5.空間図形の複合問題 （長さ・面積・体積・角度ほか）【2013 年度出題】

【問 1】

下の図1は，1 辺の長さが 8 cm の正四面体 ABCD で，辺 AB, AD の中点をそれぞれ点 E, F とします。この正四面体の E から辺 AC を通って F まで，長さが最も短くなるように糸をかけ，糸が AC と交わる点を G とします。また，図2は，図1の正四面体の展開図に，E, F をかき入れたものです。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（岩手県 2013 年度）

図 1

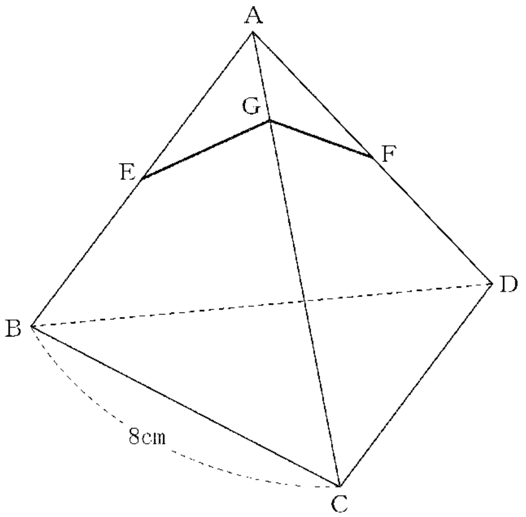
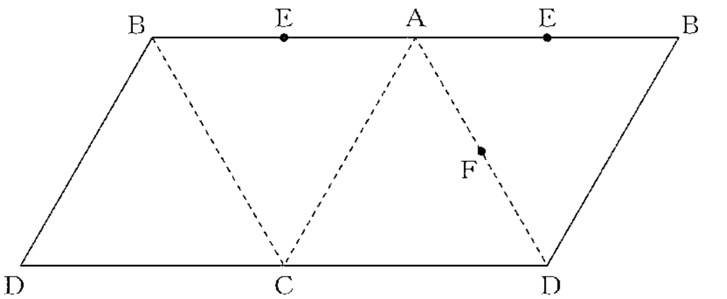


図 2

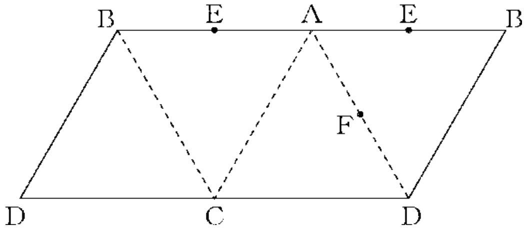


問1 糸のようすを，図2の展開図に実線でかき入れなさい。

問2 図1の正四面体 ABCD において，△EGF の面積を求めなさい。

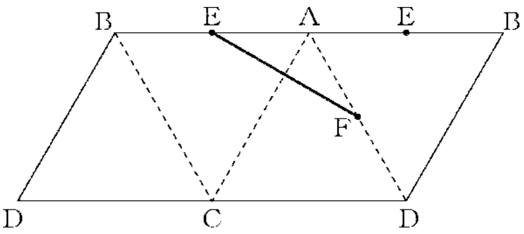
問3 図1において，四面体 AEGF の体積を求めなさい。

解答欄

問1	
問2	cm^2
問3	cm^3

解答

問1



問2　$4\sqrt{2}$ cm^2

問3　$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ cm^3

解説

問1

長さが最も短くなるのは EF が直線になるとき。
辺 AC と交わる線分 EF をかき入れる。

問2

△ABD において

中点連結定理より $EF=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}\times 8=4$ cm

また展開図において BD と AD の交点を H とすると

△ABC は正三角形だから $BH=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ cm

△ABD で

中点連結定理より EF // BD

よって $EG=\dfrac{1}{2}BH=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

△EGF は GE＝GF の二等辺三角形だから

G から EF に垂線をひき交点を M とすると $EM=4\div 2=2$ cm

三平方の定理より $GM=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-2^2}=2\sqrt{2}$ cm

よって $\triangle EGF=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ cm^2

問3

四面体 AEGF において

$\angle AGE=\angle AGF=\angle AHB=90^\circ$　だから

△EGF を底面とすると高さは $AG=4\div 2=2$ cm となる。

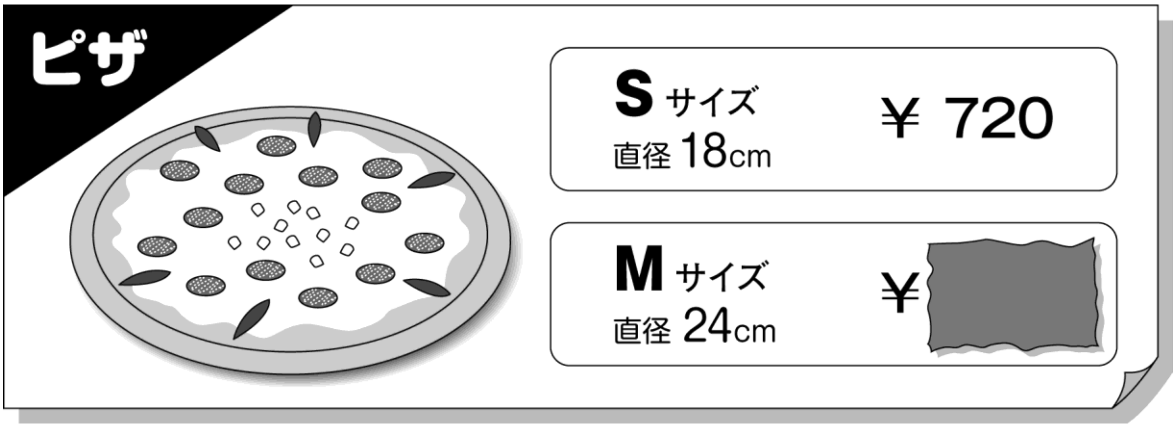
よって求める体積は $\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{2}\times 2=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ cm^3

【問 2】

健司さんと美咲さんは，持ち寄った広告に載っている品物の大きさと値段について考えています。次の問1，問2に答えなさい。

（秋田県　2013 年度）

問1　ピザの広告では，M サイズの値段が見えなくなっていました。健司さんは「ピザの値段は面積に比例する」とした場合の M サイズの値段を求め，説明しました。［健司さんの説明］が正しくなるように，ⓐ～ⓔにあてはまる数や文字を書きなさい。ただし，S サイズと M サイズのピザの形は円であり，ピザの厚さや具材は考えないものとします。



［健司さんの説明］

S サイズと M サイズのピザの相似比は，18:24＝3:4 であるから，

面積比は ⓐ : ⓑ となる。

M サイズの値段を x 円とし，面積と値段について比例式をつくると，

ⓐ : ⓑ ＝ ⓒ : ⓓ となる。

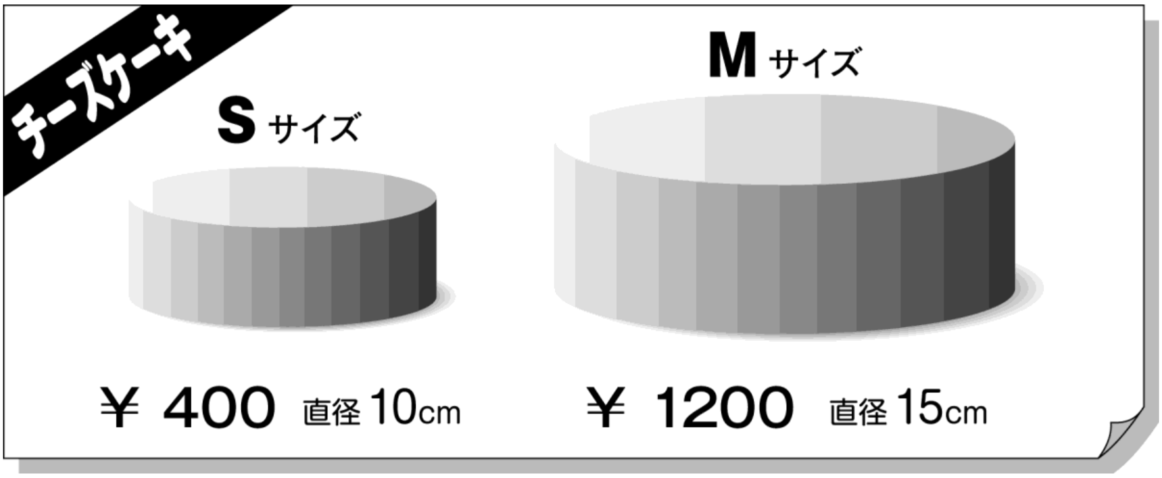
これを方程式にして解くと，

x＝ ⓔ となる。

だから，ピザの値段が面積に比例するとした場合は，

M サイズの値段は ⓔ 円　になる。

問２　[健司さんの説明]を聞いた美咲さんは，次の広告を見て「チーズケーキの値段は体積に比例しているのだろうか」という疑問をもちました。美咲さんは，このことを調べるために，「値段は体積に比例する」とした場合の，S サイズをもとにした M サイズの値段を求め，わかったことを説明しました。[美咲さんの説明]が正しくなるように，ⓕには続きを書き，ⓖにはあてはまるものを下のア～ウから 1 つ選んで記号を書きなさい。ただし，S サイズと M サイズのチーズケーキの形は相似な円柱であるものとします。



[美咲さんの説明]

「値段は体積に比例する」とした場合の，S サイズをもとにした M サイズの値段を求めるために，M サイズの値段がわからないものとして，それを x 円とする。

ⓕ

広告の M サイズのチーズケーキの値段は 1200 円であるから，

ⓖ

ア　広告に載っている値段は体積に比例している。

イ　広告に載っている値段は体積に比例していない。
　　また，これらのことから S サイズが M サイズより得だといえる。

ウ　広告に載っている値段は体積に比例していない。
　　また，これらのことから M サイズが S サイズより得だといえる。

解答欄

問1	ⓐ	
	ⓑ	
	ⓒ	
	ⓓ	
	ⓔ	
問2	ⓕ	
	ⓖ	

解答
問1
ⓐ　9　　ⓑ　16　　ⓒ　720　　ⓓ　x　　ⓔ　1280
問2
ⓕ
S サイズと M サイズのチーズケーキの相似比は 10:15＝2:3 であるから体積比は $2^3:3^3$＝8:27 となる。
x を用いて体積と値段の比例式をつくると 8:27＝400:x となる。
これを方程式にして解くと x＝1350 となる。
ⓖ　ウ
解説
問1
S と M の相似比が 3:4 のとき面積比は $3^2:4^2$＝9:16
M サイズの値段が x 円のとき
9:16＝720:x
$9x$＝16×720
x＝1280
よって M サイズの値段は 1280 円
問2
M サイズの値段を x 円とする。
S と M の相似比は 10:15＝2:3 より体積比は $2^3:3^3$＝8:27
値段が体積に比例しているとすると 8:27＝400:x　$8x$＝27×400　x＝1350 円
よって M サイズは S サイズより得だといえる。ⓖはウ

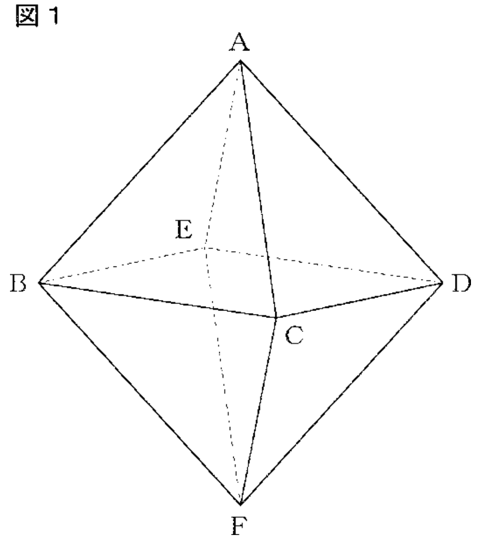
【問 3】

図1は，1 辺の長さが 4 cm の正八面体 ABCDEF である。あとの問いに答えなさい。

（山形県 2013 年度）

問1　図1において，辺 BC とねじれの位置にある辺をすべて書きなさい。

図１



問2　図1の正八面体の表面に，図2のように点 A から点 D まで，辺 BC，辺 BF，辺 EF に交わるようにして，糸をかける。点 A から点 D までの糸の長さが最も短くなるとき，かけた糸のようすを正八面体の展開図にかき入れたところ，図3のようになった。この糸が辺 BF と交わる点を G とするとき，あとの問いに答えなさい。なお，図3において，点 A，B，E と，点 C，F，D は，それぞれ一直線上に並ぶことがわかっている。

