

4. 二次関数と図形関連の複合問題 2017年度出題

【問 1】

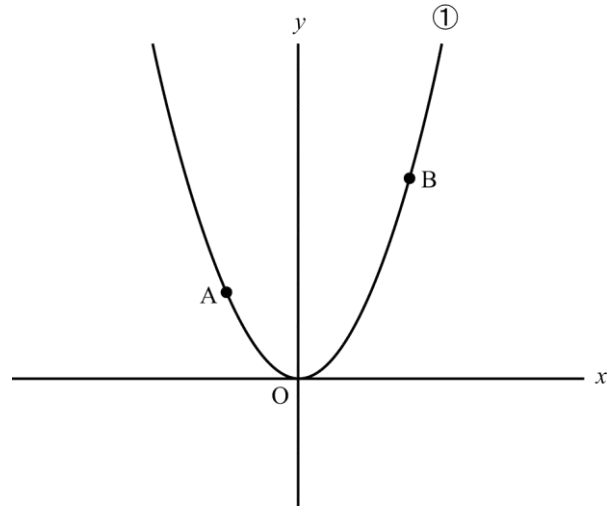
右の図のように、関数 $y=ax^2$ (a は正の定数) …① のグラフ上に、2 点 A, B があります。点 A の x 座標を -2 、点 B の x 座標を 3 とします。点 O は原点とします。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2017 年度)

問1 点 A の y 座標が 16 のとき, a の値を求めなさい。

問2 $a=2$ とします。①について、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。



問3 点 A と y 軸について対称な点を C とします。線分 AB と y 軸との交点を D とします。 $\triangle BCD$ の面積が 10 のとき、 a の値を求めなさい。

解答欄

[illegible]

解答

問1 $a=4$

問2 8

問3

〔計 算〕

A $(-2, 4a)$, B $(3, 9a)$, C $(2, 4a)$ だから,

$\triangle ABC$ の面積は, $\frac{1}{2} \times 4 \times 5a = 10a \cdots \textcircled{1}$

AD:DB=2:3 だから,

AB:DB=5:3 $\cdots \textcircled{2}$

よって $\triangle ABC$ の面積: $\triangle BCD$ の面積=5:3であり

$\triangle BCD = \frac{3}{5} \triangle ABC = \frac{3}{5} \times 10a = 6a \cdots \textcircled{3}$

したがって $6a=10$ より

$$a = \frac{5}{3}$$

$$\text{答 } a = \frac{5}{3}$$

解説

問1

条件より A $(-2, 16)$ となるから $y=ax^2$ に $x=-2, y=16$ を代入すると $16=a \times (-2)^2$ $4a=16$ $a=4$

問2

関数 $y=2x^2$ について x の値が 1 から 3 まで増加するとき $y=2 \times 1^2=2, y=2 \times 3^2=18$ だから

x の増加量は $3-1=2$

y の増加量は $18-2=16$

よって変化の割合 $= \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{16}{2} = 8$

問3

$y=a \times (-2)^2=4a$ より A $(-2, 4a)$

点 C は点 A と y 軸について対称だから C $(2, 4a)$

また $y=a \times 3^2=9a$ より B $(3, 9a)$ だから

直線 AB の傾きは $\frac{9a-4a}{3-(-2)} = \frac{5a}{5} = a$

直線 AB の式を $y=ax+b$ として $x=3, y=9a$ を代入すると $9a=a \times 3+b$ $b=6a$

よって直線 AB の式は $y=ax+6a$ と表されるから D $(0, 6a)$

$\triangle BCD = \triangle BAC - \triangle DAC$ より

$\triangle BAC$ と $\triangle DAC$ の面積をそれぞれ求める。

$\triangle BAC = \frac{1}{2} \times \{2-(-2)\} \times (9a-4a) = \frac{1}{2} \times 4 \times 5a = 10a$

$\triangle DAC = \frac{1}{2} \times \{2-(-2)\} \times (6a-4a) = \frac{1}{2} \times 4 \times 2a = 4a$

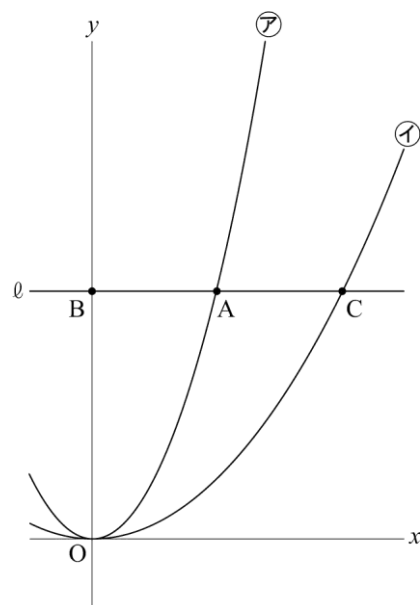
よって $\triangle BCD = 10a - 4a = 6a$ より

$$a = \frac{5}{3}$$

【問 2】

次の図において、㊦は関数 $y=x^2$ 、㊩は関数 $y=ax^2(a>0)$ のグラフである。点 A は㊦上の点であり、 x 座標は 2 である。点 A を通り x 軸に平行な直線を l とする。直線 l と y 軸の交点を B とし、直線 l と㊩の交点のうち、 x 座標が正である点を C とする。点 A が線分 BC の中点であるとき、 a の値を求めなさい。求める過程も書きなさい。

(秋田県 2017 年度)



解答欄

[過程]

答 $a=$

解答

〔過程〕

点 A は⑦上の点だから, A(2, 4)である。

3 点 A, B, C は x 軸に平行な直線 ℓ 上にあり

点 A が線分 BC の中点だから C(4, 4) となる。

点 C は④上の点だから

$$4 = a \times 4^2$$

これを解いて

$$a = \frac{1}{4}$$

答 $a = \frac{1}{4}$

解説

点 A の x 座標が 2 なので A (2, 4)

よって BA の長さは 2 になるから

AC の長さも 2 になり

点 C の x 座標が 4 になることがわかる。

また点 C の y 座標は点 A の y 座標と同じなので 4

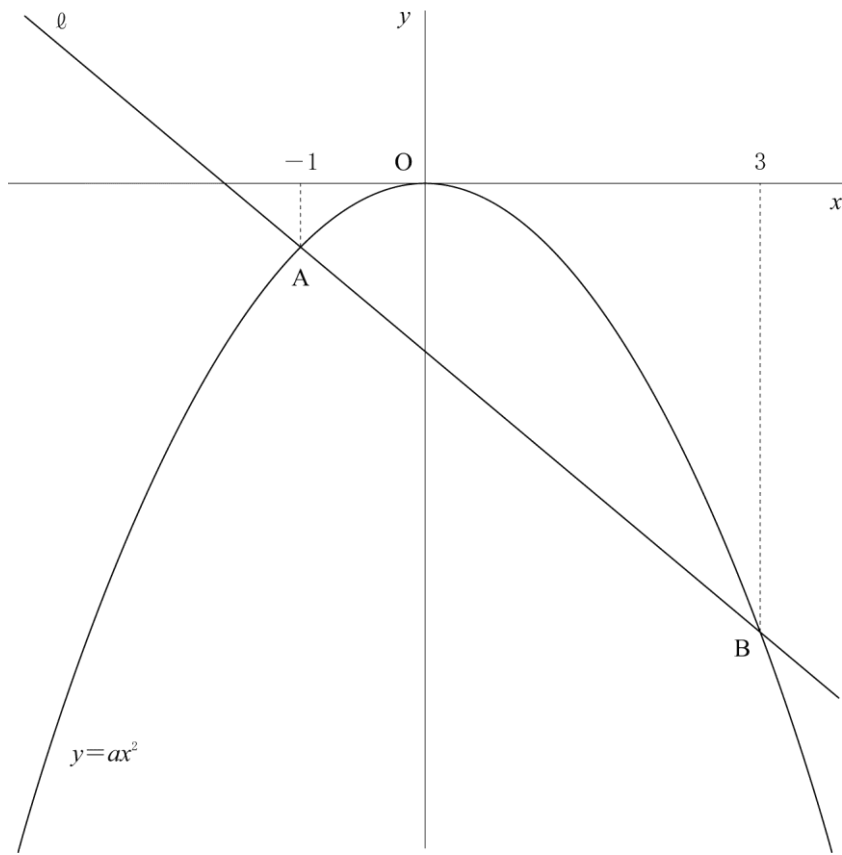
したがって C(4, 4)

これを $y = ax^2$ に代入して整理すると

$$a = \frac{1}{4}$$

【問 3】

下の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 ℓ があり、2 点 A, B で交わっている。 ℓ の式は $y=-x-\frac{3}{2}$ であり、A, B の x 座標はそれぞれ $-1, 3$ である。このとき、次の問1, 問2に答えなさい。



(福島県 2017 年度)

問1 a の値を求めなさい。

問2 放物線上に点 P をとり、P の x 座標を t とする。ただし、 $1 < t < 3$ とする。また、P を通り x 軸に平行な直線を m とし、 m と ℓ との交点を Q とする。さらに、 m 上に Q と異なる点 R を、 $AR=AQ$ となるようにとる。

(1) $t=2$ のとき, 点 Q の座標を求めなさい。

(2) $PQ=QR$ となる t の値を求めなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	$Q \left(\quad , \quad \right)$
	(2)	

解答

問1 $-\frac{1}{2}$

問2 (1) $Q\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ (2) $\frac{5}{3}$

解説

問1

点 A は直線 l 上にあり, x 座標は -1 だから

$$y = -x - \frac{3}{2} \text{ に } x = -1 \text{ を代入して } y = -(-1) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

よって $A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

点 A は関数 $y = ax^2$ のグラフ上にあり, その座標は $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ だから

$$y = ax^2 \text{ に } x = -1, y = -\frac{1}{2} \text{ を代入して } -\frac{1}{2} = a \times (-1)^2 \quad a = -\frac{1}{2}$$

問2

(1)

点 P は関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり, その x 座標は 2 だから

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ に } x = 2 \text{ を代入して } y = -\frac{1}{2} \times 2^2 = -2$$

よって $P(2, -2)$

直線 m は, 点 P を通り x 軸に平行だから, 直線 m の式は $y = -2$ となる。

点 Q は直線 m と直線 l との交点だから $y = -2$ と $y = -x - \frac{3}{2}$ を連立方程式として解くと $x = \frac{1}{2}, y = -2$

したがって $Q\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

(2)

P の x 座標を t とおくと, $P\left(t, -\frac{1}{2}t^2\right)$ 直線 m の式は $y = -\frac{1}{2}t^2$ と表されるから

$$-\frac{1}{2}t^2 = -x - \frac{3}{2} \text{ を } x \text{ について解くと, } x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}$$

よって $Q\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}t^2\right)$

$$PQ = t - \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2}$$

$AR = AQ$ より, 点 A は線分 QR の垂直二等分線上にある。

線分 QR の垂直二等分線と直線 m との交点を S とすると, $S\left(-1, -\frac{1}{2}t^2\right)$

$$QS = RS \text{ より, } QR = 2QS = 2\left\{\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2} - (-1)\right\} = t^2 - 1$$

$$PQ = QR \text{ より, } -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2} = t^2 - 1 \quad -t^2 + 2t + 3 = 2t^2 - 2 \quad -3t^2 + 2t + 5 = 0 \quad 3t^2 - 2t - 5 = 0$$

$$\text{解の公式より } t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-5)}}{2 \times 3} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

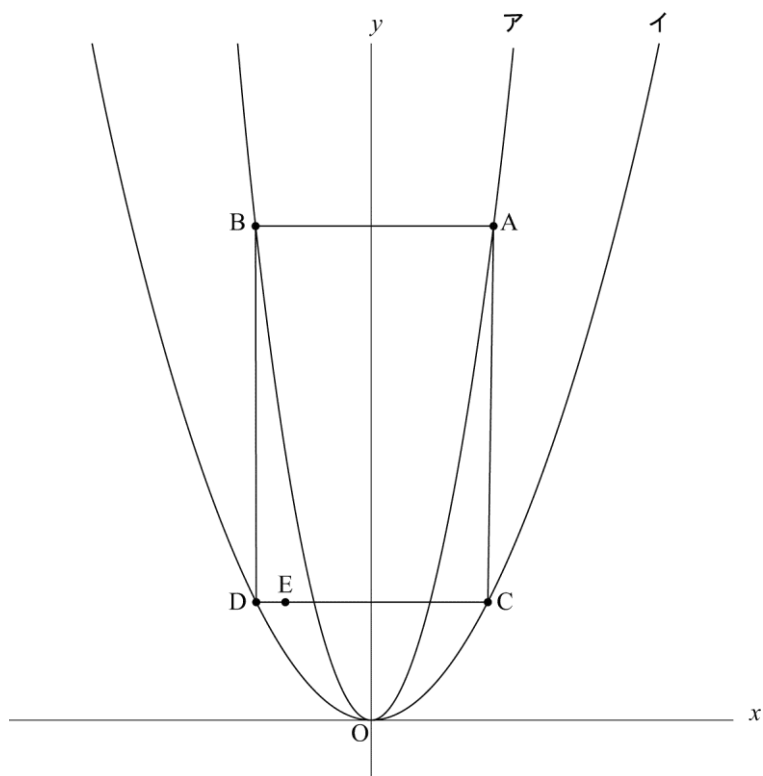
$$\frac{2+8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad \frac{2-8}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \text{ より } t = \frac{5}{3}, -1$$

$1 < t < 3$ より $t = \frac{5}{3}$ は問題にあっているが $t = -1$ は問題にあっていない。

したがって $t = \frac{5}{3}$

【問 4】

下の図において、曲線アは関数 $y=2x^2$ のグラフであり、曲線イは関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。曲線ア上の点で x 座標が 2, -2 である点をそれぞれ A, B とし、曲線イ上の点で x 座標が 2, -2 である点をそれぞれ C, D とする。また、線分 CD 上の点を E とする。このとき、次の問1, 問2に答えなさい。ただし、O は原点とする。



(茨城県 2017 年度)

問1 2 点 A, D を通る直線の式を求めなさい。

問2 $\triangle ACE$ の面積が四角形 $ABDC$ の面積の $\frac{2}{5}$ 倍であるとき、点 E の座標を求めなさい。

解答欄

問1	$y=$
問2	$\left(\quad , \quad \right)$

解答

問1 $y = \frac{3}{2}x + 5$

問2 $\left(-\frac{6}{5}, 2\right)$

解説

問1

$$y = 2 \times 2^2 = 8 \text{ より, } A(2, 8) \quad y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2 \text{ より } D(-2, 2)$$

$$2 \text{ 点 } A, D \text{ を通る直線の傾きは } \frac{8-2}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{求める直線の式を } y = \frac{3}{2}x + b \text{ として}$$

$$x=2, y=8 \text{ を代入すると } 8 = \frac{3}{2} \times 2 + b \quad b=5$$

$$\text{よって } y = \frac{3}{2}x + 5$$

問2

$$y = 2 \times (-2)^2 = 8 \text{ より } B(-2, 8) \quad y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2 \text{ より } C(2, 2)$$

四角形 ABDC は長方形で、縦の長さが $8-2=6$ 、横の長さが $2-(-2)=4$ だから
その面積は $6 \times 4 = 24$

$\triangle ACE$ の面積が四角形 ABDC の面積の $\frac{2}{5}$ 倍であるから、 $CE=t$ とすると

$$\frac{1}{2} \times t \times 6 = 24 \times \frac{2}{5}$$

$$3t = \frac{48}{5}$$

$$t = \frac{16}{5}$$

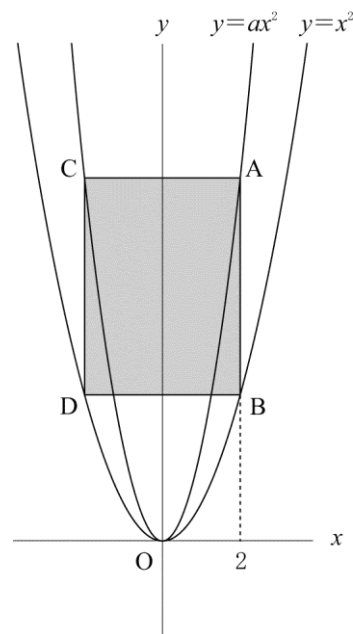
$$\text{よって点 } E \text{ の } x \text{ 座標は } 2 - \frac{16}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$\text{点 } E \text{ の } y \text{ 座標は } 2 \text{ だから } E\left(-\frac{6}{5}, 2\right)$$

【問 5】

右の図のように、2つの関数 $y=ax^2$ ($a>1$)、 $y=x^2$ のグラフ上で、 x 座標が 2 である点をそれぞれ A、B とする。また、点 A を通り x 軸に平行な直線が、関数 $y=ax^2$ のグラフと交わる点のうち、点 A と異なる点を C とし、点 B を通り x 軸に平行な直線が、関数 $y=x^2$ のグラフと交わる点のうち、点 B と異なる点を D とする。長方形 ACDB の面積が 24 であるとき、 a の値を求めなさい。

(栃木県 2017 年度)



解答欄

$a =$

解答

$$a = \frac{5}{2}$$

解説

条件から、点 A の y 座標と点 C の y 座標は等しくなり、この 2 点は y 軸について対称である。よって、点 A の x 座標と点 C の x 座標の絶対値は等しい。

点 A の x 座標は 2 だから、点 A の y 座標は、 $y=ax^2$ に $x=2$ を代入して $y=a \times 2^2 = 4a$
 A(2, $4a$)より C(-2 , $4a$)

同様に、点 B の y 座標と点 D の y 座標は等しくなり、この 2 点は y 軸について対称である。よって点 B の x 座標と点 D の x 座標の絶対値は等しい。

点 B の x 座標は 2 だから、点 B の y 座標は、 $y=x^2$ に $x=2$ を代入して $y=2^2=4$
 B(2, 4)より D(-2 , 4)

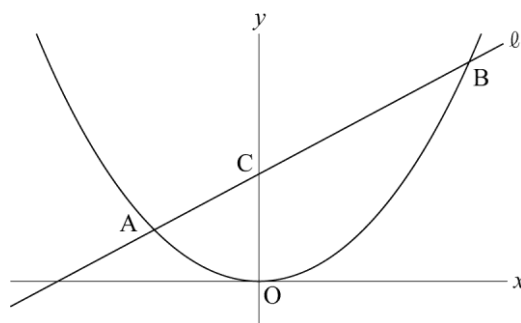
長方形 ACDB の縦の長さは $4a-4$ 、横の長さは $2-(-2)=4$ であり、その面積は 24 だから
 $(4a-4) \times 4 = 24$

整理をすると $a = \frac{5}{2}$

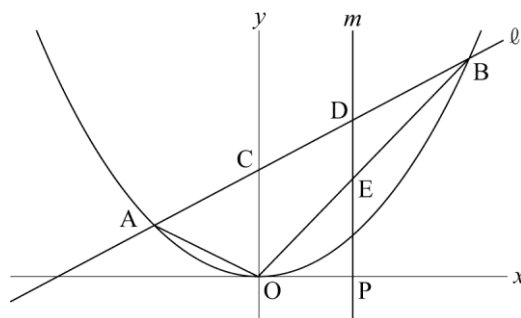
右の図1で、曲線は関数 $y=ax^2$ のグラフです。曲線上に x 座標が $-2, 4$ である 2 点 A, B をとり、この 2 点を通る直線 l をひきます。直線 l が y 軸と点 C ($0, 2$) で交わるとき、次の各問に答えなさい。ただし、座標軸の単位の長さを 1 cm とします。

