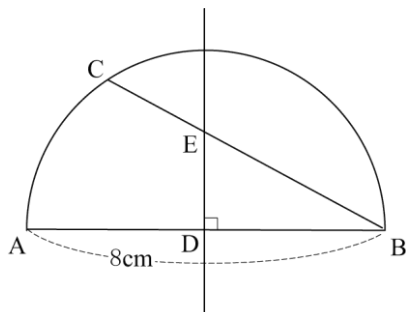


5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2020 年度出題】

【問 1】

下の図のように、線分 AB を直径とする半円があり、 $AB=8\text{ cm}$ とします。弧 AB 上に点 C を、 $\angle ABC=30^\circ$ となるようにとります。線分 AB の中点を点 D とし、点 D を通り線分 AB に垂直な直線と線分 BC との交点を E とします。



次の (1)、(2) に答えなさい。

(北海道 2020 年度)

- (1) 線分 DE の長さを求めなさい。
- (2) $\triangle BCD$ を、線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。
ただし、円周率は π を用いなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	〔計算〕 (答) cm³

解答

$$(1) \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

(2)

〔計算〕

$\triangle BCD$ において、 $BD=CD$ より

$\angle CBD=\angle BCD=30^\circ$ であるから

$\angle CDA=60^\circ$

点 C から線分 AB に垂線をひき、線分 AB との交点を点 F とすると、 $CF=2\sqrt{3}$ 、 $DF=2$

$\triangle BCF$ を、線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 6 = 24\pi \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle CDF$ を、線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 8\pi \cdots \textcircled{2}$$

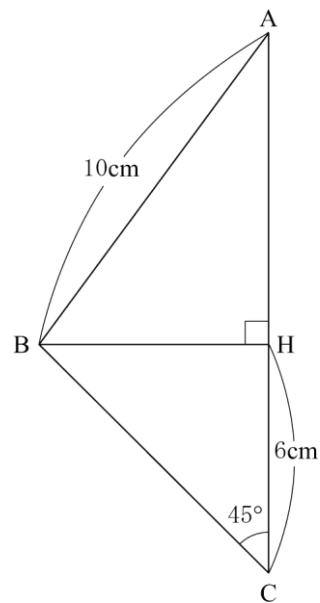
したがって、求める体積は、 $24\pi - 8\pi = 16\pi$

(答) $16\pi \text{ cm}^3$

【問 2】

右の図の三角形 ABC で、頂点 B から辺 AC に垂線をひき、辺 AC との交点を H とする。 $AB=10\text{ cm}$ 、 $CH=6\text{ cm}$ 、 $\angle BCH=45^\circ$ とするとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

(青森県 2020 年度)



- (1) AH の長さを求めなさい。
- (2) $\triangle ABC$ を、辺 AC を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。
- (3) $\triangle ABH$ を、辺 AH を軸として 1 回転させると円すいができる。この円すいの展開図をかいたとき、側面になるおうぎ形の中心角を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³
(3)	度

解答

(1) 8 cm

(2) $168\pi\text{ cm}^3$

(3) 216 度

解説

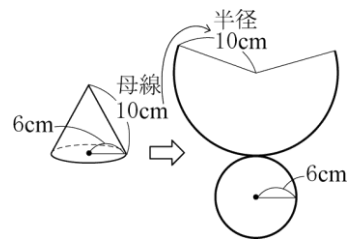
(3)

円錐を展開すると側面はおうぎ形になる。そして、側面のおうぎ形の弧の長さと、底面の円の周の長さは等しくなる。底面は半径 6 cm の円なので、その周は $2 \times \pi \times 6 = 12\pi\text{ (cm)}$ である。

ここで、側面のおうぎ形の半径の長さは円錐における母線の長さに等しく 10 cm なので、おうぎ形の中心角を x° とすると、弧の長さは、 $2 \times \pi \times$

$$10 \times \frac{x}{360} = \frac{1}{18} \pi x\text{ (cm)} \text{ である。}$$

$$\text{よって、} \frac{1}{18} \pi x = 12\pi \Rightarrow x = 216 (^\circ)$$



【問 3】

次の図 1 のように、底面の半径 3 cm、高さ 6 cm の円柱に、中心 O、半径 3 cm の球がちょうど入っています。図 2 は、図 1 の球を半分にした半球の容器 A と、図 1 の円柱の容器 B です。

図 1

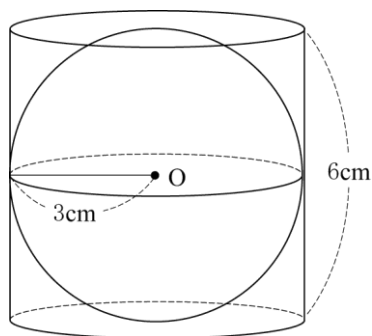
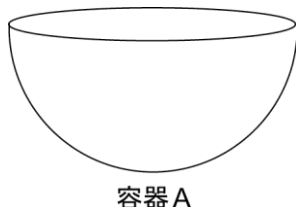
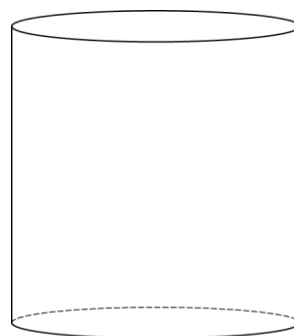


図 2



容器 A



容器 B

このとき、次の問 1、問 2 に答えなさい。

(岩手県 2020 年度)

問 1 図 2 の容器 A に水をいっぱいに入れて、空の容器 B に移すとき、容器 A の水を何杯分入れると容器 B がいっぱいになりますか。何杯分か求めなさい。
ただし、容器の厚みは考えないものとします。

問 2 次の図 3 のように、すべての頂点が図 1 の球面上にある立方体 ABCD-EFGH があります。図 4 は、それぞれ図 3 の平面 ABCD、平面 ABFE で球を切ったときの切り口です。また、図 5 は、4 点 A、E、G、C を通るように球を切ったときの切り口です。
このとき、立方体 ABCD-EFGH の体積を求めなさい。

図 3

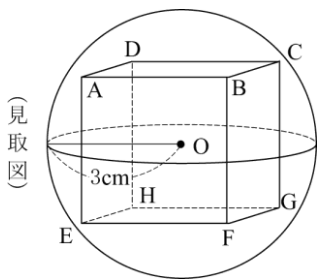
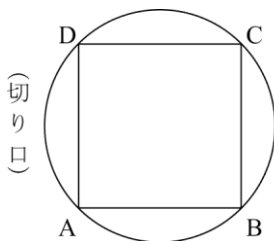
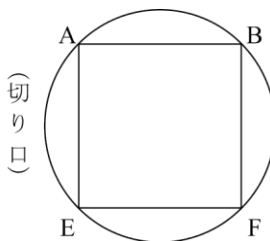


図 4

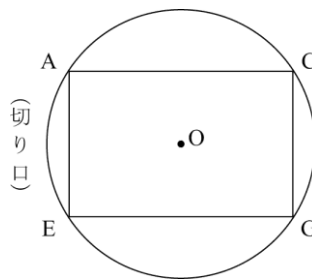


(切り口)



(切り口)

図 5



(切り口)

解答欄

問 1	杯分
問 2	cm^3

解答

問 1 3 杯分

問 2 $24\sqrt{3} \text{ cm}^3$

解説

問 2

立方体 $ABCD-EFGH$ の 1 辺の長さを

$x\text{cm}$ とすると, $AE=x\text{cm}$

正方形 $ABCD$ の対角線だから,

$AC=\sqrt{2}x\text{cm}$

辺 AE は面 $ABCD$ に垂直だから,

$AE \perp AC$ より, 線分 CE は球の直径なので,

$CE=6\text{cm}$

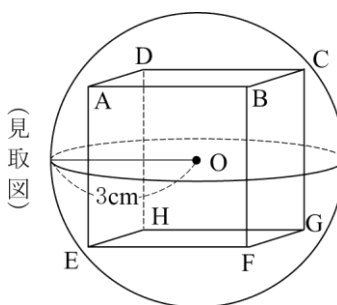
$\triangle AEC$ において, 三平方の定理より, AE^2

$+AC^2=CE^2$ だから,

$x^2+(\sqrt{2}x)^2=6^2$ より, $x=\pm 2\sqrt{3}$ $x>0$ だから, $x=2\sqrt{3}$

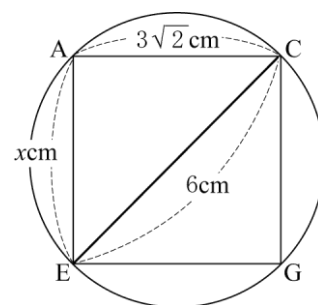
したがって, 立方体 $ABCD-EFGH$ の体積は, $(2\sqrt{3})^3=24\sqrt{3}(\text{cm}^3)$

図 3



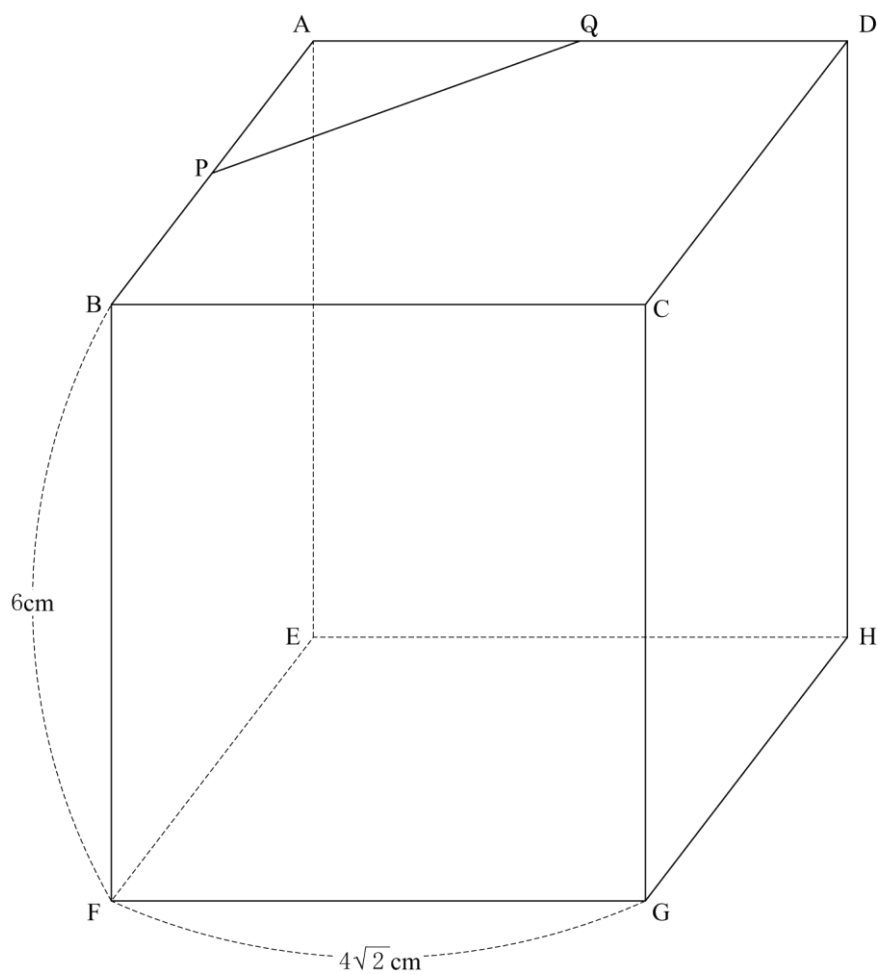
(見取図)

図 5



【問 4】

下の図のような、底面が 1 辺 $4\sqrt{2}\text{cm}$ の正方形で、高さが 6cm の直方体がある。
辺 AB 、 AD の中点をそれぞれ P 、 Q とする。



このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。

(福島県 2020 年度)

問 1 線分 PQ の長さを求めなさい。

問 2 四角形 $PFHQ$ の面積を求めなさい。

問 3 線分 FH と線分 EG の交点を R とする。また、線分 CR の中点を S とする。

このとき、 S を頂点とし、四角形 $PFHQ$ を底面とする四角錐^{すい}の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	cm
問 2	cm ²
問 3	cm ³

解答

問 1 4 cm

問 2 $12\sqrt{10}$ cm²

問 3 36 cm³

解説

問 1

直角二等辺三角形 APQ に着目すると、 $AP : PQ = 1 : \sqrt{2}$ より、 $2\sqrt{2} : PQ = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow PQ = 4(\text{cm})$

問 2

四角形 PFHQ を取り出して考える。

$\triangle ABD$ において中点連結定理より、 $PQ \parallel BD$

また、 $BD \parallel FH$ より、 $PQ \parallel FH$ なので、

四角形 PFHQ は台形であることがわかる。

直角二等辺三角形 GFH に着目すると、 $GF : FH = 1 : \sqrt{2}$ より、

$4\sqrt{2} : FH = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow FH = 8(\text{cm})$

直角三角形 PBF に着目すると、三平方の定理より

$PF^2 = BP^2 + BF^2 = (2\sqrt{2})^2 + 6^2 = 44 \Rightarrow PF > 0$ より

$PF = 2\sqrt{11}(\text{cm})$

$BP = DQ, BF = DH, \angle PBF = \angle QDH = 90^\circ$ より、

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle PBF \equiv \triangle QDH$ よって、 $PF = QH = 2\sqrt{11}(\text{cm}) \cdots \textcircled{1}$

以上のことから、四角形 PFHQ は右図のような等脚台形であることがわかる。

点 P, Q から、辺 FH にそれぞれ垂線をおろし、辺 FH との交点をそれぞれ I, J とする。

すなわち、 $\angle PIF = \angle QJH = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

また、PI と QJ は台形の高さなので、 $PI = QJ \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より、直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので、 $\triangle PFI \equiv \triangle QHJ$

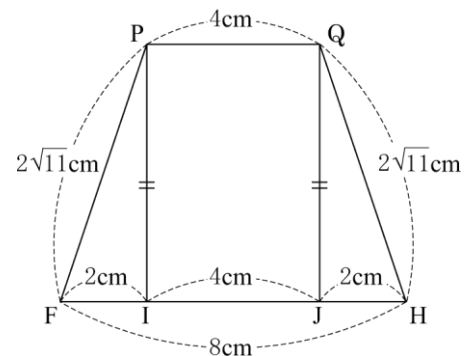
よって、 $FI = HJ$

また、四角形 PIJQ は長方形なので、 $IJ = PQ = 4(\text{cm})$ だから、 $FI = (8 - 4) \div 2 = 2(\text{cm})$

よって、直角三角形 PFI において三平方の定理より、 $PF^2 = FI^2 + PI^2 \Rightarrow PI^2 = PF^2 - FI^2$

$\Rightarrow PI^2 = (2\sqrt{11})^2 - 2^2 = 40$ $PI > 0$ より、 $PI = 2\sqrt{10}(\text{cm})$

よって、四角形 PFHQ の面積は、 $(4 + 8) \times 2\sqrt{10} \times \frac{1}{2} = 12\sqrt{10}(\text{cm}^2)$



問3

$CB=CD, BP=DQ, \angle CBP=\angle CDQ=90^\circ$ より,

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle CBP \equiv \triangle CDQ$ より, $CP=CQ$ よって, $\triangle CPQ$ は二等辺三角形である。

ここで, 線分 PQ の中点を T とし, C と T を結ぶと, 二等辺三角形の性質より $CT \perp PQ \cdots ④$

長方形 $BFGC \equiv$ 長方形 $CGHD$ より, $CF=CH$ よって, $\triangle CFH$ は二等辺三角形である。

また, R は正方形 $EFGH$ の対角線の交点なので, 線分 FH の中点である。

よって, 二等辺三角形の性質より $CR \perp FH \cdots ⑤$

④, ⑤より平面 $CTR \perp$ 平面 $PFHQ$ なので, 点 C から線分 TR へおろした垂線 CU が四角錐 $C-PFHQ$ の高さとなり, 同様に点 S から線分 TR へおろした垂線 SV が四角錐 $S-PFHQ$ の高さとなる。