図２

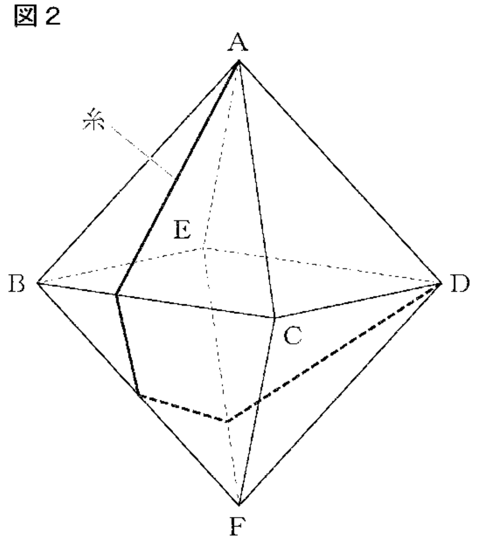
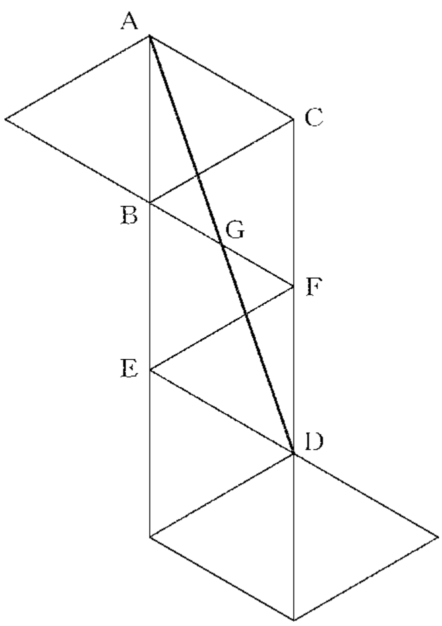


図３



(1)　この糸の長さを求めなさい。

(2)　BG＝FG であることを証明しなさい。

解答欄

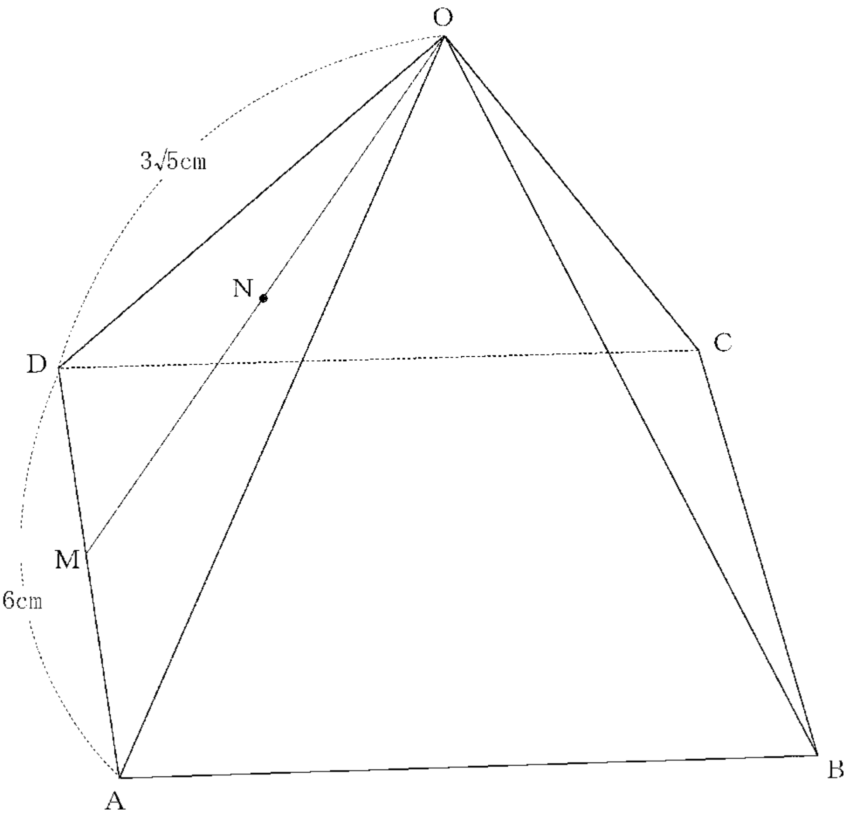
<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>〔証明〕</td></tr>
</table>

解答
問1　辺 AD, 辺 AE, 辺 DF, 辺 EF
問2
(1)　$4\sqrt{7}$ cm
(2)
〔証明〕
△ABG と△DFG において
正八面体のすべての面は正三角形だから
AB＝DF…①
∠ABG＝60°＋60°＝120°…②
∠DFG＝60°＋60°＝120°…③
②, ③より, ∠ABG＝∠DFG…④
よって錯角が等しいので
AE // CD
AE // CD で錯角は等しいから
∠BAG＝∠FDG…⑤
①, ④, ⑤より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ABG≡△DFG
よって BG＝FG
解説
問1
ねじれの位置にある辺は交わらず平行でない辺なので辺 AD, 辺 AE, 辺 DF, 辺 EF。
問2
(1)
展開図において D から辺 AB の延長線上に垂線をひき交点を H とする。
正八面体の面はすべて正三角形なので
△DEH において
EH:DE:DH＝1:2: $\sqrt{3}$　DE＝4 cm より
EH＝2 cm, DH＝ $2\sqrt{3}$ cm　AH＝4＋4＋2＝10 cm
△DAH において
三平方の定理より AD＝ $\sqrt{10^2+(2\sqrt{3})^2}$ ＝$4\sqrt{7}$ cm
(2)
△ABG と△DFG が合同であることを証明し BG＝FG を示す。

【問 4】

下の図のような，底面が 1 辺 6 cm の正方形で，他の辺が $3\sqrt{5}$ cm の正四角錐（すい）がある。

辺 AD の中点を M とし，線分 OM の中点を N とする。



このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（福島県 2013 年度）

問1　線分 BM の長さを求めなさい。

問2　3 点 N, B, C を通る平面と点 O との距離を求めなさい。

問3　この正四角錐を 3 点 O, M, B を通る平面で切り，2 つに分ける。

点 C を含む立体において，辺 BC 上に BP:PC＝2:1 となる点 P をとり，辺 OB 上に線分 MQ と線分 QP の長さの和が最も小さくなるように点 Q をとる。

このとき，4 点 Q, N, B, P を結んでできる立体の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm^3

解答
問1　$3\sqrt{5}$ cm
問2　3cm
問3　$\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$ m^3
解説
問1
△ABM において
∠MAB＝90°より
三平方の定理を利用して BM＝$\sqrt{3^2+6^2}$＝$3\sqrt{5}$ cm
問2
△BMO において
BM＝BO＝$3\sqrt{5}$ cm
N は OM の中点より ON⊥BN
同様に ON⊥CN だから ON⊥(平面 NBC)より求める距離は ON の長さとなる。
OM＝$\sqrt{(3\sqrt{5})^2-3^2}$＝6cm
よって ON＝3 cm
問3
△OMB，△OBC を OB がつながった状態で展開し四角形 MBCO をつくる。
BM＝BO＝OC より
2 つの三角形は合同な二等辺三角形である。
よって∠MOB＝∠CBO だから MO // BCMO＝BC＝6 cm より四角形 MBCO は平行四辺形である。
MQ＋QP が最短になるように点 Q をとると
点 Q は MP と OB の交点となるので OQ:QB＝OM:BP＝3:2
Q から BN に垂線をひき，交点を H とすると QH // ON だから
QH＝$\dfrac{2}{5}$ON＝$\dfrac{2}{5}\times 3$＝$\dfrac{6}{5}$ cm
△NBC の辺の長さを三平方の定理を利用して求めると NB＝NC＝BC＝6 cm
△NBP＝$\dfrac{2}{3}$△NBC＝$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}$＝$6\sqrt{3}$ cm^2
したがって求める体積は$\dfrac{1}{3}\times 6\sqrt{3}\times\dfrac{6}{5}$＝$\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$ cm^3

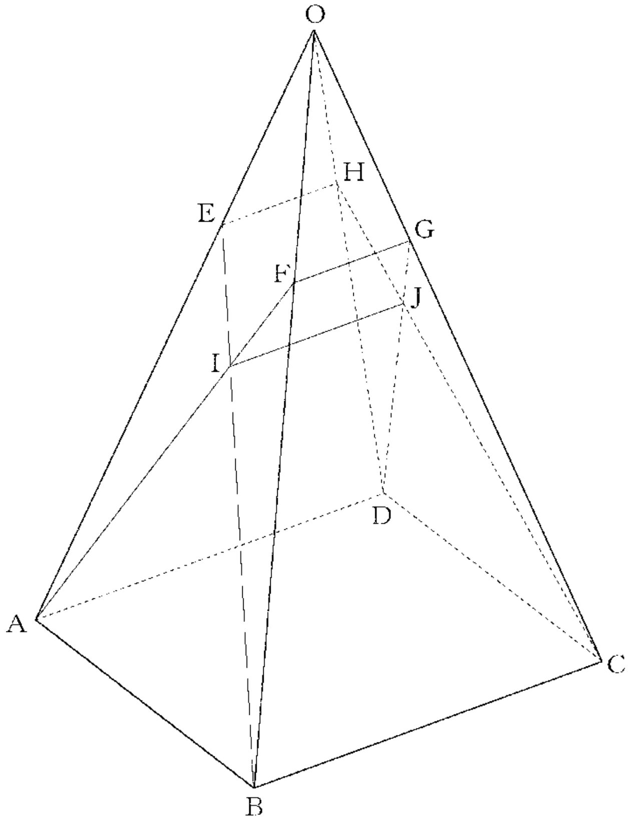
【問 5】

図のように，1 辺の長さが 4 cm である正方形を底面とし，OA＝OB＝OC＝OD＝7 cm とする正四角すい OABCD がある。

辺 OA 上に OE：EA＝1：2 となる点 E，辺 OB 上に OF：FB＝1：2 となる点 F，辺 OC 上に OG：GC＝1：2 となる点 G，辺 OD 上に OH：HD＝1：2 となる点 H をとる。線分 AF と線分 BE の交点を I，線分 CH と線分 DG の交点を J とする。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2013 年度）



問1　△OAB の面積を求めなさい。

問2　△OIJ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm^2

解答
問1　$6\sqrt{5}$ cm^2
問2　$\dfrac{\sqrt{41}}{2}$ cm^2
解説
問1
△OAB において
O から AB に垂線をひき交点を K とする。
OA＝OB＝7 cm，AB＝4 cm より AK＝2 cm
OK＝$\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}$ cm
よって△OAB＝$\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ cm^2
問2
E と F を結ぶ。
△OAB において
OE : EA＝OF : FB＝1 : 2 より EF // AB
よって EF : AB＝1 : 3
OK と EF の交点を M とすると OM : MK＝1 : 2，MI : IK＝1 : 3
よって OM : MI : IK＝2 : 1 : 3
OI : IK＝3 : 3＝1 : 1
同様に△ODC において
O から CD に垂線 ON をひくと，OJ : JN＝1 : 1
よって中点連結定理より△OKN において IJ // KN，IJ : KN＝1 : 2
ここで O から KN に垂線をひき交点を P とすると
KP＝4÷2＝2 cm
OP＝$\sqrt{(3\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{41}$ cm
△OKN＝$\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{41}=2\sqrt{41}$ cm^2
△OIJ : △OKN＝$1^2 : 2^2$＝1 : 4 より
△OIJ＝$\dfrac{1}{4}$△OKN＝$\dfrac{1}{4}\times 2\sqrt{41}$
＝$\dfrac{\sqrt{41}}{2}$ cm^2

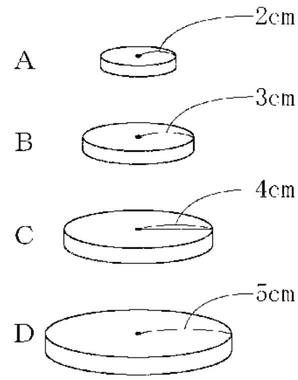
【問 6】

図1のような，円柱の形をした 4 種類の積木A, B, C, D がそれぞれたくさんある。積木 A, B, C, D の底面の半径は，順に 2 cm，3 cm，4 cm，5 cm であり，高さはいずれも 1 cm である。この積木を水平な台の上で何枚か重ねて立体をつくり，その体積や表面積を考える。ただし，すべての積木の底面の中心は一直線上にあり，その直線が台に垂直になるように積木を重ねるものとする。また，立体の表面積とは，つくった立体の表面全体の面積のことであり，台と接している面の面積もふくめる。

このとき，次の問1，問2，問3，問4に答えなさい。ただし，円周率は π とする。

（栃木県 2013 年度）

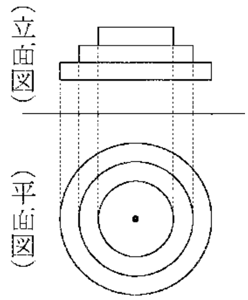
図 1



問1 積木 B を 2 枚重ねてつくった立体の体積を求めなさい。

問2 積木 A, B, C を 1 枚ずつ重ねて，投影図が図2となるように立体をつくった。この立体の表面積を求めなさい。

図 2



問3 図3のように積木 C を 14 枚重ねて立体をつくった。この立体の上の方から積木 C を x 枚取り除き，そのかわりに積木 A を y 枚重ねて，図4のような立体につくりかえた。図4の立体は，表面積が $200\pi\,\mathrm{cm}^2$ であり，体積は図3の立体の体積と等しかった。

このとき，x, y の連立方程式をつくり，x, y の値を求めなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