問1 $\triangle OBC$ の面積を求めなさい。

図1



問3 右の図2のように、 x 軸上の $0 \leq x \leq 4$ の範囲に点 P をとり、点 P を通って y 軸に平行な直線 m をひきます。直線 m と直線 l との交点を D 、直線 m と線分 OB との交点を E とします。 $\triangle OAB$ と $\triangle BDE$ の面積の比が $4:1$ のとき、点 P の x 座標を途中の説明も書いて求めなさい。その際、解答用紙の図を用いて説明してもよいものとします。



問1	cm^2
問2	$a =$
問3	[説明] 答え cm^3

解答

問1 4cm^2

問2 $a = \frac{1}{4}$

問3

〔説明〕

点 B から直線 m に垂線をひき、交点を F とする。

$BF=h$ とすると、 $\triangle BDE \sim \triangle BCO$ であるから、面積比と高さの比の関係より

$$\triangle BDE : \triangle BCO = h^2 : 4^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle OAB : \triangle BDE = 4 : 1$ で、 $\triangle OAB = 6$ であるから

$$6 : \triangle BDE = 4 : 1$$

$$\triangle BDE = \frac{3}{2}$$

よって①は

$$\frac{3}{2} : 4 = h^2 : 4^2$$

$$4h^2 = 24$$

$h > 0$ より

$$h = \sqrt{6}$$

したがって点 P の x 座標は $4 - \sqrt{6}$

答え $4 - \sqrt{6}$

解説

問1

$\triangle OBC$ の底辺を CO とすると、高さは、点 B の x 座標より 4 cm となる。

$C(0, 2)$ より、 $CO = 2\text{ cm}$ だから、 $\triangle OBC$ の面積は $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4\text{cm}^2$

問2

$y = a \times (-2)^2 = 4a$ より $A(-2, 4a)$ $y = a \times 4^2 = 16a$ より $B(4, 16a)$ また $C(0, 2)$

直線 AC の傾きは $\frac{2-4a}{0-(-2)} = \frac{2-4a}{2} = 1-2a$

直線 CB の傾きは $\frac{16a-2}{4-0} = \frac{16a-2}{4} = 4a - \frac{1}{2}$

直線 AC と直線 CB はともに直線 ℓ に一致するから、直線 AC と直線 CB の傾きは等しくなる。

$$\text{よって } 1-2a = 4a - \frac{1}{2}$$

$$-6a = -\frac{3}{2}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

問3

点 B を通り直線 m に垂直な直線と直線 m , y 軸との交点をそれぞれ F, G とし $BF = h\text{ cm}$ とする。

直線 m と y 軸は平行で $BG = 4\text{ cm}$ だから $BD : BC = BF : BG = h : 4$

$\triangle BDE \sim \triangle BCO$ で、相似比は $BD : BC = h : 4$ だから、面積の比は $h^2 : 4^2 = h^2 : 16$

$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 4 = 2 + 4 = 6\text{cm}^2$ だから $\triangle OAB : \triangle BDE = 4 : 1$ より

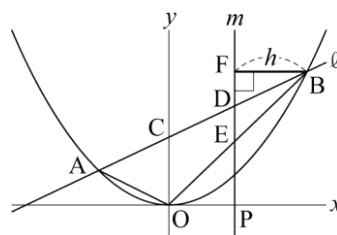
$$\triangle BDE = S\text{ cm}^2 \text{ とすると } 6 : S = 4 : 1 \quad 4S = 6 \quad S = \frac{3}{2}$$

よって、問1より $\triangle OBC = 4\text{ cm}^2$ であり $\triangle BDE : \triangle BCO = h^2 : 16$ だから

$$\frac{3}{2} : 4 = h^2 : 16 \quad 4h^2 = 24 \quad h^2 = 6 \quad h > 0 \text{ より, } h = \sqrt{6}$$

$FG = BG - BF = 4 - \sqrt{6}\text{ cm}$ だから

点 P の x 座標は $4 - \sqrt{6}$



【問 7】

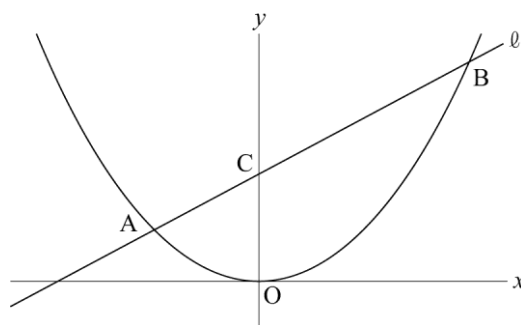
右の図1で、曲線は関数 $y=ax^2$ のグラフです。曲線上に x 座標が $-2, 4$ である 2 点 A, B をとり、この 2 点を通る直線 ℓ をひきます。直線 ℓ が y 軸と点 $C (0, 2)$ で交わるとき、次の各問に答えなさい。

ただし、座標軸の単位の長さを 1 cm とし、円周率は π とします。

(埼玉県 2017 年度)

問1 a の値を求めなさい。

図1



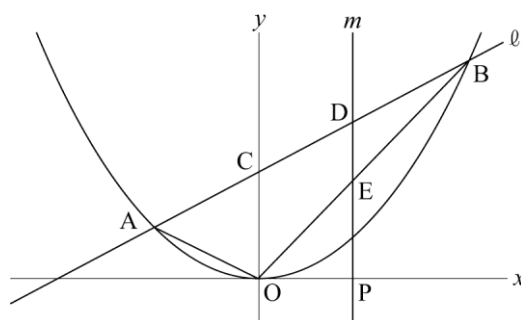
問2 右の図2のように、 x 軸上の $0 \leq x \leq 4$ の範囲に点 P をとり、

点 P を通って y 軸に平行な直線 m をひきます。直線 m と直線 ℓ との交点を D 、直線 m と線分 OB との交点を E とします。

$\triangle OAB$ と $\triangle BDE$ の面積の比が $4:1$ のとき、次の(1), (2)に答えなさい。

(1) 点 P の x 座標を求めなさい。

図2



(2) $\triangle BDE$ を、辺 BE を軸として 1 回転させてできる立体の体積を、途中の説明も書いて求めなさい。その際、解答用紙の図を用いて説明してもよいものとします。

解答欄

問1	$\alpha =$	
問2	(1)	
	(2)	〔説明〕
		答え

解答

問1 $a = \frac{1}{4}$

問2

(1) $4 - \sqrt{6}$

(2)

〔説明〕

点 D, E の y 座標は, それぞれ $4 - \frac{\sqrt{6}}{2}$, $4 - \sqrt{6}$ だから $DE = \frac{\sqrt{6}}{2}$

また, 点 D から辺 BE に垂線をひき, 交点を F とすると

$\triangle DEF$ は $DF = EF$ の直角二等辺三角形だから

$$DF = \frac{DE}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle BDE$ を 1 回転させてできる立体は

DF を半径とする円を共通の底面にもつ円錐を 2 つ合わせたものだから

求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times DF^2 \times (EF + FB)$$

$$= \frac{\pi}{3} \times DF^2 \times EB$$

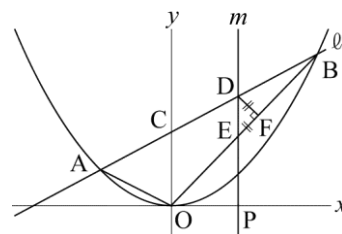
ここで, 点 B, E の x 座標は, それぞれ 4, $4 - \sqrt{6}$ だから

$$EB = \sqrt{6} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

よって

$$V = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \times 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$$

答え $\frac{\sqrt{3}}{2} \pi \text{ cm}^3$



解説

問1

$y = a \times (-2)^2 = 4a$ より $A(-2, 4a)$ $y = a \times 4^2 = 16a$ より $B(4, 16a)$ また $C(0, 2)$

直線 AC の傾きは $\frac{2-4a}{0-(-2)} = \frac{2-4a}{2} = 1-2a$

直線 CB の傾きは $\frac{16a-2}{4-0} = \frac{16a-2}{4} = 4a - \frac{1}{2}$

直線 AC と直線 CB はともに直線 ℓ に一致するから、直線 AC と直線 CB の傾きは等しくなる。

よって $1-2a = 4a - \frac{1}{2}$

$$-6a = -\frac{3}{2}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

問2

(1)

点 B を通り直線 m に垂直な直線と直線 m , y 軸との交点をそれぞれ H, I とし $BH = h$ cm とする。

直線 m と y 軸は平行で $BI = 4$ cm だから $BH:BC = BF:BI = h:4$

$\triangle BDE \sim \triangle BCO$ で

相似比は $BD:BC = h:4$ だから

面積の比は $h^2:4^2 = h^2:16$

$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 2 + 4 = 6 \text{ cm}^2$ だから

$\triangle OAB : \triangle BDE = 4:1$ より

$\triangle BDE = S \text{ cm}^2$ とすると

$$6:S = 4:1$$

$$4S = 6$$

$$S = \frac{3}{2}$$

よって $\triangle OBC = 4 \text{ cm}^2$ であり、 $\triangle BDE : \triangle BCO = h^2:16$ だから

$$\frac{3}{2} : 4 = h^2 : 16$$

$$4h^2 = 24$$

$$h^2 = 6$$

$h > 0$ より

$$h = \sqrt{6}$$

$HI = BI - BH = 4 - \sqrt{6}$ cm だから

点 P の x 座標は $4 - \sqrt{6}$

(2)

点 D から辺 BE に垂線をひき、その交点を F とすると

求める立体の体積は、DF を半径とする円を底面とした高さ EF と FB の円錐を合わせたものになる。

まず、(1)より、点 D, E の y 座標を求めると、それぞれ $4 - \frac{\sqrt{6}}{2}$, $4 - \sqrt{6}$ となるから

$\triangle OPE$ は、 $OP = 4 - \sqrt{6}$ cm, $PE = 4 - \sqrt{6}$ cm, $\angle EPO = 90^\circ$ の直角二等辺三角形とわかる。

$\angle OEP = 45^\circ$ より、 $\angle DEF = 45^\circ$ となるから、 $\triangle FED$ も直角二等辺三角形とわかる。

ここで $DE = \left(4 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) - (4 - \sqrt{6}) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm だから $DF = \frac{DE}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

また、2 つの円錐の高さの和は、 $EF + FB = EB$ で、EB は、 $E(4 - \sqrt{6}, 4 - \sqrt{6})$, $B(4, 4)$ より

2 辺の長さが $\sqrt{6}$ cm の直角二等辺三角形の斜辺の長さになるから $\sqrt{6} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ cm

したがって求める立体の体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \text{ cm}^3$

【問 8】

下の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフと直線

$y=\frac{1}{2}x+2$ が、2 点 A, B で交わっている。

2 点 A, B の x 座標が、それぞれ $-2, 4$ であるとき、
次の問1～問3に答えなさい。ただし、 $a>0$ とする。

また、原点 O から点 (1, 0) までの距離及び原点
O から点 (0, 1) までの距離をそれぞれ 1 cm とする。

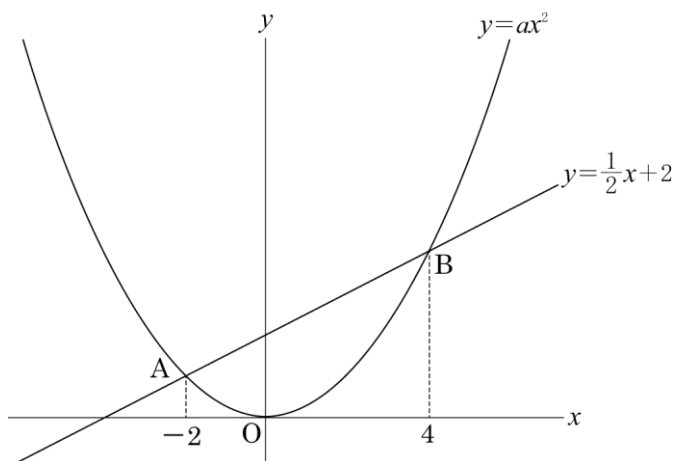
(千葉県 2017 年度 前期)

問1 a の値を求めなさい。

問2 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

問3 原点 O から直線 $y=\frac{1}{2}x+2$ に垂線 OH をひくとき、線分 AH と線分 HB の長さの比を最も簡単な整数の
比で表しなさい。

図1



解答欄

問1	$a =$
問2	cm^2
問3	

解答

問1 $a = \frac{1}{4}$

問2 6cm^2

問3 $1:4$

解説

問1

$$y = \frac{1}{2} \times 4 + 2 = 4 \text{ より } B(4, 4) \text{ だから } 4 = a \times 4^2 \quad a = \frac{1}{4}$$

問2

直線 $y = \frac{1}{2}x + 2$ と y 軸との交点を C とする。

$$C(0, 2) \text{ だから } \triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 6\text{cm}^2$$

問3

線分 OH は $\triangle OAB$ の底辺を AB としたときの高さになる。

$$AB \text{ の長さを求めると } y = \frac{1}{2} \times (-2) + 2 = 1 \text{ より } A(-2, 1) \text{ だから}$$

$$AB^2 = \{4 - (-2)\}^2 + (4 - 1)^2 = 45 \quad AB > 0 \text{ より } AB = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\text{ここで } \triangle OAB = 6\text{ cm}^2 \text{ だから } \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times OH = 6 \quad OH = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$\text{また, } OB^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \text{ で } OB > 0 \text{ より } OB = 4\sqrt{2} \text{ cm とするから}$$

$$\triangle OBH \text{ において, 三平方の定理より } HB^2 = (4\sqrt{2})^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 32 - \frac{16}{5} = \frac{144}{5}$$

$$\text{よって } HB > 0 \text{ より } HB = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$\text{したがって } AH = AB - HB = 3\sqrt{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ cm より}$$

$$AH:HB = \frac{3\sqrt{5}}{5} : \frac{12\sqrt{5}}{5} = 1:4$$

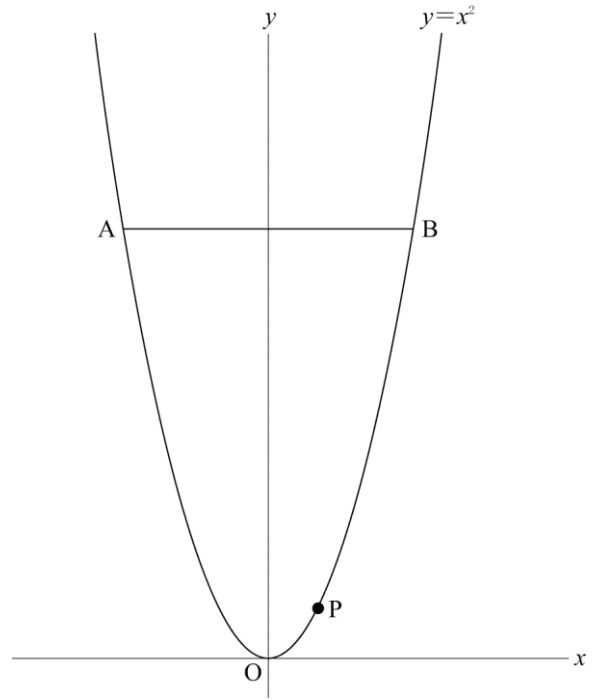
【問 9】

下の図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に、3 点 A, B, P をとる。点 A の x 座標は負、点 B の x 座標は正で、点 P の x 座標は 0 より大きく点 B の x 座標より小さい。線分 AB は x 軸に平行で、 $AB=6$ のとき、次の問1～問3に答えなさい。

(千葉県 2017 年度 後期)

問1 点 B の座標を求めなさい。

問2 点 P の x 座標が 1 のとき、2 点 A, P を通る直線の式を求めなさい。



問3 $\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ の面積比が $4:3$ になるとき、2 点 A, P を通る直線が x 軸と交わる点の座標を求めなさい。

解答欄

問1	$\left(\begin{array}{c} \\ \end{array} , \begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$
問2	
問3	$\left(\begin{array}{c} \\ \end{array} , \begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$

解答

問1 (3, 9)

問2 $y = -2x + 3$

問3 (3, 0)

解説

問1

条件から、点 A と点 B は、 y 軸について対称であり、点 A の x 座標と点 B の x 座標の絶対値は等しい。

$AB=6$ より、点 B の x 座標は、 $6 \div 2 = 3$ 点 B の y 座標は、 $y = x^2$ に $x=3$ を代入して $y = 3^2 = 9$

よって B(3, 9)

問2

問1より B(3, 9)だから、A(-3, 9) $y = x^2$ に $x=1$ を代入して $y = 1^2 = 1$ よって P(1, 1)

2 点 A, P を通る直線の傾きは $\frac{1-9}{1-(-3)} = -2$

求める直線の式を $y = -2x + b$ として $x=1, y=1$ を代入すると $1 = -2 \times 1 + b$ $b=3$

よって $y = -2x + 3$

問3

$\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ の共通する辺 AB を底辺とすると、高さの比が面積比と等しくなる。

$\triangle OAB$ の高さが 9 だから $\triangle PAB$ の高さは $9 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$

よって、点 P の y 座標は $9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$

点 P の x 座標は、 $y = x^2$ に $y = \frac{9}{4}$ を代入して、 $\frac{9}{4} = x^2$ $0 < x < 3$ だから $x = \frac{3}{2}$

よって $P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

2 点 A, P を通る直線の傾きは $\left(\frac{9}{4} - 9\right) \div \left\{\frac{3}{2} - (-3)\right\} = -\frac{3}{2}$ だから

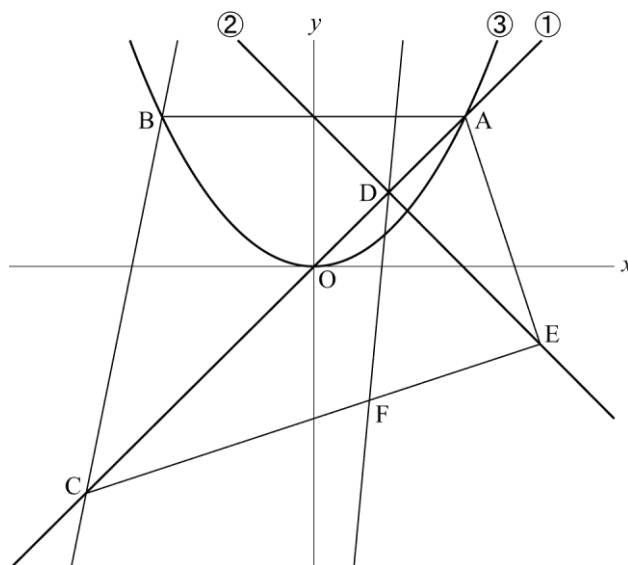
この直線の式を $y = -\frac{3}{2}x + c$ として $x=-3, y=9$ を代入すると $9 = -\frac{3}{2} \times (-3) + c$ $c = \frac{9}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ に $y=0$ を代入して $0 = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ $x=3$