次に, $\triangle CTR$ を取り出して考える。

$\triangle CBP$ で三平方の定理により,

$$CP^2 = CB^2 + BP^2 = (4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 40$$

$$\Rightarrow CP > 0 \text{ より } CP = 2\sqrt{10}(\text{cm})$$

$\triangle CPT$ で三平方の定理により, $CP^2 = CT^2 + PT^2$

$$\Rightarrow CT^2 = CP^2 - PT^2 = (2\sqrt{10})^2 - 2^2 = 36$$

$$\Rightarrow CT > 0 \text{ より } CT = 6(\text{cm})$$

$$\text{正方形 } EFGH \text{ において, } FG : EG = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow 4\sqrt{2} : EG = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow EG = 8(\text{cm})$$

$$\text{よって, } RG = \frac{1}{2}EG = 4(\text{cm})$$

$$\triangle CRG \text{ で三平方の定理により, } CR^2 = RG^2 + CG^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \Rightarrow CR > 0 \text{ より } CR = 2\sqrt{13}(\text{cm})$$

ここで, $CU = x(\text{cm}), UR = y(\text{cm})$ とおくと,

$$\triangle CUR \text{ で三平方の定理により, } CU^2 + UR^2 = CR^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 52 \cdots ⑥$$

$$\triangle CUT \text{ で三平方の定理により, } CU^2 + UT^2 = CT^2 \Rightarrow x^2 + (2\sqrt{10} - y)^2 = 36$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4\sqrt{10}y = -4 \cdots ⑦$$

$$⑦ \text{ に } ⑥ \text{ を代入すると, } 52 - 4\sqrt{10}y = -4 \Rightarrow y = \frac{7\sqrt{10}}{5}(\text{cm})$$

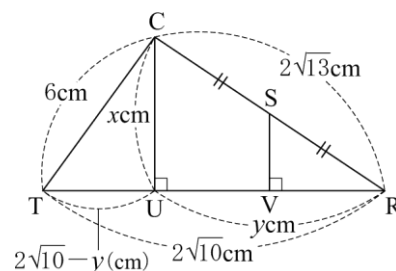
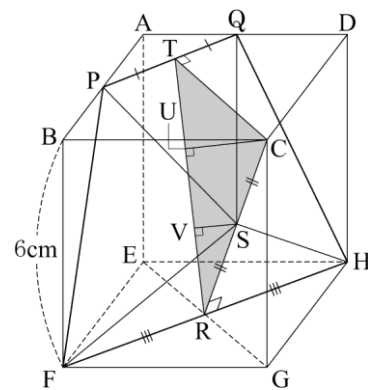
$$\text{これを } ⑥ \text{ に代入すると, } x^2 + \left(\frac{7\sqrt{10}}{5}\right)^2 = 52 \Rightarrow x = \frac{9\sqrt{10}}{5}(\text{cm})$$

また, $CU \perp UR, SV \perp UR$ より, $SV \parallel CU$ だから, $\triangle RCU$ において平行線と線分の比の性質より,

$$SV : CU = RS : RC \Rightarrow SV : \frac{9\sqrt{10}}{5} = 1 : 2 \Rightarrow SV = \frac{9\sqrt{10}}{10}(\text{cm})$$

よって, 問2より四角形 $PFHQ$ の面積は, $12\sqrt{10} \text{ cm}^2$ だから, 求める四角錐の体積は,

$$12\sqrt{10} \times \frac{9\sqrt{10}}{10} \times \frac{1}{3} = 36(\text{cm}^3)$$



【問 5】

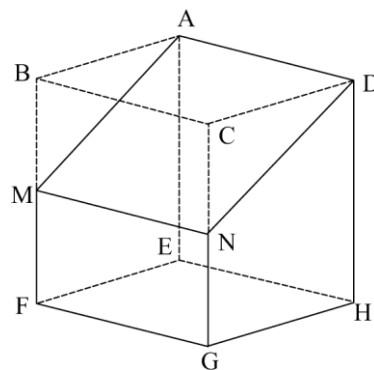
右の図 1 のように、1 辺の長さが 2 cm の立方体 ABCDEFGH がある。辺 BF, CG の中点をそれぞれ M, N とする。この立方体を、4 点 A, D, M, N を通る平面で切ったとき、点 E をふくむ立体を立体 P とする。

このとき、次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

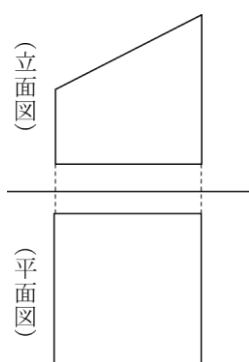
(茨城県 2020 年度)

問 1 立体 P の投影図をかくとき、どの方向から見るかによって異なる投影図ができる。立体 P の投影図として正しいものを、次のア～エの中から二つ選んで、その記号を書きなさい。

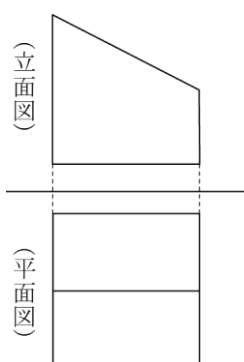
図 1



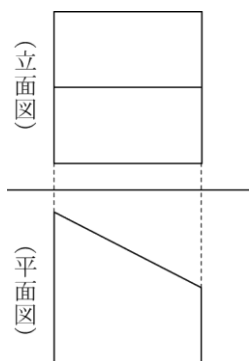
ア



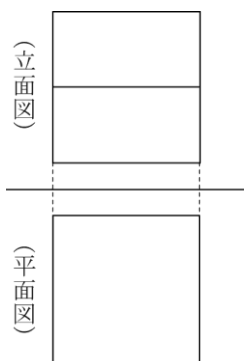
イ



ウ



エ



問 2 図 1 の四角形 AMND の面積を求めなさい。

問 3 立体Pにおいて、点 E, A, M, N, D を頂点とする四角すい EAMND の体積を求めなさい。
 なお、下の図 2, 図 3 は、空間における四角すい EAMND の辺や面の位置関係を考えるために、
 立体Pをそれぞれ面 DNGH, 面 AMND が下になるように置きかえたものである。

図 2

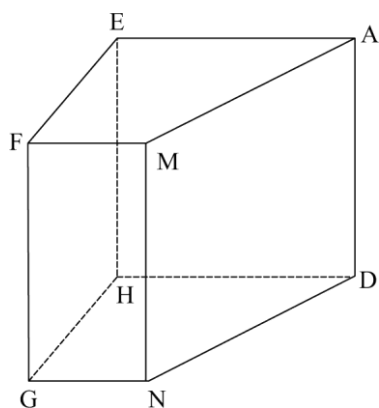
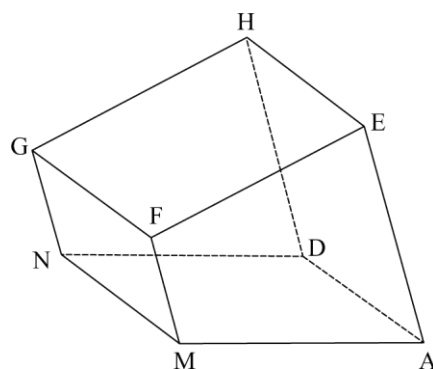


図 3



解答欄

問 1	
問 2	cm^2
問 3	cm^3

解答

問1 ア, エ

問2 $2\sqrt{5}$ (cm²)

問3 $\frac{8}{3}$ (cm³)

解説

問2

$\angle DAM = \angle AMN = \angle MND = \angle NDA = 90^\circ$ だから、四角形 AMND は長方形である。

$\triangle ABM$ についての三平方の定理より、 $AM^2 = BM^2 + AB^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ $AM > 0$ より、 $AM = \sqrt{5}$ cm

よって、長方形 AMND = $AM \times AD = 2\sqrt{5}$ (cm²)

問3

四角すいなので、底面は四角形である。

右の図のように、四角形 MADN を底面とみると、面 $MADN \perp \triangle EMA$ より、この四角すいの高さは、

MA を底辺とみた $\triangle EMA$ の高さに等しい。

元の立方体において、 $\triangle ABM \cong \triangle EFM$ だから、

問2 より $EM = AM = \sqrt{5}$ cm EA の中点を N とすると、

$\triangle EMA$ は二等辺三角形だから、 $EA \perp MN$ よって、

四角形 FMNE は長方形だから、 $MN = FE = 2$ cm となり、

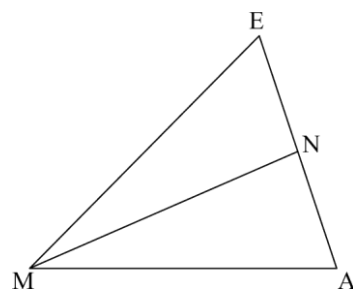
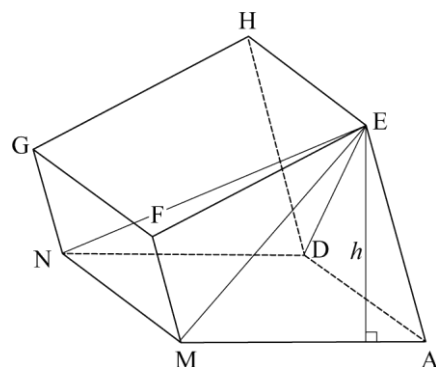
$\triangle EMA = EA \times MN \div 2 = 2$ (cm²) MA を底辺とみて、

$\triangle EMA$ の高さ、つまり四角すい EAMND の高さを h cm とおくと、

$$\triangle EMA = MA \times h \div 2 = 2 \quad h = \frac{4}{\sqrt{5}}(\text{cm})$$

よって、問2 の結果とから、四角すい EAMND の体積

$$= \frac{1}{3} \times \text{長方形 MADN} \times h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{5} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{3}(\text{cm}^3)$$



【問 6】

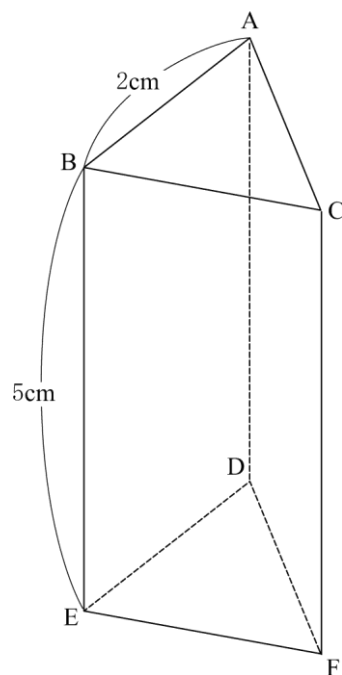
右の図は、1 辺が 2 cm の正三角形を底面とする高さ 5 cm の正三角柱 $ABC-DEF$ である。

(栃木県 2020 年度)

(1) 正三角形 ABC の面積を求めなさい。

(2) 辺 BE 上に $BG=2$ cm となる点 G をとる。また、辺 CF 上に $FH=2$ cm となる点 H をとる。

このとき、 $\triangle AGH$ の面積を求めなさい。



解答欄

(1)	cm ²
(2)	cm ²

解答

(1) $\sqrt{3}$ (cm²)

(2) $\sqrt{10}$ (cm²)

解説

(1)

正三角形 ABC を取り出して考える。

頂点 A から底辺 BC に対して垂線をおろし、その交点を P とする。

すると $\triangle ABP$ は $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABP = 60^\circ$,

$\angle APB = 90^\circ$ の直角三角形となる。

また, $BP = \frac{1}{2}BC = 1(\text{cm})$ であるから,

$$BP : AP = 1 : \sqrt{3} \Rightarrow 1 : AP = 1 : \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{3}(\text{cm}) \text{ よって,}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

(2)

直角三角形 ABG において三平方の定理により,

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$\Rightarrow AG > 0 \text{ より } AG = 2\sqrt{2}(\text{cm})$$

直角三角形 ACH において三平方の定理により,

$$AH^2 = AC^2 + CH^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$\Rightarrow AH > 0 \text{ より } AH = \sqrt{13}(\text{cm})$$

H から辺 BE に垂線をおろし、その交点を I とする。

四角形 IEFH は長方形となるので, $GI = 1(\text{cm})$, $IH = EF = 2(\text{cm})$

直角三角形 GIH において三平方の定理により,

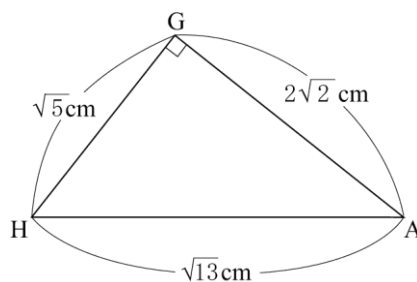
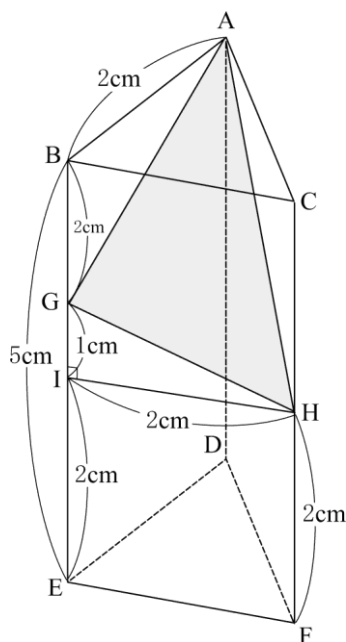
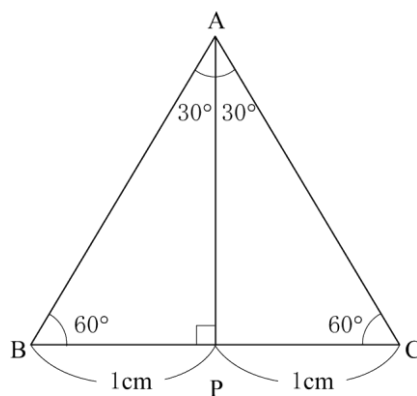
$$GH^2 = GI^2 + IH^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\Rightarrow GH > 0 \text{ より } GH = \sqrt{5}(\text{cm})$$

ここで $(\sqrt{13})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2$ となるので,

$\triangle AGH$ は $\angle AGH = 90^\circ$ の直角三角形。

$$\text{よって, } \triangle AGH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}(\text{cm}^2)$$



【問 7】

図 1 の直方体 $ABCD-EFGH$ は、 $AB=2\text{ m}$ 、 $AD=4\text{ m}$ 、 $AE=3\text{ m}$ である。次の問 1、問 2 に答えなさい。

(群馬県 2020 年度 後期)

問 1 この直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

問 2 図 1 の直方体の面に沿って、図 2 のように点 A から点 G まで次のア、イの 2 通りの方法で糸をかける。

- ア 点 A から辺 BC 上の 1 点を通して点 G までかける。
イ 点 A から辺 BF 上の 1 点を通して点 G までかける。

次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

- (1) ア、イの方法のそれぞれにおいて、糸の長さが最も短くなるように糸をかける。かけた糸の長さが短い方をア、イから選び、記号で答えなさい。また、そのときの点 A から点 G までの糸の長さを求めなさい。
- (2) ア、イの方法のそれぞれにおいて、糸の長さが最も短くなるように糸をかけたときに、かけた糸の長さが長い方を考える。そのかけた糸が面 $BFGC$ を通る直線を ℓ とするとき、点 C と直線 ℓ との距離を求めなさい。

図 1

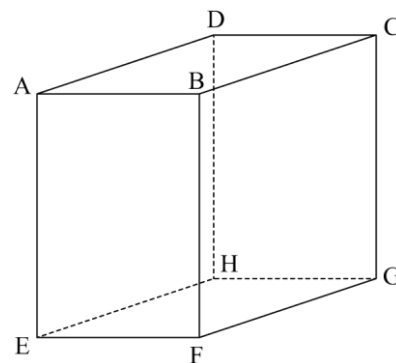
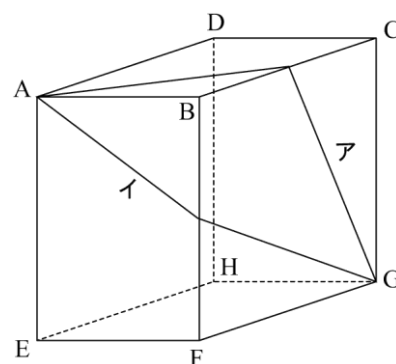


図 2



解答欄

問 1	m	
問 2	(1)	記号 , 長さ m
	(2)	m

解答

問 1 $\sqrt{29}$ (m)