図 3

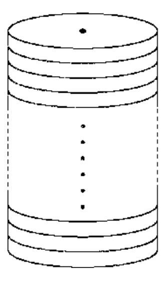
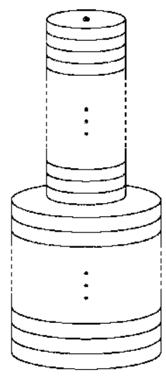


図 4



問4 積木 A を a 枚，B を b 枚，C を c 枚，D を d 枚重ねて立体をつくったところ，その体積が $67\pi\,\mathrm{cm}^3$ となった。積木 A, B, C, D をそれぞれ何枚使ったか。考えられる枚数の組のうち，使った枚数の合計が少ない方から 3 つ答えなさい。ただし，答えは［a, b, c, d］のように書き，使わない積木がある場合はその枚数を 0 と書くこと。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm^2
問3	答え $x=$, $y=$
問4	[, , ,], [, , ,], [, , ,]

解答

問1　18π　cm^3

問2　50π　cm^2

問3

図4の立体の表面積は $200\pi\mathrm{cm}^2$ であり 2 つの立体の体積は等しいから

$$\begin{cases} 8\pi(14-x)+4\pi y+32\pi=200\pi\cdots① \\ 4\pi y=16\pi x\cdots② \end{cases}$$

①より

$-2x+y=14\cdots③$

②より

$y=4x\cdots④$

④を③に代入

$-2x+4x=14$

$x=7$

④に代入

$y=28$

これらは，問題の答えに適している。

答え $x=7$，$y=28$

問4 ［2，1，0，2］，［2，2，1，1］，［2，3，2，0］

解説

問1

B1 枚の体積は $\pi\times3^2\times1=9\pi$　cm^3 より

B2 枚の体積は $9\pi\times2=18\pi$　cm^3

問2

表面積は $\pi\times4^2\times2+1\times2\pi\times4+1\times2\pi\times3+1\times2\pi\times2=32\pi+8\pi+6\pi+4\pi=50\pi$　cm^2

問3

問題の図4において表面積が 200π　cm^2 より

$\pi\times4^2\times2+(14-x)\times2\pi\times4+y\times2\pi\times2=200\pi 32\pi+112\pi-8\pi x+4\pi y=200\pi$

$2x-y=-14\cdots①$

図3と図4の体積が等しいことより

積み木 Cx 枚分と積み木 Ay 枚分の体積が等しいので

$\pi\times4^2\times x=\pi\times2^2\times y$　$16\pi x=4\pi y$

$y=4x\cdots②$

①，②を連立方程式として解く。

問4

1 枚の体積はそれぞれ，A が $4\pi\mathrm{cm}^3$，B が $9\pi\mathrm{cm}^3$，C が $16\pi\mathrm{cm}^3$，D が $25\pi\mathrm{cm}^3$ だから

$4\pi a+9\pi b+16\pi c+25\pi d=67\pi$

$4a+9b+16c+25d=67$

$d=2$ のとき $4a+9b+16c=17$ だから[2，1，0，2]

$d=1$ のとき $4a+9b+16c=42$ だから[2，2，1，1]，[6，2，0，1]

$d=0$ のとき $4a+9b+16c=67$ だから[2，3，2，0]，[6，3，1，0]，[1，7，0，0]，[10，3，0，0]

よって合計枚数の小さい方から 3 つは[2，1，0，2]，[2，2，1，1]，[2，3，2，0]

【問 7】

右の図1に示した立体 A－BCD は，AB＝AC＝12 cm，BC＝BD＝CD＝6 cm，∠ADB＝∠ADC＝90°の三角すいである。

辺 AB 上にあり，頂点 A，頂点 B のいずれにも一致しない点を P とする。

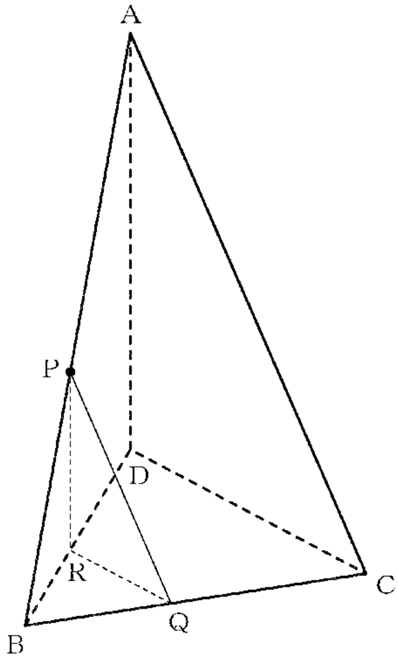
点 P を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 BC との交点を Q，点 P を通り辺 AD に平行な直線を引き，辺 BD との交点を R とする。

点 Q と点 R を結ぶ。

次の各問に答えよ。

（東京都 2013 年度）

図１

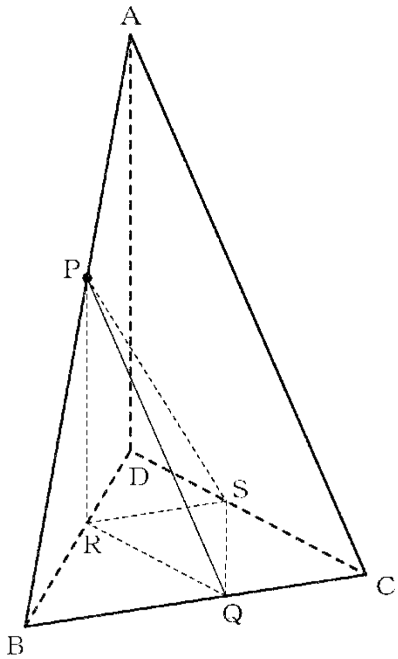


問1 図1において，AP＝6 cm のとき，△PRQ の面積と△ADC の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

問2 右の図2は，図1において，点 R を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 CD との交点を S とし，点 P と点 S，点 Q と点 S をそれぞれ結んだ場合を表している。

AP:PB＝1:2 のとき，立体 P－RQS の体積は何 cm^3 か。

図２



解答欄

問1	△PRQ:△ADC＝　　　:
問2	cm^3

解答
問1　△PRQ:△ADC＝1:4
問2　$8cm^3$
解説
問1
AP:PB＝6:(12－6)＝6:6＝1:1
AD // PR より DR:RB＝AP:PB＝1:1
よって PR:AD＝1:2
△PRQ∽△ADC だから
面積比は $1^2:2^2=1:4$
問2
△ADC において
三平方の定理より AD＝$\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$ cm
△ABD において
PR // AD より PR:AD＝BP:BA
PR: $6\sqrt{3}=2:3$
3PR＝$12\sqrt{3}$
PR＝$4\sqrt{3}$ cm
△DBC は正三角形で
DR:RB＝DS:SC＝CQ:QB＝1:2
△DRS と△RBQ と△DBC は相似で
相似比は 1:2:3 だから
面積比は $1^2:2^2:3^2=1:4:9$
よって△DRS＝$\frac{1}{9}$△DBC，△RBQ＝$\frac{4}{9}$△DBC
また△CQS＝$\frac{2}{3}$△DQC＝$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$△DBC＝$\frac{2}{9}$△DBC
△DBC において D から BC に垂線をひき交点を M とすると
BM＝3 cm，DM＝$3\sqrt{3}$ cm
よって△DBC＝$\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ cm^2
△RQS＝$\left(1-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\right)$△DBC＝$\frac{2}{9}$△DBC＝$\frac{2}{9}\times 9\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ cm^2
したがって P－RQS の体積は$\frac{1}{3}\times$△RQS×PR＝$\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}=8cm^3$

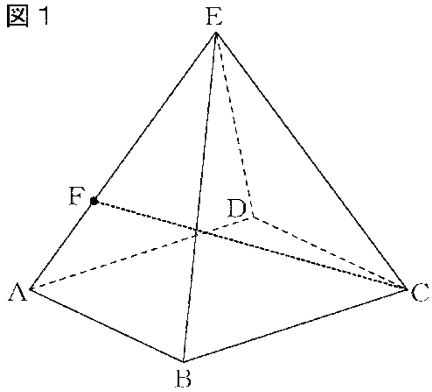
【問 8】

右の図1は，1 辺の長さが 6 cm である正方形 ABCD を底面とし，点 E を頂点とする正四角すいであり，高さは 6 cm である。
また，点 F は辺 AE 上の点で，AF:FE＝1:2 である。

このとき．次の問いに答えなさい。

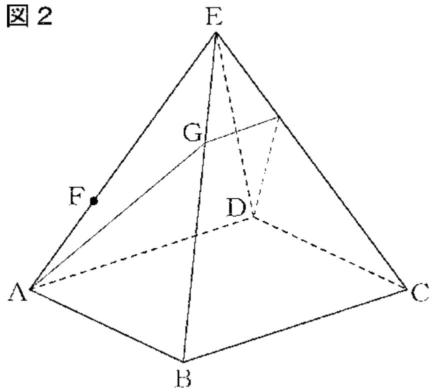
（神奈川県　2013 年度）

図１



問1　この正四角すいの体積を求めなさい。

図２



問2　この正四角すいにおいて，2 点 C，F 間の距離を求めなさい。

問3　この正四角すいの表面上に，図2のように点 A から辺 BE と辺 CE にこの順で交わるように，点 D まで線を引く。このような線のうち，長さが最も短くなるように引いた線と辺 BE との交点を G とするとき，線分 BG の長さを求めなさい。

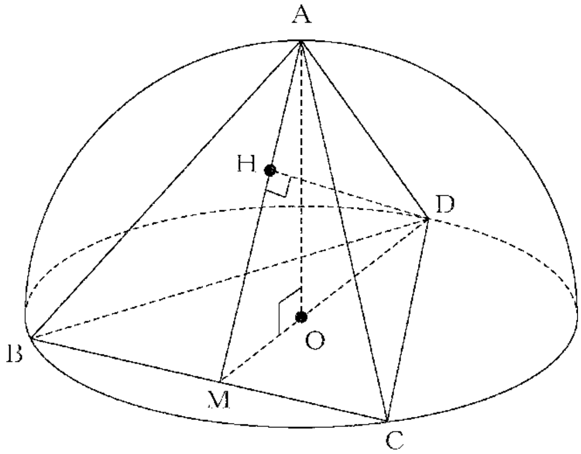
解答欄

問1	cm^3
問2	cm
問3	cm

解答
問1　72cm^3
問2　$3\sqrt{6}$ cm
問3　$2\sqrt{6}$ cm
解説
問1
正四角すいの体積は$\dfrac{1}{3}$×底面積×高さ＝$\dfrac{1}{3}\times(6\times6)\times6=72\text{cm}^3$
問2
AC に点 E, 点 F からそれぞれ垂線をひき交点を順に H, K とする。
△AEH において
FK // EH より FK:EH＝AF:AE
よって FK:6＝1:3　3FK＝6　FK＝2cm
△ABC において
三平方の定理より AC＝$6\sqrt{2}$ cm　AH＝$\dfrac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ cm
また AK:KH＝AF:FE＝1:2 だから
AK＝$\dfrac{1}{3}$AH＝$\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{2}=\sqrt{2}$ cm
CK＝$6\sqrt{2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ cm
△FKC において
三平方の定理より CF＝$\sqrt{2^2+(5\sqrt{2})^2}=3\sqrt{6}$ cm
問3
正四角すいを△EAB, △EBC, △ECD が辺 EB, 辺 EC でつながった状態で展開したとき
長さが最も短くなるように引いた線は線分 AD となり
AD と辺 EB の交点が G である。
AD と EC の交点を I とする。
△ABG∽△EBC だから
BG:BC＝AB:EB
ここで立体の正四角すいの△EAH において
三平方の定理より EA＝$\sqrt{6^2+(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{6}$ cm
よって　BG:6＝6: $3\sqrt{6}$　BG＝$2\sqrt{6}$ cm

【問 9】

図のように，半径 r cm の円 O を底面とする半球があり，円の中心 O を通り底面に垂直な直線と半球の表面の交点のうち，O と異なる点を A とする。また，円 O の周上に，異なる 3 点 B，C，D を，BC＝CD＝DB となるようにとり，線分 BC の中点を M，点 D から線分 AM に引いた垂線と線分 AM との交点を H とする。AB＝a cm，BC＝2 cm であるとき，次の問1～問4に答えなさい。



（新潟県　2013 年度）

問1　線分 DM の長さを答えなさい。

問2　r の値と a の値を，それぞれ求めなさい。

問3　円 O を底面とする半球の体積を求めなさい。

問4　線分 DH の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	$r=$　　　　, $a=$
問3	cm^3
問4	cm

解答

問1　$\sqrt{3}$ cm

問2　$r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　$a=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

問3　$\dfrac{16\sqrt{3}}{27}\pi$　cm^3

問4　$\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ cm

解説

問1

△BCD は 1 辺が 2 cm の正三角形で BM＝CM より∠DMC＝90°

よって△DCM は 60° の角をもつ直角三角形だから

DM＝$\sqrt{3}$ CM＝$\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$ cm

問2

△OBC は OB＝OC＝r cm　∠BOC＝2∠BDC＝120° より∠COM＝60°

△OCM において

∠CMO＝90°，∠COM＝60° だから

CM:OC＝$\sqrt{3}$:2

1:r＝$\sqrt{3}$:2

$r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

△OAB は OA＝OB＝$r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm，∠AOB＝90° の直角二等辺三角形だから

a＝AB＝$\sqrt{2}\,r=\sqrt{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

問3

求める体積は$\dfrac{4}{3}\times\pi\times r^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{3}\times\pi\times\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{16\sqrt{3}}{27}\pi$　cm^3