よって求める点の座標は(3, 0)

【問 10】

右の図において、直線①は関数 $y=x$ のグラフ、直線②は関数 $y=-x+2$ のグラフであり、曲線③は関数 $y=ax^2$ のグラフである。点 A は直線①と曲線③との交点で、その x 座標は 2 である。点 B は曲線③上の点で、線分 AB は x 軸に平行である。また、原点を O とするとき、点 C は直線①上の点で、 $AO:OC=2:3$ であり、その x 座標は負である。さらに、点 D は直線①と直線②との交点であり、点 E は直線②上の点で、その x 座標は 3 である。



このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2017 年度)

問1 曲線③の式 $y=ax^2$ の a の値として正しいものを次の1～6の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 $a=\frac{1}{4}$ | 2 $a=\frac{1}{3}$ | 3 $a=\frac{2}{5}$ |
| 4 $a=\frac{1}{2}$ | 5 $a=\frac{2}{3}$ | 6 $a=\frac{3}{4}$ |

問2 直線 BC の式として正しいものを次の1～6の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| 1 $y=4x+10$ | 2 $y=4x+12$ | 3 $y=4x+14$ |
| 4 $y=5x+10$ | 5 $y=5x+12$ | 6 $y=5x+14$ |

問3 点 F は線分 CE 上の点である。直線 DF が三角形 ACE の面積を 2 等分するとき、点 F の x 座標として正しいものを次の1～6の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | |
|-------------------|------------------|-----------------|
| 1 $\frac{5}{7}$ | 2 $\frac{8}{11}$ | 3 $\frac{3}{4}$ |
| 4 $\frac{10}{13}$ | 5 $\frac{7}{9}$ | 6 $\frac{4}{5}$ |

解答欄

問1	
問2	
問3	

解答

問1 4

問2 5

問3 3

解説

問1

点 A は直線① $y=x$ 上の点で $x=2$ より $A(2, 2)$

点 A は曲線③ $y=ax^2$ 上の点でもあるので $2=a \times 2^2 \quad 4a=2 \quad a=\frac{1}{2}$

問2

点 A と点 B は y 軸について対称だから $B(-2, 2)$

点 C は直線① $y=x$ 上の点で, $AO:OC=2:3$, $A(2, 2)$ だから $C(-3, -3)$

直線 BC の傾きは $\frac{2-(-3)}{-2-(-3)}=5$

直線 BC の式を $y=5x+b$ として, $x=-2$, $y=2$ を代入すると $2=5 \times (-2)+b \quad b=12$

よって, 直線 BC の式は $y=5x+12$

問3

$y=x$ と $y=-x+2$ を連立方程式として解くと $x=1$, $y=1$ だから $D(1, 1)$

点 E は直線② $y=-x+2$ 上の点で x 座標が 3 だから $y=-3+2=-1$ より $E(3, -1)$

点 E を通り x 軸に平行な直線と直線① $y=x$ との交点を G とすると $G(-1, -1)$

$\triangle ACE = \triangle AGE + \triangle CGE$

$$= \frac{1}{2} \times \{3 - (-1)\} \times \{2 - (-1)\} + \frac{1}{2} \times \{3 - (-1)\} \times \{-1 - (-3)\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2$$

$$= 10$$

直線 DF は $\triangle ACE$ の面積を 2 等分するから $\triangle DCF = 10 \div 2 = 5$

y 軸上に $DC \parallel FH$ となる点 H をとると $\triangle DCH = \triangle DCF = 5$

$$OH=h \text{ とすると } \triangle DCH = \triangle DOH + \triangle COH = \frac{1}{2} \times h \times 1 + \frac{1}{2} \times h \times 3 = 2h$$

よって $2h=5 \quad h=\frac{5}{2}$ だから

$H\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ より, 直線 FH の式は $y=x-\frac{5}{2}$

直線 CE の傾きは $\frac{-1-(-3)}{3-(-3)} = \frac{1}{3}$

直線 CE の式を $y=\frac{1}{3}x+c$ として $x=3$, $y=-1$ を代入すると $-1=\frac{1}{3} \times 3+c \quad c=-2$

よって直線 CE の式は $y=\frac{1}{3}x-2$

$y=x-\frac{5}{2}$ と $y=\frac{1}{3}x-2$ を連立方程式として解くと

$x=\frac{3}{4}$, $y=-\frac{7}{4}$ だから

点 F の x 座標は $\frac{3}{4}$

【問 11】

右の図のように、関数 $y=x^2$ のグラフと直線 l が 2 点 A, B で交わっている。点 A の x 座標は -3 , 点 B の x 座標は 4 である。

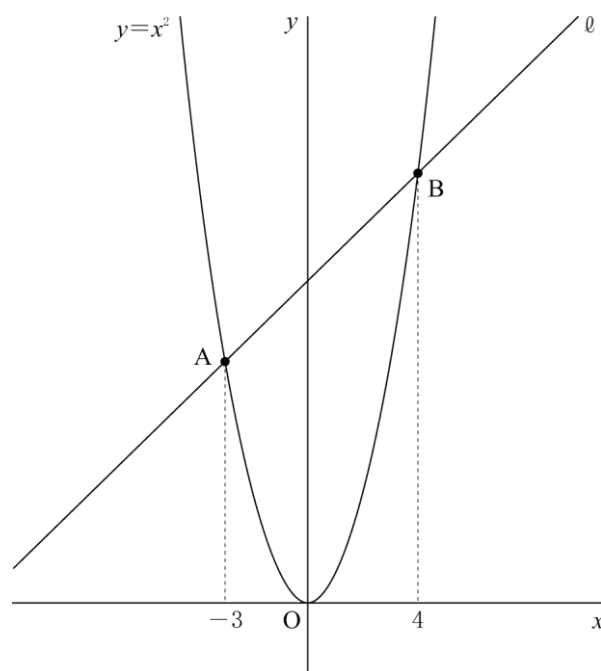
このとき、次の問いに答えなさい。

(富山県 2017 年度)

問1 関数 $y=x^2$ について、 x の値が 3 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

問2 直線 l の式を求めなさい。

問3 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1	
問2	
問3	

解答

問1 8

問2 $y=x+12$

問3 42

解説

問1

変化の割合 $= \frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}}$ だから $\frac{5^2 - 3^2}{5 - 3} = 8$

問2

点 A, B とともに $y=x^2$ 上の点だから, それぞれの座標を求めると A(-3, 9), B(4, 16)

よって直線 ℓ の傾きは $\frac{16-9}{4-(-3)} = 1$

直線 ℓ の式を $y=x+b$ とおくと A(-3, 9) を通るから $9=(-3)+b$ $b=12$

よって $y=x+12$

問3

直線 ℓ と y 軸の交点を C とおくと C(0, 12)

よって $\triangle OAB = \triangle AOC + \triangle COB = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 + \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 42$

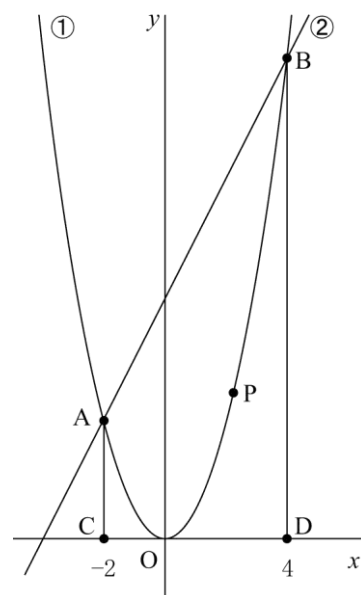
【問 12】

右の図において、①は関数 $y=x^2$ 、②は関数 $y=2x+8$ のグラフである。2 点 A, B は①と②の交点で、 x 座標はそれぞれ -2 と 4 である。点 A, B から x 軸に垂線をひき、 x 軸との交点をそれぞれ C, D とする。また、点 P は①のグラフ上を A から B まで動く。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(石川県 2017 年度)

問1 点 P の y 座標のとり値の範囲を、不等号を用いて表しなさい。



問2 点 P の x 座標が正のとき、点 P を通り、 y 軸に平行な直線をひき、②のグラフとの交点を Q とする。直線 CQ と直線 OP が平行となるような点 P の座標を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

問3 $\angle ACD$ の二等分線と直線 AO との交点を S とするとき、 $\triangle CDS$ の面積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

解答欄

問1	
問2	[計算] 答
問3	[計算] 答

解答

問1 $0 \leq y \leq 16$

問2

〔計算〕

点 P の x 座標を t ($t > 0$) とすると $P(t, t^2)$, $Q(t, 2t+8)$

直線 CQ と直線 OP が平行より $\frac{2t+8}{t-(-2)} = \frac{t^2}{t}$

これを解いて $t^2=8$ より $t = \pm 2\sqrt{2}$

$t > 0$ より

$$t = 2\sqrt{2}$$

答 $(2\sqrt{2}, 8)$

問3

〔計算〕

$\angle ACD$ の二等分線は、傾きが 1 で $(-2, 0)$ を通るので $y=x+2$ となる。

また、直線 AO の式は $y=-2x$ より

交点 S について $x+2=-2x$

これを解いて $x=-\frac{2}{3}$ より y 座標は $\frac{4}{3}$

したがって $\triangle CDS$ の面積は $\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{4}{3} = 4$

答 4

解説

問1

点 P は A から B まで動くので x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域を求めればよい。

変域に 0 を含むので y の値が最小となるのは $x=0$ のときで $y=0$

y の値が最大となるのは -2 と 4 で絶対値の大きい $x=4$ のときで $y=4^2=16$

よって y の変域は $0 \leq y \leq 16$

問2

点 P の x 座標を p ($0 < p \leq 4$) とすると $P(p, p^2)$, $Q(p, 2p+8)$

$C(-2, 0)$ より直線 CQ の傾きは $\frac{2p+8-0}{p-(-2)} = \frac{2p+8}{p+2}$

直線 OP の傾きは、 $\frac{p^2-0}{p-0} = p$

平行な 2 直線の傾きは等しいから

$$\frac{2p+8}{p+2} = p \quad \text{整理すると } p = \pm 2\sqrt{2} \quad 0 < p \leq 4 \text{ より } p = 2\sqrt{2}$$

よって $(2\sqrt{2})^2=8$ より $P(2\sqrt{2}, 8)$

問3

$\angle ACD$ の二等分線と y 軸との交点を E とすると $\angle ACD=90^\circ$ より $\triangle ECO$ は直角二等辺三角形になる。

よって $CO=OE$ だから $\frac{OE}{CO} = 1$ より $\angle ACD$ の二等分線の傾きは 1 である。

$\angle ACD$ の二等分線は、点 $C(-2, 0)$ を通るから $y=x+b$ に $x=-2, y=0$ を代入して

$$0 = -2 + b \quad b = 2 \quad \angle ACD \text{ の二等分線の式は } y = x + 2$$

点 A は関数 $y=x^2$ のグラフ上にあり、その x 座標は -2 だから

$y=x^2$ に $x=-2$ を代入して $y=(-2)^2=4$ よって $A(-2, 4)$

直線 AO の式を $y=ax$ として $x=-2, y=4$ を代入すると $4=a \times (-2) \quad a=-2$

よって $y=-2x$ $y=x+2$ と $y=-2x$ を連立方程式として解くと $x=-\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3}$ だから

$$S\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$C(-2, 0), D(4, 0)$ より、 $CD=4-(-2)=6$

$\triangle CDS$ の面積は $\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{4}{3} = 4$

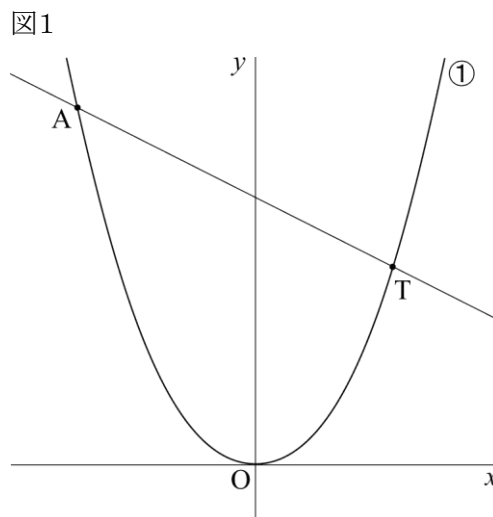
【問 13】

下の図1, 2において, ①は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフである。

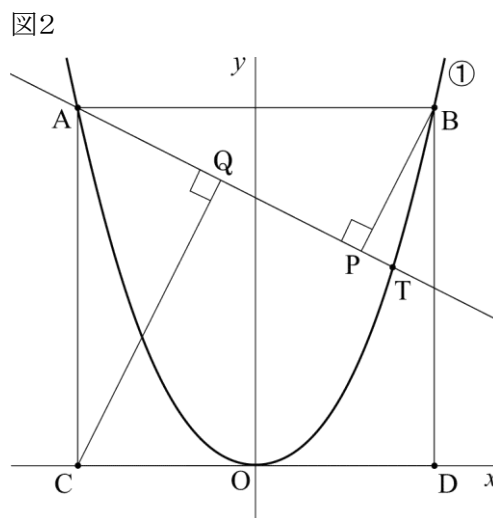
点 A, T は①上の点で, 点 A の座標は $(-4, 8)$, 点 T の x 座標は 3 である。このとき, 次の問1～問4に答えなさい。

(山梨県 2017 年度)

問1 点 T の y 座標を求めなさい。



問2 ①の関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ において, x の変域が $-4 \leq x \leq 3$ であるとき, y の変域を求めなさい。



問3 直線 AT の式を求めなさい。

問4 図2において, 点 B は①上の点であり, 線分 AB は x 軸に平行である。また, 点 A, B から x 軸に垂線をひき, その交点をそれぞれ C, D とすると, 四角形 ACDB は正方形となる。さらに, 点 B, C から直線 AT に垂線をひき, その交点をそれぞれ P, Q とする。

このとき, 次の(1), (2)に答えなさい。

(1) $\triangle ACQ \equiv \triangle BAP$ を証明しなさい。

(2) 線分 PQ の長さを求めなさい。

解答欄

問1	$y=$	
問2		
問3	$y=$	
問4	(1)	〔証明〕
	(2)	

解答

問1 $y = \frac{9}{2}$

問2 $0 \leq y \leq 8$

問3 $y = -\frac{1}{2}x + 6$

問4

(1)

〔証明〕

$\triangle ACQ$ と $\triangle BAP$ において

仮定より

$$\angle AQC = \angle BPA = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

正方形の辺はすべて等しいから

$$AC = BA \cdots \textcircled{2}$$

三角形の内角の和は 180° だから

$$\angle ACQ + \angle CAQ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle ACQ = 90^\circ - \angle CAQ \cdots \textcircled{3}$$

正方形の 1 つの内角は 90° だから

$$\angle BAP = 90^\circ - \angle CAQ \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より

$$\angle ACQ = \angle BAP \cdots \textcircled{5}$$

①, ②, ⑤より, 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACQ \equiv \triangle BAP$$

(2) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

解説

問1

点 T は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり、その x 座標は 3 だから $y = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$

問2

x の変域に 0 を含むので y の値が最小となるのは $x=0$ のときで $y=0$

y の値が最大となるのは -4 と 3 で絶対値の大きい $x=-4$ のときで $y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$

よって y の変域は $0 \leq y \leq 8$

問3

$A(-4, 8)$, $T\left(3, \frac{9}{2}\right)$ より、直線 AT の傾きは $\left(\frac{9}{2} - 8\right) \div \{3 - (-4)\} = -\frac{7}{2} \div 7 = -\frac{1}{2}$

直線 AT の式を $y = -\frac{1}{2}x + b$ として $x=-4$, $y=8$ を代入すると $8 = -\frac{1}{2} \times (-4) + b$ $b=6$

よって求める式は $y = -\frac{1}{2}x + 6$

問4

(1)

$\angle AQC = \angle BPA = 90^\circ$ より $\triangle ACQ$ と $\triangle BAP$ が直角三角形であることがわかる。

四角形 ACDB は正方形だから $AC=BA$ となり、斜辺が等しいことが導かれるので、

他の 1 辺か 1 つの鋭角が等しくなれば合同が証明できる。

ここで $\angle ACQ + \angle CAQ + 90^\circ = 180^\circ$, $\angle BAP = \angle BAC - \angle CAQ$ より $\angle ACQ = \angle BAP$ がわかるので 1 つの鋭角が等しいことが導ける。

(2)

条件から、点 A の y 座標と点 B の y 座標は等しくなり、この 2 点は y 軸について対称である。

よって点 A の x 座標と点 B の x 座標の絶対値は等しく $A(-4, 8)$ より $B(4, 8)$

直線 AT と辺 BD の交点を R とする。

点 R の x 座標は 4 だから $y = -\frac{1}{2}x + 6$ に $x=4$ を代入して $y = -\frac{1}{2} \times 4 + 6 = 4$ より $R(4, 4)$

$\triangle ABR$ において、三平方の定理より $AR^2 = AB^2 + BR^2 = \{4 - (-4)\}^2 + (8 - 4)^2 = 80$

$AR > 0$ より $AR = 4\sqrt{5}$

ここで、 $AP=p$ とすると

$\triangle RAB \sim \triangle BAP$ より $AR:AB=AB:AP$ が成り立ち

$$4\sqrt{5}:8=8:p$$

$$p = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

同様に $BP=q$ とすると

$$AR:AB=RB:BP \text{ より } 4\sqrt{5}:8=4:q \quad q = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

したがって $\triangle ACQ \equiv \triangle BAP$ より $AQ=BP = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ だから

$$PQ=AP-AQ = \frac{16\sqrt{5}}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

【問 14】

図2のように、関数 $y=x^2$ と関数 $y=2x+15$ のグラフがある。
2つのグラフは2点A、Bで交わり、点A、Bの x 座標は、それぞれ、 -3 、 5 である。
関数 $y=2x+15$ のグラフと y 軸の交点をCとする。

(長野県 2017 年度)

- (1) 関数 $y=x^2$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 5$ のときの y の変域を求めなさい。
- (2) $\triangle OBC$ の面積を求めたい。 $\triangle OBC$ の底辺を OC とするとき、高さを表す値を、次のア～エから1つ選び、記号を書きなさい。

$$\left(\begin{array}{cc} \text{ア 点 B の } x \text{ 座標} & \text{イ 点 B の } y \text{ 座標} \\ \text{ウ 点 C の } x \text{ 座標} & \text{エ 点 C の } y \text{ 座標} \end{array} \right)$$

- (3) 関数 $y=x^2$ のグラフ上に点Pを、 $\triangle APB$ の面積が48になるようにとりたい。ただし、点Pの x 座標は $0 < x < 5$ とする。点Pの座標を、図3を使って次のように求めた。