問 2

(1) (記号) $\mathcal{A}$ (, 長さ) $\sqrt{41}$ (m)

(2) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ (m)

解説

問 2

(1)

$\mathcal{A}$ の方法でかけた糸の長さが最も短くなるとき, その長さは面 DABC と面 CBF $\bar{G}$ を展開した図 3 において A と G を直線で結んだ長さである。

よって図 3 において, 直角三角形 GAF において三平方の定理により, $AG^2 = AF^2 + GF^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow AG > 0$ より $AG = \sqrt{41}$ (m)

同様に, $\mathcal{I}$ の方法でかけた糸の長さが最も短くなるとき, その長さは面 AEFB と面 BFGC を展開した図 4 において A と G を直線で結んだ長さである。

よって図 4 において, 直角三角形 AEG において三平方の定理により,

$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 3^2 + 6^2 = 45 \Rightarrow AG > 0$ より $AG = 3\sqrt{5}$ (m)

よって, かけた糸の長さが短いのは $\mathcal{A}$ であり, その長さは $\sqrt{41}$ (m) である。

(2)

かけた糸の長さが長い $\mathcal{I}$ の方で考える。

図 5 において, 点 C から直線 ℓ に垂線をおろし, 直線 ℓ との交点を P とする。

点 C と直線 ℓ との距離は線分 CP の長さなので, これを求めればよい。

$\triangle ACG$ と $\triangle CPG$ において, $\angle ACG = \angle CPG = 90^\circ$

共通な角だから $\angle AGC = \angle CGP$

よって, 2 組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle ACG \sim \triangle CPG$

したがって, $AG : CG = AC : CP \Rightarrow 3\sqrt{5} : 3 = 6 : CP$

$\Rightarrow CP = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ (m)

図 3

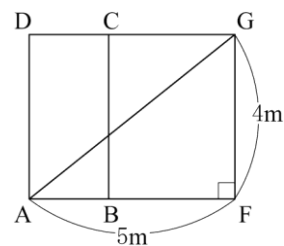


図 4

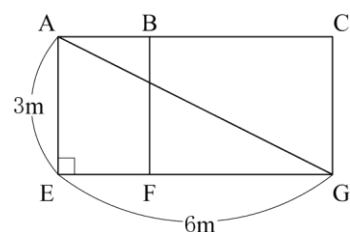
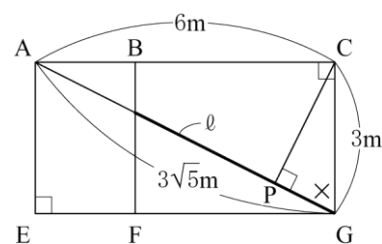


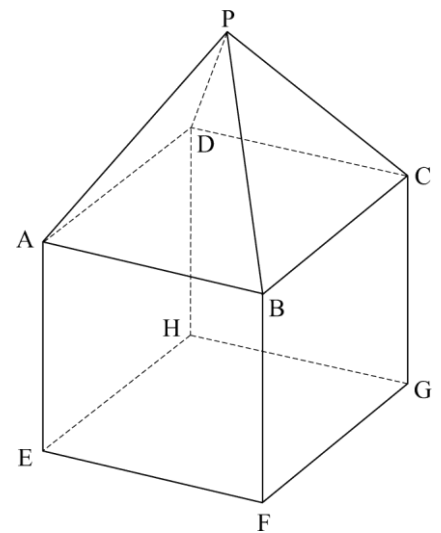
図 5



右の図 1 は、正四角錐と立方体を合わせた立体で、頂点をそれぞれ、点 P, A, B, C, D, E, F, G, H とします。

(埼玉県 2020 年度)

問2 辺 AE とねじれの位置にある辺の本数を求めなさい。



A 3D diagram of a rectangular prism with a pyramid on top. The prism has vertices A, B, C, D, E, F, G, H. The pyramid has apex P and base vertices B, C, D. Point Q is on the edge PC. Dashed lines represent hidden edges and diagonals.

解答欄

問 1	cm^3
問 2	本
問 3	〔説明〕 答え PQ : QC =

解答

問 1 $\frac{4\sqrt{2}}{3} + 8$ (cm³)

問 2 6 (本)

問 3

〔説明〕

平面 PAEGC において、EQ の延長と GC の延長の交点を R、AC の中点を I とすると、ER は点 I を通るので、CR=2 となる。

また、△PQI と △CQR において

対頂角は等しいので

$$\angle PQI = \angle CQR \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいので

$$\angle PIQ = \angle CRQ \cdots \textcircled{2}$$

①、②から

2 組の角がそれぞれ等しいので

△PQI ∽ △CQR

したがって

$$PQ : QC = PI : CR = \sqrt{2} : 2$$

(答え PQ : QC =) $\sqrt{2} : 2$

解説

問 3

この立体が平面 PAEGC について対称であることに着目する。

△EBD についても平面 PAEGC について対称なので、切り口である四角形 QDEB も平面 PAEGC について対称となる。

よって、直線 EQ は平面 QDEB だけでなく、平面 PAEGC 上にもある。

ここで、平面 PAEGC において、EQ の延長と GC の延長の交点を R、EQ と AC の交点を I とする。

四角形 QDEB が平面 PAEGC について対称ということは、線分 EQ について対称であるので、

DI=IB よって、正方形 ABCD の対角線の性質より、

AI=IC=DI=IB、AC ⊥ DB である。

$$\text{したがって、直角二等辺三角形 ABI において、} AI : AB = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow AI : 2 = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow AI = \sqrt{2}$$

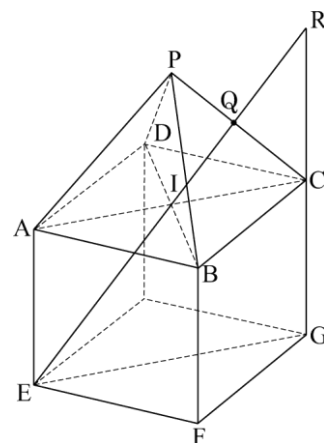
$$\text{直角三角形 API において三平方の定理により、} PI^2 = PA^2 - AI^2 = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\Rightarrow PI > 0 \text{ より } PI = \sqrt{2}$$

$$\text{また、} AE // RC \text{ より、平行線と線分の比から、} AE : CR = AI : CI = 1 : 1 \Rightarrow CR = AE = 2$$

AC ⊥ PI、AC ⊥ RC より、PI // RC より、平行線と線分の比から、

$$PQ : CQ = PI : CR = \sqrt{2} : 2$$



【問 9】

右の図 1 に示した立体 $ABCD-EFGH$ は、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$ 、 $AE=12\text{ cm}$ の直方体である。

頂点 C と頂点 F を結び、線分 CF 上にある点を P とする。辺 AB 上にあり、頂点 B に一致しない点を Q とする。頂点 D と点 P 、頂点 D と点 Q 、点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2020 年度)

問 1 次の 中の「く」「け」「こ」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

点 P が頂点 F と、点 Q が頂点 A とそれぞれ一致するとき、

$\triangle DQP$ の面積は、 $\sqrt{\text{こ}}$ cm^2 である。

問 2 次の 中の「さ」「し」「す」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の図 2 は、図 1 において、点 Q を通り辺 AE に平行な直線を引き、辺 EF との交点を R とし、頂点 H と点 P 、頂点 H と点 R 、点 P と点 R をそれぞれ結んだ場合を表している。

$AQ=4\text{ cm}$ 、 $CP:PF=3:5$ のとき、立体 $P-DQRH$ の体積は、 cm^3 である。

図 1

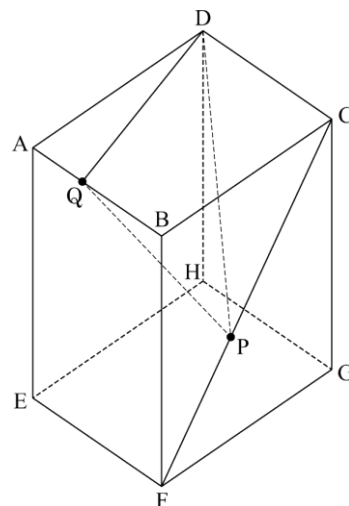
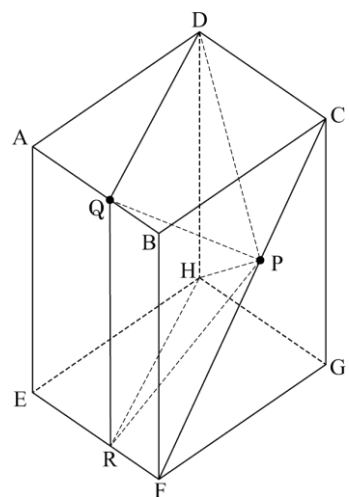


図 2



解答欄

問 1	$\sqrt{\text{こ}}$	く	
		け	
		こ	
問 2		さ	
		し	
		す	

解答

問 1

く 2

け 4

こ 5

問 2

さ 1

し 4

す 4

解説

問 1

点 P と頂点 F, 点 Q と頂点 A が一致することから, $\triangle DQP$ は $\triangle DAF$ と等しい。

$\triangle AFB$ において, $AB=6\text{cm}$, $BF=AE=12\text{cm}$, $\angle ABF=90^\circ$ だから, 三平方の定理より,

$$AF^2=AB^2+BF^2=6^2+12^2=180 \quad \text{よって, } AF=6\sqrt{5}\text{cm}$$

$\triangle DAF$ において, $\angle DAF=90^\circ$, $AD=8\text{cm}$ だから, $\triangle DAF$ の面積は

$$AD \times AF \times \frac{1}{2} = 8 \times 6\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = 24\sqrt{5}\text{cm}^2$$

問 2

四角形 $DQRH$ を底面とする四角錐と考えて体積を求める。

図 2 の立体に, 点 P を通り辺 BF に平行な直線を引き, 辺 BC との交点を S とする。また, 点 S から線分 DQ に垂直な直線を引き, 線分 DQ との交点を T とすると, 線分 TS の長さが四角錐の高さとなる。

$\triangle CFB$ において, 仮定から $CP:PF=3:5$

$BF \parallel SP$ だから, $CS:SB=CP:PF=3:5$

$$\text{したがって, } CS=CB \times \frac{3}{8} = 8 \times \frac{3}{8} = 3(\text{cm}),$$

$$SB=CB-CS=8-3=5(\text{cm})$$

四角形 $ABCD$ において, 辺 CB , 線分 DQ を延長した直線を引き, 2 直線の交点を U とする。

$\angle DAQ=\angle UBQ=90^\circ$, 対頂角だから $\angle DQA=\angle UQB$ なので,

$\triangle ADQ \sim \triangle BUQ$

$AQ=4\text{cm}$, $BQ=AB-AQ=6-4=2(\text{cm})$ だから, 相似比は

$$AQ:BQ=4:2=2:1$$

$$\text{したがって, } BU=AD \times \frac{1}{2} = 8 \times \frac{1}{2} = 4(\text{cm})$$

$\triangle BUQ$ において, 三平方の定理より,

$$UQ^2=BU^2+BQ^2=4^2+2^2=20$$

$$UQ=2\sqrt{5}\text{cm}$$

また, $\angle UBQ=\angle UTS=90^\circ$, $\angle U$ は共通だから

$\angle BUQ=\angle TUS$ なので,

$\triangle BUQ \sim \triangle TUS$

相似比は $UQ:US=2\sqrt{5}:9$ だから,

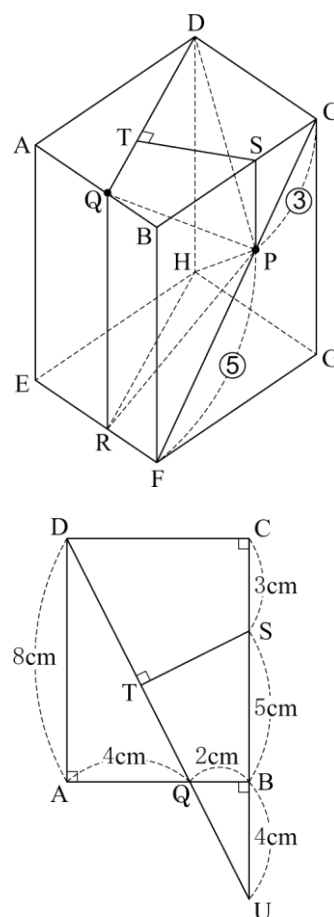
$$TS=BQ \times \frac{9}{2\sqrt{5}} = 2 \times \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}(\text{cm})$$

$\triangle ADQ \sim \triangle BUQ$ より $DQ=UQ \times 2=2\sqrt{5} \times 2=4\sqrt{5}(\text{cm})$, $QR=AE=12\text{cm}$ だから,

四角形 $DQRH$ の面積は, $DQ \times QR=4\sqrt{5} \times 12=48\sqrt{5}(\text{cm}^2)$

したがって, 立体 $P-DQRH$ の体積は, $48\sqrt{5} \times \frac{9\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{3} = 144(\text{cm}^3)$

図 2



〈別解〉

立体 $P-DQRH$ は直方体 $ABCD-EFGH$ から、三角柱 $AQD-ERH$ 、四角錐 $P-QRFB$ 、四角錐 $P-RFGH$ 、四角錐 $P-CGHD$ 、四角錐 $P-QBCD$ を除いたものである。

直方体 $ABCD-EFGH$ の体積は、 $8 \times 6 \times 12 = 576(\text{cm}^3)$

三角柱 $AQD-ERH$ の体積は、 $\frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times 12 = 192(\text{cm}^3)$

点 P から辺 BF 、 FG 、 GC 、 CB に引いた垂線と各辺との交点をそれぞれ S 、 T 、 U 、 V とする。

$CP : PF = 3 : 5$ より、 $PS = 8 \times \frac{5}{8} = 5$ 、 $PT = 12 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{2}$ 、

$PU = 8 - PS = 3$ 、 $PV = 12 - PT = \frac{9}{2}$

四角錐 $P-QRFB$ は、長方形 $QRFB$ を底面、線分 PS を高さとする四角錐だから、体積は

$$\frac{1}{3} \times QR \times QB \times PS = \frac{1}{3} \times 12 \times 2 \times 5 = 40(\text{cm}^3)$$

四角錐 $P-RFGH$ は、台形 $RFGH$ を底面、線分 PT を高さとする四角錐だから、体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{(RF + HG) \times FG}{2} \times PT = \frac{1}{3} \times \frac{(2 + 6) \times 8}{2} \times \frac{15}{2} = 80(\text{cm}^3)$$

四角錐 $P-CGHD$ は、長方形 $CGHD$ を底面、線分 PU を高さとする四角錐だから、体積は

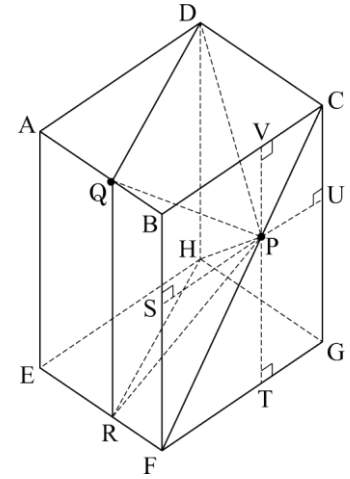
$$\frac{1}{3} \times CG \times CD \times PU = \frac{1}{3} \times 12 \times 6 \times 3 = 72(\text{cm}^3)$$

四角錐 $P-QBCD$ は、台形 $QBCD$ を底面、線分 PV を高さとする四角錐だから、体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{(QB + DC) \times BC}{2} \times PV = \frac{1}{3} \times \frac{(2 + 6) \times 8}{2} \times \frac{9}{2} = 48(\text{cm}^3)$$

以上より、立体 $P-DQRH$ の体積は

$$576 - (192 + 40 + 80 + 72 + 48) = 144(\text{cm}^3)$$



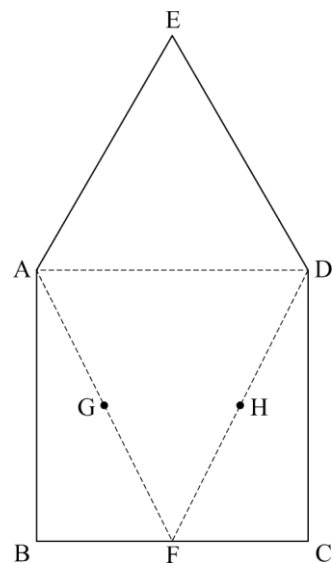
【問 10】

右の図の五角形 $ABCDE$ はある三角すいの展開図であり、 $AB=BC=CD=DE=EA=6\text{ cm}$ 、 $\angle B=\angle C=90^\circ$ である。