問4

△ABM で

三平方の定理より AM＝$\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ cm

△ABC＝$\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ cm^2

△DBC＝$\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$ cm^2

三角すい ABCD の体積の関係より

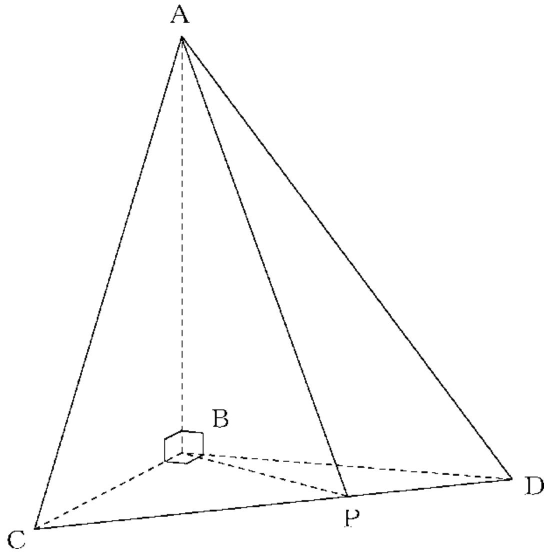
$\dfrac{1}{3}\times$△ABC×DH＝$\dfrac{1}{3}\times$△DBC×AO

よって△ABC×DH＝△DBC×AO　$\dfrac{\sqrt{15}}{3}\times$DH＝$\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　DH＝$\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ cm

【問 10】

右の図のように，三角すい ABCD があり，AB⊥BC，AB⊥BD，BC⊥BD である。BC＝3 cm，BD＝4 cm，三角すい ABCD の体積が 8 cm^3 であるとき，次の問いに答えなさい。

（富山県 2013 年度）



問1 点 P が辺 CD 上を点 C から D まで動くとき，次の問いに答えなさい。

(1) △ABP の面積が最も大きくなるとき，その面積を求めなさい。

(2) 点 P が辺 CD の中点であるとき，△ABP の面積を求めなさい。

(3) △ABP の面積が最も小さくなるとき，線分 CP の長さを求めなさい。

問2 点 B から面 ACD にひいた垂線と面 ACD との交点を H とする。このとき，線分 BH の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm^2
	(2)	cm^2
	(3)	cm
問2		cm

解答
問1
(1)　8cm^2
(2)　5cm^2
(3)　$\dfrac{9}{5}$ cm
問2　$\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$ cm
解説
問1
(1)
三角すいABCDの体積は $8\ \text{cm}^3$ より
$\dfrac{1}{3}\times\triangle\text{BCD}\times\text{AB}=8$　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\text{AB}=8$
AB＝4cm
△ABPの面積が最も大きくなるのは
底辺をABとするとABは一定だから高さにあたるBPが最も長くなるとき。
よってPがDと一致するときなので$\triangle\text{ABP}=\triangle\text{ABD}=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8\text{cm}^2$
(2)
△BCDにおいて
$\angle\text{DBC}=90^\circ$ より $\text{CD}=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{cm}$
BCの中点をMとしPMをひくと
中点連結定理よりPM//DB
$\text{PM}=\dfrac{1}{2}\text{DB}=\dfrac{1}{2}\times4=2\text{cm}$
$\text{BM}=\dfrac{3}{2}$ cm
$\angle\text{PMB}=90^\circ$ より $\text{PB}=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{2}$ cm
よって$\triangle\text{ABP}=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{5}{2}=5\text{cm}^2$
(3)
△ABPの面積が最も小さくなるのは $\text{BP}\perp\text{CD}$ のとき。
このとき$\triangle\text{DBC}\backsim\triangle\text{BPC}$だから
DC：BC＝CB：CP
5：3＝3：CP
5CP＝9
$\text{CP}=\dfrac{9}{5}$ cm
問2
三平方の定理より $\text{AC}=\text{CD}=5$ cm, $\text{AD}=4\sqrt{2}$ cm だから
△ACDはAC＝CDの二等辺三角形である。
CからADに垂線をひき交点をKとすると
$\text{AK}=\text{DK}=2\sqrt{2}$ cm　$\text{CK}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$ cm
$\triangle\text{ACD}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\sqrt{17}=2\sqrt{34}\ \text{cm}^2$
三角すいABCDの体積は $8\ \text{cm}^3$ より $\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{34}\times\text{BH}=8$
$\text{BH}=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$ cm

【問 11】

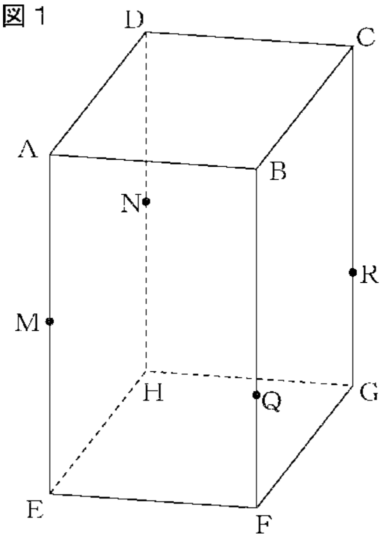
図1～図3の立体 ABCD－EFGH はいずれも，底面 EFGH が 1 辺 8 cm の正方形で，AE＝12 cm の正四角柱である。辺 AE，DH の中点を M，N とし，辺 BF，CG 上に QF＝RG＝4 cm となる点 Q，R をとる。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。ただし，円周率はπとする。

（石川県　2013 年度）

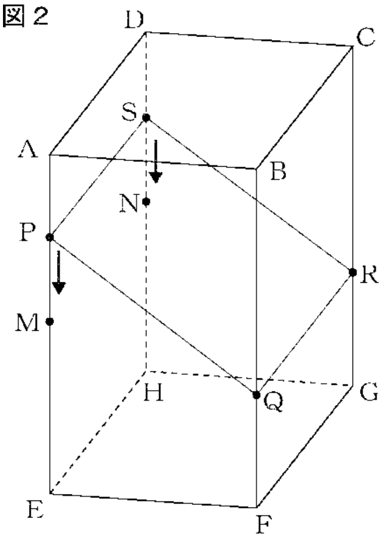
問1　図1において，面 BFGC と垂直な辺をすべて答えなさい。

図１



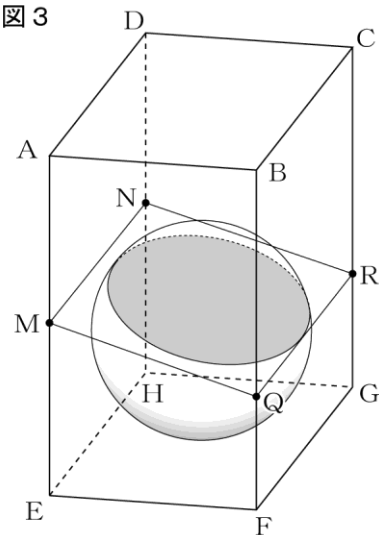
問2　図2のように，点 P は辺 AE 上を点 A から M まで動き，点 S は，PS // EH を満たしながら，辺 DH 上を点 D から N まで動く。点 P が M に達したとき，平面 PQRS が動いてできた三角柱の体積を求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

図２



問3　図3のように，半径 4 cm の球を，底面 EFGH とすべての側面に接するように正四角柱に入れる。平面 MQRN で球を切ったとき，その切り口の円の面積を求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

図３



解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td>〔計算〕

答　　　　　cm^3</td></tr>
<tr><td>問3</td><td>〔計算〕

答　　　　　cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1　辺 AB, 辺 DC, 辺 EF, 辺 HG
問2
〔計算〕
$6\times8\times\frac{1}{2}\times8=192$
〔答〕 $192\mathrm{cm}^3$
問3
〔計算〕
$\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$
切り口の円の半径を r とすると
$8:r=2\sqrt{17}:4$
$r=\frac{8\times4}{2\sqrt{17}}=\frac{16}{\sqrt{17}}$
よって円の面積は $\frac{256}{17}\pi$
〔答〕 $\frac{256}{17}\pi$ cm^2
解説
問1
面 BFGC と垂直な辺は辺 AB, 辺 DC, 辺 EF, 辺 HG
問2
平面 PQRS が動いてできる三角柱は立体 AQM－DRN である。
よって求める体積は $\triangle\mathrm{AQM}\times\mathrm{BC}=\frac{1}{2}\times6\times8\times8=192\ \mathrm{cm}^3$
問3
球の中心を O とし点 Q, R から AE, DH に垂線をひき交点をそれぞれ I, J とする。
また QR の中点を K, IJ の中点を L とする。
△MIQ において
三平方の定理より $\mathrm{MQ}=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$ cm
球の半径は 4 cm より
球を面 IJRQ を通る平面で切ったときの切り口は半径 4 cm の円になる。
よって KL は円 O の直径となる。
球を平面 MQRN で切ったとき
切り口の円周と KL を通り面 AEFB に平行な面との 2 つの交点のうち K 以外のもう 1 つの点を T とする。
円周角の定理より $\angle\mathrm{LTK}=90^\circ$
TK は切り口の直径になるのでこの切り口の円の中心を U, 半径を r とする。
$\triangle\mathrm{MIQ}\backsim\triangle\mathrm{LTK}\backsim\triangle\mathrm{OUK}$ だから
$8:r=2\sqrt{17}:4$
$2\sqrt{17}\,r=32$
$r=\frac{16}{\sqrt{17}}$
したがって切り口の円の面積は $\pi\times\left(\frac{16}{\sqrt{17}}\right)^2=\frac{256}{17}\pi$ cm^2

【問 12】

すべての辺の長さが 4 cm である正四角錐(すい)OABCD がある。
このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（山梨県　2013 年度）

問1　図1のように，正四角錐において，底面の正方形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を H とするとき，線分 OH は底面の正方形 ABCD と垂直である。
このとき，線分 OH の長さを求めなさい。

図１

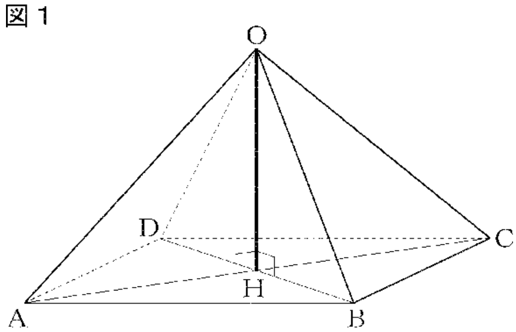
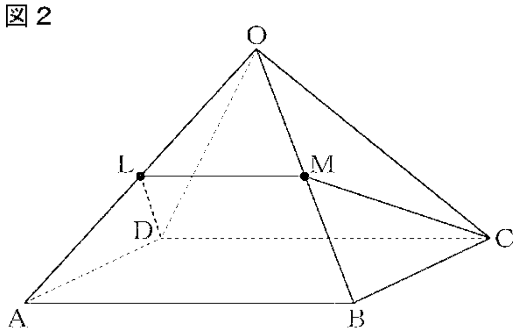


図２



問2　図2のように，正四角錐の辺 OA，OB の中点をそれぞれ L，M とし，4 点 L，M，C，D を通る平面で正四角錐を切る。
このときできる立体 LMABCD の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm^3

解答
問1　$2\sqrt{2}$ cm
問2　$\dfrac{20\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3$
解説
問1
四角形 ABCD は 1 辺が 4 cm の正方形だから
三平方の定理より AC＝ $4\sqrt{2}$ cm
△OAC において OA＝OC，OH⊥AC だから
AH＝CH＝ $4\sqrt{2}\div 2 = 2\sqrt{2}$ cm
△OAH において
三平方の定理より OH＝ $\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$ cm
問2
辺 AB の中点を N とする。
△OAB 上で M を通り ON に平行な直線と AB との交点を P
L を通り ON に平行な直線と AB との交点を Q とする。
また P を通り BC に平行な直線が CD と交わる点を R
Q を通り AD と平行な直線が CD と交わる点を S とする。
M から面 ABCD に垂線をひき交点を K とすると
MK // OH，BM＝OM より BK＝KH
よって中点連結定理から MK＝ $\dfrac{1}{2}$ OH＝ $\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ cm
△BON において
MP // ON，BM＝OM より BP＝PN＝4÷2÷2＝1 cm
同様に CR＝AQ＝DS＝1 cm
よって求める立体の体積は合同な四角すい 2 つと三角柱の和と考えて
$$\left(\frac{1}{3}\times 1\times 4\times\sqrt{2}\right)\times 2+\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{2}\times 2=\frac{8\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}=\frac{20\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3$$