図2

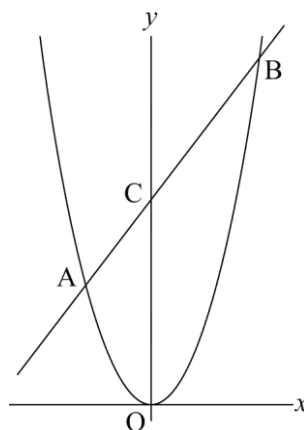
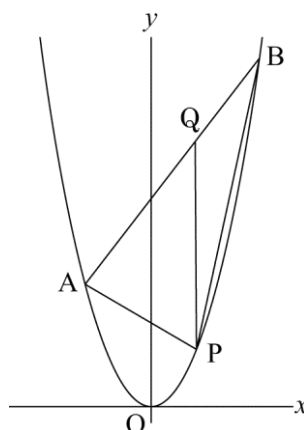


図3



〔解答〕

図3のように、放物線上の点Pを通り y 軸に平行な直線と線分ABとの交点をQとし、点Pの x 座標を t とすると、

P (t , い), Q (t , う)

線分PQを底辺としたときの $\triangle APQ$ の高さを h ,

$\triangle BPQ$ の高さを h' とする。

$\triangle APB = \triangle APQ + \triangle BPQ$ だから、 $\triangle APB$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times PQ \times h + \frac{1}{2} \times PQ \times h'$$

$$= \frac{1}{2} \times PQ \times (h + h')$$

ここで、 $h + h' =$ え より、

お

- ① い , う に当てはまる式を t を用いて書きなさい。また、え に当てはまる数を書きなさい。

- ② お に、 t についての方程式と途中の過程を書き、点Pの座標を求め、解答を完成させなさい。

解答欄

(1)	$\leq y \leq$		
(2)			
(3)	①	い	
		う	
		え	
	②		

解答

(1) $0 \leq y \leq 25$

(2) ア

(3)

① い t^2 う $2t+15$ え 8

②

$$\frac{1}{2}(2t+15-t^2) \times 8 = 48$$

これを解くと

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$t = -1, 3$$

$0 < t < 5$ だから, $t = 3$ は問題にあうが

$t = -1$ は問題にあわない。

よって P (3, 9)

解説

(1)

関数 $y = x^2$ について x の変域に 0 を含むので y の値が最小となるのは $x = 0$ のときで $y = 0$

y の値が最大となるのは -3 と 5 で絶対値が大きい $x = 5$ のときで $y = 5^2 = 25$

よって y の変域は $0 \leq y \leq 25$

(2)

$\triangle OBC$ の底辺を OC とするとき, 高さは, 点 B から y 軸にひいた垂線の長さに等しい。

つまり, 点 B の x 座標で表される。

(3)

①

点 P は関数 $y = x^2$ のグラフ上にあるから, 点 P の x 座標が t のとき, 点 P の y 座標は t^2 (い)。

点 Q は関数 $y = 2x + 15$ のグラフ上にあるから, 点 Q の x 座標が t のとき, 点 Q の y 座標は $2t + 15$ (う)。

(点 A から直線 PQ までの距離) + (点 B から直線 PQ までの距離)

= (点 A から y 軸までの距離) + (点 B から y 軸までの距離) だから,

$$h + h' = 5 + 3 = 8 \text{ (え)}$$

$$\textcircled{2} \triangle APB = \frac{1}{2} \times PQ \times (h + h') \text{ である。}$$

$\triangle APB$ の面積が 48, $PQ = 2t + 15 - t^2$, $h + h' = 8$ だから

$$48 = \frac{1}{2} \times (2t + 15 - t^2) \times 8 \quad 2t + 15 - t^2 = 12 \quad t^2 - 2t - 3 = 0 \quad (t+1)(t-3) = 0 \quad t = -1, 3$$

$0 < t < 5$ だから $t = -1$ は問題にあわず $t = 3$ は問題にあっている。

よって $3^2 = 9$ より P(3, 9)

【問 15】

図6において、点 A の座標は $(-4, -5)$ であり、①は、点 A を通り、 x の変域が $x < 0$ であるときの反比例のグラフである。また、②は、関数 $y = ax^2$ ($a > 0$) のグラフである。2 点 B, C は放物線②上の点であり、その x 座標は、それぞれ $-2, 3$ である。

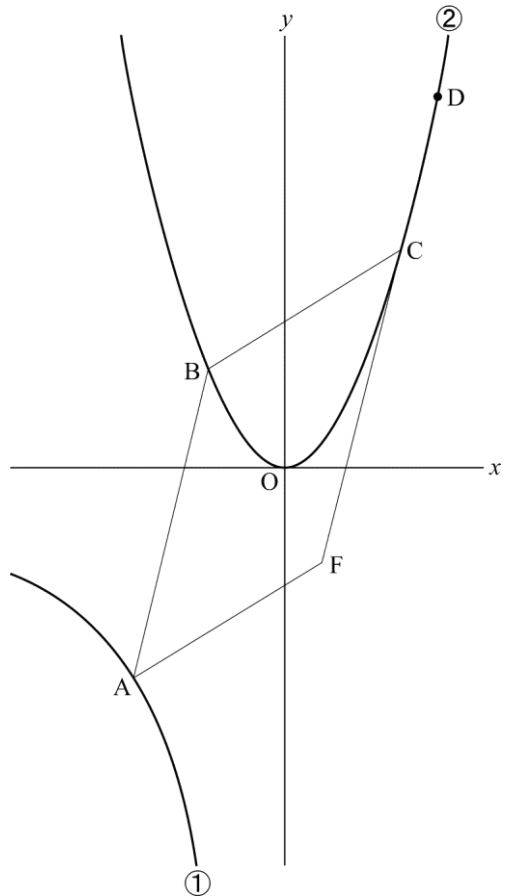
このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(静岡県 2017 年度)

問1 曲線①をグラフとする関数について、 y を x の式で表しなさい。

問2 点 D は放物線②上の点であり、その x 座標は 4 である。点 D から y 軸に引いた垂線の延長が放物線②と交わる点を E とする。点 E の座標を、 a を用いて表しなさい。

問3 点 F は四角形 $AFCB$ が平行四辺形となるようにとった点である。3 点 B, O, F が一直線上にあるときの, a の値と点 F の座標を求めなさい。求める過程も書きなさい。



解答欄

問1	
問2	E (,)
問3	[求める過程] 答 $a = \quad\quad\quad$, F (,)

解答

問1 $y = \frac{20}{x}$

問2 E $(-4, 16a)$

問3

[求める過程]

省略

答 a の値 $\frac{5}{7}$, 点 F の座標 $\left(1, -\frac{10}{7} \right)$

解説

問1

曲線①は反比例のグラフだから、求める式を $y = \frac{b}{x}$ とする。

曲線①は点 A $(-4, -5)$ を通るから $y = \frac{b}{x}$ に $x = -4$, $y = -5$ を代入すると $-5 = \frac{b}{-4}$ $b = 20$

よって求める式は $y = \frac{20}{x}$

問2

条件から、点 D の y 座標と点 E の y 座標は等しくなり、この 2 点は y 軸について対称である。
よって、点 D の x 座標と点 E の x 座標の絶対値は等しい。

点 D の x 座標は 4 だから、点 D の y 座標は、 $y = ax^2$ に $x = 4$ を代入して、 $y = a \times 4^2 = 16a$
したがって D $(4, 16a)$ より E $(-4, 16a)$

問3

$y = a \times (-2)^2 = 4a$ より B $(-2, 4a)$ $y = a \times 3^2 = 9a$ より C $(3, 9a)$

$3 - (-2) = 5$, $9a - 4a = 5a$ だから、点 B から右へ 5, 上へ $5a$ 進むと点 C に移る。

四角形 AFCE は平行四辺形であるから $AF \parallel EC$, $AF = EC$ より

点 A から右へ 5, 上へ $5a$ 進むと点 F に移る。

よって、A $(-4, -5)$ より点 F の x 座標は $-4 + 5 = 1$, 点 F の y 座標は $-5 + 5a$ だから F $(1, -5 + 5a)$

3 点 B, O, F が一直線上にあるとき、直線 BO の傾きと直線 OF の傾きは等しくなる。

B $(-2, 4a)$, O $(0, 0)$ だから、直線 BO の傾きは $\frac{0 - 4a}{0 - (-2)} = -2a$

O $(0, 0)$, F $(1, -5 + 5a)$ だから、直線 OF の傾きは $\frac{-5 + 5a - 0}{1 - 0} = -5 + 5a$

よって $-2a = -5 + 5a$

$-7a = -5$

$a = \frac{5}{7}$ となるから

$-5 + 5 \times \frac{5}{7} = -\frac{10}{7}$ より

F $\left(1, -\frac{10}{7} \right)$

【問 16】

次の図のように、関数 $y=ax^2\cdots\textcircled{7}$ のグラフ上に 3 点 A, B, C を、 y 軸上に点 D を、四角形 ABCD が平行四辺形となるようにとり、四角形 ABCD の辺 AB と y 軸との交点を E とする。

点 A の座標が $(-4, -4)$ 、点 B の座標が $(2, p)$ のとき、あとの各問いに答えなさい。

(三重県 2017 年度)

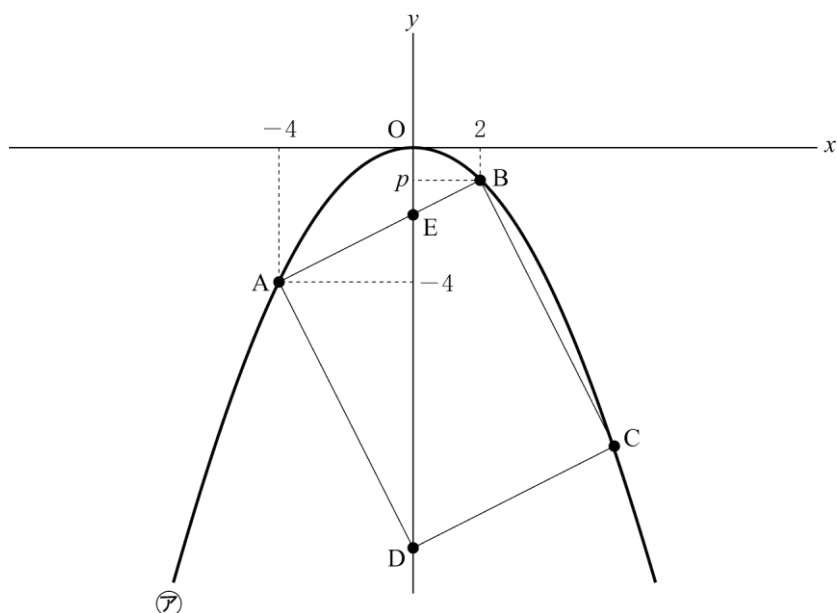
問1 a, p の値を求めなさい。

問2 関数 $\textcircled{7}$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 5$ のときの y の変域を求めなさい。

問3 2 点 A, B を通る直線の式を求めなさい。

問4 点 D の座標を求めなさい。

問5 x 軸上に点 F をとり、 $\triangle CDF$ をつくる。 $\triangle CDF$ の面積と $\triangle AED$ の面積が等しくなるとき、点 F の座標を求めなさい。ただし、点 F は、直線 CD について、原点と同じ側にとるものとする。



解答欄

問1	$a =$
	$p =$
問2	$\leq y \leq$
問3	$y =$
問4	D (,)
問5	F (,)

解答

問1 $a = -\frac{1}{4}, p = -1$

問2 $-\frac{25}{4} \leq y \leq 0$

問3 $y = \frac{1}{2}x - 2$

問4 D (0, -12)

問5 F $\left(\frac{32}{3}, 0\right)$

解説

問1

関数⑦は $y = ax^2$ だから、点 A の座標の値を代入すると $-4 = a \times (-4)^2$ $a = -\frac{1}{4}$

また、点 B も関数⑦上の点なので $p = -\frac{1}{4} \times 2^2 = -1$

問2

関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ は、下に開いている関数で x の変域に 0 を含むから、最大値は、 $x = 0$ のときで

$y = 0$ また、 -3 と 5 では 5 のほうが絶対値が大きいので、最小値は、 $x = 5$ のときで

$$y = -\frac{1}{4} \times 5^2 = -\frac{25}{4}$$

したがって求める y の変域は $-\frac{25}{4} \leq y \leq 0$

問3

A (-4, -4), B(2, -1) だから、直線 AB の傾きは $\frac{(-1)-(-4)}{2-(-4)} = \frac{1}{2}$

この式を $y = \frac{1}{2}x + b$ とおく。

この式に点 A の座標の値を代入すると $-4 = \frac{1}{2} \times (-4) + b$ $b = -2$

したがって求める直線の式は $y = \frac{1}{2}x - 2$

問4

点 A を通り x 軸に平行な直線と点 B を通り y 軸に平行な直線の交点を P、点 D を通り x 軸に平行な直線と点 C を通り y 軸に平行な直線の交点を Q とする。

このとき、四角形 ABCD が平行四辺形になるから、 $AB = DC$, $AB \parallel DC$ となり $\triangle BAP \equiv \triangle CDQ$

ここで、 $AP = 2 - (-4) = 6$ だから、点 D の x 座標は 0 より、点 C の x 座標は、 $0 + 6 = 6$

よって、点 C は関数⑦上の点だから $y = -\frac{1}{4} \times 6^2 = -9$ となり C(6, -9)

また $BP = -1 - (-4) = 3$ より、点 D の y 座標は $(-9) - 3 = -12$ したがって D(0, -12)

問5

DE を底辺、点 A から y 軸までの距離を高さと考えると、 $\triangle AED = \frac{1}{2} \times \{-2 - (-12)\} \times 4 = 20$

点 F を通り、辺 CD に平行な直線と y 軸との交点を G とすると

底辺が CD で共通になり、高さも等しくなるから $\triangle CDF = \triangle CDG$ となる。

ここで、点 G の座標を (0, g) とすると $\triangle CDG = \frac{1}{2} \times \{g - (-12)\} \times 6 = 3g + 36$

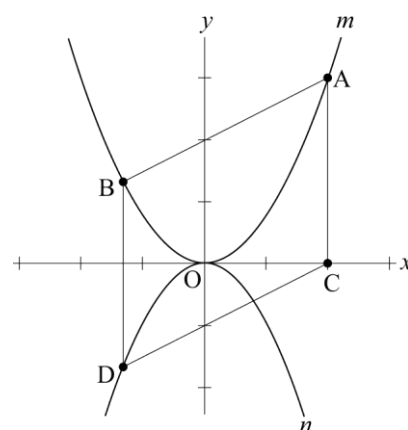
これが 20 になるので $3g + 36 = 20$ $g = -\frac{16}{3}$

よって点 F を通り、辺 CD に平行な直線は $y = \frac{1}{2}x - \frac{16}{3}$ となり

この直線と x 軸との交点を求めると $0 = \frac{1}{2}x - \frac{16}{3}$ より、 $x = \frac{32}{3}$ したがって、F $\left(\frac{32}{3}, 0\right)$

【問 17】

右図において、 m は $y = \frac{3}{4}x^2$ のグラフを表し、 n は $y = ax^2$ ($a < 0$) のグラフを表す。A、B は m 上の点であって、A の x 座標は 2 であり、B の x 座標は負である。C は x 軸上の点であり、C の x 座標は A の x 座標と等しい。D は n 上の点であり、D の x 座標は B の x 座標と等しい。4 点 A、B、D、C を結んでできる四角形 ABDC は平行四辺形である。平行四辺形 ABDC の面積が 10 cm^2 であるときの a の値を求めなさい。求め方も書くこと。ただし、座標軸の 1 目りの長さは 1 cm であるとする。



(大阪府 2017 年度 B)

解答欄

[求め方]

a の値

解答

[求め方]

線分 BD と x 軸との交点を E とする。

A の座標は (2, 3) だから $AC=3\text{cm}$

平行四辺形 ABDC の面積が 10 cm^2 だから

$$EC = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって E の } x \text{ 座標は } 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{B は } m \text{ 上の点だから B の } y \text{ 座標は } \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{したがって D の } y \text{ 座標は } \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$$

$$\text{よって D の座標は } \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

$$\text{D は } n \text{ 上の点だから } -\frac{5}{3} = a \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\text{よって } a = -\frac{15}{16}$$

$$a \text{ の値 } \quad -\frac{15}{16}$$

解説

$$\text{点 A は, } x \text{ 座標が } 2 \text{ で } y = \frac{3}{4}x^2 \text{ 上の点だから } y \text{ 座標を求めると } y = \frac{3}{4} \times 2^2 = 3$$

ここで, 点 B の座標がわかれば, x 座標が等しいことから点 D の x 座標がわかり

また $AC=BD=3$ だから点 D の y 座標も求められる。

まず, 辺 BD と x 軸の交点を E とおく。

四角形 ABDC の面積が 10 cm^2 で平行四辺形だから

$$\text{辺 AC を底辺とすると } AC=3\text{ cm} \text{ だから } 3 \times EC=10 \text{ より } EC = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって, 点 E の } x \text{ 座標は } 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$$

点 E の x 座標は点 B, 点 D の x 座標と等しくなるから

$$x = -\frac{4}{3} \text{ を } y = \frac{3}{4}x^2 \text{ に代入して点 B の } y \text{ 座標を求めると}$$

$$y = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$BD=3 \text{ より, 点 D の } y \text{ 座標を } s \text{ とすると } \frac{4}{3} - s = 3 \quad s = -\frac{5}{3}$$

$$\text{したがって } x = -\frac{4}{3}, y = -\frac{5}{3} \text{ を } y = ax^2 \text{ に代入して整理すると}$$

$$a = -\frac{15}{16}$$

【問 18】

図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点 A, B, C を中心とする 3 つの円がある。直線 ℓ , m は x 軸に平行で、点 A を中心とする円は x 軸, y 軸, 直線 ℓ に、点 B を中心とする円は y 軸, 直線 ℓ , m に、点 C を中心とする円は y 軸, 直線 m にそれぞれ接しており、点 A の座標は $(-1, 1)$ である。

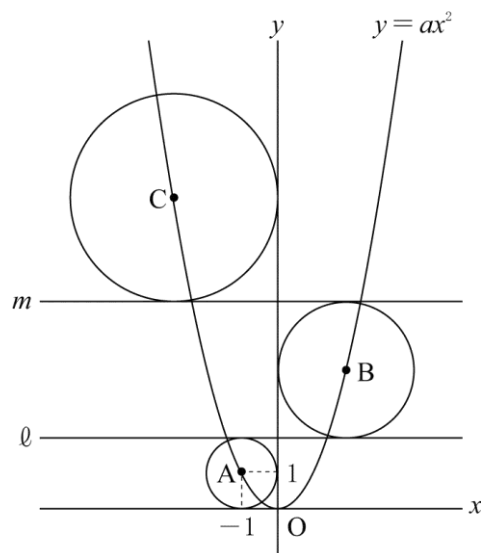
次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2017 年度)

問1 a の値を求めなさい。

問2 点 B の座標を求めなさい。

問3 3 点 A, B, C を通る円の半径は何 cm か、求めなさい。ただし、座標軸の単位の長さは 1 cm とする。



解答欄

問1	$a =$
問2	(,)
問3	cm

解答

問1 $a=1$

問2 (2, 4)