また、点 F は線分 BC の中点であり、2 点 G 、 H はそれぞれ線分 AF 、 DF の中点である。

この展開図を 3 点 B 、 C 、 E が重なるように組み立てたときの三角すいについて、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2020 年度)



問 1 この三角すいの表面積として正しいものを次の 1～6 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

1 $(18+3\sqrt{3})\text{cm}^2$

2 $(18+6\sqrt{3})\text{cm}^2$

3 $(18+9\sqrt{3})\text{cm}^2$

4 $(36+3\sqrt{3})\text{cm}^2$

5 $(36+6\sqrt{3})\text{cm}^2$

6 $(36+9\sqrt{3})\text{cm}^2$

問 2 この三角すいの体積として正しいものを次の 1～6 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

1 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^3$ 2 $3\sqrt{3}\text{cm}^3$ 3 $\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{cm}^3$

4 12cm^3 5 $9\sqrt{3}\text{cm}^3$ 6 18cm^3

問 3 3 点 B 、 C 、 E が重なった点を I とする。この三角すいの表面上に、点 G から辺 AI 、辺 DI と交わるように点 H まで、長さが最も短くなるように線を引いたときの線の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	
問 2	
問 3	cm

解答

問 1 6

問 2 5

問 3 $\left(3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ cm

解説

問 2

右図のような底面を $\triangle ADE$ 、高さを BF (CF)とした三角すいとなるので、その体積は $\triangle ADE$ が 1 辺 6cm の正三角形であることから、

$$\triangle ADE = 6 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 9\sqrt{3} (\text{cm}^2) \text{ より,}$$

$$9\sqrt{3} \times 3 \times \frac{1}{3} = 9\sqrt{3} (\text{cm}^3)$$

問 3

一本の直線として考えるために、右図のように面 ABF 、面 DCF を移動した展開図を考えると、求める線分の長さは線分 GH の長さに等しい。

ここで、点 F, F' から辺 AD に垂線 $FI, F'J$ を下ろし、また同様に、点 E を通り、 AD, FF' に垂線 EK, EL を下ろす。また、図のように交点 M, N, P をとる。

$$\angle FEL = 60^\circ, EF = 3\text{cm} \text{ より, } EL = \frac{3}{2}\text{cm}, FL = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm} \text{ なので, } IK =$$

$$MP = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}$$

$$AK = 3\text{cm} \text{ より, } AI = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} (\text{cm})$$

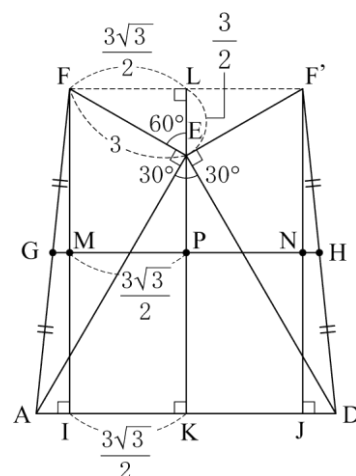
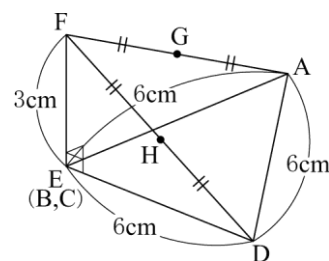
ここで、点 G, H はそれぞれ $FA, F'D$ の中点であることから、 $FF' \parallel GH \parallel AD$ とわかる。したがって、 M, N もそれぞれ $FI, F'J$ の中点とわかる。よって、 $\triangle FAI$ にて、点 G, M はそれぞれ FA, FI の中点なので、中点連結定理より、

$$GM = AI \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} (\text{cm})$$

$$\text{よって, } GP = GM + MP = \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} (\text{cm})$$

さらに図形は左右対称なので、 $GP = HP$ より、

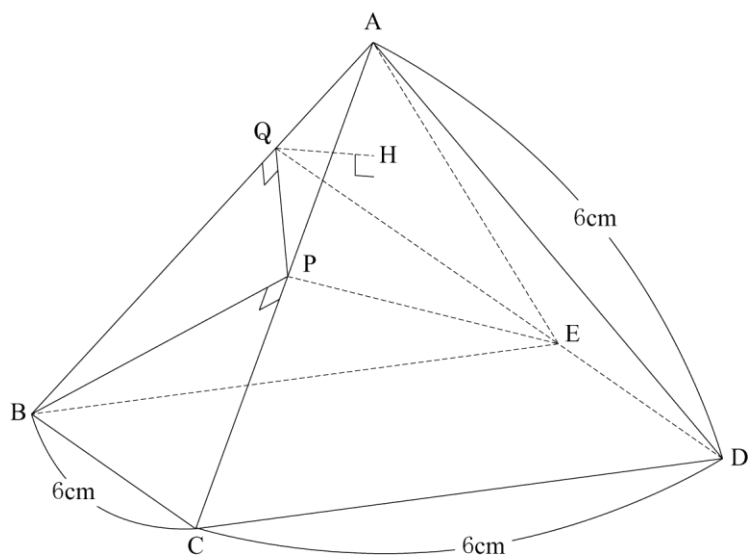
$$\text{求める線分の長さは } GH = 2 \times GP = 2 \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} (\text{cm})$$



【問 11】

下の図のように、1 辺の長さが 6 cm の正方形を底面とし、 $AB=AC=AD=AE=6$ cm の正四角すい $ABCDE$ がある。辺 AC 上に $\angle BPC=90^\circ$ となる点 P をとり、辺 AB 上に $\angle BQP=90^\circ$ となる点 Q をとる。また、点 Q から $\triangle APE$ に引いた垂線と、 $\triangle APE$ との交点を H とする。このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。

(新潟県 2020 年度)



問 1 次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 線分 BP の長さを答えなさい。

(2) $\triangle ABC$ の面積を答えなさい。

問 2 線分 AQ の長さを求めなさい。

問 3 次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 線分 QH の長さを求めなさい。

(2) 四面体 $APEQ$ の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	(1)	cm
	(2)	cm ²
問 2	[求め方]	
	答 cm	
問 3	(1)	[求め方]
		答 cm
	(2)	[求め方]
		答 cm ³

解答

問 1

$$(1) 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$(2) 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

問 2

〔求め方〕

BP は $\angle ABC$ の二等分線だから、P は AC の中点である。よって、 $AP = 3 \text{ cm}$

また、 $\angle AQP = 90^\circ$ で $\angle BAC = 60^\circ$ より

$$AQ : AP = 1 : 2$$

よって、 $AQ : 3 = 1 : 2$

$$AQ = \frac{3}{2}$$

$$\text{答 } \frac{3}{2} \text{ cm}$$

問 3

(1)

〔求め方〕

CE と BD の交点を I とする。

$\angle AIB = 90^\circ$ で $BD \perp CE$ より $BI \parallel QH$

よって、 $\triangle ABI \sim \triangle AQH$

$$AQ : AB = \frac{3}{2} : 6 = 1 : 4$$

$$BD = 6\sqrt{2} \text{ だから}$$

$$BI = \frac{1}{2} \times BD = 3\sqrt{2}$$

$QH : BI = AQ : AB$ より

$$QH : 3\sqrt{2} = 1 : 4$$

$$\text{よって、} QH = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{答 } \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ cm}$$

(2)

〔求め方〕

三平方の定理より

$$AI^2 = AB^2 - BI^2 \quad \text{よって、} AI = 3\sqrt{2}$$

$$\triangle ACE \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times CE \times AI = 18$$

また、点 P は AC の中点だから

$\triangle APE$ の面積は 9 よって四面体 APEQ の体積は

$$\frac{1}{3} \times 9 \times \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{答 } \frac{9\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^3$$

解説

問 1

(1)

$\triangle BCP$ は $\angle C = 60^\circ$ で辺の比が決まった直角三角形であり、 $BC : BP = 2 :$

$$\sqrt{3} \quad BP = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

(2)

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BP = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

問 2

BP は $\angle CBA$ の二等分線であるので、 $\angle ABP = 30^\circ$ であり、

$\triangle BQP$ も辺の比が決まった直角三角形であることから、 $BP : BQ =$

$$2 : \sqrt{3} \quad BQ = \frac{9}{2} \text{ (cm)} \quad \text{よって、} AQ = AB - BQ = \frac{3}{2} \text{ (cm)}$$

問 3

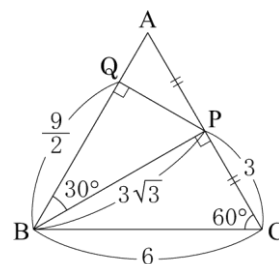
(1)

$\triangle APE$ が平面 ACE 上にあることに注目すると、点 Q から $\triangle APE$ に垂線を引くということは、点 Q から平面 ACE に垂線を引くことと同義である。そこで、同じ平面 ACE に対して点 B から垂線 BI を引いてみる。 $BI \perp CE$ であり、 $\triangle BCE$ は $BC = BE$ の二等辺三角形であることから、 $CI = EI$ となることがわかる。あとは、 $QH // BI$ であることから平行線と線分の比を使えばよい。

(2)

問 3 (1) で垂線 QH の長さを求めたことから、あとは底面積である $\triangle AEP$ の面積を求めればよいことが分かる。ここまでの問を解いていくなかで、点 P が辺 AC の中点であることがわかるので、 $\triangle AEP$ の面積が $\triangle ACE$ の面積の半分であることを利用する。

図 1



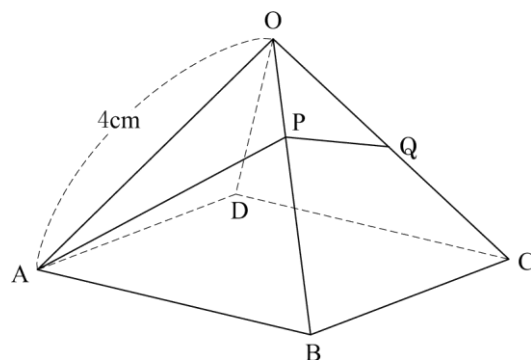
【問 12】

右の図のように，すべての辺が 4 cm の正四角すい OABCD があり，辺 OC の中点を Q とする。

点 A から辺 OB を通って， Q までひもをかける。このひもが最も短くなるときに通過する OB 上の点を P とする。

このとき，次の問いに答えなさい。

(富山県 2020 年度)



問 1 $\triangle\text{OAB}$ の面積を求めなさい。

問 2 線分 OP の長さを求めなさい。

問 3 正四角すい OABCD を，3 点 A ， C ， P を通る平面で 2 つに分けたとき，点 B をふくむ立体の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	cm^2
問 2	cm
問 3	cm^3

解答

問1 $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

問2 $2\frac{4}{3} \text{ cm}$

問3 $\frac{32\sqrt{2}}{9} \text{ cm}^3$

解説

問1

$\triangle OAB$ は正三角形である (図2)。O から AB に垂線 OM を下ろすと、 $AM=2$ である。また、 $\triangle OMA$ は $\angle A=60^\circ$ の直角三角形であり、

$$AM : OM = 1 : \sqrt{3} \quad OM = 2\sqrt{3} \quad \text{よって、} \triangle OAB = \frac{1}{2} \times AB \times OM \\ = 4\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

問2

$\triangle OAB$ と $\triangle OBC$ を含む部分的な展開図を考える (図3)。
 $\triangle OAB$ も $\triangle OBC$ も正三角形であるので、四角形 $OABC$ はひし形である。
この展開図における OB と AC の交点を R とすると、 R は AC の中点である。また、 Q も OC の中点であることから、中点連結定理より、 $QR \parallel OA$ であり、 $QR : OA = 1 : 2$ である。よって、 $\triangle OAP \sim \triangle RQP$ より対応する辺の比は等しく、

$$OP : PR = OA : QR = 2 : 1 \text{ である。} \quad OR = \frac{1}{2}OB = 2 \text{ であり、}$$

$$OP = \frac{2}{3}OR = \frac{4}{3}(\text{cm})$$

問3

B をふくむ立体は、三角すい $PABC$ である。底面を $\triangle ABC$ とみなし、高さを求める。点 O から

底面 $ABCD$ に垂線 OH を下ろすと (図4)、点 H は正方形 $ABCD$ の対角線の交点である。 $\triangle ABC$ が

直角二等辺三角形であることから、 $AC = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$ で $AH = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$ である。 $\triangle OAH$ で三平方の

定理を用いて、 $OA^2 = OH^2 + AH^2 \quad 16 = 8 + OH^2 \quad OH = 2\sqrt{2}$ である。ここで、点 P から底面 $ABCD$ に垂線 PH' を下ろすと、 H' は線分 HB 上にある (図5)。 $\triangle OHB \sim \triangle PH'B$ より対応する辺の比は等しく、

$$OH : PH' = OB : PB \text{ である。問2 より } OP = \frac{4}{3} \text{ であり、} \quad PB = OB - OP = 4 - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8}{3} \text{ であることから比の式は } 2\sqrt{2} : PH' = 4 : \frac{8}{3} \quad PH' = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ である。よって求める立体の体積は、}$$

$$\text{三角すい } PABC = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times PH' = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}(\text{cm}^3)$$

図2

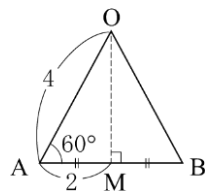


図3

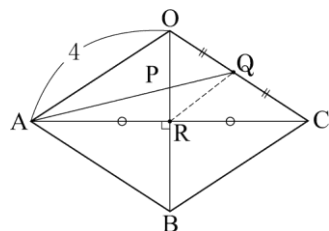


図4

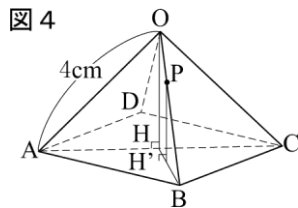
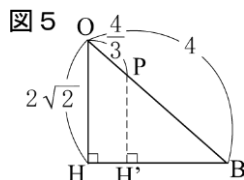


図5



【問 13】

図 1 ～ 図 3 のように、 $AB=BC=CA=6\text{ cm}$ 、 $OA=OB=OC$ の正三角錐 $OABC$ がある。

このとき、次の問 1 ～ 問 3 に答えなさい。

(石川県 2020 年度)

問 1 図 1 において、辺 OB とねじれの位置にある辺を書きなさい。

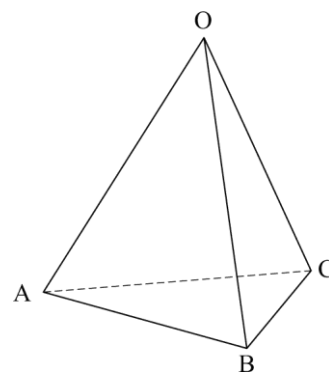


図 2

問 2 図 2 において、 $OA=6\text{ cm}$ とし、辺 BC の中点を D とする。このとき、 $\triangle OAD$ の面積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

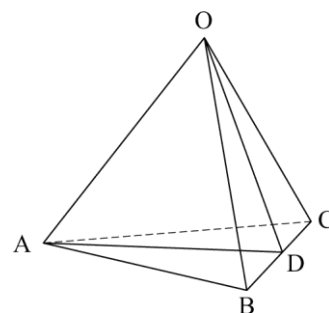
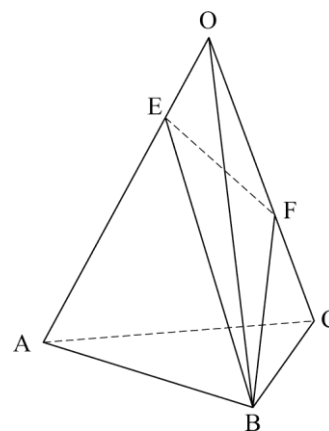