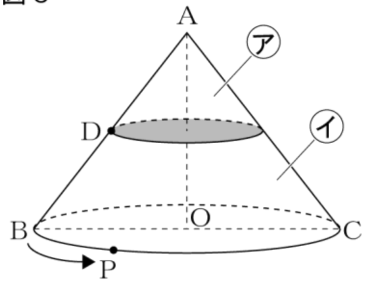
【問 13】

図6の立体は，AB＝8 cm，BO＝5 cm，∠AOB＝90°の直角三角形 ABO を，辺 AO を軸として一回転させてできた立体であり，BC は底面の円の直径である。また，点 D は AB の中点である。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（静岡県　2013 年度）

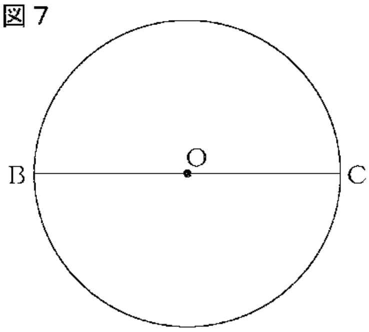
図６



問1　図6の立体を，点 D を通り底面に平行な平面で 2 つの部分に分け，上側の立体を㋐，下側の立体を㋑とする。

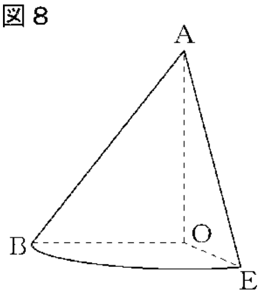
このとき，㋑の体積は㋐の体積の何倍であるか，答えなさい。

図７



問2　図6の立体において，点 P は，点 B を出発し，∠BOP の大きさが毎秒 15°増加するように，一定の速さで底面の円周上を矢印の方向に移動する。

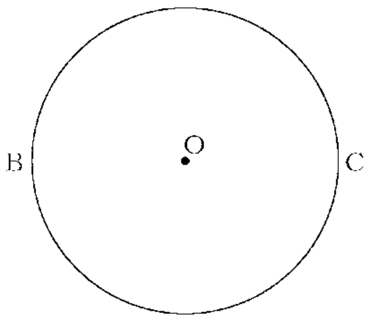
図８



(1)　図7は，図6の立体の平面図に，中心 O と直径 BC をかき入れたものである。点 B を出発してから 3 秒後の点 P を図7に作図しなさい。
ただし，作図には定規とコンパスを使用し，作図に用いた線は残しておくこと。

(2)　点 E は，点 B を出発してから 8 秒後に点 P が到達した点とする。図8の立体は，図6の立体の一部であり，おうぎ形 OBE を底面とし，△ABO と△AEO を側面とする立体である。図8の立体を展開したとき，その展開図における，おうぎ形 ABE の，中心角の大きさと面積を求めなさい。ただし，円周率はπとする。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">倍</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>図 7
</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>中心角　　　度，面積　　　cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1　7 倍
問2
(1)　省略
(2)　中心角　75 度，面積　$\frac{40}{3}\pi cm^2$

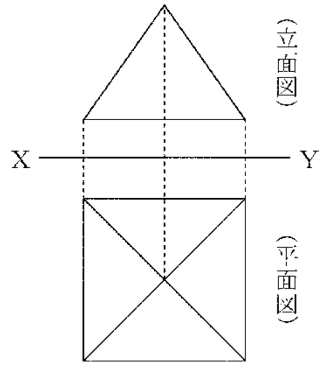
解説
問1
㋐の立体と (㋐＋㋑) の立体は相似でその相似比は 1：2
よって体積の比は $1^3:2^3=1:8$
これより㋐と㋑の体積の比は 1：(8－1)＝1：7
よって㋑の体積は㋐の体積の 7 倍
問2
(1)
3 秒後の∠BOP＝15°×3＝45°
よって O を通る BC の垂線をかき下側の弧 BC との交点を F とする。
∠BOF の二等分線をかき弧 BF との交点を P とする。
(2)
8 秒後の∠BOE＝15°×8＝120°
このとき弧 BE の長さは $2\pi\times5\times\frac{120}{360}=\frac{10}{3}\pi$ cm
展開図におけるおうぎ形 ABE の中心角は $360°\times\frac{10}{3}\pi\div(2\pi\times8)=75°$
面積は $\pi\times8^2\times\frac{75}{360}=\frac{40}{3}\pi$ cm^2

【問 14】

図は，ある立体の投影図である。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（愛知県　2013 年度　A）



(1)　この立体は，次のアからエまでのいずれかである。

正しいものを 1 つ選んで，そのかな符号を書きなさい。

ア四面体

イ三角柱

ウ四角すい

エ三角すい

(2)　この立体の 1 辺の長さがすべて 6 cm であるとき，この立体の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

(1)　ウ

(2)　$36\sqrt{2}\ cm^3$

解説

(1)

真上から見ると四角形で正面から見ると二等辺三角形なのでこの立体は四角すい。

よってウ

(2)

底面は 1 辺が 6 cm の正方形だから対角線は $6\sqrt{2}$ cm

正四角すいの高さを h cm とすると

この高さは等しい辺が 6 cm，底辺を $6\sqrt{2}$ cm とする二等辺三角形の高さと等しいので

$h = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ cm

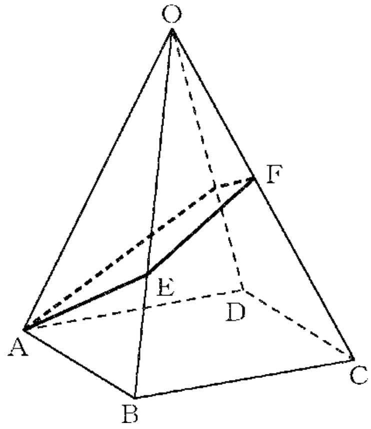
よって求める体積は $\frac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\ cm^3$

【問 15】

図で，立体 OABCD は正四角すいである。正四角すいの側面に，頂点 A から辺 OB, OC, OD と交わり，頂点 A に戻るように糸を 1 周かけ，その糸の長さが最短となるときの糸と辺 OB, OC との交点をそれぞれ E, F とする。

OA＝6 cm，∠AOB＝30° のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（愛知県 2013 年度 B）



(1) 線分 FC の長さは何 cm か，求めなさい。

(2) △ABE の面積は何 cm^2 か，求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2

解答

(1) 3cm

(2) $9-3\sqrt{3}$ cm^2

解説

(1)

正四角すいの 4 つの側面を OB, OC, OD をつなげた状態で展開したとき

E, F はそれぞれ線分 AA と OB, OC との交点となる。

このとき△OAA は OA＝6 cm，∠AOA＝30°×4＝120° の二等辺三角形になるので OF⊥AA となる。

△AOF に注目すると∠AOF＝60°，∠AFO＝90° の直角三角形であるから OF＝$\frac{1}{2}$OA＝$\frac{1}{2}$×6＝3cm

よって FC＝6－3＝3cm

(2)

△OEF において

∠EOF＝30°，∠OFE＝90° より

EF＝$\frac{1}{\sqrt{3}}$OF＝$\frac{1}{\sqrt{3}}$×3＝$\sqrt{3}$ cm　OE＝2EF＝$2\sqrt{3}$ cm　BE＝6－$2\sqrt{3}$ cm

△OAB において

A から AB に垂線をひき交点を H とする。

△OAH は∠AOH＝30°，∠AHO＝90° の直角三角形なので AH＝$\frac{1}{2}$OA＝$\frac{1}{2}$×6＝3cm

よって△ABE＝$\frac{1}{2}$×BE×AH＝$\frac{1}{2}$×(6－$2\sqrt{3}$)×3＝9－$3\sqrt{3}$ cm^2

【問 16】

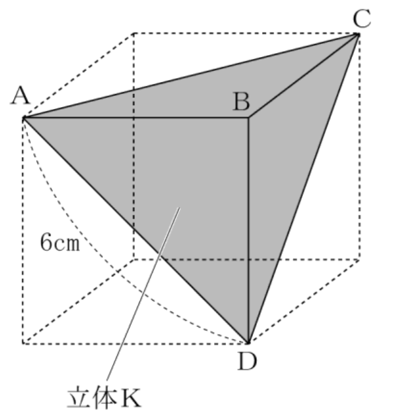
右の図1のように，立方体の 4 つの頂点 A, B, C, D を結んでできる立体 K がある。

辺 AD の長さが 6 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

なお，各問いにおいて，答えの分母に $\sqrt{}$ がふくまれるときは，分母を有理化しなさい。また，$\sqrt{}$ の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。

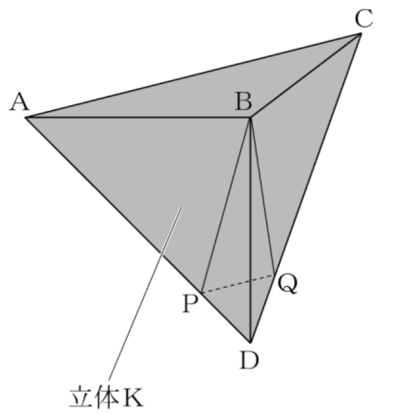
（三重県　2013 年度）

図 1



(1) 辺 AB の長さを求めなさい。

図 2



(2) △ACD の面積を求めなさい。

(3) 面 ACD を底面としたときの立体 K の高さを求めなさい。

(4) 右の図2のように，立体 K の辺 AD 上に点 P を，辺 CD 上に点 Q をそれぞれとり，3 つの線分 BP, PQ, QB の長さの和が最小となるようにする。

このとき，3 つの線分の長さの和を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2
(3)	cm
(4)	cm

解答
(1)　$3\sqrt{2}$ cm
(2)　$9\sqrt{3}$ cm^2
(3)　$\sqrt{6}$ cm
(4)　$3+3\sqrt{3}$ cm
解説
(1)
△ABD は AB＝BD の直角二等辺三角形だから
AB:AD＝1: $\sqrt{2}$
AB:6＝1: $\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$ AB＝6
AB＝ $3\sqrt{2}$ cm
(2)
△ACD は 1 辺の長さが 6 cm の正三角形だから
C から AD に垂線をひき交点を H とすると
AH＝3 cm
CH＝ $3\sqrt{3}$ cm
よって△ACD＝ $\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ cm^2
(3)
三角錐 ABCD の体積は $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}\right)\times 3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ cm^3
面 ACD を底面としたときの高さを h cm とすると $\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times h=9\sqrt{2}$　$h=\sqrt{6}$ cm
(4)
立体 K を辺 BA, BC, BD で切り開いた展開図にて
△BAD の点 B から△BCD の点 B まで，AD，CD と交わるように直線をひき交点をそれぞれ P，Q とすると
BP＋PQ＋QB の長さが最短となる。
△ABD において
B から AD に垂線をひき交点を R とすると
△ABR は AR＝BR の直角二等辺三角形だから
AR＝BR＝ $3\sqrt{2}\div\sqrt{2}=3$ cm
このとき△DB B' は頂角を $45^\circ+60^\circ+45^\circ=150^\circ$ とする二等辺三角形なので∠DBP＝15°
よって△BPR は∠BPR＝60°，∠BRP＝90° の直角三角形だから
PR＝ $\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ cm，BP＝ $2\sqrt{3}$ cm
△DPQ は正三角形だから PQ＝DP＝$3-\sqrt{3}$ cm
よって BP＋PQ＋QB＝ $2\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})+2\sqrt{3}=3+3\sqrt{3}$ cm

【問 17】

次の図1のように，AB＝3 cm，AD＝4 cm，AE＝$\sqrt{7}$ cm の直方体 ABCD－EFGH がある。また，図2は図1の直方体の一部を切り取ってできた三角錐（すい）AEFG である。

図１

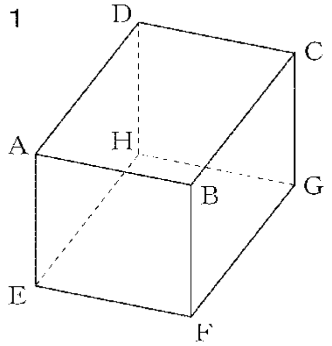
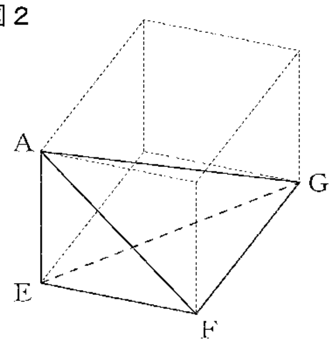


図２



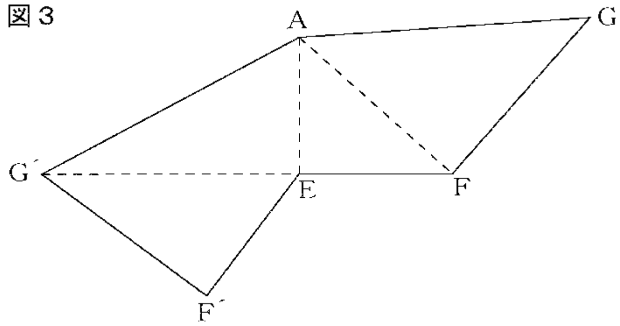
このとき，下の問1・問2に答えよ。

（京都府　2013 年度）

問1　三角錐 AEFG の体積と表面積をそれぞれ求めよ。

問2　次の図3は，図2の三角錐 AEFG の展開図である。このとき，△G G′ F の面積を求めよ。ただし，この展開図を組み立てたとき，点 G′ は点 G と，点 F′ は点 F と，それぞれ重なる点である。