問3 $\sqrt{17}$ cm

解説

問1

点 A は関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあり、その座標は $(-1, 1)$ だから

$y=ax^2$ に $x=-1, y=1$ を代入して $1=a \times (-1)^2$ $a=1$

問2

点 B を中心とする円の半径を $r(r>0)$ とする。

円の接線は、その接点を通る半径に垂直で点 A を中心とする円の直径は 2 だから

点 B の座標は $(r, r+2)$ と表される。

点 B は関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるから $y=x^2$ に $x=r, y=r+2$ を代入して

$r+2=r^2$ $r^2-r-2=0$ $(r+1)(r-2)=0$ $r=-1, 2$ $r>0$ だから $r=2$

よって B(2, 4)

問3

点 C を中心とする円の半径を $s(s>0)$ とすると

点 A を中心とする円の直径は 2

点 B を中心とする円の直径は 4 だから

点 C の座標は $(-s, s+6)$ と表される。

点 C は関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるから $y=x^2$ に $x=-s, y=s+6$ を代入して

$s+6=(-s)^2$

$s^2-s-6=0$

$(s+2)(s-3)=0$

$s=-2, 3$

$s>0$ だから

$s=3$

よって C(-3, 9)

点 A から x 軸に平行にひいた直線と、点 B から y 軸に平行にひいた直線との交点を D とする。

$\triangle ADB$ において、三平方の定理より、 $AB^2=AD^2+DB^2=\{2-(-1)\}^2+(4-1)^2=18$

点 B から y 軸に平行にひいた直線と、点 C から x 軸に平行にひいた直線との交点を E とする。

$\triangle BEC$ において、三平方の定理より、 $BC^2=BE^2+EC^2=(9-4)^2+\{2-(-3)\}^2=50$

点 A から x 軸に平行にひいた直線と、点 C から y 軸に平行にひいた直線との交点を F とする。

$\triangle CFA$ において、三平方の定理より、 $CA^2=CF^2+FA^2=(9-1)^2+\{(-1)-(-3)\}^2=68$

よって $18+50=68$ より $AB^2+BC^2=CA^2$ となるから

三平方の定理の逆より

$\triangle ABC$ は $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形である。

円周角の定理の逆より 3 点 A, B, C を通る円は、線分 AC を直径とすることがわかるから

その円の半径は $\sqrt{68} \div 2 = 2\sqrt{17} \div 2 = \sqrt{17}$ cm

【問 19】

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、その x 座標はそれぞれ $-2, 4$ である。また、関数 $y = -x^2$ のグラフ上に 2 点 C, P があり、点 C の x 座標は -2 、点 P はグラフ上を動く点で、その x 座標は正の数である。各問いに答えよ。

(奈良県 2017 年度)

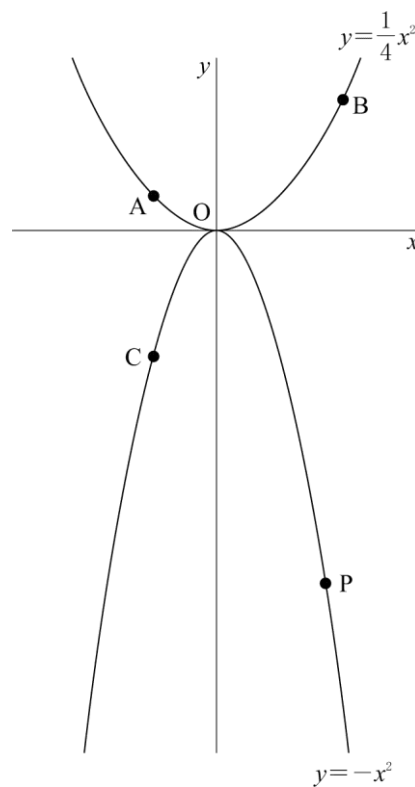
問1 関数 $y = -x^2$ について、 x の変域が $-2 < x < 4$ のときの y の変域を求めよ。

問2 2 点 B, C を通る直線の式を求めよ。

問3 点 P の x 座標が大きくなると、それにともなって大きくなるものを、次のア～エから全て選び、その記号を書け。

- ア 点 P の y 座標
- イ 線分 AP の長さ
- ウ 直線 CP の傾き
- エ $\triangle APB$ の面積

問4 点 P の x 座標が 3 のとき、四角形 ACPB の面積を求めよ。



解答欄

問1	
問2	
問3	
問4	

解答

問1 $-16 < y \leq 0$

問2 $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

問3 イ, エ

問4 50

解説

問1

下に開いているグラフで x の変域に 0 を含むので、最大値は $x=0$ のときで $y=0$

最小値は -2 と 4 で絶対値の値の大きい $x=4$ のときで $y=-4^2=-16$

よって y の変域は $-16 < y \leq 0$

問2

点 B の x 座標は 4 だから y 座標は $y = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$ で B(4, 4)

点 C の x 座標は -2 だから y 座標は $y = -(-2)^2 = -4$ で C(-2, -4)

よって 2 点 B, C を通る直線の式の傾きは $\frac{4-(-4)}{4-(-2)} = \frac{4}{3}$ となるから $y = \frac{4}{3}x + b$ とおける。

この直線の式は (4, 4) を通るので $x=4, y=4$ を代入すると $b = -\frac{4}{3}$

したがって求める直線の式は $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

問3

$y = -x^2$ のグラフは下に開いているグラフなので x 座標が大きくなると点 P の位置は下へ動く。

ア 点 P の位置は下へ動くと y 座標の値は小さくなるので誤り。

イ 点 P の位置は下へ動くと、AP の長さは長くなるので正しい。

ウ 直線 CP の傾きの値は小さくなるから誤り。

エ AB の長さは変わらず、高さが大きくなるので正しい。

問4

点 P の x 座標が 3 になるので $y = -3^2 = -9$ で P(3, -9)

このとき 2 点 B, P を通る直線の式の傾きは $\frac{4-(-9)}{4-3} = 13$ となるから $y = 13x + b$ とおける。

この直線の式は (4, 4) を通るので $x=4, y=4$ を代入すると $b = -48$ となり $y = 13x - 48$

この直線と x 軸との交点を E とすると $E\left(\frac{48}{13}, 0\right)$

また、直線 AC と x 軸との交点を F とすると F(-2, 0) で A(-2, 1)

よって四角形 ACPB = $\triangle AFB + \triangle BFE + \triangle FCP + \triangle FPE$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \{4 - (-2)\} + \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{48}{13}\right) \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times (2 + 3) + \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{48}{13}\right) \times 9$$

$$= 3 + \frac{148}{13} + 10 + \frac{333}{13} = 50$$

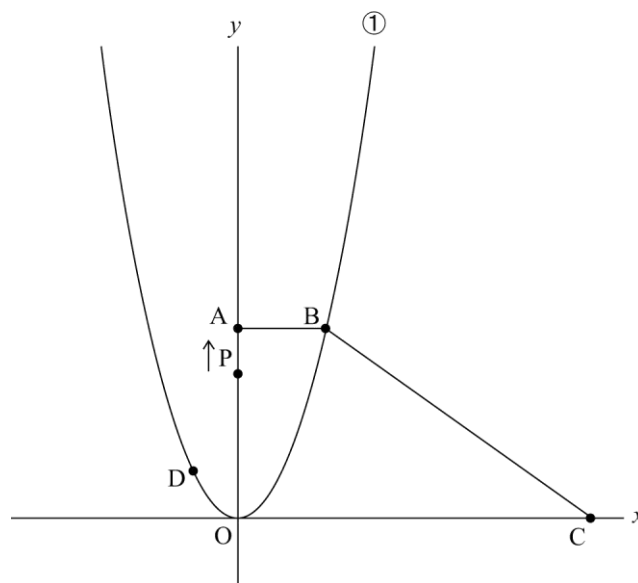
【問 20】

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}$ のグラフと台形 OABC がある。点 A, C の座標はそれぞれ (0, 8), (16, 0) である。点 B, D は、 $\textcircled{1}$ のグラフ上にあり、B の x 座標は 4, D の x 座標は -2 である。

また、点 P は原点 O を出発し、毎秒 1 cm の速さで、辺 OA, AB, BC 上を C まで動く。ただし、原点 O から点 (1, 0) までの距離、および原点 O から点 (0, 1) までの距離は 1 cm とする。

次の問1～問4に答えなさい。

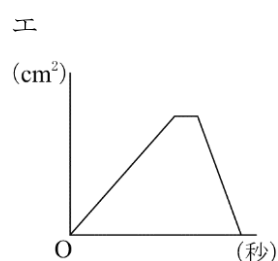
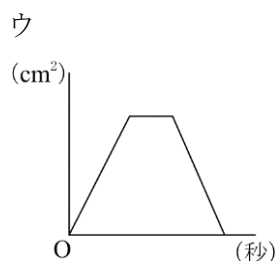
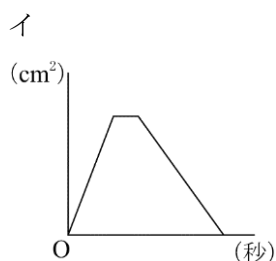
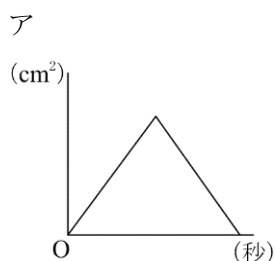
(和歌山県 2017 年度)



問1 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-6 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域を求めなさい。

問2 直線 DP が直線 OB と平行になるのは、P が原点 O を出発してから何秒後と何秒後か、求めなさい。

問3 P が原点 O を出発してからの時間 (秒) と $\triangle OPC$ の面積 (cm^2) の関係をグラフに表したとき、そのグラフに最も近いものを、次のア～エの中から 1 つ選び、その記号をかきなさい。



問4 $\triangle OPC$ の面積が、台形 OABC の面積の $\frac{1}{3}$ 倍になるときの P の座標をすべて求めなさい。

解答欄

問1	
問2	秒後と 秒後
問3	
問4	

解答

問1 $0 \leq y \leq 18$

問2 6 秒後と 9 秒後

問3 イ

問4 $\left(0, \frac{10}{3}\right), \left(11, \frac{10}{3}\right)$

解説

問1

x の変域に 0 を含むので, y の値が最小となるのは, $x=0$ のときで, $y=0$

y の値が最大となるのは, -6 と 4 で絶対値が大きい $x=-6$ のときで, $y=\frac{1}{2} \times (-6)^2=18$

よって, y の変域は, $0 \leq y \leq 18$

問2

まず, 直線 OB の傾きを求める。点 B は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり, その x 座標は 4 だから,

$y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入して, $y=\frac{1}{2} \times 4^2=8$ よって, B(4, 8)より, 直線 OB の傾きは, $\frac{8-0}{4-0}=2$

次に, 各辺上に点 P があるときの直線 DP の傾きを考える。

点 D は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり, その x 座標は -2 だから, $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=-2$ を代入して,

$y=\frac{1}{2} \times (-2)^2=2$ よって, D(-2, 2)

点 P が辺 OA 上にあるとき, 直線 DP が直線 OB と平行になるのは,
直線 DP の傾きが直線 OB の傾きと等しくなるときだから,

直線 DP の傾きが 2 となる点 P の座標を $(0, s)$ とすると, $\frac{s-2}{0-(-2)}=2$

よって, $s=6$ より, P(0, 6) これは問題にあっているので, $6 \div 1=6$ 秒後

点 P が辺 AB 上にあるとき, 直線 DP の傾きが 2 となる点 P の座標を $(t, 8)$ とすると, $\frac{8-2}{t-(-2)}=2$

よって, $t=1$ より, P(1, 8) これは問題にあっているので, $(8+1) \div 1=9$ 秒後

点 P の x 座標が 2 より大きくなると, 直線 DP の傾きが 2 より小さくなるから,

直線 DP が辺 BC と交わることはない。

したがって, 6 秒後と 9 秒後。

問3

$\triangle OPC$ の底辺を OC とすると, 高さは点 P の y 座標で表される。

点 P が辺 OA 上を動くとき, 点 P の y 座標は大きくなるから, $\triangle OPC$ の面積は増加する。

点 P が辺 AB 上を動くとき, $AB \parallel OC$ より, 点 P の y 座標は一定になるから, $\triangle OPC$ の面積も一定。

点 P が辺 BC 上を動くとき, 点 P の y 座標は小さくなるから, $\triangle OPC$ の面積は減少する。

$\triangle OPC$ の面積は, $\frac{1}{2} \times 16 \times 8=64\text{cm}^2$ となり, 最大である。

$OA < BC$ より, 点 P が辺 OA 上を点 O から点 A まで動くのにかかる時間は

点 P が辺 BC 上を点 B から点 C まで動くのにかかる時間より短い。

以上のことから, 最も近いグラフは, イである。

問4

台形 OABC の面積は $\frac{1}{2} \times (4+16) \times 8 = 80\text{cm}^2$ だから $\triangle OPC$ の面積は $80 \times \frac{1}{3} = \frac{80}{3}\text{cm}^2$

$\triangle OPC$ の底辺を OC としたときの高さを $h\text{ cm}$ とすると $\frac{1}{2} \times 16 \times h = \frac{80}{3}$ $h = \frac{10}{3}$

点 P の y 座標が $\frac{10}{3}$ になるときを考えればよい。

点 P が辺 OA 上にあるとき $\left(0, \frac{10}{3}\right)$ があてはまる。

点 P が辺 AB 上にあるとき、点 P の y 座標は 8 で一定だから、点 P の y 座標が $\frac{10}{3}$ になることはない。

点 P が辺 BC 上にあるとき、直線 BC の式に $y = \frac{10}{3}$ を代入すると、点 P の x 座標を求められる。

B(4, 8), C(16, 0) より、直線 BC の傾きは $\frac{0-8}{16-4} = -\frac{2}{3}$

直線 BC の式を $y = -\frac{2}{3}x + b$ として $x=16, y=0$ を代入して整理すると $b = \frac{32}{3}$

よって直線 BC の式は $y = -\frac{2}{3}x + \frac{32}{3}$

これに $y = \frac{10}{3}$ を代入して整理すると、 $x=11$ で $\left(11, \frac{10}{3}\right)$ があてはまる。

したがって求める点 P の座標は $\left(0, \frac{10}{3}\right), \left(11, \frac{10}{3}\right)$

【問 21】

右の図のように、

$$\text{関数 } y=ax^2 \cdots \textcircled{1}$$

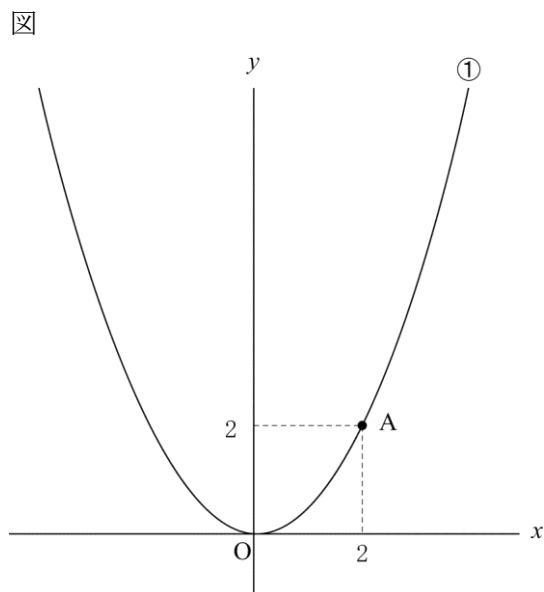
のグラフが、点 A (2, 2) を通っている。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、原点は O とする。

(鳥取県 2017 年度)

問1 a の値を求めなさい。

問2 点 A を通り、傾きが -1 の直線の式を求めなさい。



問3 問2で求めた直線と①のグラフとの交点のうち、点 A とは異なる点を B とするとき、 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

問4 ①のグラフ上を動く点 P がある。この点 P と問3の点 B とを結んでできる直線 BP と x 軸との交点を Q とする。このとき、 $\triangle OPB$ の面積と $\triangle OPQ$ の面積が等しくなるような点 P の x 座標を求めなさい。ただし、点 P は $x > 0$ を満たす範囲を動くものとする。

解答欄

問1	$a =$
問2	
問3	
問4	$x =$

解答

問1 $a = \frac{1}{2}$

問2 $y = -x + 4$

問3 12

問4 $x = 2\sqrt{2}$

解説

問1

A(2, 2)を通るので, $2 = a \times 2^2$ $a = \frac{1}{2}$

問2

傾きが -1 なので, 求める式を $y = -x + b$ とおく。

これに $x = 2, y = 2$ を代入して整理すると $b = 4$

よって求める式は $y = -x + 4$

問3

点 B の座標を求める。

$\frac{1}{2}x^2 = -x + 4$ より

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

よって, 問2で求めた直線と①のグラフの交点の x 座標は 2 と -4

x 座標が 2 の点は A になるから, 点 B の x 座標は -4 で, このときの y の値は $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

また $y = -x + 4$ と y 軸の交点を C とすると C(0, 4) となるから

$\triangle OAB = \triangle BOC + \triangle COA$ より $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 12$

問4

$\triangle OPB$ と $\triangle OPQ$ の面積が等しくなるには

辺 BP, 辺 PQ を底辺と見たとき

原点 O が頂点となり高さが等しくなるので $BP = PQ$ となればよい。

右の図のように, 点 B から x 軸に垂直に引き, その交点を R

点 P から線分 BR に垂直に引き, その交点を S とする。

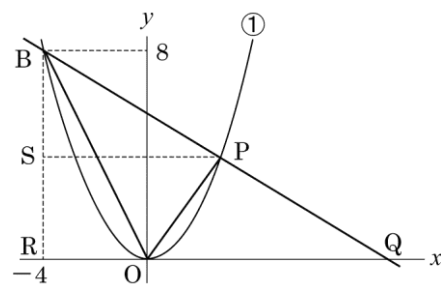
このとき $BP = PQ$ とすると

SP // RQ より, $BP : BQ = BS : BR$ となるから

$1 : 2 = BS : 8$ $BS = 4$

よって $SR = 8 - 4 = 4$ より, 点 P の y 座標は 4 となる。

したがって点 P は①のグラフ上の点だから $4 = \frac{1}{2}x^2$ より $x = 2\sqrt{2}$

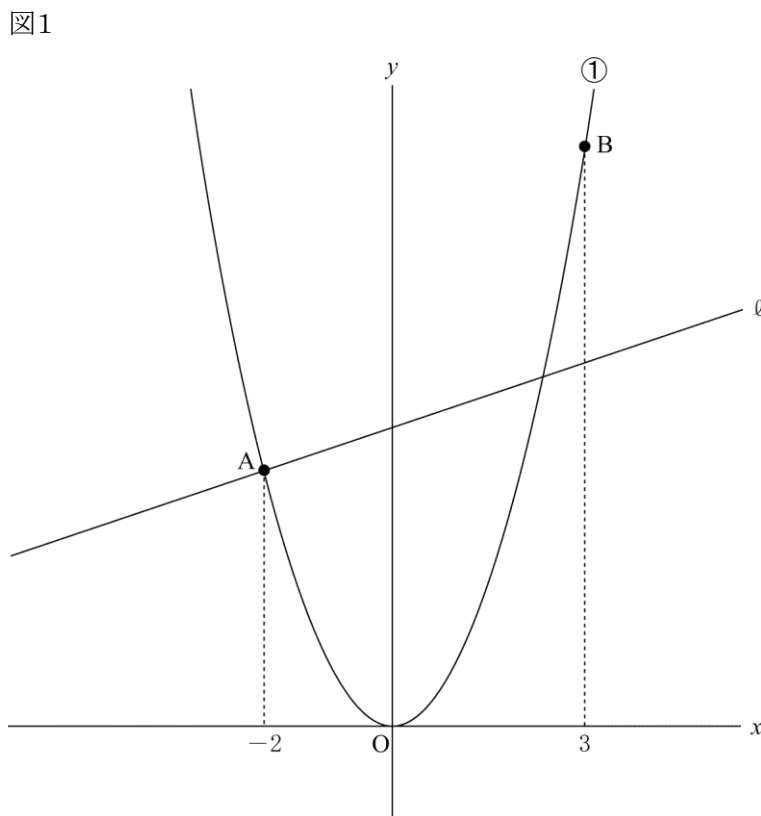


【問 22】

図1のように、関数 $y=x^2$ …① のグラフ上に2点 A, B があり、その x 座標はそれぞれ $-2, 3$ である。また、点 A を通る直線を l とする。下の問1～問4に答えなさい。

