1 辺の長さ 2 cm の正方形である正四角すい OABCD がある。また, 正四角すい OABCD の高さは $\sqrt{3}$ cm である。

このとき, 次の問いに答えなさい。

（長崎県　2010 年度）

問1　正四角すい OABCD の体積は何 cm^3 か。

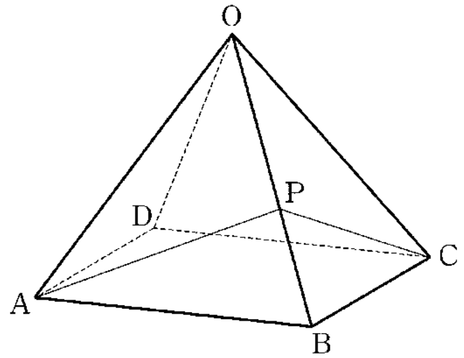
図1



問2　辺 OA の長さは何 cm か。

問3　三角形 OAB の面積は何 cm^2 か。

図2



問4　図2において, 辺 OB 上を動く点を P とする。2 つの線分 AP, PC の長さの和 AP＋PC が最小となるとき, AP＋PC の長さは何 cm か。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm
問3	cm^2
問4	cm

解答

問1　$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm^3

問2　$\sqrt{5}$ cm

問3　2 cm^2

問4　$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ cm

解説

問4

AP＋PC が最小になるのは展開図において P が線分 AC 上にあるとき。

△ABC において

BA＝BC，∠ABP＝∠CBP だから

OB⊥AC，AP＝CP

△OAB＝2 cm^2 より

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times$AP＝2

AP＝$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ cm

よって AC＝$2\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ cm

【問 37】

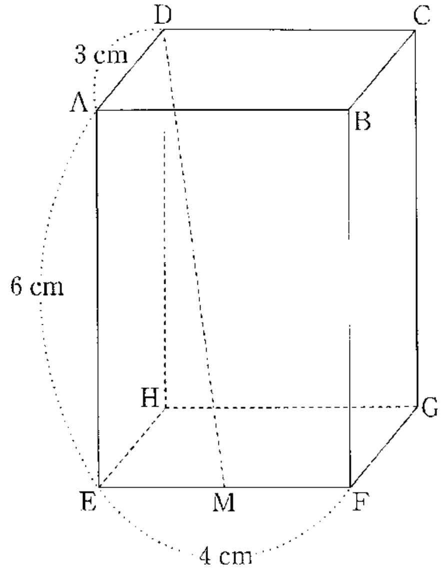
図は，点 A，B，C，D，E，F，G，H を頂点とする直方体で，AD＝3 cm，AE＝6 cm，EF＝4 cm である。点 M は辺 EF の中点である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県　2010 年度）

問1　線分 DM の長さを求めなさい。

問2　辺 CG 上に点 P をとり，CP＝x cm とする。∠DPM＝90°となるときの x の値を求めたい。x についての方程式をつくり，x の値を求めなさい。