図３



解答欄

問1	体積	cm^3
	表面積	cm^2
問2		cm^2

解答
問1
体積　$2\sqrt{7}$ cm^3
表面積（$4\sqrt{7}$ ＋14)cm^2
問2　12cm^2
解説
問1
三角錐 AEFG の体積は$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$ cm^3
△AEF において
三平方の定理より AF＝$\sqrt{(\sqrt{7})^2+3^2}=4$ cm
△EFG において
三平方の定理より EG＝$\sqrt{3^2+4^2}=5$ cm
よって求める表面積は$\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{7}+\frac{1}{2}\times5\times\sqrt{7}=4\sqrt{7}+14$ cm^2
問2
G から直線 G′F に垂線をひき交点を K とする。
△GFK と△FAE において
GF＝FA…①
∠GKF＝∠FEA＝90°…②
∠GFK＝180°－90°－∠AFE＝∠FAE…③
①, ②, ③より
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので
△GFK≡△FAE
よって GK＝FE＝3 cm
よって△GG′F＝$\frac{1}{2}\times$G′F×GK＝$\frac{1}{2}\times(5+3)\times3=12$ cm^2

【問 18】

図1, 図2において, 立体 ABC－DEF は三角柱である。△ABC と△DEF は合同な直角二等辺三角形であり, ∠BAC＝∠EDF＝90° である。四角形 ACFD, ABED, BCFE はすべて長方形であり, AD＝10 cm である。AB＝AC＝x cm とする。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

（大阪府 2013 年度 後期）

図１

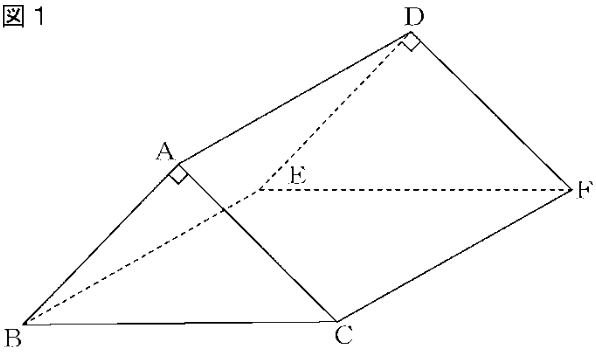
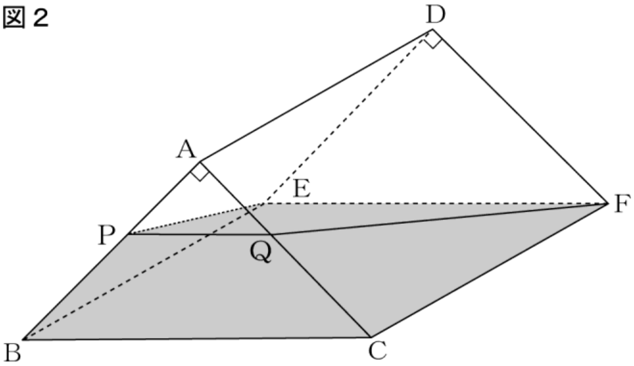


図２



問1 図1において,

(1) 長方形 ACFD の面積を x を用いて表しなさい。

(2) 三角柱 ABC－DEF の体積が 270 cm^3 となるときの x の値を求めなさい。

問2 図2は, x＝8 であるときの状態を示している。

図2において, P は, 辺 AB 上にあって A, B と異なる点である。Q は, 辺 AC 上にあって AP＝AQ となる点である。P と E, P と Q, Q と F とをそれぞれ結ぶ。このとき, 4 点 P, Q, F, E は同じ平面上にあって, QF＝11 cm である。

(1) 線分 PQ の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

(2) 立体 PQ－BCFE の体積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm^2
	(2)	
問2	(1)	〔求め方〕 cm
	(2)	cm^3

解答
問1
(1)　$10x\ \mathrm{cm}^2$
(2)　$3\sqrt{6}$
問2
(1)
〔求め方〕
四角形ACFDは長方形だから$\angle \mathrm{QCF}=90^\circ$
よって$\mathrm{QF}^2=\mathrm{QC}^2+\mathrm{CF}^2$
$\mathrm{QC}=y$ cmとすると
$11^2=y^2+10^2$
これを解くと$y>0$より
$y=\sqrt{21}$
よって$\mathrm{AQ}=\mathrm{AC}-\mathrm{QC}=8-\sqrt{21}$ cm
△APQはAP＝AQ，$\angle \mathrm{PAQ}=90^\circ$の直角二等辺三角形だから
$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\,\mathrm{AQ}=8\sqrt{2}-\sqrt{42}$ cm
$8\sqrt{2}-\sqrt{42}$　cm
(2)　$40\sqrt{21}-35\ \mathrm{cm}^3$
解説
問1
(1)
長方形ACFDの面積は$x\times10=10x\ \mathrm{cm}^2$
(2)
三角柱ABC－DEFの体積は$270\ \mathrm{cm}^3$より
$\frac{1}{2}\times x\times x\times10=270$
$5x^2=270$
$x^2=54$
$x>0$より
$x=3\sqrt{6}$
問2
(1)
△QCFで$\angle \mathrm{QCF}=90^\circ$より
$\mathrm{QC}=\sqrt{11^2-10^2}=\sqrt{21}$ cm
$\mathrm{AQ}=8-\sqrt{21}$ cm
△APQはAP＝AQ，$\angle \mathrm{PAQ}=90^\circ$より
$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\,\mathrm{AQ}=\sqrt{2}\,(8-\sqrt{21})=8\sqrt{2}-\sqrt{42}$ cm
(2)
P，QからそれぞれBCに垂線をひき交点をH，Kとする。
△KCQ，△HPBは直角二等辺三角形だから
$\mathrm{PH}=\mathrm{QK}=\mathrm{BH}=\mathrm{CK}=\{8\sqrt{2}-(8\sqrt{2}-\sqrt{42})\}\div2=\frac{\sqrt{42}}{2}$ cm
求める体積は
$\frac{1}{3}\times\mathrm{CK}\times\mathrm{CF}\times\mathrm{QK}\times2+\frac{1}{2}\times\mathrm{QK}\times\mathrm{CF}\times\mathrm{PQ}$
$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{42}}{2}\times10\times\frac{\sqrt{42}}{2}\times2+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{42}}{2}\times10\times(8\sqrt{2}-\sqrt{42})=70+40\sqrt{21}-105$
$=40\sqrt{21}-35\mathrm{cm}^3$

【問 19】

前田さんのクラスは，文化祭のクラス演技で，赤と白のしま模様の円錐の形の帽子を使用することになった。右の資料は，係で協力して帽子を作成するにあたり，前田さんが説明のために書いたものである。

資料を読み，次の各問いに答えなさい。

（鳥取県　2013 年度）

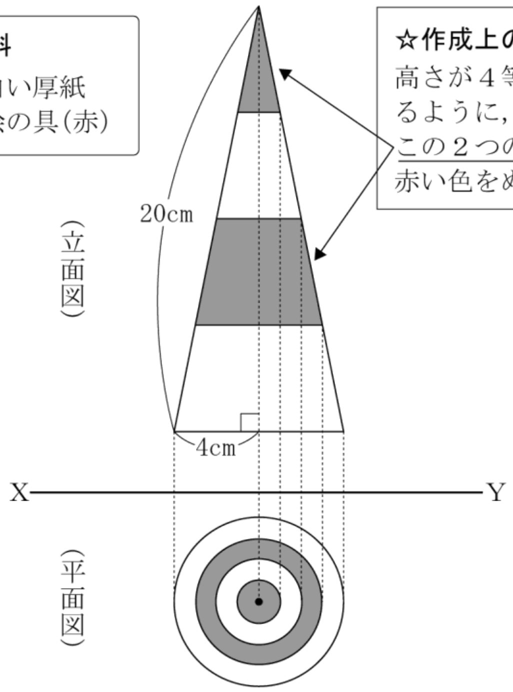
問1　帽子 (円錐) の高さを求めなさい。

資料

帽子（円錐）の投影図

材料
- 白い厚紙
- 絵の具（赤）

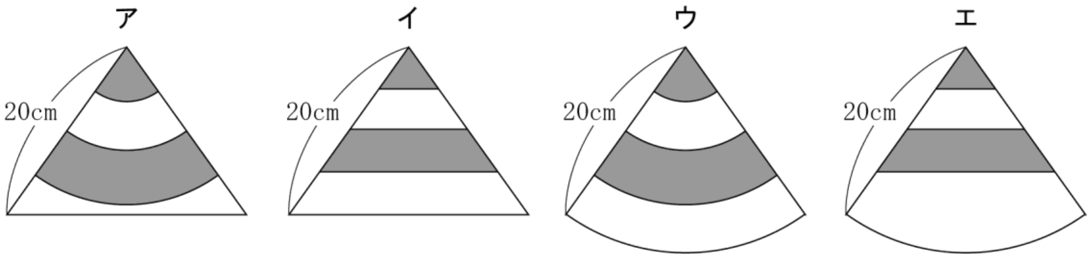
☆作成上の注意１
高さが４等分になるように，側面の<u>この２つの部分</u>に赤い色をぬる。



☆作成上の注意２
帽子（円錐）の側面をどの方向から見ても，立面図のように見えるように作る。

☆作成上の注意３
底面はつけないで，側面だけの帽子（円錐）を作る。

問2　帽子 (円錐) の展開図として適当なものを，次のア～エからひとつ選び，記号で答えなさい。
ただし，紙の厚さやのりしろは考えないものとする。



問3　　帽子 (円錐) の赤い色をぬる２つの部分の面積の和を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	
問3	cm^2

解答

問1　$8\sqrt{6}$ cm

問2　ウ

問3　30π　cm^2

解説

問1

高さは三平方の定理を利用して$\sqrt{20^2-4^2}=8\sqrt{6}$ cm

問2

円錐の側面の展開図はウのようなおうぎ形になる。

問3

求める面積の和は

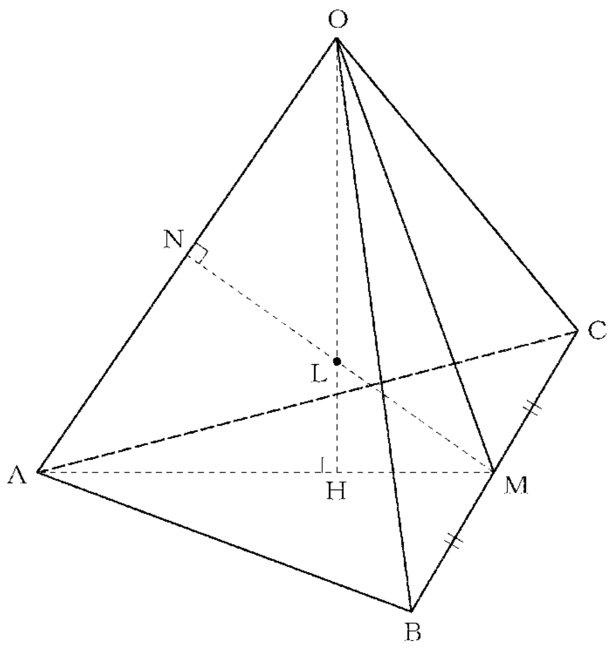
$$\pi\times15^2\times\frac{2\pi\times4}{2\pi\times20}-\pi\times10^2\times\frac{2\pi\times4}{2\pi\times20}+\pi\times5^2\times\frac{2\pi\times4}{2\pi\times20}$$

$=45\pi-20\pi+5\pi=30\pi$　cm^2

【問 20】

図のように，すべての辺の長さが 2 cm の正三角錐 OABC がある。線分 BC の中点を M，点 M から線分 OA にひいた垂線と線分 OA との交点を N，頂点 O から線分 AM にひいた垂線と線分 AM との交点を H とする。また，線分 OH と線分 MN の交点を L とする。問1～問4に答えなさい。

（徳島県 2013 年度）



問1 線分 OM，線分 MN の長さをそれぞれ求めなさい。

問2 △OAH∽△MAN を証明しなさい。

問3 正三角錐 OABC の体積を求めなさい。

問4 △OMA において，∠OAM の大きさを a 度とするとき，∠HNM の大きさを a を用いて表しなさい。

解答欄

問1	(1)	線分 OM　　　　　cm
	(2)	線分 MN　　　　　cm
問2	〔証明〕	
問3	cm^3	
問4	度	

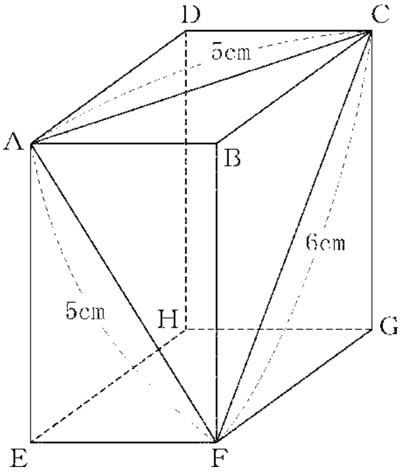
解答
問1
(1)
線分 OM　$\sqrt{3}$ cm
(2)
線分 MN　$\sqrt{2}$ cm
問2
〔証明〕
△OAH と△MAN で
∠OAH と∠MAN は共通な角だから
∠OAH＝∠MAN…①
また∠OHA＝∠MNA＝90°…②
①, ②から
2 組の角が, それぞれ等しいので
△OAH∽△MAN
問3　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3
問4　$2a-90$ 度
解説
問1
OM＝$\sqrt{3}$ BM＝$\sqrt{3}\times1$＝$\sqrt{3}$ cm
OM＝AM＝$\sqrt{3}$ cm だから
ON＝AN＝1cm
MN＝$\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$ cm
問2
△OAH と△MAN において
2 組の角がそれぞれ等しいことを利用して相似を証明する。
問3
△OAH∽△MAN において
OA : MA＝OH : MN
2 : $\sqrt{3}$＝OH : $\sqrt{2}$
OH＝$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm
正三角錐 OABC の体積は$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3
問4
△OAH∽△MAN より∠AOH＝∠AMN
よって∠NOH＝∠NMH だから
円周角の定理の逆より 4 点 N, O, M, H は同一円周上にある。
円周角の定理より∠HNM＝∠HOM＝∠MOA－∠AOH＝$a-(90-a)=2a-90$ 度