(島根県 2017 年度)

問1 関数①について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ であるときの y の変域を求めなさい。

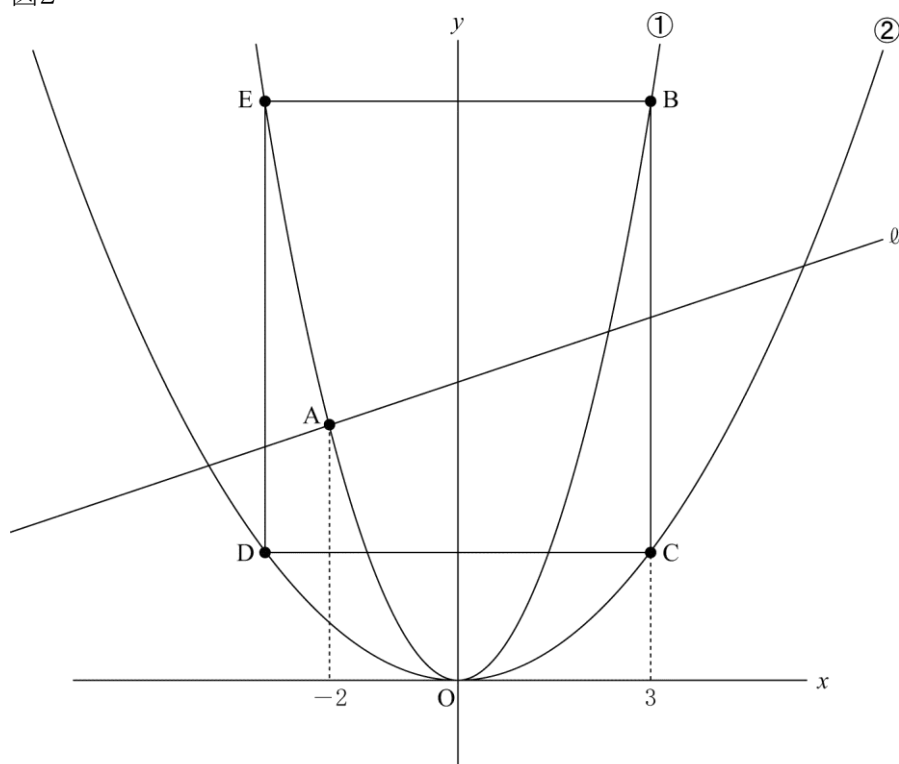


問2 関数①について、 x の値が -2 から 0 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

問3 直線 l が点 B を通るとき、直線 l の式を求めなさい。

問4 図2のように、関数 $y=ax^2$ …②のグラフを図1にかき加え、②のグラフ上に点 B と x 座標が等しい点 C をとる。さらに、四角形 BCDE が長方形となるように、点 D, E をグラフ②とグラフ①上にそれぞれとる。ただし、 a は 1 より小さい正の数である。下の(1)～(3)に答えなさい。

図2



(1) a の値が大きくなると、辺 BC の長さはどうなるか、次のア～ウから1つ選び、記号で答えなさい。

ア 長くなる イ 短くなる ウ 変わらない

(2) 長方形 BCDE が正方形となるときの、 a の値を求めなさい。

(3) 直線 l が長方形 BCDE の面積を 2 等分するとき、直線 l は点 A のほかにどのような点を通る直線であるか、次の形式に合うように答えなさい。

直線 l は点 A と

を通る直線である。

解答欄

問1	$\leq y \leq$	
問2		
問3		
問4	(1)	
	(2)	$a =$
	(3)	直線 l は点 A と を通る直線である。

解答

問1 $0 \leq y \leq 9$

問2 -2

問3 $y = x + 6$

問4

(1) イ

(2) $a = \frac{1}{3}$

(3) 直線 l は点 A と長方形 BCDE の対角線 BD, CE の交点を通る直線である。

解説

問1

x の変域に 0 を含むから y の値が最小となるのは $x = 0$ のときで $y = 0$

y の値が最大となるのは -2 と 3 で絶対値の大きい $x = 3$ のときで $y = 3^2 = 9$

よって y の変域は $0 \leq y \leq 9$

問2

関数 $y = x^2$ について $x = -2$ のとき $y = (-2)^2 = 4$, $x = 0$ のとき $y = 0$

よって求める変化の割合は $\frac{0-4}{0-(-2)} = -2$

問3

2 点 A, B を通る直線の式を求めればよい。

問1, 問2の結果から A($-2, 4$), B($3, 9$)

2 点 A, B を通る直線の傾きは $\frac{9-4}{3-(-2)} = 1$

求める直線の式を $y = x + b$ として $x = 3, y = 9$ を代入すると $9 = 3 + b$ $b = 6$

よって求める式は $y = x + 6$

問4

(1)

関数 $y = ax^2 (0 < a < 1)$ のグラフは a の値が大きくなると開き方が小さくなる。

点 C の y 座標が大きくなるので、点 B の y 座標から点 C の y 座標をひいた差は小さくなる。

つまり辺 BC の長さは短くなる。

(2)

$y = ax^2$ に $x = 3$ を代入して $y = a \times 3^2 = 9a$ よって C($3, 9a$)

ここで、点 B の y 座標と点 E の y 座標は等しくなり、この 2 点は y 軸について対称だから

B($3, 9$) より E($-3, 9$)

同様に C($3, 9a$) より D($-3, 9a$)

よって長方形 BCDE が正方形となると $BC = BE$ が成り立つから $BC = 9 - 9a$,

$BE = 3 - (-3) = 6$ より

$$9 - 9a = 6$$

$$-9a = -3$$

$$a = \frac{1}{3}$$

(3)

長方形の対角線の交点を通る直線は、その長方形の面積を 2 等分する。

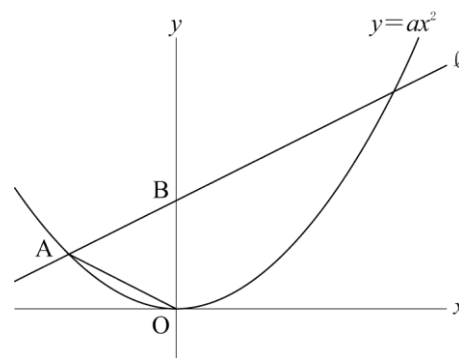
また、長方形の面積を 2 等分する直線は、その長方形の対角線の交点を通る。

これらのことは、平行四辺形、ひし形、正方形においても成り立つ。

【問 23】

右の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 ℓ がある。

点 $A(-2, 1)$ は、関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 ℓ の交点であり、点 $B(0, 2)$ は直線 ℓ 上の点である。原点 O と点 A を結ぶ。問1～問4に答えなさい。



(岡山県 2017 年度 特別)

問1 直線 ℓ について、 y を x の式で表しなさい。

問2 a の値を求めなさい。

問3 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

問4 原点 O から直線 ℓ にひいた垂線と直線 ℓ の交点を H とし、 $\triangle OHA$ と $\triangle OHB$ を、直線 ℓ を軸として回転させてできる立体をそれぞれ P, Q とする。(1), (2)に答えなさい。

(1) 立体 P の名称は、ア～エのうちのどれですか。一つ答えなさい。

ア 三角柱

イ 三角^{すい}錐

ウ 円柱

エ 円錐

(2) 立体 P, Q の体積をそれぞれ X, Y とする。 $X:Y$ と等しい比は、ア～エのうちではどれですか。一つ答えなさい。

ア $OA:OB$

イ $AH:BH$

ウ $OA^3:OB^3$

エ $AH^3:BH^3$

解答欄

問1	$y =$	
問2	$a =$	
問3		
問4	(1)	
	(2)	

解答

問1 $y = \frac{1}{2}x + 2$

問2 $a = \frac{1}{4}$

問3 2

問4 (1) エ (2) イ

解説

問1

A(-2, 1), B(0, 2) を通るから、傾きは $\frac{2-1}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$

また(0, 2) を通るので切片は 2

よって $y = \frac{1}{2}x + 2$

問2

$y = ax^2$ に $x = -2$, $y = 1$ を代入して整理すると $a = \frac{1}{4}$

問3

OB=2 で、底辺とみると、高さは点 A と y 軸の距離になるから 2

よって求める面積は $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

問4

(1)

OH を半径とする円が底面になる円錐になるのでエ。

(2)

立体 P, Q はともに OH を半径とする円が底面になるから体積は高さに比例するので AH: BH となりイ。

【問 24】

下の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に、
3 点 A (−6, 9), B (−2, 1), C (6, 9) があり、直線
 $y = -x + 5$ をひいた。問1～問4に答えなさい。

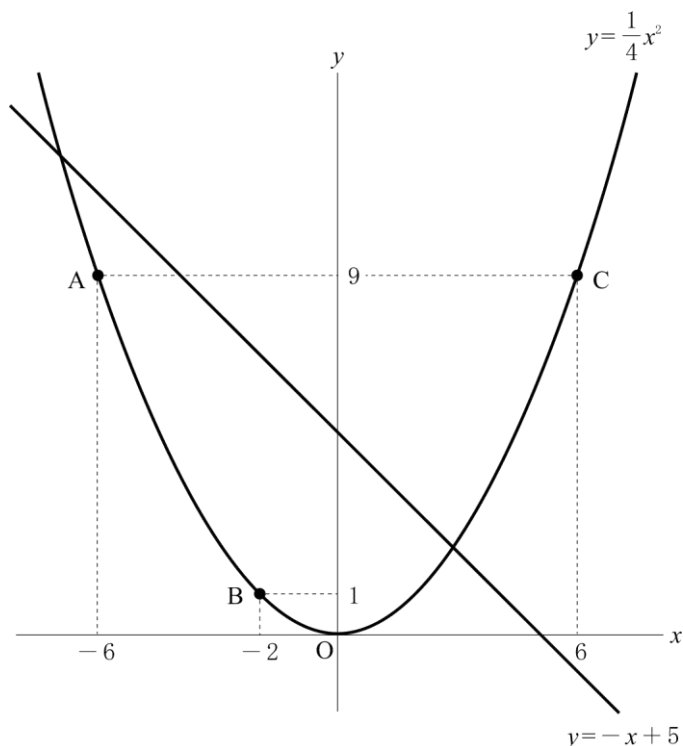
(徳島県 2017 年度)

問1 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフと x 軸について線対
称となるグラフの式を求めなさい。

問2 直線 $y = -x + 5$ と直線 BC の交点の座標を
求めなさい。

問3 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ で、 x の変域が $a \leq x \leq 6$ のとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 9$ である。 a がとることのできる値の範囲
を求めなさい。

問4 $\triangle AOC$ の面積を 2 等分する x 軸に平行な直線の式を求めなさい。



解答欄

問1	
問2	(,)
問3	
問4	

解答

問1 $y = -\frac{1}{4}x^2$

問2 (1, 4)

問3 $-6 \leq a \leq 0$

問4 $y = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

解説

問1

$y = ax^2$ と $y = -ax^2$ は同じ x の値に対応する y の絶対値が等しく符号が反対になるのでこの2つのグラフは x 軸を対称の軸として線対称になる。

よって $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフと x 軸について線対称となるグラフは $y = -\frac{1}{4}x^2$

問2

直線 BC は傾きが $\frac{9-1}{6-(-2)} = 1$ より $y = x + b$ とおける。

この直線は (6, 9) を通るので $x = 6, y = 9$ を代入すると $b = 3$

よって直線 BC と $y = -x + 5$ の交点は $x + 3 = -x + 5$ より $x = 1$

これを $y = -x + 5$ に代入して $y = 4$ となるから

求める交点の座標は (1, 4)

問3

$y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフは上に開いているグラフで y の変域に 0 が含まれているから

x の変域にも 0 が含まれる。

また $y = 9$ となるのは $x = 6$ のときと $x = -6$ のときなので a のとることのできる範囲は $-6 \leq a \leq 0$

問4

$\triangle AOC$ の面積は $\frac{1}{2} \times 12 \times 9 = 54$

ここで原点と点 C を通る直線の式を求めると $y = \frac{3}{2}x$

原点と点 A を通る直線の式を求めると $y = -\frac{3}{2}x$ となる。

$\triangle AOC$ の面積を 2 等分する x 軸に平行な直線の式を $y = t (t > 0)$ とおくと

$y = \frac{3}{2}x$ との交点 D は $\left(\frac{2}{3}t, t\right)$

$y = -\frac{3}{2}x$ との交点 E の座標は $\left(-\frac{2}{3}t, t\right)$ となる。

よって $\triangle EOD = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}t + \frac{2}{3}t\right) \times t = \frac{2}{3}t^2$

これが $\triangle AOC$ の面積の半分と等しくなるから $\frac{2}{3}t^2 = 27$

整理すると $t > 0$ より $t = \frac{9}{2}\sqrt{2}$

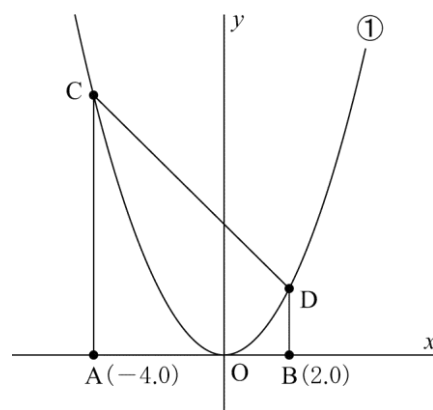
よって求める式は $y = \frac{9}{2}\sqrt{2}$

【問 25】

右の図で、点 O は原点であり、2 点 A, B の座標はそれぞれ $(-4, 0)$, $(2, 0)$ である。放物線①は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフである。点 A を通り、 y 軸に平行な直線をひき、放物線①との交点を C とする。また、点 B を通り、 y 軸に平行な直線をひき、放物線①との交点を D とし、点 C と点 D を結ぶ。

これについて、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(香川県 2017 年度)



(1) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で、 x の変域が $-3 \leq x \leq 1$ のとき、 y の変域を求めよ。

(2) 線分 CD 上に点 E をとる。直線 AE が台形 $ABDC$ の面積を 2 等分するとき、点 E の x 座標はいくらか。
点 E の x 座標を a として、 a の値を求めよ。

解答欄

(1)	
(2)	$a =$

解答

$$(1) 0 \leq y \leq \frac{9}{2}$$

$$(2) a = -\frac{1}{4}$$

解説

(1)

上に開いているグラフで、 x の変域に 0 を含むので、最小値は、 $x=0$ のときで $y=0$

最大値は -3 と 1 で絶対値が大きい $x=-3$ のときで $y = \frac{1}{2} \times (-3)^2 = \frac{9}{2}$

よって y の変域は $0 \leq y \leq \frac{9}{2}$

(2)

点 C, D の座標をそれぞれ求めると $C(-4, 8), D(2, 2)$

台形 $ABDC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times (2+8) \times 6 = 30$$

直線 AE が台形 $ABDC$ の面積を 2 等分するので $\triangle CAE = 30 \div 2 = 15$

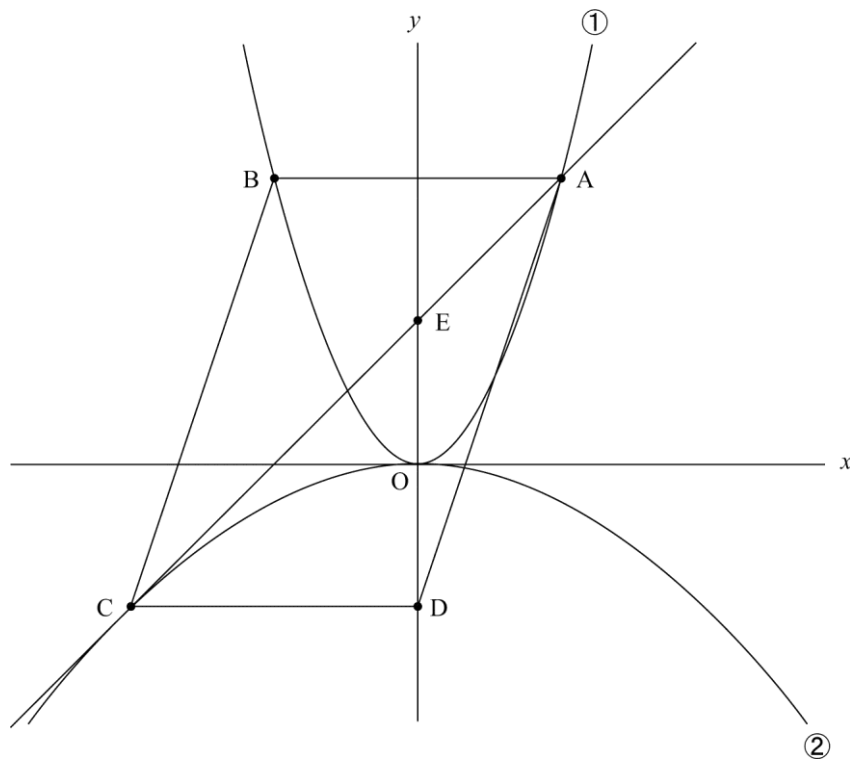
$\triangle CAE$ の面積を a を使って $\frac{1}{2} \times 8 \times \{a - (-4)\}$ と表せるから

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \{a - (-4)\} = 15$$

これを整理すると $a = -\frac{1}{4}$

【問 26】

下の図において、放物線①は関数 $y=x^2$ のグラフであり、①上の x 座標が 2 である点を A、点 A を通り x 軸に平行な直線と①との交点のうち、点 A と異なる点を B とする。放物線②は関数 $y=ax^2$ ($a<0$) のグラフであり、②上に点 C、 y 軸上に点 D を、四角形 ABCD が平行四辺形となるようにとり、直線 AC と y 軸との交点を E とすると、点 E の y 座標が 2 となった。



このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2017 年度)