図 3

問 3 図 3 において、 $OA=8\text{ cm}$ とし、辺 OA 上に点 E を、辺 OC 上に点 F を、 $OF=2OE$ となるようにとる。平面 EBF でこの立体を 2 つに分け、点 A を含むほうの立体の体積が、点 O を含むほうの立体の体積の 2 倍になるとき、 OE の長さを求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。



解答欄

問 1	
問 2	〔計算〕 答 cm^2
問 3	〔計算〕 答 cm

解答

問 1 辺 AC

問 2

〔計算〕

$$AD=OD=3\sqrt{3}$$

点 D から辺 OA に垂線をひくと

$$\text{その長さは } \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{よって 求める面積は } \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

$$\text{〔答〕 } 9\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

問 3

〔計算〕

$\triangle OEF$ を底面とした三角錐 $BOEF$ と $\triangle OAC$ を底面とした三角錐 $OABC$ は、高さが共通だから

$\triangle OEF$ の面積は、 $\triangle OAC$ の面積の $\frac{1}{3}$ 倍になる。

$$OE = x \text{ cm}, \triangle OAC = S \text{ cm}^2 \text{ とおくと}$$

$$OC : OF = 8 : 2x \text{ より } \triangle OAF = \frac{2x}{8}S$$

$$OA : OE = 8 : x \text{ より } \triangle OEF = \frac{x}{8} \times \triangle OAF$$

$$\triangle OEF = \frac{1}{3}S \text{ より } \frac{1}{3}S = \frac{x}{8} \times \frac{2x}{8}S$$

$$x^2 = \frac{32}{3}$$

$$\text{よって } x = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{〔答〕 } \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

解説

問 3

三角錐と四角錐に分けられる。底面をそれぞれ $\triangle OEF$ 、四角形 $EACF$ とすると、両者の高さは等しいので、底面積の比がそのまま体積の比である。

【問 14】

図 1 の伝票立てを見て，この形に興味をもった桜さんは，底面の円の半径が 2 cm の円柱を，斜めに平面で切った図 2 の立体 P について考えた。図 3 は P の投影図である。ただし， $AD=5$ cm， $AB=BC$ であり，四角形 ABCD は， $\angle B=\angle C=90^\circ$ の台形であるものとする。

(長野県 2020 年度)

(1) CD の長さを求めなさい。

(2) P の体積を求めなさい。

図 1

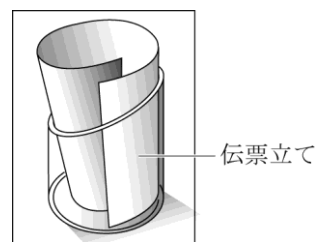


図 2

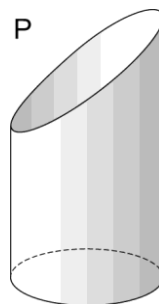
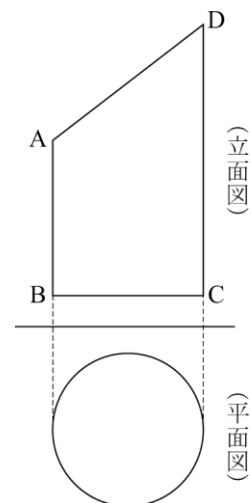


図 3



解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³

解答

(1) 7 (cm)

(2) 22π (cm³)

【問 15】

図 4 の立体は、1 辺の長さが 4 cm の立方体である。

このとき、次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(静岡県 2020 年度)

問 1 辺 AE とねじれの位置にあり、面 ABCD と平行である辺はどれか。すべて答えなさい。

問 2 この立方体において、図 5 のように、辺 EF の中点を L とする。線分 DL の長さを求めなさい。

問 3 この立方体において、図 6 のように、辺 AD, BC の中点をそれぞれ M, N とし、線分 MN 上に $MP = 1$ cm となる点 P をとる。四角形 AFGD を底面とする四角すい PAFGD の体積を求めなさい。

図 4

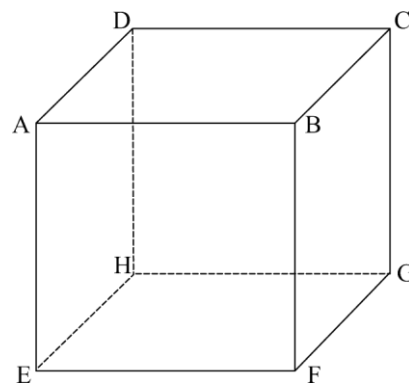


図 5

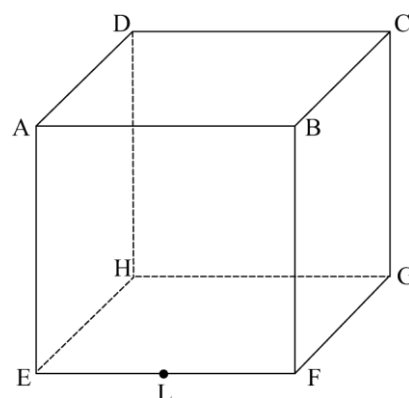
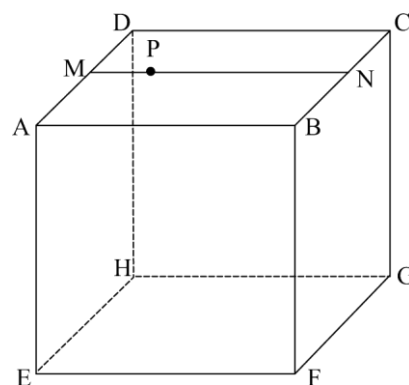
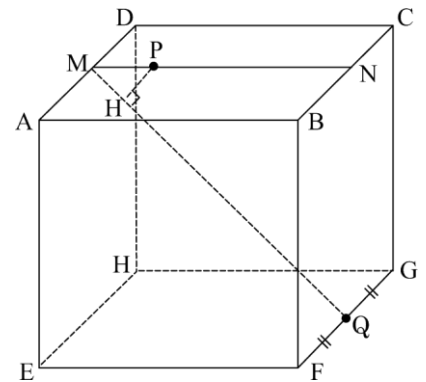


図 6



解答欄

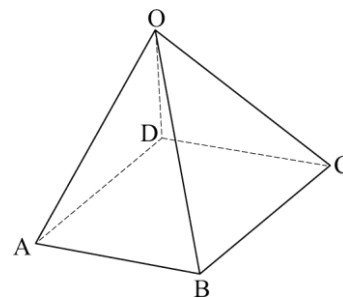
問 1	
問 2	cm
問 3	cm ³



【問 16】

図で、立体 $OABCD$ は、正方形 $ABCD$ を底面とする正四角すいである。
 $OA=9\text{ cm}$ 、 $AB=6\text{ cm}$ のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(愛知県 A 2020 年度)



(1) 正四角すい $OABCD$ の体積は何 cm^3 か、求めなさい。

(2) 頂点 A と平面 OBC との距離は何 cm か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1) $36\sqrt{7}\text{ cm}^3$

(2) $\frac{3\sqrt{14}}{2}\text{ cm}$

解説

(1)

一般に、正四角すいにおいて、正方形の面を底面としたときの高さは、頂点と底面である正方形の対角線の交点を結んだ線分となる。

よって高さを OH としたとき、正方形の対角線の性質より $AH = \frac{1}{2}AC$ である。

また、直角二等辺三角形 ABC において、三角形の辺の比により、

$$AB : AC = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow 6 : AC = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、} AH = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

また、直角三角形 OAH において三平方の定理により、

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 9^2 - (3\sqrt{2})^2 = 63 \Rightarrow OH > 0 \text{ より、} OH = 3\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、正四角すい } OABCD \text{ の体積は、} (6 \times 6) \times 3\sqrt{7} \times \frac{1}{3} = 36\sqrt{7} \text{ (cm}^3\text{)}$$

正四角すいと正三角すいの体積の求め方

① 正四角すいの体積 … ポイントは「高さ」

・高さの求め方

→図 1 のように、正方形の面を底面としたときの高さは、頂点と底面である正方形の対角線の交点を結んだ線分となる。

② 正三角すいの体積 … ポイントは「底面積」と「高さ」

・底面積の求め方

→底面は正三角形であり、図 2 のように、底辺 BC に対しての高さを AD とすると、 $\triangle ABD$ は 3 つの内角が 30° 、 60° 、 90° の直角三角形になるから、辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ であることを利用して高さ AD を求めることができる。

・高さの求め方

→図 3 のように、正三角形の面を底面としたときの高さは、底面である正三角形において、3 つの頂点から向かい合う辺にそれぞれひいた垂線の交点を通る。

図 2 に正三角形 ABC の 3 つの頂点から向かい合う辺にそれぞれひいた垂線の交点 H をかき加えたものが図 4 である。 $\triangle HBD$ は 3 つの内角が 30° 、 60° 、 90° の直角三角形になるから、辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ であることを利用して BH の長さを求めることができる。

図 3 において、直角三角形 OBH で三平方の定理を用いると、正三角すいの高さ OH を求めることができる。

(2)

「頂点 A と平面 OBC との距離」は、「平面 OBC を底面としたときの三角すい $AOBC$ の高さ」のことである。三角すい $AOBC$ は正四角すい $OABCD$ を平面 OAC で切ったときにできる立体の 1 つであり、正四角すい $OABCD$ は平面 OAC に対して対称な立体なので、三角すい $AOBC$ の体積は正四角すい $OABCD$ の体積の半分、つまり (1) より、 $36\sqrt{7} \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{7} \text{ (cm}^3\text{)}$ となる。これを

利用して、頂点 A と平面 OBC との距離を求める。
 $\triangle OBC$ において、頂点 O から底辺 BC に垂線をおろし、その交点を I とする。

$\triangle OBI$ において、二等辺三角形の性質により、 $BI = \frac{1}{2}BC = 3 \text{ (cm)}$ 、
 $\angle OIB = 90^\circ$ だから、

$$\text{三平方の定理により、} OI^2 = OB^2 - BI^2 = 9^2 - 3^2 = 72$$

$$\Rightarrow OI > 0 \text{ より、} OI = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、} \triangle OBC = 6 \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

ここで、三角すい $AOBC$ において平面 OBC を底面としたときの高さを $h \text{ cm}$

とすると、(三角すい $AOBC$ の体積) $= \triangle OBC \times h \times \frac{1}{3}$ が成り立つので、

$$18\sqrt{7} = 18\sqrt{2} \times h \times \frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{14}}{2} \text{ (cm)}$$

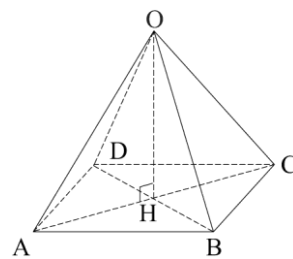


図 1

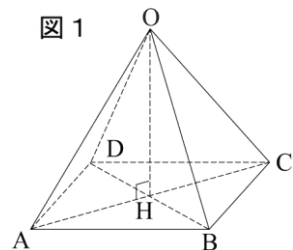


図 2

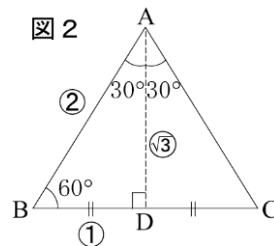


図 3

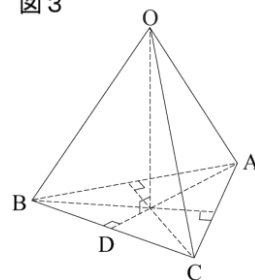
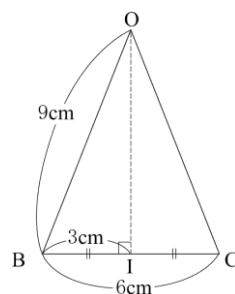
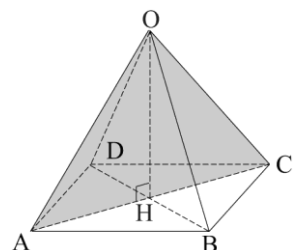
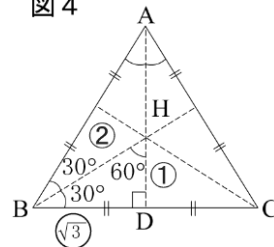


図 4



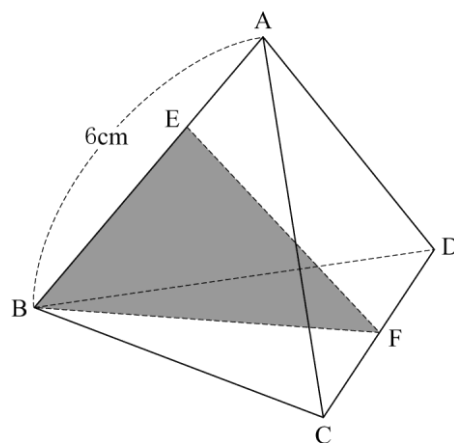
【問 17】

右の図のような、点 A, B, C, D を頂点とする正四面体 ABCD がある。辺 AB を 1 : 2 に分ける点 E, 辺 CD の中点 F をとり、3 点 B, E, F を結んで $\triangle BEF$ をつくる。

辺 AB の長さが 6 cm のとき、次の各問いに答えなさい。

なお、各問いにおいて、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい自然数にちなさい。

(三重県 2020 年度)



(1) 辺 BF の長さを求めなさい。

(2) 辺 BF を底辺としたときの $\triangle BEF$ の高さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm

解答

(1) $3\sqrt{3}$ cm

(2) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm

解説

(1)

$\triangle BCD$ は正三角形だから、 $\angle BFC=90$ 度、 $\angle BCF=60$ 度 よって、 $CF:FB=1:\sqrt{3}$

$$FB=\sqrt{3}CF=\sqrt{3}\times 6\div 2=3\sqrt{3}(\text{cm})$$

(2)

$\triangle BFC\equiv\triangle AFC$ だから、問 1 より $AF=BF=3\sqrt{3}\text{cm}$

よって、 $\triangle ABF$ は二等辺三角形だから、 AB の中点を

M とすると、 $FM\perp AB$ $\triangle FBM$ に関する三平方の定理より、 $FM^2=BF^2-BM^2=(3\sqrt{3})^2-(6\div 2)^2=18$

$$FM>0 \text{ より、} FM=3\sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{よって、} \triangle ABF=AB\times FM\div 2=9\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

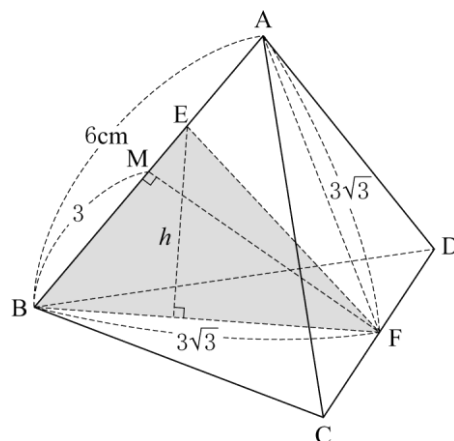
$$EB=\frac{2}{1+2}AB=\frac{2}{3}AB \text{ より、}$$

$$\triangle BFE=\frac{2}{3}\triangle ABF=6\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

求める高さを h とすると、 $BF\times h\div 2=6\sqrt{2}$

$$h=\frac{4\sqrt{6}}{3}\text{cm}$$

※別解として、 A 、 E から面 BCD にそれぞれ垂線 AH 、 EI をひき、 $\triangle BHA\sim\triangle BIE$ を利用して求める方法も考えられる。



【問 18】

右の図のように、直方体 $ABCD-EFGH$ があり、 $AB=AD=6\text{ cm}$ 、 $AE=12\text{ cm}$ である。2 点 P 、 Q をそれぞれ辺 BF 、 DH 上に $BP=DQ=3\text{ cm}$ となるようにとる。また、辺 AE 上に点 R を $CQ \parallel PR$ となるようにとる。

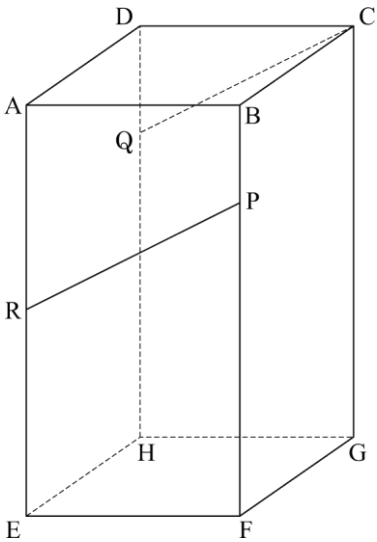
このとき、次の問 1～問 3 に答えよ。

(京都府 2020 年度 前期)