解答欄

問1	cm	
問2	方程式	
	x の値	

解答

問1　7cm

問2

方程式　$7^2=x^2+4^2+(6-x)^2+3^2+2^2$

x の値　2，4

解説

問2

△DPM において∠DPM＝90°より

三平方の定理を利用して $DP^2+MP^2=DM^2$…①

△MFP，△PFG で

三平方の定理を利用して $MP^2=MF^2+PF^2=MF^2+FG^2+PG^2=2^2+3^2+(6-x)^2$…②

同様に　△DCP で

$DP^2=DC^2+CP^2=4^2+x^2$…③

$DM^2=7^2$…④

①に②，③，④をあてはめて

$4^2+x^2+2^2+3^2+(6-x)^2=7^2$

整理して

$2x^2-12x+16=0$

$2(x-2)(x-4)=0$

$0<x<6$ だから

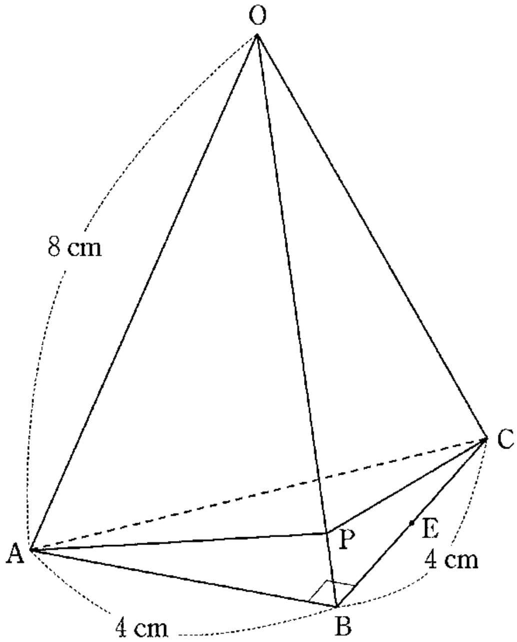
$x=2,\ 4$

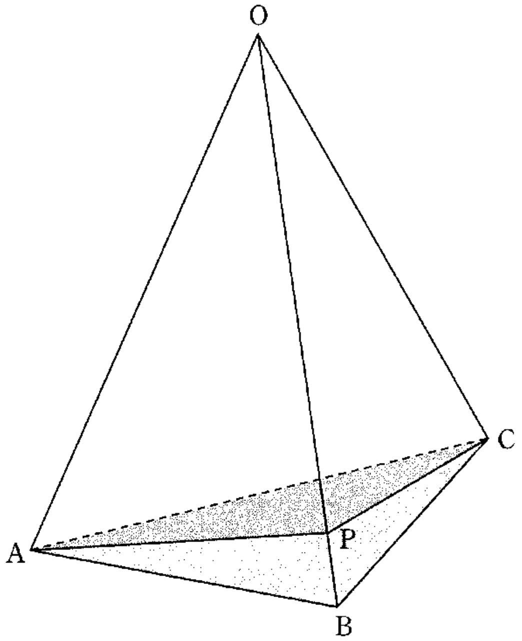
【問 38】

図のように，底面は BA＝BC＝4 cm の直角二等辺三角形で，OA＝OB＝OC＝8 cm の三角すい OABC がある。辺 BC の中点を E とする。また，点 A から辺 OB を通って，点 C まで最短となるようにひいた線と辺 OB の交点を P とする。

次の問1～問3に答えなさい。

（大分県 2010 年度）





問1 線分 OE の長さを求めなさい。

問2 線分 PC の長さを求めなさい。

問3 三角すい PABC の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm^3

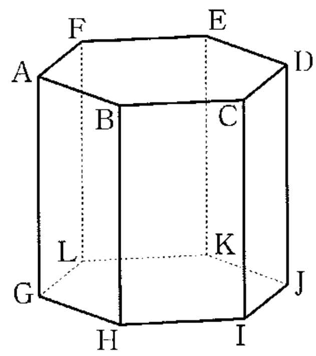
解答
問1　$2\sqrt{15}$ cm
問2　$\sqrt{15}$ cm
問3　$\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ cm^3
解説
問2
AP＋PC が最短になるのは△OAB と△OBC を OB でつなげた展開図において
A と C を直線で結んだときで AC と OB の交点が P である。
OA＝OC，BA＝BC だから OB⊥AC，PA＝PC
BP＝x cm とすると OP＝8－x cm
三平方の定理を利用して
$\mathrm{OC}^2-\mathrm{OP}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{BP}^2$
$8^2-(8-x)^2=4^2-x^2$
これを解いて
$x=1$ cm
よって PC＝$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ cm
問3
AC の中点を M とする。
OA＝OC より OM⊥AC，AM＝CM＝$\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ cm
OM＝$\sqrt{8^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{14}$ cm
BM を結ぶ。
P から BM に垂線 PH をひく。
PH // OM だから
PH : OM＝BP : BO
PH : $2\sqrt{14}=1:8$
PH＝$\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ cm
よって三角すい PABC の体積は$\dfrac{1}{3}\times$△ABC$\times$PH＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times\dfrac{\sqrt{14}}{4}=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ cm^3

【問 39】

図1のような，正六角柱の形をした紙の箱がある。底面の正六角形の 1 辺が 4 cm，高さが 8 cm のとき，次の問1～問4に答えなさい。ただし，紙の厚さは考えないものとする。

（宮崎県　2010 年度）

図1



問1　図1において，辺を直線とみたとき，直線 AB とねじれの位置にある直線は何本ありますか。

問2　図1において，正六角形 ABCDEF の面積を求めなさい。

問3　図2は，図1の正六角形 ABCDEF の各辺の中点を P，Q，R，S，T，U とし，これらの点と正六角形 GHIJKL の各頂点をそれぞれ結んだものである。図3は，図2における正六角柱を，線分 PH，HQ，QI，IR，RJ，JS，SK，KT，TL，LU，UG，GP で，上下 2 つの部分に切り離したものである。図4は，図3の下の部分における正六角形 GHIJKL の各辺を折り目として，頂点であるP′，Q′，R′，S′，T′，U′のそれぞれが 1 点に集まるように折り，この点を X として正六角錐 XGHIJKL をつくったものである。