【問 21】

右の図のような直方体がある。点 A と点 C, 点 C と点 F, 点 F と点 A をそれぞれ結ぶ。

AC＝AF＝5 cm, CF＝6 cm であるとき, 次の(1), (2)の問いに答えよ。

（香川県　2013 年度）



(1) 次の㋐～㋓のうち, この直方体に関して正しく述べたものはどれか。1 つ選んで, その記号を書け。

㋐ ∠CAF＝60° である

㋑ 線分 AC と辺 FG は平行である

㋒ 辺 AE と辺 CG はねじれの位置にある

㋓ 三角形 BCF は直角三角形である

(2) この直方体の体積は何 cm^3 か。

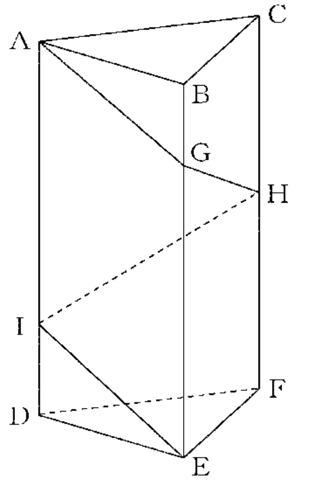
解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答
(1) ㋓
(2) $18\sqrt{7}$ cm^3
解説
(1)
△ACF は正三角形ではないので∠CAF は 60° ではない。
また AC と FG はねじれの位置にあり AE と CG は平行である。
△BCF は∠FBC＝90° だから直角三角形である。
よって正しいのは㋓
(2)
△ABC と△AFB は直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので合同だから BC＝BF
△BCF は直角二等辺三角形だから BC＝BF＝$\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ ＝$3\sqrt{2}$ cm
△ABC において AB＝$\sqrt{5^2-(3\sqrt{2})^2}$ ＝$\sqrt{7}$ cm
$3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{7}=18\sqrt{7}$ cm^3

【問 22】

図は，側面がすべて長方形の三角柱 ABC－DEF であり，AB＝4 cm，BC＝3 cm，CA＝5 cm，BE＝12 cm である。辺 BE 上に点 G，辺 CF 上に点 H，辺 AD 上に点 I をとり，点 A と点 G，点 G と点 H，点 H と点 I，点 I と点 E をそれぞれ結ぶ。このとき，次の問1・問2に答えなさい。



（高知県 2013 年度 後期）

問1 三角柱 ABC－DEF の表面積を求めよ。

問2 AG＋GH＋HI＋IE の長さが最小となるとき，その長さを求めよ。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm

解答

問1 $156cm^2$

問2 20cm

解説

問1

△ABC において

$AC^2＝AB^2＋BC^2$ になるので

三平方の定理の逆より∠ABC＝90°

よって△ABC＝$\frac{1}{2}\times3\times4＝6cm^2$

表面積は $6\times2＋12\times(3＋4＋5)＝12＋144＝156cm^2$

問2

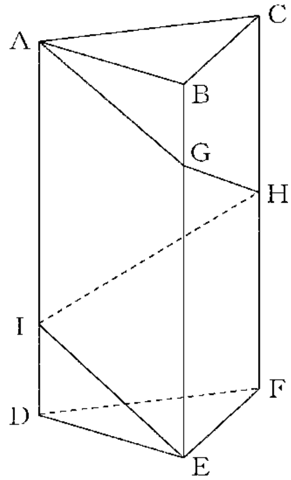
AG＋GH＋HI＋IE の長さが最も短くなるとき

この長さは縦が 12 cm 横が 4＋3＋5＋4＝16cm の長方形の対角線の長さと一致する。

よって三平方の定理より $\sqrt{12^2+16^2}$ ＝20cm

【問 23】

図は，側面がすべて長方形の三角柱 ABC－DEF であり，AB＝4 cm，BC＝3 cm，CA＝5 cm，BE＝12 cm である。辺 BE 上に点 G，辺 CF 上に点 H，辺 AD 上に点 I をとり，点 A と点 G，点 G と点 H，点 H と点 I，点 I と点 E をそれぞれ結ぶ。このとき，次の問1・問2に答えなさい。



（高知県 2013 年度 後期）

問1　三角柱 ABC－DEF の表面積を求めよ。

問2　AG＋GH＋HI＋IE の長さが最小となるとき，次の(1)・(2)の問いに答えよ。

(1)　AG＋GH＋HI＋IE の長さを求めよ。

(2)　三角形 AGI の面積を求めよ。

解答欄

問1		cm^2
問2	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答

問1　$156cm^2$

問2

(1)　20cm

(2)　$18cm^2$

解説

問1

△ABC において

$AC^2＝AB^2＋BC^2$ になるので

三平方の定理の逆より∠ABC＝90°

よって△ABC＝$\frac{1}{2}$×3×4＝$6cm^2$

表面積は 6×2＋12×(3＋4＋5)＝12＋144＝$156cm^2$

問2

(1)

AG＋GH＋HI＋IE の長さが最も短くなるとき

この長さは縦が 12 cm，横が 4＋3＋5＋4＝16cm の長方形の対角線の長さと一致する。

よって三平方の定理より$\sqrt{12^2+16^2}$ ＝20cm

(2)

平行線と線分の比の定理より

ID : 12＝4 : 16

16ID＝12×4

ID＝3cm

よって△AGI＝$\frac{1}{2}$×AI×AB＝$\frac{1}{2}$×(12−3)×4＝$18cm^2$

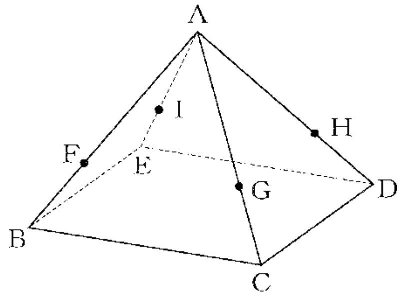
【問 24】

図は，辺の長さがすべて 6 cm の正四角すい ABCDE を表している。点 F, G, H, I は，それぞれ辺 AB, AC, AD, AE 上にあり，AF＝AG＝AH＝AI＝4 cm である。

次の問1～問3の $\boxed{}$ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

ただし，根号を使う場合は $\sqrt{}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県　2013 年度）



問1　図に示す立体において，四角すい AFGHI の体積は，正四角すい ABCDE の体積の $\boxed{\text{倍}}$ である。

問2　図に示す立体において，△CFH の面積は $\boxed{\text{cm}^2}$ である。

問3　図に示す立体において，線分 BF の中点を P とし，辺 DE 上に点 S を DS＝$\sqrt{3}$ cm となるようにとる。辺 AC 上に点 Q，辺 CD 上に点 R を，PQ＋QR＋RS の長さが最も短くなるようにとる。

このとき，PQ＋QR＋RS の長さは $\boxed{\text{cm}}$ である。

解答欄

問1	倍
問2	cm^2
問3	cm

解答

問1　$\dfrac{8}{27}$倍

問2　$4\sqrt{10}$ cm^2

問3　$4\sqrt{7}$ cm

解説

問1

正四角すいAFGHIと正四角すいABCDEは相似で

相似比は4:6＝2:3だから

体積比は$2^3:3^3$＝8:27

よって正四角すいAFGHIの体積は正四角すいABCDEの$\dfrac{8}{27}$倍

問2

FHは1辺が4 cmの正方形の対角線だからFH＝$4\sqrt{2}$ cm

△ABCにおいてFからBCに垂線をひき交点をKとする。

△FBKはFB＝2 cm，∠FBK＝60°，∠FKB＝90°の直角三角形より

BK＝1 cm，FK＝$\sqrt{3}$ cm　CK＝6－1＝5cmで

△FCKにおいて

三平方の定理よりCF＝$\sqrt{5^2+(\sqrt{3})^2}$ ＝$2\sqrt{7}$ cm

△CFHはCH＝CF＝$2\sqrt{7}$ cm，FH＝$4\sqrt{2}$ cmの二等辺三角形だから

CからFHに垂線をひき交点をJとすると

FJ＝$2\sqrt{2}$ cm

CJ＝$\sqrt{(2\sqrt{7})^2-(2\sqrt{2})^2}$ ＝$2\sqrt{5}$ cm

よって△CFH＝$\dfrac{1}{2}$×$4\sqrt{2}$×$2\sqrt{5}$＝$4\sqrt{10}$ cm^2

問3

展開図(△ABCと△ACDがACで△ACDと正方形BCDEがCDでつながった状態の展開図)において

Q，Rが線分PS上にあるときPQ＋QR＋RSは最短となりPSと一致する。

この展開図において

BAの延長線とEDの延長線の交点をTとする。

△DATは∠DTA＝90°，∠DAT＝60°，DA＝6 cmの直角三角形だから

AT＝6÷2＝3cm

DT＝$3\sqrt{3}$ cm

よって求める長さは∠PTS＝90°

ST＝$3\sqrt{3}$＋$\sqrt{3}$＝$4\sqrt{3}$ cm

TP＝3＋5＝8cmの直角三角形の斜辺になるから

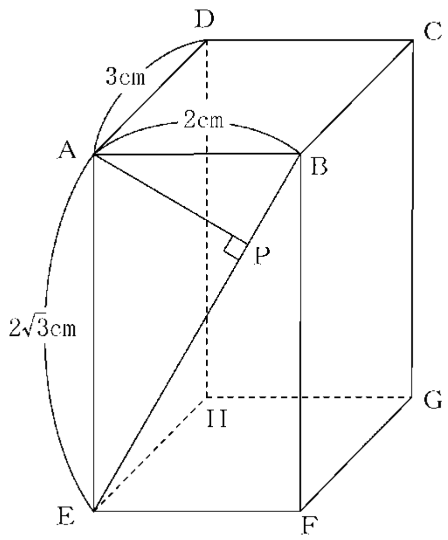
求める長さはPS＝$\sqrt{(4\sqrt{3})^2+8^2}$ ＝$4\sqrt{7}$ cm

【問 25】

右の図のように，AB＝2 cm，AD＝3 cm，AE＝$2\sqrt{3}$ cm の直方体があり，点 A から線分 BE に垂線をひき，BE との交点を P とする。

このとき，問1，問2に答えなさい。

（佐賀県 2013 年度 一般 追加問題）



問1 △BDE の面積を求めるために，次のように考えた。このとき，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ および $\boxed{\text{カ}}$ にあてはまる数を，$\boxed{\text{オ}}$ にあてはまる記号を書きなさい。

BE＝ $\boxed{\text{ア}}$ cm なので，AP＝ $\boxed{\text{イ}}$ cm となる。

△ADP において ∠DAP＝90° なので，DP^2＝ $\boxed{\text{ウ}}$ …①

また，BP^2＝ $\boxed{\text{エ}}$ ……②，BD^2＝13……③

①，②，③より $\text{BD}^2=\text{BP}^2+\text{DP}^2$ が成り立つので

△BDP は ∠ $\boxed{\text{オ}}$＝90° の直角三角形である。

よって，△BDE の面積は $\boxed{\text{カ}}$ cm^2 となる。

問2 三角すい ABDE について，△BDE を底面としたときの三角すいの高さを求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
	オ	
	カ	
問2	cm	

解答
問1
ア　4
イ　$\sqrt{3}$
ウ　12
エ　1
オ　BPD
カ　$4\sqrt{3}$
問2　$\dfrac{3}{2}$ cm
解説
問1
△ABEで
三平方の定理より BE＝$\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}$ ＝4cm
△ABEの面積について $\dfrac{1}{2}$ ×4×AP＝$\dfrac{1}{2}$ ×2× $2\sqrt{3}$　AP＝$\sqrt{3}$ cm
△ADPにおいて∠DAP＝90°より
$DP^2=3^2+(\sqrt{3})^2=12$
$BP^2=2^2-(\sqrt{3})^2=1$
$BD^2=2^2+3^2=13$
$DP^2+BP^2=BD^2$ だから
△BDPは∠BPD＝90°の直角三角形である。
よって△BDE＝$\dfrac{1}{2}$ ×4× $\sqrt{12}$ ＝ $4\sqrt{3}$ cm^2
問2
求める高さを h cmとすると
$\dfrac{1}{3}$ ×△BDE×h＝$\dfrac{1}{3}$ ×△ABD×AEより
$\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{3}\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\times 2\sqrt{3}$　$h=\dfrac{3}{2}$ cm