問 1 線分 PQ の長さを求めよ。

問 2 四角形 $CQRP$ の面積を求めよ。また、直線 CQ と直線 PR の距離を求めよ。

問 3 線分 AF と線分 PR との交点を S とし、線分 SF の中点を M とする。このとき、三角錐 $MCQP$ の体積を求めよ。



解答欄

問 1	cm
問 2	面積 cm ²
	距離 cm
問 3	cm ³

解答

問1 $6\sqrt{2}$ cm

問2

面積 $18\sqrt{6}$ cm^2

距離 $\frac{6\sqrt{30}}{5}$ cm

問3 27 cm^3

解説

問1

BP=DQ=3cm より, PQ=BD= $6\sqrt{2}$ cm

問2

右図のように四角形 CQRP を考えることができ, これを取り出して考えると, 直方体 ABCD-EFGH は底面が正方形なので, 四角形 CQRP はひし形とわかる。

ここで, 直角三角形 CDQ に着目すると,

CD=6cm, DQ=3cm より, 三平方の定理から, $CQ^2 = CD^2 + DQ^2$ よって, $CQ = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ (cm) よって, 四角形 CQRP は 1 辺 $3\sqrt{5}$ cm のひし形であるので, その面積を考える。

$\triangle CAR$ にて三平方の定理より, $CR^2 = CA^2 + AR^2$ より,

$CR^2 = (6\sqrt{2})^2 + 6^2 = 108$ $CR = 6\sqrt{3}$ cm また, 問1 より $PQ = 6\sqrt{2}$ cm なので, 四角形 CQRP の面積は, $\frac{1}{2} \times CR \times PQ = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{6}$ (cm^2)

また, 直線 CQ と直線 PR の距離は, 図のように点 P から線分 CQ に下ろした垂線の長さに等しいので, その長さを h cm とすると, $\triangle CQP$ の面積を用いて,

$$CQ \times h \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{6} \times \frac{1}{2} \quad \frac{3\sqrt{5}}{2}h = 9\sqrt{6} \quad h = \frac{18\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{30}}{5} \text{ (cm)}$$

問3

点 M から面 CQP に下ろした垂線の長さが三角錐 M-CQP の高さとなるので, まずこれを求めたい。

図①より, $\triangle SAR \sim \triangle SFP$ であり, その相似比は $AR : FP = 6 : 9 = 2 : 3$ したがって,

$AS : FS = 2 : 3$ さらに, 点 M は線分 SF の中点なので, $AS : SM : MF = 4 : 3 : 3$ と表せる。

また, 2 点 B, F からそれぞれ線分 AC, EG に垂線 BI, FJ を下ろしたとすると, 切断面 AEGC は図②のようになる。同様に, 2 点 S, M からそれぞれ切断面 AEGC に垂線 SS' , MM' を下ろすと, 線分 AJ 上に S' , M' はあり, 図

①と同じく $AS' : S'M' : M'J = 4 : 3 : 3$ となる。よって, 求める三角錐 M-CQP の高さは, 図②の点 M' から線分 CR に下ろした垂線 M'K に等しい。

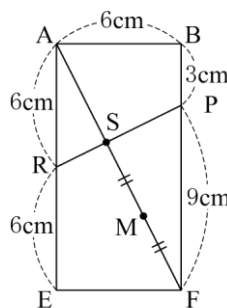
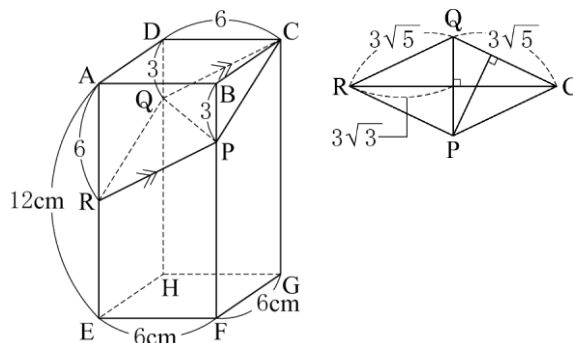
さらに, $\triangle CAR \sim \triangle ALR \sim \triangle CLA \sim \triangle GCA$ なので, $AG \perp CR$ とわかり, $\triangle ALR \sim \triangle GLC$ は相似比が $AR : GC = 6 : 12 = 1 : 2 = 4 : 8 \cdots$ (ア) また, $\angle ALS' = \angle M'KS' = 90^\circ$ より錯角は等しいことから $AG \parallel KM'$ なので, $\triangle S'KM' \sim \triangle S'LA$ であり, その相似比は $S'M' : S'A = 3 : 4$ したがって, $KM' : LA = 3 : 4 \cdots$ (イ)

以上, (ア), (イ) より, $KM' : AG = 3 : 12 = 1 : 4$ となり, $KM' = AG \times \frac{1}{4}$ とわかる。ここで, $\triangle AEG$ において, 三平方の定理より, $AG^2 = AE^2 + EG^2$ なので,

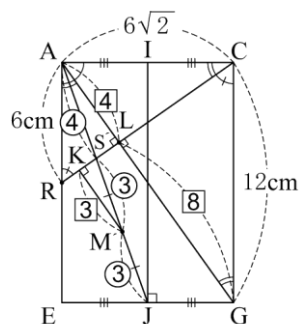
$$AG = \sqrt{12^2 + (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{6} \text{ (cm)} \quad \text{ゆえに, } KM' = 6\sqrt{6} \times \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ (cm)}$$

以上より, 三角錐 MCQP の体積は,

$$\triangle CQP \times KM' \times \frac{1}{3} \text{ から, } 9\sqrt{6} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} \times \frac{1}{3} = 27 \text{ (cm}^3\text{)}$$



図①

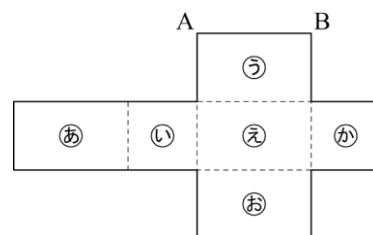


図②

【問 19】

右図は、直方体の展開図である。面㊦は 1 辺の長さが $a\text{ cm}$ の正方形であり、辺 AB の長さは 5 cm である。

(大阪府 A 2020 年度)



- (1) 右の展開図を組み立てて直方体をつくるとき、次のア～オの面のうち、面㊦と平行になるものはどれですか。一つ選び、記号を○で囲みなさい。

ア 面㊦ イ 面㊩ ウ 面㊪ エ 面㊫ オ 面㊬

- (2) 右の展開図を組み立ててできる直方体の体積を a を用いて表しなさい。

解答欄

(1)	ア イ ウ エ オ
(2)	cm^3

解答

(1) イ

(2) $5a^2\text{ cm}^3$

【問 20】

図 1, 図 2 において, 立体 A-BCD は三角すいであり, $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$, $AB = 10$ cm, $BC = 9$ cm, $BD = 7$ cm, $CD = 8$ cm である。E は, 辺 AC 上にあって A, C と異なる点である。F は, E を通り辺 CD に平行な直線と辺 AD との交点である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 B 2020 年度)

問 1 図 1 において, $AE < EC$ である。G は, E を通り辺 AB に平行な直線と辺 BC との交点である。H は, F を通り辺 AB に平行な直線と辺 BD との交点である。G と H とを結ぶ。このとき, 四角形 EGHF は長方形である。I は, E を通り辺 BC に平行な直線と辺 AB との交点である。I と F とを結ぶ。 $AI = x$ cm とし, $0 < x < 5$ とする。

- (1) 次のア～エのうち, 線分 FI と平行な面はどれですか。
一つ選び, 記号を○で囲みなさい。

ア 面 ACB イ 面 ACD
ウ 面 BCD エ 面 EGHF

- (2) 四角形 EGHF の面積が 16 cm^2 であるときの x の値を求めなさい。

問 2 図 2 は, E が辺 AC の中点であるときの状態を示している。図 2 において, J は B から辺 CD にひいた垂線と辺 CD との交点である。K は辺 AB 上の点であり, $KB = 3$ cm である。K と C, K と D とをそれぞれ結ぶ。L は, E を通り線分 CK に平行な直線と辺 AB との交点である。L と F とを結ぶ。このとき, 立体 A-EFL と立体 A-CDK は相似である。

- (1) 線分 BJ の長さを求めなさい。
- (2) 立体 EFL-CDK の体積を求めなさい。

図 1

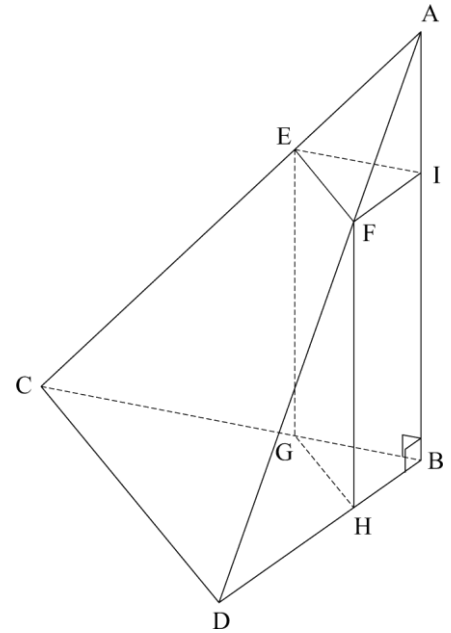
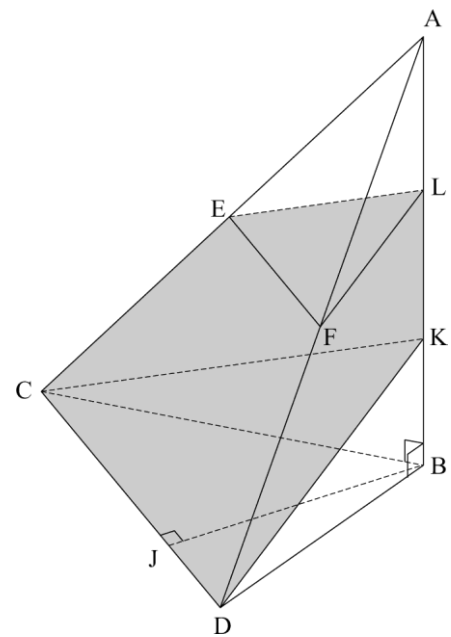


図 2



解答欄

問 1	(1)	ア イ ウ エ
	(2)	
問 2	(1)	cm
	(2)	cm ³

解答

問 1

(1) ウ

(2) $5-\sqrt{5}$

問 2

(1) $3\sqrt{5}$ cm

(2) $\frac{49\sqrt{5}}{2}$ cm³

解説

問 1

(2)

△ABDに着目する(図3)。FI//DBより平行線と線分の比から、

$$AI : AB = FI : DB \Rightarrow x : 10 = FI : 7 \Rightarrow FI = \frac{7}{10}x(\text{cm})$$

また、四角形 FHBI は長方形なので、BH=FI= $\frac{7}{10}x(\text{cm})$,

$$FH = IB = AB - AI = 10 - x(\text{cm})$$

次に、△BCDに着目する(図4)。GH//CDより平行線と線分の比から、

$$BH : BD = GH : CD \Rightarrow \frac{7}{10}x : 7 = GH : 8$$

$$\Rightarrow GH = \frac{4}{5}x(\text{cm})$$

$$(\text{四角形 BGHF}) = FH \times GH = (10 - x) \times \frac{4}{5}x = 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 20 = 0 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{5} \Rightarrow 0 < x < 5 \text{ より, } x = 5 - \sqrt{5}$$

問 2

(1)

△BCDに着目する(図5)。BJ=y cm, DJ=z cm とおくと

△BDJにおいて三平方の定理により、 $BJ^2 + DJ^2 = BD^2$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 = 7^2 \Rightarrow y^2 + z^2 = 49 \cdots \textcircled{1}$$

△BCJにおいて三平方の定理により、 $BJ^2 + CJ^2 = BC^2$

$$\Rightarrow y^2 + (8 - z)^2 = 9^2 \Rightarrow y^2 + z^2 - 16z + 64 = 81$$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 - 16z = 17 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ に } \textcircled{1} \text{ を代入すると, } 49 - 16z = 17 \Rightarrow z = 2 \quad \textcircled{1} \text{ より, } y^2 + 2^2 = 49$$

$$\Rightarrow y > 0 \text{ より, } y = 3\sqrt{5}(\text{cm})$$

(2)

立体 EFL-CDK は立体 A-CDK から立体 A-EFL を取り除いた立体であり、さらに、立体 A-CDK は立体 A-BCD から立体 K-BCD を取り除いた立体であることに着目する。

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times CD \times BJ = \frac{1}{2} \times 8 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}(\text{cm}^2) \text{ より,}$$

$$(\text{立体 A-BCD}) = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times AB = \frac{1}{3} \times 12\sqrt{5} \times 10 = 40\sqrt{5}(\text{cm}^3)$$

$$(\text{立体 K-BCD}) = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times KB = \frac{1}{3} \times 12\sqrt{5} \times 3 = 12\sqrt{5}(\text{cm}^3)$$

$$\text{よって, } (\text{立体 A-CDK}) = 40\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = 28\sqrt{5}(\text{cm}^3)$$

立体 A-EFL と立体 A-CDK は相似な立体であり、E は辺 AC の中点だから、

相似比は AE : AC = 1 : 2 である。よって体積比は、(立体 A-EFL) : (立体 A-CDK) = $1^3 : 2^3 = 1 : 8$

ここで、(立体 EFL-CDK) = (立体 A-CDK) - (立体 A-EFL) であることに注目すると、

$$(\text{立体 EFL-CDK}) : (\text{立体 A-CDK}) = (8 - 1) : 8 = 7 : 8 \quad \text{だから}$$

$$(\text{立体 EFL-CDK}) = \frac{7}{8} \times (\text{立体 A-CDK}) = \frac{7}{8} \times 28\sqrt{5} = \frac{49\sqrt{5}}{2}(\text{cm}^3)$$

図 3

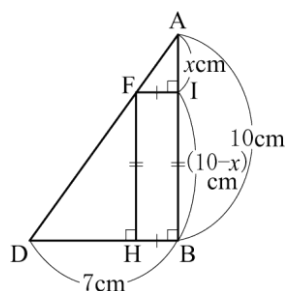


図 4

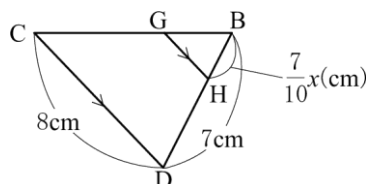
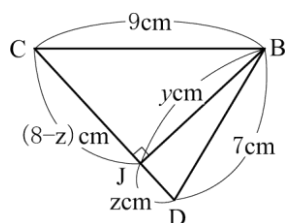


図 5



【問 21】

図 1, 図 2 において, 立体 $ABCD-EFGH$ は四角柱である。四角形 $ABCD$ は $AD \parallel BC$ の台形であり, $AD=4\text{ cm}$, $BC=8\text{ cm}$, $AB=DC=5\text{ cm}$ である。四角形 $EFGH \equiv$ 四角形 $ABCD$ である。四角形 $FBCG$ は 1 辺の長さが 8 cm の正方形であり, 四角形 $EFBA$, $EADH$, $HGCD$ は長方形である。このとき, 平面 $EADH$ と平面 $FBCG$ は平行である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 C 2020 年度)

問 1 図 1 において, I は辺 DC 上の点であり, $DI=3\text{ cm}$ である。 J は, 辺 HD 上にあって線分 EJ の長さと線分 JI の長さとの和が最も小さくなる点である。 I と B とを結ぶ。 K は, H を通り線分 IB に平行な直線と辺 EF との交点である。

(1) $\triangle EJH$ の面積を求めなさい。

(2) $\triangle IBC$ の内角 $\angle IBC$ の大きさを a° , $\triangle EKH$ の内角 $\angle EKH$ の大きさを b° とするとき, 四角形 $ABID$ の内角 $\angle BID$ の大きさを a, b を用いて表しなさい。