問1 点 B の座標を求めよ。

問2 直線 AC の式を求めよ。

問3 a の値を求めよ。

問4 点 P は、放物線①上を、原点 O から点 B まで動く点とする。点 P を通り y 軸に平行な直線と放物線②との交点を Q とする。△ABP の面積と△CDQ の面積が等しくなるとき、点 P の x 座標を求めよ。

解答欄

問1	
問2	
問3	$a=$
問4	

解答

問1 $(-2, 4)$

問2 $y=x+2$

問3 $(a=) -\frac{1}{8}$

問4 $-\frac{4\sqrt{7}}{7}$

解説

問1

線分 AB は x 軸に平行で、2 点 A, B は関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるから
点 A と点 B は y 軸について対称である。

$y=2^2=4$ より A(2, 4) だから B(-2, 4)

問2

点 E は直線 AC 上にあるから 2 点 A, E を通る直線の式を求めればよい。

A(2, 4), E(0, 2) だから、この直線の傾きは $\frac{4-2}{2-0}=1$

切片は、点 E の y 座標より 2 である。

よって求める直線の式は $y=x+2$

問3

四角形 ABCD は平行四辺形だから $CD=BA=2-(-2)=4$

点 D は y 軸上にあり、その x 座標は 0 だから、点 C の x 座標は $0-4=-4$

$y=x+2$ に $x=-4$ を代入して $y=-4+2=-2$

よって C(-4, -2)

点 C は関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあるから

$$-2=a \times (-4)^2$$

$$16a=-2$$

$$a=-\frac{1}{8}$$

問4

$\triangle ABP$ の底辺を AB $\triangle CDQ$ の底辺を CD とすると $AB=CD$ だから

$\triangle ABP$ の面積と $\triangle CDQ$ の面積が等しくなるとき、高さも等しくなる。

点 P の x 座標を p ($-2 \leq p \leq 0$) とすると P(p, p^2), Q($p, -\frac{1}{8}p^2$) と表される。

$\triangle ABP$ の高さは $4-p^2$

$\triangle CDQ$ の高さは $-\frac{1}{8}p^2-(-2)=-\frac{1}{8}p^2+2$ となるから

$$4-p^2=-\frac{1}{8}p^2+2 \text{ より}$$

$$p^2=\frac{16}{7}$$

$$p=\pm \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$-2 \leq p \leq 0$ だから

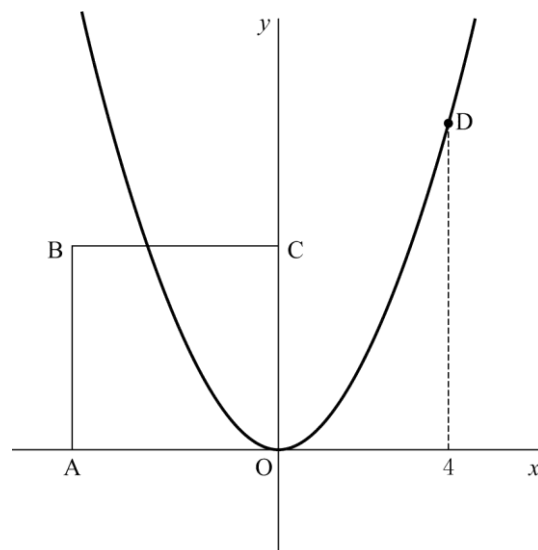
$$p=-\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

【問 27】

下の図のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと、1 辺の長さが a の正方形 $OABC$ がある。点 A は x 軸上の点であり、点 A の x 座標は負である。点 C は y 軸上の点であり、点 C の y 座標は正である。点 D は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点であり、点 D の x 座標は 4 である。このとき、次の問1・問2に答えなさい。

(高知県 2017 年度)

問1 点 D の座標を求めよ。



問2 $CO = CD$ のとき、次の(1)・(2)の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 四角形 $OABC$ が正方形であることから、 $CO = CB$ である。さらに、 $CO = CD$ であることから、3 点 O, B, D は点 C を中心とする 1 つの円の周上の点であることがわかる。このことと円の性質を利用して、 $\angle ODB$ の大きさを求めることができる。 $\angle ODB$ の大きさは何度か。ただし、どのような円の性質を利用したかを説明したうえで、答えを求める過程がわかるように書くこと。

解答欄

問1	(,)	
問2	(1)	$\alpha =$
	(2)	答 度

解答

問1 (4, 8)

問2

(1) $a=5$

(2)

弧 OB に対する円周角は $\angle ODB$

中心角は $\angle OCB$ であり、円周角は中心角の半分であるから

$$\angle ODB = \frac{1}{2} \angle OCB \cdots \textcircled{1}$$

また四角形 $OABC$ は正方形であるから

$$\angle OCB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle ODB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$

答 45 度

解説

問1

点 D は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり

その x 座標は 4 だから $y = \frac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入して

$$y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$$

よって $D(4, 8)$

問2

(1)

点 D から y 軸に平行にひいた直線と

点 C から x 軸に平行にひいた直線との交点を E とする。

また、点 D から y 軸に平行にひいた直線と x 軸との交点を F とする。

$\triangle CDE$ は $CE=OF=4$, $EF=CO=a$, $\angle CED=90^\circ$ の直角三角形となるから

$\triangle CDE$ において

三平方の定理より

$$CE^2 + ED^2 = CD^2$$

よって $4^2 + (8-a)^2 = a^2$ より

$$a=5$$

(2)

点 C を中心として 3 点 O , B , D を通る円をかいて考える。

使う円の性質は「1 つの弧に対する円周角の大きさは

中心角の大きさの半分である」ということ。

点 C が中心になるので $\widehat{OB}$ に対する円周角は $\angle ODB$, 中心角は $\angle OCB$ である。

【問 28】

図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。四角形 AOCB は長
 方形であり、点 A の x 座標は $-\frac{1}{2}$ である。

2 点 A, C から x 軸に垂線 AP, CQ をそれぞれひくとき、問1～問5に答えな
 さい。

(佐賀県 2017 年度 一般)

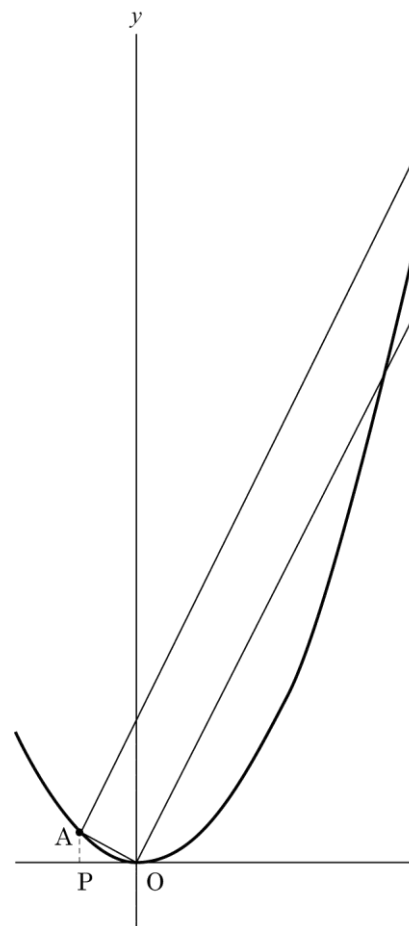
問1 $\triangle APO$ の面積を求めなさい。

問2 $\triangle APO \sim \triangle OQC$ である。このことを用いて、直線 OC の傾きを求めな
 さい。

問3 直線 AB 上に点 M があり、関数 $y=x^2$ のグラフ上に点 N (t, t^2) があ
 る。点 M と点 N の x 座標が等しいとき、点 M の座標を t を用いて表
 しなさい。

問4 点 B の座標を求めなさい。

問5 $\triangle OQC$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1	
問2	
問3	M (,)
問4	B (,)
問5	

解答

問1 $\frac{1}{16}$

問2 2

問3 $M\left(t, 2t + \frac{5}{4}\right)$

問4 $B\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

問5 9

解説

問1

$$y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ より, } A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\triangle APO = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

問2

$\triangle APO \sim \triangle OQC$ より

$$AP:OQ = PO:QC$$

$$AP = \frac{1}{4}, PO = \frac{1}{2} \text{ だから}$$

$$\frac{1}{4}:OQ = \frac{1}{2}:QC$$

整理をすると $QC = 2OQ$

直線 OC の傾きは $\frac{QC}{OQ}$ と表されるから

$$QC = 2OQ \text{ より } \frac{QC}{OQ} = 2$$

問3

四角形 AOCB は長方形だから $AB \parallel OC$

平行な 2 直線の傾きは等しいから

直線 AB の式は $y = 2x + b$ と表される。

$$y = 2x + b \text{ に } x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{4} \text{ を代入すると } \frac{1}{4} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b \quad b = \frac{5}{4}$$

よって直線 AB の式は $y = 2x + \frac{5}{4}$ となる。

直線 AB 上の点 M の x 座標は、点 N の x 座標に等しく t であるから、点 M の y 座標は $2t + \frac{5}{4}$

$$\text{従って } M\left(t, 2t + \frac{5}{4}\right)$$

問4

問3で、点 M と点 N が一致する場合を考えればよい。

$$M\left(t, 2t + \frac{5}{4}\right), N(t, t^2) \text{ だから } 2t + \frac{5}{4} = t^2$$

$$\text{整理をして } t \text{ の値を求めると } t = \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \text{ は点 A の } x \text{ 座標だから } \frac{5}{2} \text{ が点 B の } x \text{ 座標になるので } B\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

問5

点 B を通り、 y 軸に平行な直線と点 C を通り、 x 軸に平行な直線の交点を D とする。

$$\text{このとき, } \triangle APO \equiv \triangle BDC \text{ になり } AP = \frac{1}{4}, PO = \frac{1}{2} \text{ だから } BD = \frac{1}{4}, DC = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } B\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right) \text{ より } C(3, 6) \text{ となるから } \triangle OQC = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$$

【問 29】

図1, 図2のように, 関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり, 2 点 A, B の x 座標はそれぞれ $-2, 3$ である。原点を O として, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2017 年度)

問1 点 A の y 座標を求めよ。

問2 直線 AB の式を求めよ。

問3 関数 $y=x^2$ について, x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のときの y の変域を求めよ。

問4 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

問5 図2のように, 直線 AB と y 軸との交点を C とする。線分 OB 上に点 P を, 四角形 OACP と $\triangle BCP$ の面積の比が $2:1$ になるようにとる。このとき, 点 P の x 座標を求めよ。

図1

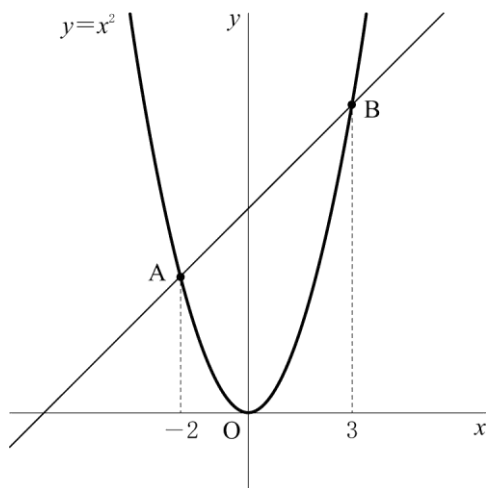
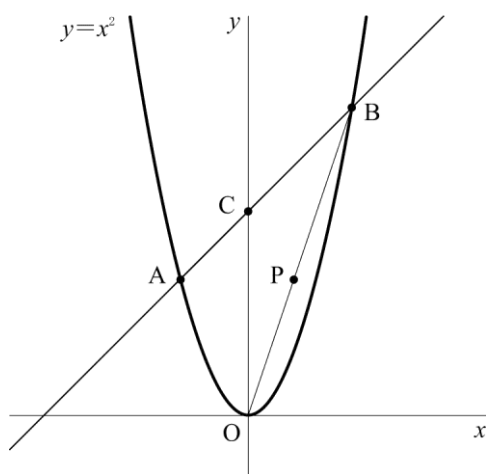


図2



解答欄

問1	
問2	$y =$
問3	$\leq y \leq$
問4	
問5	

解答

問1 4

問2 $y=x+6$

問3 $0 \leq y \leq 9$

問4 15

問5 $\frac{4}{3}$

解説

問1

点 A は関数 $y=x^2$ のグラフ上にあり, その x 座標は -2 だから $y=x^2$ に $x=-2$ を代入して

$$y=(-2)^2=4$$

問2

点 B は関数 $y=x^2$ のグラフ上にあり, その x 座標は 3 だから $y=x^2$ に $x=3$ を代入して $y=3^2=9$

よって B(3, 9)

問1より A(-2, 4) だから, 直線 AB の傾きは $\frac{9-4}{3-(-2)} = \frac{5}{5} = 1$

直線 AB の式を $y=x+b$ として $x=3, y=9$ を代入すると $9=3+b$ $b=6$

したがって $y=x+6$

問3

x の変域に 0 を含むので y の値が最小となるのは $x=0$ のときで $y=0$

y の値が最大となるのは -2 と 3 で絶対値の大きい $x=3$ のときで $y=9$

よって y の変域は $0 \leq y \leq 9$

問4

直線 AB と y 軸との交点を C とすると C(0, 6) となる。

$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 15$$

問5

四角形 OACP と $\triangle BCP$ の面積の比が $2:1$ だから, 四角形 OACP の面積は $\triangle OAB$ の面積の $\frac{2}{3}$ である。

$$\text{よって } 15 \times \frac{2}{3} = 10$$

点 P の x 座標を $p(0 \leq p \leq 3)$ とすると

$\triangle OAC$ の面積 + $\triangle OPC$ の面積 = 四角形 OACP の面積より

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times p = 10$$

$$\text{整理すると } p = \frac{4}{3}$$

$0 \leq p \leq 3$ より

この解は問題にあっている。

【問 30】

図1, 図2のように, 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり, 2 点 A, B の x 座標はそれぞれ $-1, 1$ である。2 点 A, B から x 軸にひいた垂線と x 軸との交点をそれぞれ C, D とするとき四角形 ABDC の面積は 2 である。原点を O として, 次の問いに答えなさい。ただし, $a < 0$ とする。

(長崎県 2017 年度)

問1 a の値を求めよ。

問2 関数 $y=ax^2$ について, x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めよ。

問3 図2のように, y 軸上に原点と異なる点 E を $\triangle ABE$ が直角二等辺三角形となるようにとり, 直線 BE と x 軸との交点を F とする。このとき, 次の(1)~(3)に答えよ。

(1) 直線 BE の式を求めよ。

(2) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 G をとる。 $\triangle CFG$ が $CG=FG$ の二等辺三角形になるときの点 G の座標を求めよ。

(3) 点 P を x 座標が正となるように直線 BE 上にとる。次に, 2 点 Q, R を関数 $y=ax^2$ のグラフ上にとり, 2 直線 PQ, QR がそれぞれ y 軸, x 軸に平行となるようにする。さらに, 点 P と y 軸について対称な点を S とし, 四角形 PQRS をつくる。四角形 PQRS が正方形になるときの点 P の x 座標をすべて求めよ。

図1

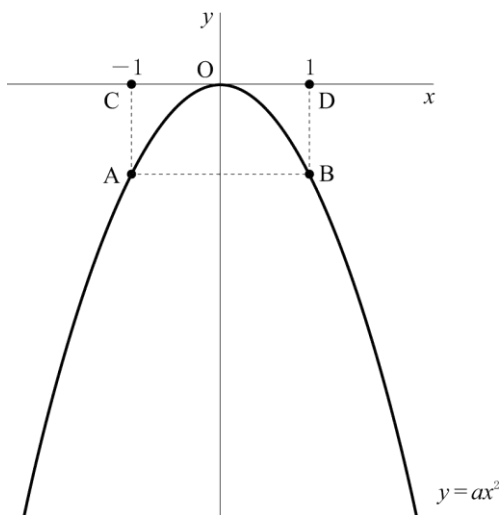
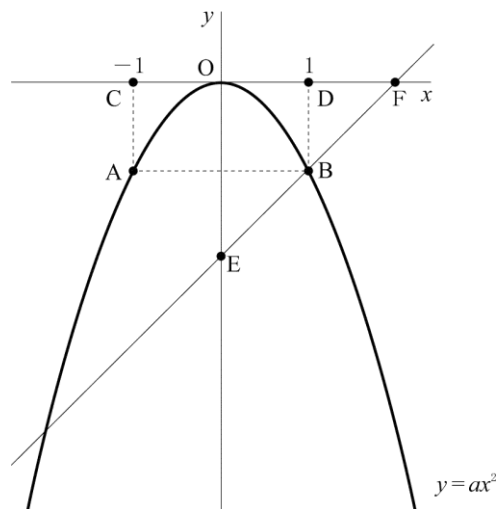


図2



解答欄

問1	$a=$	
問2	$\leq y \leq$	
問3	(1)	$y=$
	(2)	$G\left(\begin{array}{c} \\ , \end{array}\right)$
	(3)	

解答

問1 $a = -1$

問2 $-4 \leq y \leq 0$

問3 (1) $y = x - 2$ (2) $G\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (3) $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 2$

解説

問1

$A(-1, a)$, $B(1, a)$, $C(-1, 0)$, $D(1, 0)$ となる。

$AB = 1 - (-1) = 2$, $AC = 0 - a = -a$ だから, 四角形 $ABDC$ の面積は $-a \times 2 = -2a$ と表される。

この面積が 2 であるから $-2a = 2$ $a = -1$

$a < 0$ より, この解は問題にあっている。

問2

-1 と 2 で絶対値の大きい y の値が最小となるのは $x = 2$ のときで $y = -2^2 = -4$

y の値が最大となるのは x の変域に 0 を含むので $x = 0$ のときで $y = 0$

よって y の変域は $-4 \leq y \leq 0$

問3

(1)

点 A と点 B は y 軸について対称であるから, 線分 AB と y 軸は垂直である。

線分 AB と y 軸との交点を H とすると $\triangle ABE$ は直角二等辺三角形だから $\angle HBE = 45^\circ$

よって $\angle HEB = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$ より $\triangle HBE$ も直角二等辺三角形になる。

$HE = HB = 1$, $H(0, -1)$ だから $E(0, -2)$ $B(1, -1)$ より, 直線 BE の式は $y = x - 2$

(2)

$CG = FG$ より, 点 G は, 線分 CF の垂直二等分線上にある。

$y = x - 2$ に $y = 0$ を代入すると $x = 2$ だから $F(2, 0)$

ここで $CF = 2 - (-1) = 3$ より, 線分 CF の中点の x 座標は $-1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

よって点 G の x 座標は $\frac{1}{2}$ とわかるので $y = -x^2$ に $x = \frac{1}{2}$ を代入して $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

したがって $G\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

(3)

点 P の x 座標を $p (p > 0)$ とすると $P(p, p - 2)$, $Q(p, -p^2)$, $R(-p, -p^2)$, $S(-p, p - 2)$ と表される。