このとき，図4の正六角錐の高さを求めなさい。

図2

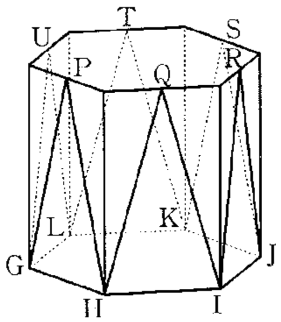


図3

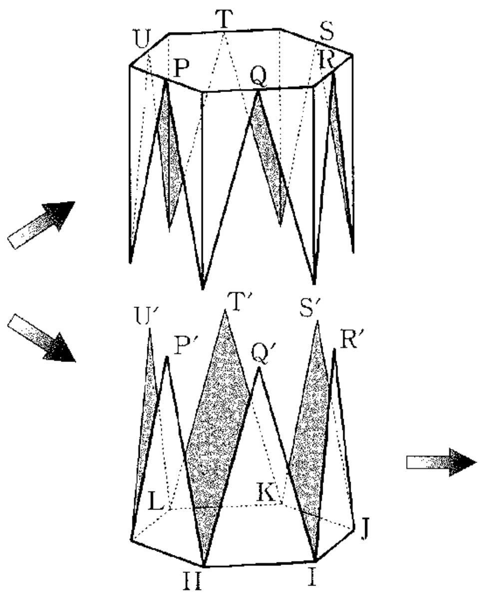
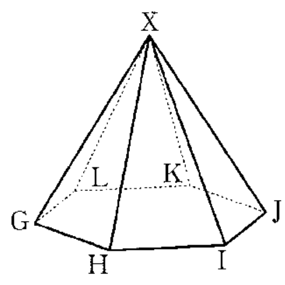
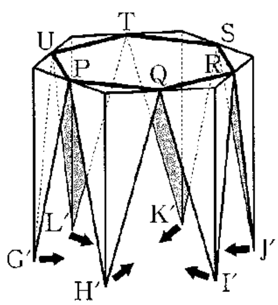


図4



問4　図5は，図3の上の部分における正六角形 PQRSTU の各辺を折り目として，頂点であるG′，H′，I′，J′，K′，L′のそれぞれが 1 点に集まるように折り，立体をつくるようすを示したものである。このとき，できあがる立体の体積を求めなさい。

図5



解答欄

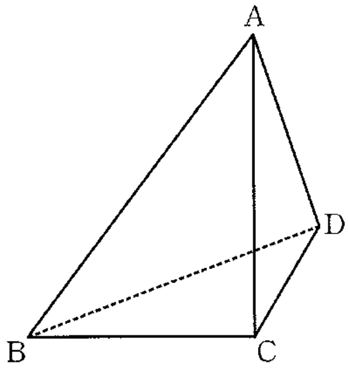
問1	本
問2	cm^2
問3	cm
問4	cm^3

解答
問1　8 本
問2　$24\sqrt{3}$ cm^2
問3　$2\sqrt{13}$ cm
問4　$12\sqrt{42}+16\sqrt{3}$ cm^3
解説
問3
できた正六角錐において XG＝XH＝XI＝XJ＝XK＝XL＝$\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$ cm
△XGJ において X から GI にひいた垂線と GJ の交点を Y とする。
△XGY において
三平方の定理より XY＝$\sqrt{(2\sqrt{17})^2-4^2}=2\sqrt{13}$ cm
問4
できあがる立体の体積は
底面を正六角形 PQRSTU とする正六角錐 1 つと
三角錐 BPQH′ と合同な三角錐 6 つ分の和となる。
△BPQ は BP＝BQ＝2 cm，∠PBQ＝120° の二等辺三角形なので
B から PQ に垂線 BZ をひくと
BZ＝$\frac{BP}{2}=\frac{2}{2}=1$ cm，PZ＝$\sqrt{3}$ BZ＝$\sqrt{3}$ cm，PQ＝2PZ＝$2\sqrt{3}$ cm
正六角形 PQRSTU の面積は 1 辺が $2\sqrt{3}$ cm の正三角形 6 つ分なので
$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}\right)\times 6=18\sqrt{3}$ cm^2
底面を正六角形 PQRSTU とする正六角錐の高さは $\sqrt{(2\sqrt{17})^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{14}$ cm
よってその体積は $\frac{1}{3}\times 18\sqrt{3}\times 2\sqrt{14}=12\sqrt{42}$ cm^3
また三角錐 BPQH′ の体積は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1\times 8=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm^3
よって求める体積は $12\sqrt{42}+\frac{8\sqrt{3}}{3}\times 6=12\sqrt{42}+16\sqrt{3}$ cm^3