(3) 線分 KF の長さを求めなさい。

問 2 図 2 において, D と F とを結ぶ。 L は, D を通り辺 EF に平行な直線と辺 BC との交点である。 F と L とを結ぶ。このとき, $\triangle DFL$ の内角 $\angle DLF$ は鈍角である。 M は, A から平面 DFL にひいた垂線と平面 DFL との交点である。このとき, M は $\triangle DFL$ の内部にある。

(1) 線分 DF の長さを求めなさい。

(2) 線分 AM の長さを求めなさい。

図 1

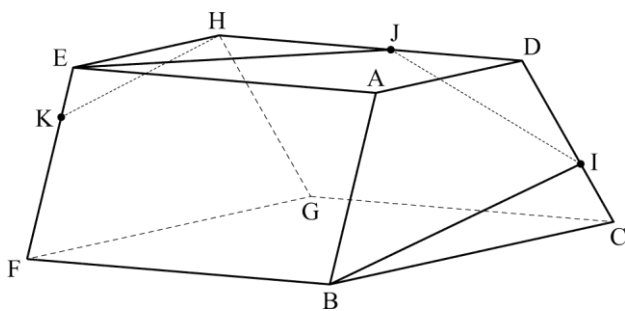
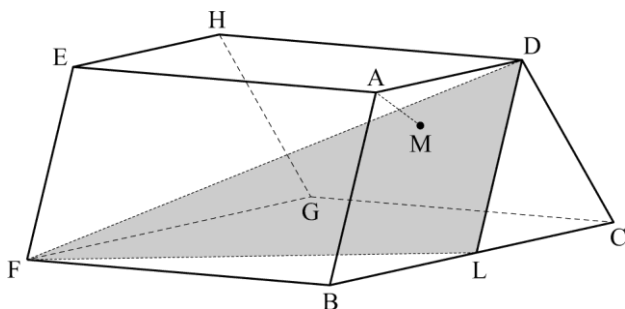


図 2



解答欄

問 1	(1)	cm ²
	(2)	度
	(3)	cm
問 2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問 1

- (1) $\frac{64}{7}$ cm²
- (2) $2a+b$ 度
- (3) $\frac{15}{4}$ cm

問 2

- (1)11 cm
- (2) $\frac{8\sqrt{21}}{11}$ cm

解説

問 1

(1)

立体の展開図における面 ADHE, 面 DCGH に注目する(図 1)。
DI//EH より, 平行線と線分の比により, $DJ : HJ = DI : HE = 3 : 4$

$$\Rightarrow HJ = \frac{4}{7}DH = \frac{4}{7} \times 8 = \frac{32}{7}(\text{cm})$$

$$\text{よって, } \triangle EJH = \frac{1}{2} \times HJ \times HE = \frac{1}{2} \times \frac{32}{7} \times 4 = \frac{64}{7}(\text{cm}^2)$$

(2)

合同な四角形 ABCD と四角形 EFGH を重ねてかいた図を用いる(図 2)。

四角形 EFGH における K の位置にある点を K' とする。K'D//BI より同位角は等しいので,

$$\angle AK'D = \angle ABI = b^\circ \text{ よって, } \angle ABC = a + b(^\circ)$$

四角形 ABCD は等脚台形なので,

$$\angle ABC = \angle DCB = a + b(^\circ)$$

$\triangle BCI$ において外角の性質により,

$$\angle BID = \angle IBC + \angle DCB = a + (a + b) = 2a + b(^\circ)$$

(3)

図 2 において, 直線 AB と直線 DC の交点を P とする。

AD//BC より, 平行線と線分の比により,

$$PD : PC = AD : BC \Rightarrow PD : (PD + 5) = 4 : 8$$

$$\Rightarrow PD = 5(\text{cm}), PC = 10(\text{cm})$$

$\angle PBC = \angle PCB$ より, $\triangle PBC$ は二等辺三角形なので, $PB = PC = 10(\text{cm})$

K'D//BI より, 平行線と線分の比により, $PK' : K'B = PD : DI \Rightarrow$

$$PK' : K'B = 5 : 3$$

$$\Rightarrow K'B = \frac{3}{8}PB = \frac{3}{8} \times 10 = \frac{15}{4}(\text{cm}) \text{ よって, } KF = K'B = \frac{15}{4}(\text{cm})$$

図 1

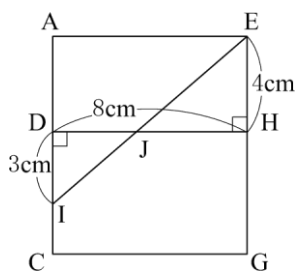


図 2

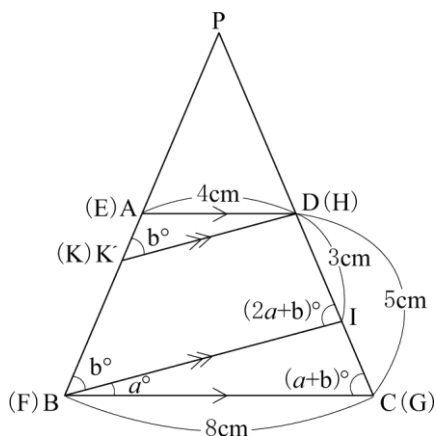


図 3

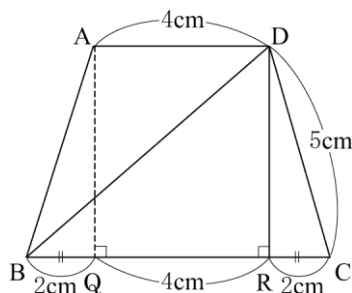


図 4

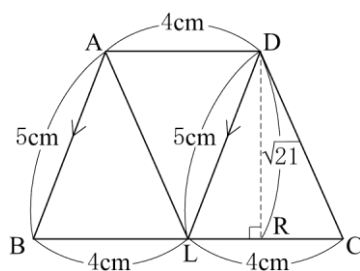
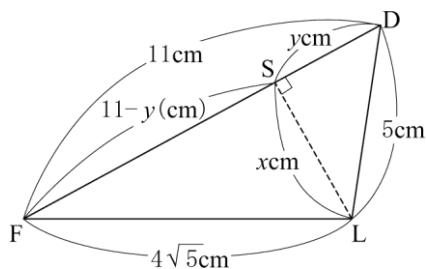


図 5



問2

(1)

$FB \perp$ (面 $ABCD$) より, $FB \perp DB$ だから, $\triangle DFB$ において三平方の定理を用いて線分 DF の長さを求めることができる。そこで線分 BD の長さを求めるために, 台形 $ABCD$ を取り出して考える (図3)。

点 A, D から辺 BC に垂線 AQ, DR をそれぞれ引くと,
 $\triangle AQB \equiv \triangle DRC$ となり, $BQ = CR$ であることがわかる。

また, 四角形 $AQRD$ は長方形なので, $AD = QR = 4$ (cm) であるから, $BQ = CR = (8 - 4) \div 2 = 2$ (cm)

$\triangle CDR$ において三平方の定理により,

$$DR^2 = DC^2 - CR^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \quad DR > 0 \text{ より } DR = \sqrt{21} \text{ (cm)}$$

$$\triangle BDR \text{ において三平方の定理により, } BD^2 = BR^2 + DR^2 = 6^2 + (\sqrt{21})^2 = 57$$

$$BD > 0 \text{ より } BD = \sqrt{57} \text{ (cm)}$$

$$\triangle DFB \text{ において三平方の定理により, } DF^2 = BF^2 + BD^2 = 8^2 + (\sqrt{57})^2 = 121$$

$$DF > 0 \text{ より } DF = 11 \text{ (cm)}$$

(2)

線分 AM の長さは, 三角錐 $A\text{--}DFL$ において $\triangle DFL$ を底面としたときの高さを表す。さらに, 三角錐 $A\text{--}DFL$ は, $\triangle ADL$ を底面とした場合に体積を求めることができるので, 体積からの逆算で AM の長さを求める。

まずは, 三角錐 $A\text{--}DFL$ の体積を求めるために, 底面である $\triangle ADL$ の面積を求める (図4)。

(1) で求めた DR の長さをを用いて,

$$\triangle ADL = \frac{1}{2} \times AD \times DR = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21} = 2\sqrt{21} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$\triangle ADL$ を底面としたときの三角錐 $A\text{--}DFL$ の高さは, 平面 $ABCD$ と平面 $EFGH$ との距離 $BF = 8$ (cm) に等しい。

$$\text{よって, } (\text{三角錐 } A\text{--}DFL) = \frac{1}{3} \times \triangle ADL \times BF = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{21} \times 8 = \frac{16\sqrt{21}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

次に逆算によって AM の長さを求めるために, $\triangle DFL$ の面積を求める。

$EF \parallel DL$, $EF \parallel AB$ より, $AB \parallel DL$ だから, 四角形 $ADBL$ は平行四辺形なので,

$$AD = BL = 4 \text{ (cm)}, \quad AB = DL = 5 \text{ (cm)}$$

$$\triangle BFL \text{ において三平方の定理により, } FL^2 = BF^2 + BL^2 = 8^2 + 4^2 = 80 \quad FL > 0 \text{ より } FL = 4\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

ここで, $\triangle DFL$ を取り出して考える (図5)。

辺 DF を底辺としたときの $\triangle DFL$ の高さを $LS = x$ cm とし, $DS = y$ cm とする。

$$\triangle LDS \text{ において三平方の定理により, } LS^2 + DS^2 = DL^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \quad \cdots \text{ ①}$$

$$\triangle LFS \text{ において三平方の定理により, } LS^2 + FS^2 = FL^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (11 - y)^2 = 80 \Rightarrow x^2 + y^2 - 22y + 121 = 80 \quad \cdots \text{ ②}$$

$$\text{②に①を代入すると, } 25 - 22y + 121 = 80 \Rightarrow y = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{これを①に代入すると, } x^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x > 0 \text{ より } x = 4 \text{ (cm)}$$

$$\text{よって, } \triangle DFL = \frac{1}{2} \times DF \times LS = \frac{1}{2} \times 11 \times 4 = 22 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{したがって, } (\text{三角錐 } A\text{--}DFL) = \frac{1}{3} \times \triangle DFL \times AM = \frac{1}{3} \times 22 \times AM = \frac{22}{3} AM \text{ (cm}^3\text{)} \text{ だから,}$$

$$\frac{22}{3} AM = \frac{16\sqrt{21}}{3} \text{ より, } AM = \frac{8\sqrt{21}}{11} \text{ (cm)}$$

【問 22】

次の図 1, 図 2 のような, 底面の半径が r cm で高さが $2r$ cm の円柱 (図 1) と, 半径が r cm の球(図 2) がある。□ に当てはまる適当な数は, ア～エのうちではどれですか。一つ答えなさい。

(岡山県 2020 年度 一般)

図 1 の円柱の体積は, 図 2 の球の体積の □ 倍であ。

図 1

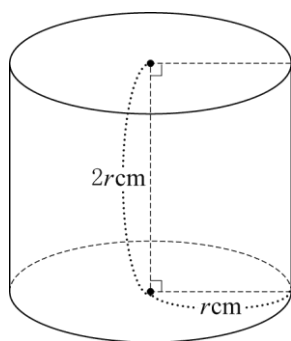
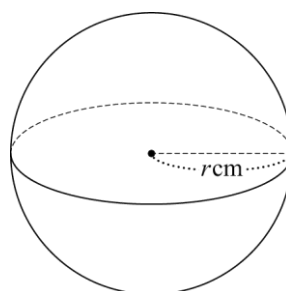


図 2



ア $\frac{3}{2}$

イ $\frac{4}{3}$

ウ $\frac{5}{4}$

エ $\frac{6}{5}$

解答欄

解答

ア

解説

(円柱の体積)=(底面積) $\times$ (高さ) $=\pi r^2 \times 2r=2\pi r^3$ (cm^3) 半径 r の球の体積 $=\frac{4}{3}\pi r^3$ (cm^3)

(円柱の体積) $\div$ (球の体積) $=2\pi r^3 \div \frac{4}{3}\pi r^3=2 \times \frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ (倍)

【問 23】

図 1 は、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $BC=4\text{ cm}$ 、 $AE=3\text{ cm}$ の直方体 $ABCDEFGH$ を表している。

次の問 1 ～問 3 に答えよ。

(福岡県 2020 年度)

問 1 図 1 に示す立体において、辺や面の位置関係を正しく述べているものを次のア～エから全て選び、記号で答えよ。

- ア 面 $ABFE$ と辺 DH は垂直である。
- イ 辺 AB と辺 AD は垂直である。
- ウ 面 $ADHE$ と面 $BCGF$ は平行である。
- エ 辺 CD と辺 EF はねじれの位置にある。

図 1

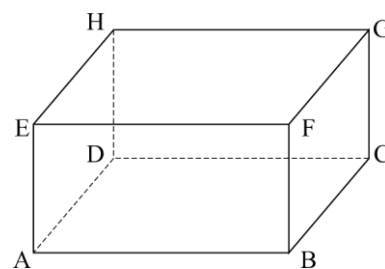
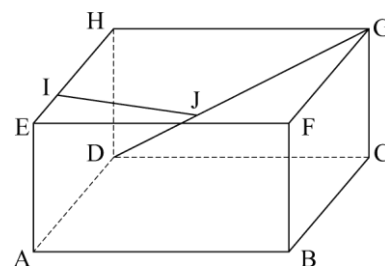


図 2



問 2 図 1 に示す立体において、辺 EF の中点を M 、辺 FG の中点を N とする。直方体 $ABCDEFGH$ を 4 点 A 、 C 、 N 、 M を通る平面で分けたときにできる 2 つの立体のうち、頂点 F をふくむ立体の体積を求めよ。

問 3 図 2 は、図 1 に示す立体において、辺 EH 上に点 I を $EI=1\text{ cm}$ 、線分 DG 上に点 J を $DJ:JG=1:2$ となるようにとり、点 I と点 J を結んだものである。
このとき、線分 IJ の長さを求めよ。

解答欄

問 1	
問 2	cm^3
問 3	cm

解答

問1 イ, ウ

問2 21 cm^3

問3 $\sqrt{17} \text{ cm}$

解説

問2

直線 AM と直線 BF の交点を L とする。求める立体の体積は三角錐 $L-ABC$ の体積から三角錐 $L-MFN$ の体積を引いたものである。点 M は辺 EF の中点で、点 N は辺 FG の中点であるから、三角錐 $L-MFN$ と三角錐 $L-ABC$ の体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$ である。

三角錐 $L-ABC$ の体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 6 = 24(\text{cm}^3)$ であるから、求める立

体の体積は $24 \times \frac{7}{8} = 21(\text{cm}^3)$

問3

点 J から辺 DH に下ろした垂線と辺 DH との交点を K とする。

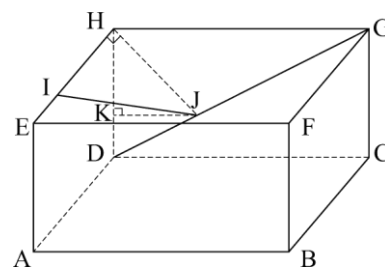
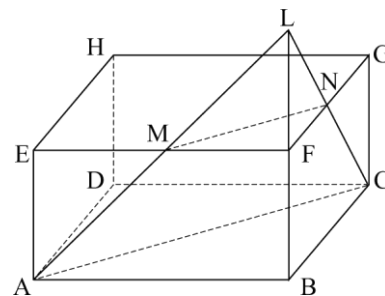
$DJ : JG = 1 : 2$ だから $JK = \frac{1}{3}DC = 2(\text{cm})$, $DK = \frac{1}{3}DH = 1(\text{cm})$

$KH = 3 - 1 = 2(\text{cm})$ だから、 $\triangle JHK$ において三平方の定理より、 $JH^2 = JK^2 + KH^2 = 8$