$0 < p < 1$ のとき, 点 P の y 座標は, 点 Q の y 座標より小さくなる。

$PQ = -p^2 - (p - 2) = -p^2 - p + 2$

$QR = p - (-p) = 2p$ より $-p^2 - p + 2 = 2p$ $p^2 + 3p - 2 = 0$

$p = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$0 < p < 1$ より

$p = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$

$p > 1$ のとき, 点 P の y 座標は, 点 Q の y 座標より大きくなる。

$PQ = p - 2 - (-p^2) = p^2 + p - 2$

$QR = p - (-p) = 2p$ より $p^2 + p - 2 = 2p$ $p^2 - p - 2 = 0$ $(p + 1)(p - 2) = 0$

$p = -1, 2$

$p > 1$ より

$p = 2$

したがって $p = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 2$

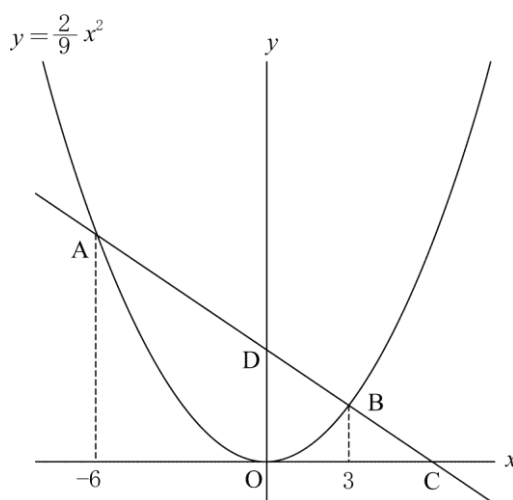
【問 31】

右の図のように、関数 $y = \frac{2}{9}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。A の x 座標は -6 , B の x 座標は 3 であり、点 C は、直線 AB と x 軸との交点である。また、点 D は直線 AB と y 軸との交点であり、点 O は原点である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2017 年度)

問1 点 A の y 座標を求めなさい。



問2 関数 $y = \frac{2}{9}x^2$ について、 x の値が -6 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

問3 直線 AB の式を求めなさい。

問4 $\triangle OCD$ の内部に、 x 座標, y 座標がともに整数である点はいくつあるか、求めなさい。ただし、 $\triangle OCD$ の辺上の点は含まないものとする。

解答欄

問1	
問2	
問3	$y =$
問4	個

解答

問1 8

問2 $-\frac{2}{3}$

問3 $y = -\frac{2}{3}x + 4$

問4 7 個

解説

問1

$$y = \frac{2}{9}x^2 \text{ に } x = -6 \text{ を代入して } y = \frac{2}{9} \times (-6)^2 = 8$$

問2

$$x = -6 \text{ のとき } y = 8 \quad x = 3 \text{ のとき } y = \frac{2}{9} \times 3^2 = 2$$

よって x の値が -6 から 3 まで増加するときの変化の割合は $\frac{2-8}{3-(-6)} = -\frac{2}{3}$

問3

問2から直線 AB の傾きは $-\frac{2}{3}$ なので、直線の式を $y = -\frac{2}{3}x + b$ とおく。

この式に $x=3, y=2$ を代入して整理すると $b=4$

$$\text{よって } y = -\frac{2}{3}x + 4$$

問4

直線 AB の式が $y = -\frac{2}{3}x + 4$ と表せるので x 軸との交点 C の座標を求めると $0 = -\frac{2}{3}x + 4 \quad x=6$

よって $\triangle OCD$ の内部にあつて x 座標が整数なるのは $x=1, 2, 3, 4, 5$ のとき。

したがって

$$x=1 \text{ のとき } y = -\frac{2}{3} \times 1 + 4 = \frac{10}{3} \text{ となるから、条件を満たす点は } 3 \text{ 個。}$$

$$x=2 \text{ のとき } y = -\frac{2}{3} \times 2 + 4 = \frac{8}{3} \text{ となるから、条件を満たす点は } 2 \text{ 個。}$$

$$x=3 \text{ のとき } y = -\frac{2}{3} \times 3 + 4 = 2 \text{ となるから、条件を満たす点は } 1 \text{ 個。}$$

$$x=4 \text{ のとき } y = -\frac{2}{3} \times 4 + 4 = \frac{4}{3} \text{ となるから、条件を満たす点は } 1 \text{ 個。}$$

$$x=5 \text{ のとき } y = -\frac{2}{3} \times 5 + 4 = \frac{2}{3} \text{ となるから、条件を満たす点は } 0 \text{ 個。}$$

よって全部で $3+2+1+1+0=7$ 個

【問 32】

右の図のように、2 つの関数

$$y=ax^2 \ (a \text{ は定数}) \cdots \textcircled{ア}$$

$$y=\frac{b}{x} \ (x>0, b \text{ は定数}) \cdots \textcircled{イ}$$

のグラフがある。

点 A は関数 $\textcircled{ア}$ 、 $\textcircled{イ}$ のグラフの交点で、A の x 座標は 4 である。点

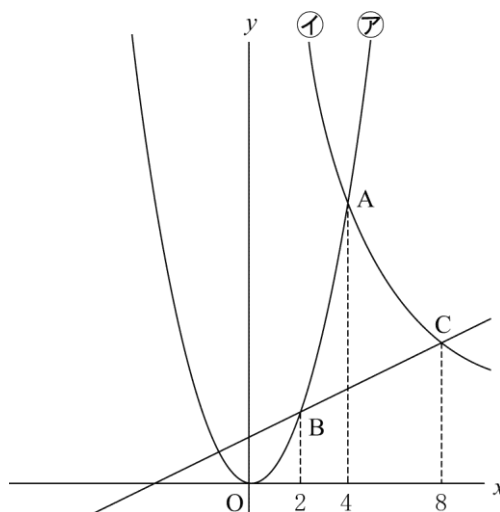
B は関数 $\textcircled{ア}$ のグラフ上にあつて、B の x 座標は 2 であり、

点 C は関数 $\textcircled{イ}$ のグラフ上にあつて、C の x 座標は 8 である。

また、関数 $\textcircled{ア}$ について、 x の値が 2 から 4 まで増加するときの

変化の割合は $\frac{9}{2}$ である。

このとき、次の各問いに答えなさい。



(熊本県 2017 年度)

問1 a, b の値を求めなさい。

問2 直線 BC の式を求めなさい。

問3 関数 $\textcircled{ア}$ のグラフ上において 2 点 A, B の間に点 P を、線分 BC 上において 2 点 B, C とは異なる点 Q を、直線 PQ が x 軸と平行になるようにとる。また、直線 PQ と y 軸との交点を R とする。

(1) 点 P の x 座標を t として、線分 PQ の長さを、 t を使った式で表しなさい。

(2) $PQ:PR=3:2$ となるとき P の座標を求めなさい。

解答欄

問1	$a=$, $b=$	
問2	$y=$	
問3	(1)	
	(2)	(,)

解答

問1 $a = \frac{3}{4}, b = 48$

問2 $y = \frac{1}{2}x + 2$

問3 (1) $\frac{3}{2}t^2 - 4 - t$ (2) $\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$

解説

問1

点 A, B ともに関数⑦上の点なので $A(4, 16a), B(2, 4a)$ と表せる。

関数⑦について, x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合が $\frac{9}{2}$ になることから

$$\frac{16a - 4a}{4 - 2} = \frac{9}{2} \text{ がいえる。}$$

これを整理すると $a = \frac{3}{4}$

よって $A(4, 12)$ となるから $y = \frac{b}{x}$ に代入して $b = 48$

問2

点 C は $y = \frac{48}{x}$ 上の点なので $x = 8$ を代入すると $y = 6$

また問1より, $B(2, 3)$ となるから, 直線 BC の傾きは $\frac{6 - 3}{8 - 2} = \frac{1}{2}$ なので, 直線の式を $y = \frac{1}{2}x + c$ とおく。

この式に $x = 2, y = 3$ を代入して整理すると $c = 2$

よって $y = \frac{1}{2}x + 2$

問3

(1)

点 P は関数⑦上の点なので $y = \frac{3}{4}x^2$ に $x = t$ を代入して $y = \frac{3}{4}t^2$ で $P\left(t, \frac{3}{4}t^2\right)$

直線 PQ と x 軸は平行になるので, 点 P と点 Q の y 座標は等しくなるから

$$y = \frac{3}{4}t^2 \text{ を } y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ に代入して整理すると } x = \frac{3}{2}t^2 - 4$$

よって線分 PQ の長さは $\left(\frac{3}{2}t^2 - 4\right) - t = \frac{3}{2}t^2 - 4 - t$

(2)

(1)より $PQ = \frac{3}{2}t^2 - 4 - t, PR = t$ となるから $\left(\frac{3}{2}t^2 - 4 - t\right) : t = 3 : 2$

整理すると $3t^2 - 5t - 8 = 0$

解の公式より $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 3 \times (-8)}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm 11}{6}$

よって $x = \frac{5 + 11}{6} = \frac{8}{3}, x = \frac{5 - 11}{6} = -1$

点 P は点 A と点 B の間の点なので -1 は問題に適さないから $x = \frac{8}{3}$

したがって $P\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$

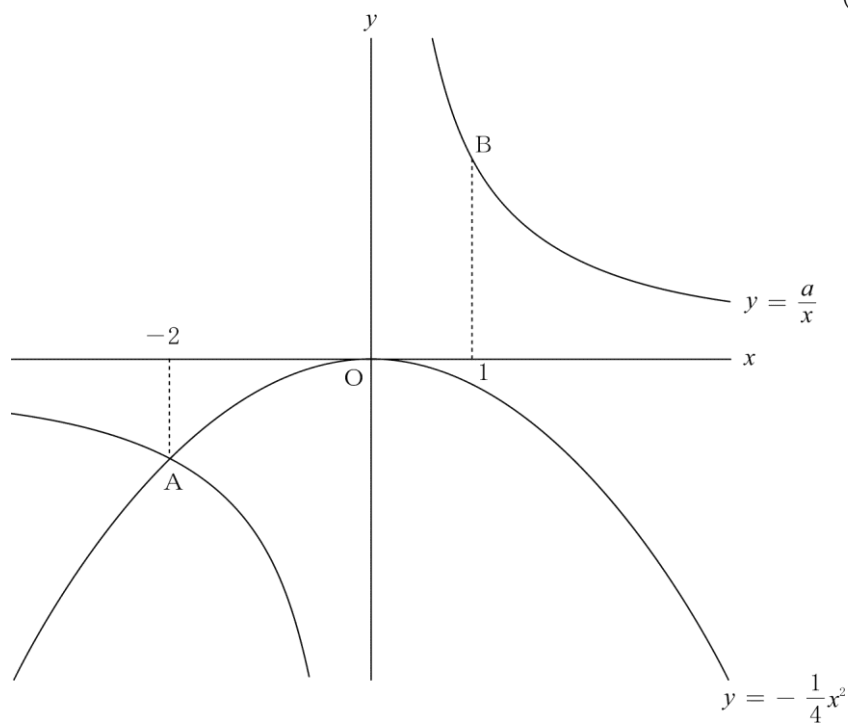
【問 33】

下の図のように、関数 $y = \frac{a}{x}$ ($a > 0$) のグラフ上に 2 点 A, B があり、それぞれの x 座標は $-2, 1$ である。

関数 $y = \frac{a}{x}$ と関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ のグラフは、点 A で交わっている。

次の問1～問3に答えなさい。

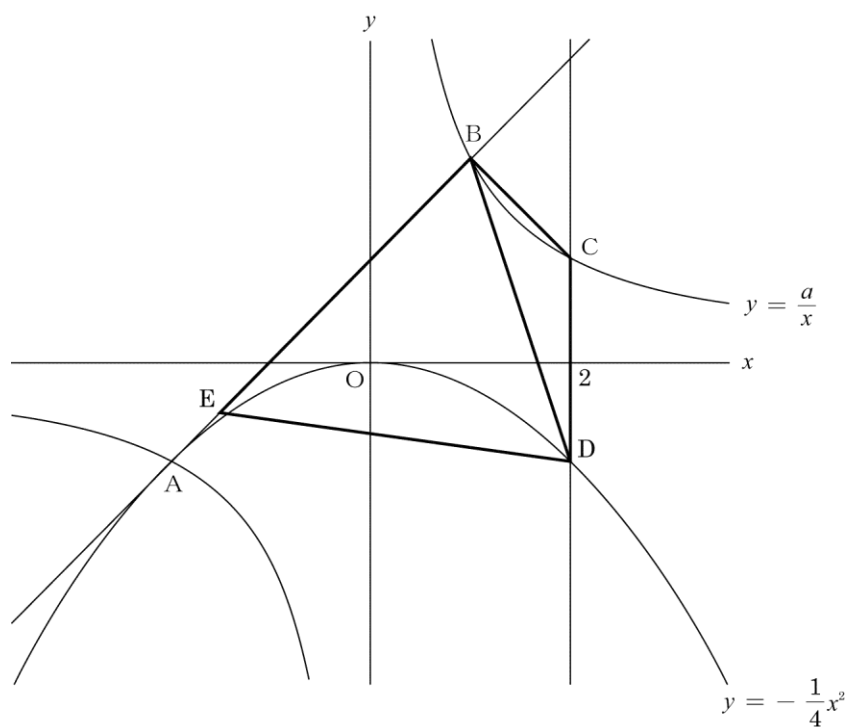
(大分県 2017 年度)



問1 a の値を求めなさい。

問2 直線 AB の式を求めなさい。

問3 下の図のように、関数 $y = \frac{a}{x}$ のグラフ上に x 座標が 2 である点 C をとる。点 C を通り y 軸に平行な直線と関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ のグラフとの交点を D とする。線分 AB 上に点 E をとり、 $\triangle BED$ の面積が $\triangle BDC$ の面積の 5 倍となるようにする。点 E の x 座標を求めなさい。



解答欄

問1	$a =$
問2	
問3	x 座標

解答

問1 $a=2$

問2 $y=x+1$

問3 x 座標 $-\frac{3}{2}$

解説

問1

点 A は関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあり, その x 座標は -2 だから

$$y=-\frac{1}{4}x^2 \text{ に } x=-2 \text{ を代入して } y=-\frac{1}{4} \times (-2)^2 = -1$$

よって $A(-2, -1)$

また点 A は関数 $y=\frac{a}{x}$ のグラフ上の点でもあるから

$$y=\frac{a}{x} \text{ に } x=-2, y=-1 \text{ を代入して } a=2$$

問2

点 B は関数 $y=\frac{2}{x}$ のグラフ上にあり, その x 座標は 1 だから

$$y=\frac{2}{x} \text{ に } x=1 \text{ を代入して } y=\frac{2}{1}=2$$

よって $B(1, 2)$

直線 AB の傾きは $\frac{2-(-1)}{1-(-2)}=1$ だから,

直線 AB の式を $y=x+b$ として $x=1, y=2$ を代入すると $2=1+b$ $b=1$

よって $y=x+1$

問3

点 C を通り y 軸に平行な直線と直線 AB との交点を F とし $\triangle EDF$ の面積を利用して求める。

まず点 C, D, F の座標を求めると $y=\frac{2}{x}=1$ より $C(2, 1)$

$$y=-\frac{1}{4} \times 2^2 \text{ より } D(2, -1)$$

$$y=2+1 \text{ より } F(2, 3)$$

となるから

$$DC=1-(-1)=2$$

$$DF=3-(-1)=4$$

ここで $\triangle BDC$ の底辺を DC とすると, 高さは $2-1=1$ で

$\triangle BDC$ の面積は $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ となるから

$$\triangle BED = 5 \triangle BDC = 5 \times 1 = 5$$

また, $DC:DF=2:4=1:2$ がいえるので

$$\triangle BDF = 2 \triangle BDC = 2 \times 1 = 2$$

よって $\triangle EDF = \triangle BED + \triangle BDF = 5 + 2 = 7$ だから

点 E の x 座標の値を t とすると

$$\triangle EDF \text{ の面積の関係から } \frac{1}{2} \times 4 \times (2-t) = 7$$

$$\text{これを整理すると } t = -\frac{3}{2}$$

【問 34】

関数 $y=2x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。点 A の x 座標は -1 , 点 B の座標は $(2, 8)$ である。

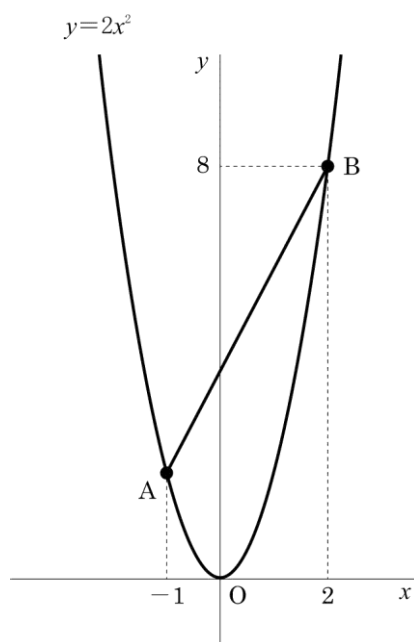
このとき, 次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2017 年度)

問1 関数 $y=2x^2$ のグラフと x 軸について対称であるグラフの式が $y=ax^2$ である。このとき, a の値を求めなさい。

問2 点 A の y 座標を求めなさい。

問3 直線 AB の式を求めなさい。



問4 関数 $y=2x^2$ のグラフ上の点で, 2 点 O, B の間にある点 P をとると, $\triangle PAB$ の面積は $\triangle OAB$ の面積に等しくなった。このとき, 点 P の座標を求めなさい。ただし, 点 P は, 点 O とは異なるものとする。

解答欄

問1	$a =$
問2	A (-1 ,)
問3	$y =$
問4	P (,)

解答

問1 $a = -2$

問2 A (-1, 2)

問3 $y = 2x + 4$

問4 P (1 , 2)

解説

問1

関数 $y = bx^2$ のグラフと関数 $y = -bx^2$ のグラフは x 軸について対称である。

よって関数 $y = 2x^2$ のグラフと x 軸について対称であるグラフの式は $y = -2x^2$ である。

問2

点 A は関数 $y = 2x^2$ のグラフ上にあり, その x 座標は -1 だから

$y = 2x^2$ に $x = -1$ を代入して $y = 2 \times (-1)^2 = 2$

よって点 A の y 座標は 2

問3

問2より A(-1, 2), B(2, 8) より

直線 AB の傾きは $\frac{8-2}{2-(-1)} = 2$ だから

直線 AB の式を $y = 2x + c$ として $x = 2, y = 8$ を代入すると $8 = 2 \times 2 + c$ $c = 4$

したがって直線 AB の式は $y = 2x + 4$

問4

点 P の x 座標を $p (0 < p \leq 2)$ とすると P($p, 2p^2$)

$\triangle PAB = \triangle OAB$ となるとき

2 つの三角形に共通する辺 AB を底辺としたときの高さは等しくなるから $OP \parallel AB$ が成り立つ。

よって問3より直線 AB の傾きは 2 だから, 直線 OP の傾きも 2 となる。

直線 OP の傾きは $\frac{2p^2-0}{p-0} = 2p$ だから

$2p = 2$

$p = 1$

この解は問題にあっている。

したがって $p = 1$ のとき $2p^2 = 2 \times 1^2 = 2$ だから

P(1, 2)