【問 40】

図は，AC＝8 cm，BC＝CD＝6 cm，∠ACB＝∠ACD＝∠BCD＝90° の三角すい ABCD である。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。

（鹿児島県　2010 年度）



(1)　辺 AC とねじれの位置にある辺をあげよ。

(2)　辺 AC，AD の中点をそれぞれ M，N とするとき，四角すい BCDNM の体積は何 cm^3 か。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答
(1)　辺 BD
(2)　$36cm^3$
解説
(2)
∠ACB＝∠ACD＝∠BCD＝90°より
四角すい BCDNM の底面を四角形 MCDN とすると高さは BC となる。
M，N はそれぞれ AC，AD の中点だから

MN＝$\frac{1}{2}$CD＝$\frac{1}{2}$×6＝3 cm

MN // CD　これより
∠AMN＝∠ACD＝90°

四角形 MCDN＝△ACD－△AMN＝$\frac{1}{2}$×6×8－$\frac{1}{2}$×3×4＝24－6＝18 cm^2

求める体積は$\frac{1}{3}$×18×6＝36 cm^3

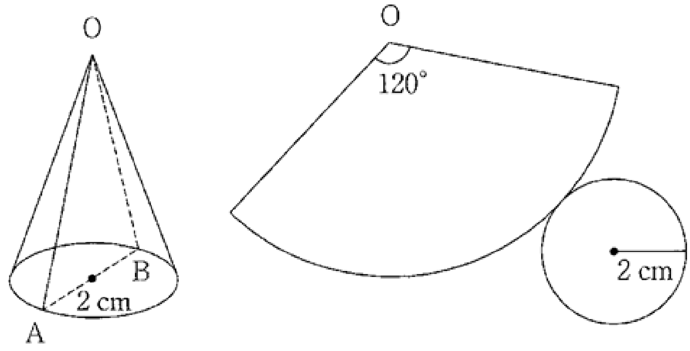
【問 41】

図のように，頂点が O で，底面の半径が 2 cm の円すいがある。また，底面の周上に直径 AB となるような 2 点 A，B をとる。図1はこの円すいの展開図で，おうぎ形の中心角は 120° である。

このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，円周率は π とする。

（沖縄県　2010 年度）

図1



問1　図1のおうぎ形の弧の長さを求めなさい。

問2　母線 OA の長さを求めなさい。

問3　母線 OA の中点を P とする。また，下の図2，図3のように円すいの側面上で点 P，B を結び，その最小の長さを PB の長さとする。

(1)　PB の長さを求めなさい。

図2

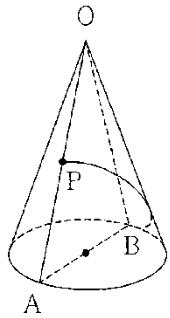
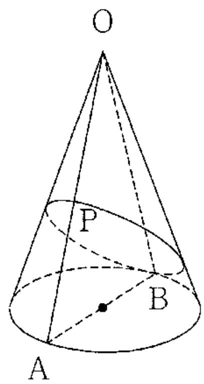


図3



(2)　円すいの側面上を点 P から B を通って点 P に戻ってきたとき，その線を境界として側面を 2 つに分ける。このとき，分けられた側面のうち点 A を含む部分の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	cm	
問3	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答
問1　4π cm
問2　6cm
問3
(1)　$3\sqrt{3}$ cm
(2)　$12\pi - 9\sqrt{3}$ cm^2
解説
問1
おうぎ形の弧の長さは底面の円周と等しいので $2\pi \times 2 = 4\pi$ cm
問2
OA＝r cm とするとおうぎ形の弧の長さが 4π cm より

$$2\pi r \times \frac{120}{360} = 4\pi$$

$r = 6$ cm
問3
(1)
側面のおうぎ形において
AB を結ぶと OA＝OB, $\angle AOB = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$ より
△AOB は正三角形である。
BP が最小になるのは
展開図において B から OA に垂線をひいたときである。
正三角形 AOB において
$\angle OPB = 90^\circ$ より△BOP は
$OP : OB : BP = 1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形だから

$$BP = \frac{\sqrt{3}}{2} OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

(2)
求める面積は

$$\text{側面のおうぎ形} - 2\triangle OBP = \pi \times 6^2 \times \frac{120}{360} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{2} \times 3\sqrt{3} = 12\pi - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$