$HI = 3\text{cm}$ であるから、 $\triangle JHI$ において三平方の定理より、

$IJ^2 = JH^2 + HI^2 = 8 + 9 = 17$

よって、 $IJ = \sqrt{17}\text{cm}$

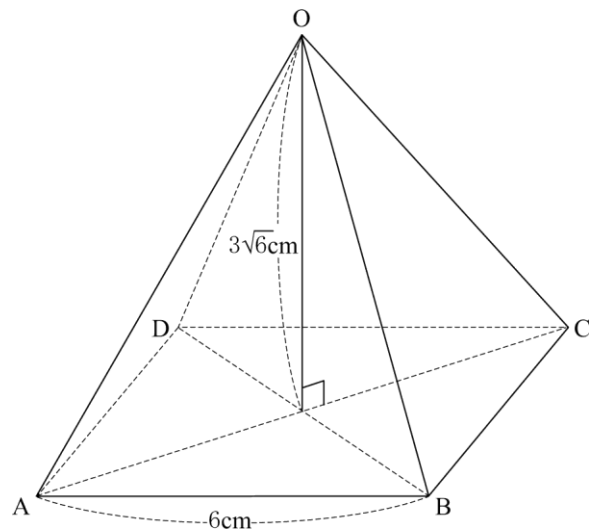


【問 24】

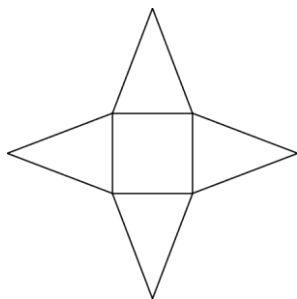
図 1, 図 2 のように, 底面が 1 辺の長さ 6 cm の正方形 ABCD で, 側面がすべて合同な二等辺三角形である正四角錐 OABCD がある。また, 正四角錐 OABCD の高さは $3\sqrt{6}$ cm である。このとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2020 年度)

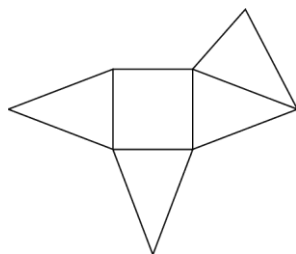
問 1 図 1 の正四角錐の展開図として適切でないものを, 次の①～④の中から 1 つ選び, その番号を書け。



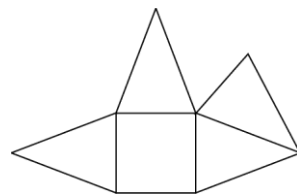
①



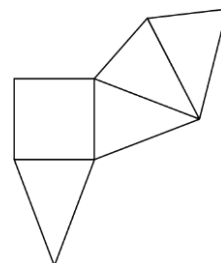
②



③



④



問 2 正四角錐 OABCD の体積は何 cm^3 か。

問 3 $\triangle OAC$ はどのような三角形か。次の①～④の中から最も適切なものを 1 つ選び, その番号を書け。

① 直角三角形

② 二等辺三角形

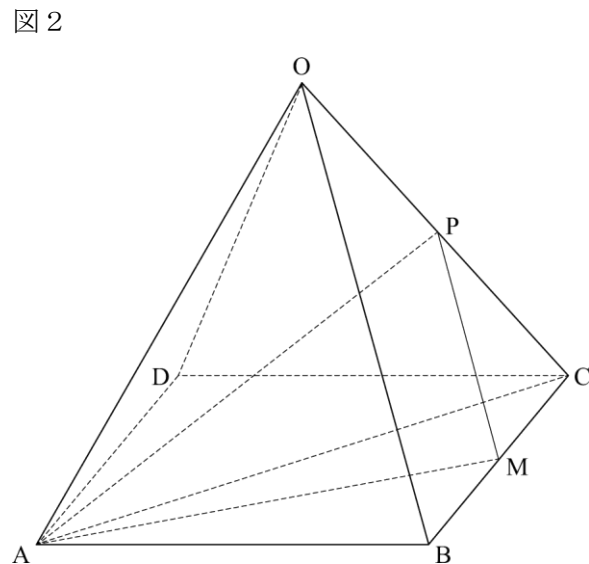
③ 直角二等辺三角形

④ 正三角形

問 4 図 2 のように, 辺 OC の中点を P, 辺 BC の中点を M とする。このとき, 次の (1), (2) に答えよ。

(1) 三角錐 PACM の体積は何 cm^3 か。

(2) $\triangle PAC$ を底面とすると, 三角錐 PACM の高さは何 cm か。



問 1		
問 2		cm^3
問 3		
問 4	(1)	cm^3
	(2)	cm

解答

問 1 ③

問 2 $36\sqrt{6}$ [cm^3]

問 3 ④

問 4

(1) $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ [cm^3]

(2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ [cm]

解説

問 3

四角形 ABCD は正方形であるため、 $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形であり、 $AC=6\sqrt{2}$ 。対角線 AC と BD の交点を H とすると、 $AH=3\sqrt{2}$ であり、 $\triangle AOH$ で三平方の定理より $OA^2=(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{6})^2$
 $OA>0$ より、 $OA=6\sqrt{2}$ 。側面がすべて合同な二等辺三角形であるという条件から、 $OA=OC=6\sqrt{2}=AC$ であり、3 辺の長さがすべて等しいので、 $\triangle OAC$ は正三角形である。

問 4

(1)

$\triangle ACM$ を底面として考える。 $\triangle ACM=\frac{1}{2}\times CM\times AB=9$ である。ここで P から AC に垂線 PH' を下ろすと (図 3)、 $\triangle COH\sim\triangle CPH'$ である。相似比が 2 : 1 であることから、高さ $PH'=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 。

よって、(三角錐 PACM) $=\frac{1}{3}\times\triangle ACM\times PH'=\frac{9\sqrt{6}}{2}(\text{cm}^3)$

(2)

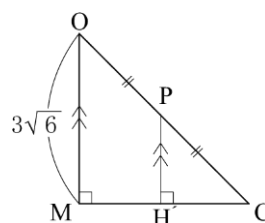
体積から高さを逆算する問題である。 $\triangle OAC$ は正三角形であり、 $OP=PC$ より、 $AP\perp OC$ である。

また、 $\triangle PAC$ は $\angle C=60^\circ$ の直角三角形であり、 $AC:AP=2:\sqrt{3}$ $AP=3\sqrt{6}$ 。よって、 $\triangle PAC=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}$

$\times 3\sqrt{6}=9\sqrt{3}$ である。求める高さを h cm とすると、(三角錐 PACM) $=\frac{9\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{3}\times\triangle PAC\times h$

$h=\frac{3\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$

図 3



【問 25】

たろうさんは、街灯の光のできる自分の影が、立つ位置によって変化することに興味を持ち、街灯の光のできる影について調べることにした。

右の図 1 は、点 P を光源とする街灯の支柱 PQ が地面に対して垂直に立っており、点 P からまっすぐに進んだ光が、地面に垂直に立てた長方形 ABCD の板にあたるときに、四角形 ABEF の影ができるようすを表したものである。

このとき、 $PQ=4\text{ m}$ 、 $AD=1\text{ m}$ 、 $CD=2\text{ m}$ である。

線分 AB の中点を R とするとき、 $\angle ARQ$ の角度と、線分 QR の長さを変えてできる四角形 ABEF の長さや面積について考える。

次の問 1、問 2 に答えなさい。

(大分県 2020 年度)

問 1 $\angle ARQ$ を直角にすると、線分 QR の長さによって変化する四角形 ABEF について考える。

右の図 2 のように、直線 QR と線分 EF の交点を S とし、線分 PS と辺 CD の交点を T とする。

次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

- (1) 線分 QR の長さを 3 m とするとき、 $\triangle PQS \sim \triangle TRS$ であることを利用して、線分 RS の長さを求めなさい。

- (2) 線分 QR の長さを $a\text{ m}$ とするとき、四角形 ABEF の面積を a を使って表しなさい。

問 2 右の図 3 のように、 $\angle ARQ$ が鋭角のとき、線分 EF の長さを求めなさい。

図 1

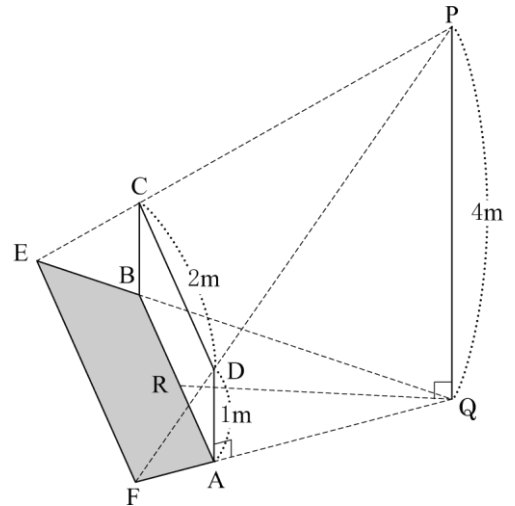


図 2

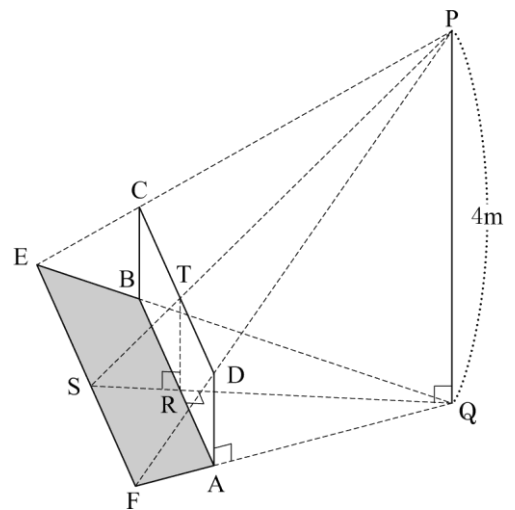
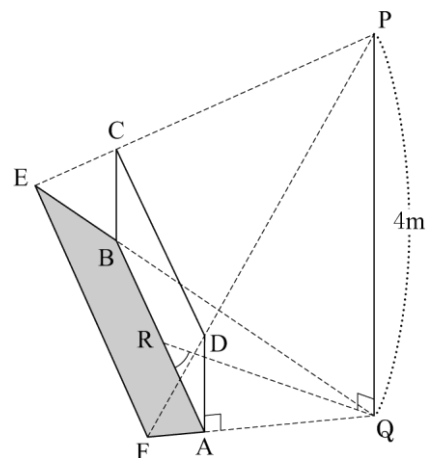


図 3



解答欄

問 1	(1)	(m)
	(2)	(m ²)
問 2	(m)	

解答

問 1

(1) 1 (m)

(2) $\frac{7}{9}a$ (m²)

問 2 $\frac{8}{3}$ (m)

解説

問 1

(1)

$\triangle PQS \sim \triangle TRS$ より, $SQ : SR = PQ : TR = 4 : 1$ であるから,

$SQ : SR : RQ = 4 : 1 : 3$, ゆえに $SR = \frac{1}{3} \times RQ = \frac{1}{3} \times 3 = 1$ (m)

(2)

(1) と同様にして, $SR = \frac{1}{3} \times RQ = \frac{1}{3}a$ (m)

$DA // PQ$ より, 平行線と線分の比から, $FA : FQ = DA : PQ = 1 : 4$ よって, $FA : AQ = 1 : 3$

また (1) より, $SR : RQ = 1 : 3$ だから, $FA : AQ = SR : RQ$ より, $RA // SF$ すなわち, $BA // EF$

よって, 平行線と線分の比から, $BA : EF = QA : QF \Rightarrow 2 : EF = 3 : 4 \Rightarrow EF = \frac{8}{3}$ (m)

四角形 ABEF は $BA // EF$ の台形なので, 求める面積は,

$$\frac{1}{2} \times (AB + EF) \times SR = \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{8}{3}\right) \times \frac{1}{3}a = \frac{7}{9}a \text{ (m}^2\text{)}$$

問 2

問 1 の (2) より, $FA : AQ = 1 : 3$

$CB // PQ$ においても同様にして, $EB : BQ = 1 : 3$ だから, $FA : AQ = EB : BQ$ より $BA // EF$

問 1 の (2) と同様にして, 平行線と線分の比から, $BA : EF = QA : QF \Rightarrow 2 : EF = 3 : 4$

$$\Rightarrow EF = \frac{8}{3} \text{ (m)}$$

【問 26】

図 1 のような、直方体がある。AB=8 cm, AD=4 cm, AE=3 cm のとき、次の問 1～問 4 に答えなさい。

(宮崎県 2020 年度)

問 1 図 1 において、辺を直線とみたとき、直線 AD とねじれの位置にある直線を、次のア～オの中からすべて選び、記号で答えなさい。

- ア 直線 AB
- イ 直線 BF
- ウ 直線 CG
- エ 直線 FG
- オ 直線 GH

問 2 図 2 は、図 1 において、辺 EF 上に AI=6 cm となる点 I, 辺 GH 上に DJ=6 cm となる点 J をとり、直方体を面 AIJD で切り離し、2 つの立体① (三角柱), 立体② (四角柱) に分けたものである。

このとき、立体①の表面積を求めなさい。

問 3 図 3 は、図 2 の立体②において、辺 AB, AD 上にそれぞれ点 P, Q を、線分 FP, PQ, QJ の長さの和が最も小さくなるようにとったものである。このとき、線分 PQ の長さを求めなさい。

問 4 図 4 は、図 2 の立体①を平らな面の机の上に置き、辺 IJ を回転の軸として机の面に固定し、辺 AD が机の面上にくるまで回転させたものである。このとき、長方形の面 AEHD () が動いてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

図 1

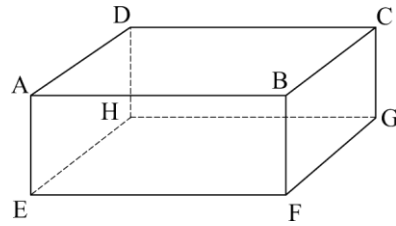


図 2

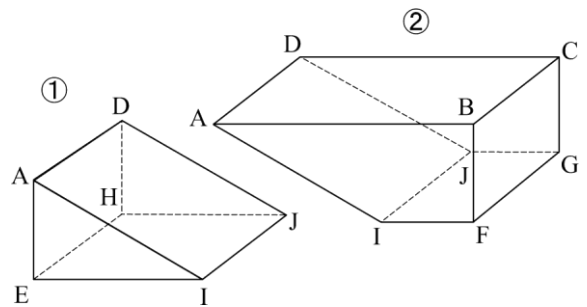


図 3

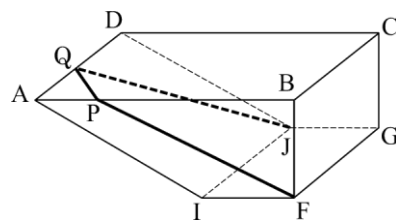
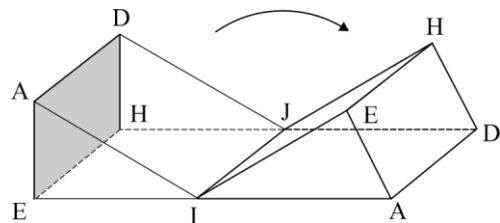


図 4



解答欄

問 1	
問 2	cm^2
問 3	cm
問 4	cm^3

解答

問 1 イ, ウ, オ

問 2 $36 + 21\sqrt{3} \text{ cm}^2$

問 3 $\sqrt{5} \text{ cm}$

問 4 $15\pi \text{ cm}^3$

解説

問 2

求める表面積は,

($\triangle AEI$ の面積) $\times 2$ + (長方形 $AIJD$ の面積) + (長方形 $AEHD$ の面積) + (長方形 $EIJH$ の面積)

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 \times 2 + 24 + 12 + 12\sqrt{3} = 36 + 21\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

問 3

右の図のようになるときの PQ について考えればよい。

$\triangle JQD \sim \triangle JFC$ であり, 相似比 $QD : FC = JD : JC = 6 : 14 = 3 : 7$ より, $QD = 3$ であるから, $AQ = AD - QD = 4 - 3 = 1$

$\triangle FBP \sim \triangle FCJ$ であり, 相似比 $PB : JC = FB : FC = 3 : 7 = 6 : 14$ より, $PB = 6$ であるから, $AP = AB - PB = 8 - 6 = 2$

ゆえに, $PQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} (\text{cm})$

問 4

右の図のように体積を移して考えると, できる立体の底面積は,

$$6^2 \pi \times \frac{150}{360} - (3\sqrt{3})^2 \pi \times \frac{150}{360} = \frac{15}{4} \pi$$

ゆえに求める体積は, $\frac{15}{4} \pi \times 4 = 15\pi (\text{cm}^3)$