【問 26】

図1～図4のように，1 辺が 4 cm の立方体 ABCDEFGH がある。このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県　2013 年度）

問1　図1において，辺 AD と平行な面は全部でいくつあるか。

問2　立方体 ABCDEFGH の表面積は何 cm^2 か。

問3　図2において，線分 AF の長さは何 cm か。

問4　図3，図4のように，辺 AD の中点を M とし，線分 BM の中点を P とするとき，次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　図3において，△AMP の面積は何 cm^2 か。

(2)　図4において，三角すい FAMP の体積は何 cm^3 か。

図１

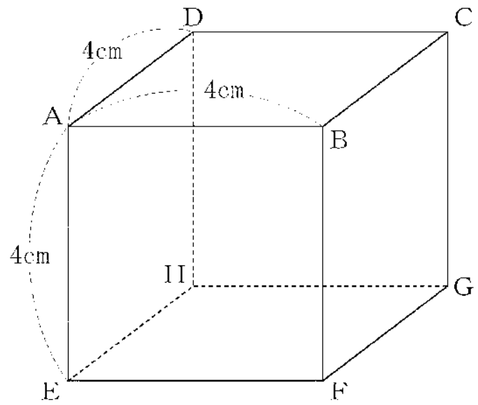


図２

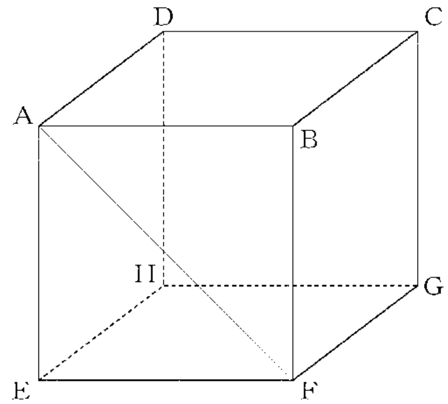


図３

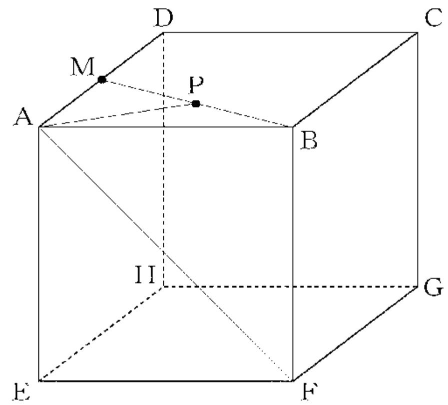
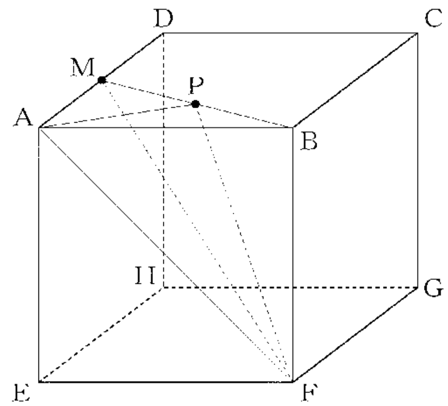


図４



解答欄

問1		
問2		cm^2
問3		cm
問4	(1)	cm^2
	(2)	cm^3

解答
問1　2つ
問2　$96cm^2$
問3　$4\sqrt{2}$ cm
問4
(1)　$2cm^2$
(2)　$\frac{8}{3}cm^3$
解説
問1
辺ADと平行な面は面BFGC，面EFGHの2つ
問2
立方体の表面積は$4\times4\times6=96cm^2$
問3
△AEFはAE＝FE＝4 cm，∠AEF＝90°の直角二等辺三角形より
三平方の定理からAF＝$4\sqrt{2}$ cm
問4
(1)
$\triangle AMP=\frac{1}{2}\triangle ABM=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4\times4=2cm^2$
(2)
三角すいFAMPの体積は$\frac{1}{3}\times\triangle AMP\times FB=\frac{1}{3}\times2\times4=\frac{8}{3}cm^3$

【問 27】

図1～図4のように，1 辺が 4 cm の立方体 ABCDEFGH がある。このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県　2013 年度）

問1　図1において，辺 AD と平行な面は全部でいくつあるか。

問2　立方体 ABCDEFGH の表面積は何 cm^2 か。

問3　図2において，線分 AF の長さは何 cm か。

問4　図3，図4のように，辺 AD の中点を M とし，線分 BM の中点を P とするとき，次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　図3において，△AMP の面積は何 cm^2 か。

(2)　図4において，三角すい PAFM の点 P から△AFM にひいた垂線と△AFM との交点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さは何 cm か。

図１

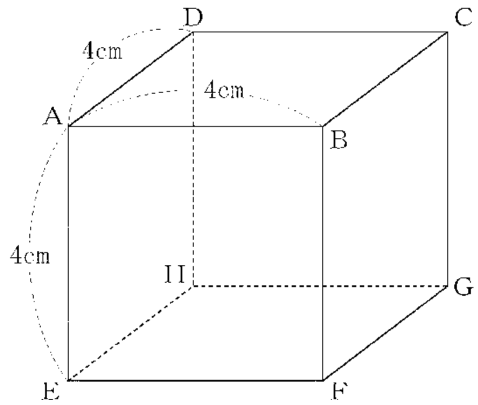


図２

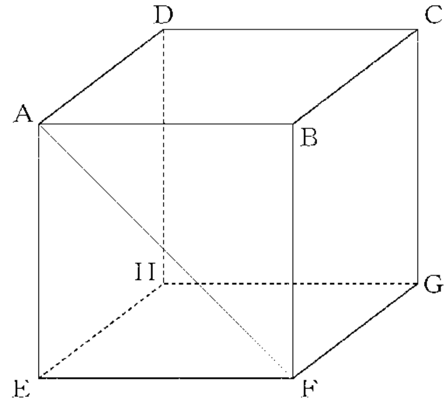


図３

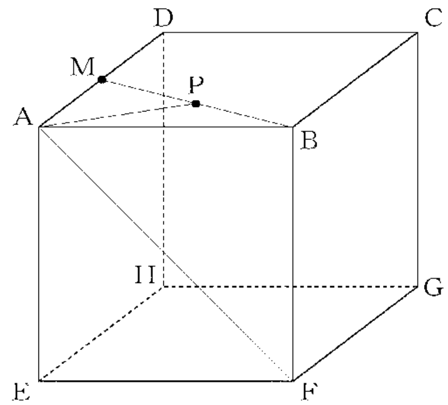
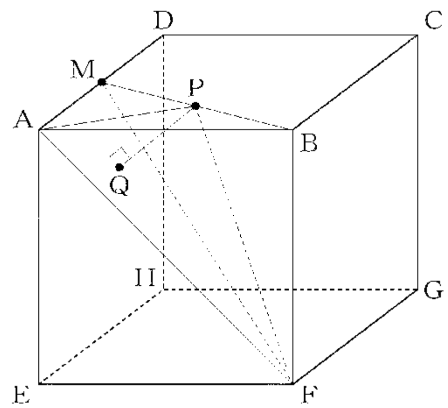


図４



解答欄

問1		
問2		cm^2
問3		cm
問4	(1)	cm^2
	(2)	cm

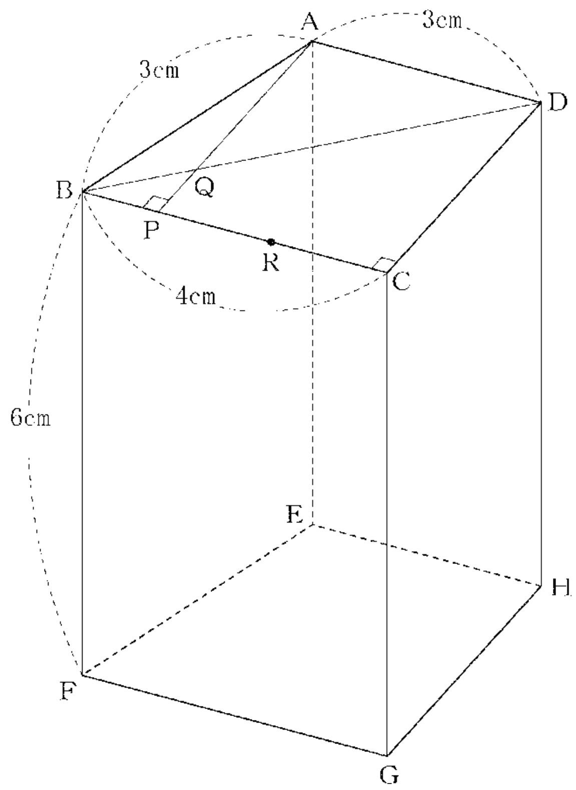
解答
問1　2つ
問2　$96cm^2$
問3　$4\sqrt{2}$ cm
問4
(1)　$2cm^2$
(2)　$\sqrt{2}$ cm
解説
問1
辺ADと平行な面は面BFGC，面EFGHの2つ
問2
立方体の表面積は $4\times4\times6=96cm^2$
問3
$\triangle$AEFはAE＝FE＝4 cm，$\angle$AEF＝90°の直角二等辺三角形より
三平方の定理からAF＝$4\sqrt{2}$ cm
問4
(1)
$\triangle AMP=\frac{1}{2}\triangle ABM=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4\times4=2cm^2$
(2)
三角すいFAMPの体積は$\frac{1}{3}\times\triangle AMF\times PQ=\frac{1}{3}\times\triangle AMP\times FB$だから
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\right)\times PQ=\frac{1}{3}\times2\times4$　$PQ=\sqrt{2}$ cm

【問 28】

右の図は，AD // BC，AB＝AD＝3 cm，BC＝4 cm，∠DCB＝90° の台形 ABCD を底面とし，4 つの側面がそれぞれ長方形の四角柱 ABCD－EFGH で，BF＝6 cm である。点 P は辺 BC 上にあって，∠APB＝90° であり，点 Q は線分 AP と線分 BD との交点である。また，点 R は線分 PC の中点である。

このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

（熊本県　2013 年度）



問1　線分 AP の長さを求めなさい。

問2　四角形 QFHD の面積を求めなさい。

問3　四角形 QFHD を底面とする四角すい RQFHD の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm^2
問3	cm^3

解答
問1　$2\sqrt{2}$ cm
問2　$\dfrac{21\sqrt{6}}{2}$ cm^2
問3　$\dfrac{35\sqrt{2}}{4}$ cm^3
解説
問1
BP＝4－3＝1cm
△ABP で
∠APB＝90°　より AP＝$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ cm
問2
△BCD で
∠BCD＝90°，DC＝AP＝$2\sqrt{2}$ cm だから
BD＝$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=2\sqrt{6}$ cm
AD // BC より DQ:BQ＝AD:PB＝3:1
よって DQ＝$\dfrac{3}{4}$BD＝$\dfrac{3}{4}\times 2\sqrt{6}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ cm
四角形 QFHD は台形だから
その面積は$\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}+2\sqrt{6}\right)\times 6\div 2=\dfrac{21\sqrt{6}}{2}$ cm^2
問3
R から BD に垂線をひき交点を K とする。
△RBK∽△DBC だから
RK:DC＝RB:DB
RK:$2\sqrt{2}=\left(1+\dfrac{3}{2}\right):2\sqrt{6}$
$2\sqrt{6}$ RK＝$5\sqrt{2}$
RK＝$\dfrac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ cm
よって求める四角すい RQFHD の体積は$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{21\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{6}=\dfrac{35\sqrt{2}}{4}$ cm^3

【問 29】

下の図1のように，AB＝3 cm，BC＝5 cm，BE＝12 cm，∠BAC＝90° で，側面がすべて長方形の三角柱がある。この三角柱の頂点 B から辺 AD，辺 CF を通って頂点 E まで，もっとも短くなるようにひもをかける。このひもが，辺 AD，CF と交わる点をそれぞれ P，Q とする。

また，下の図2は，この三角柱の展開図を方眼紙にかいたもので，各頂点の記号は，A のみを書き入れている。ただし，この方眼紙の 1 マスは，1 辺の長さが 1 cm の正方形とする。

図１

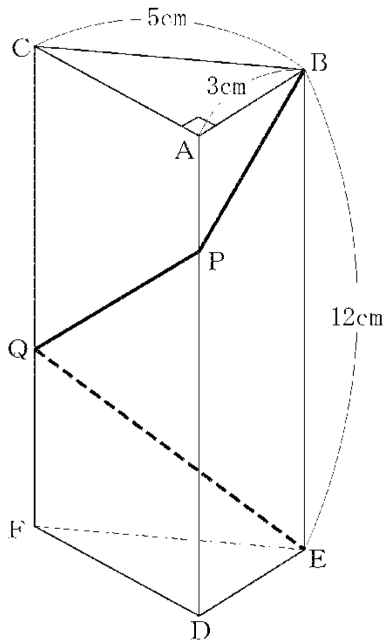
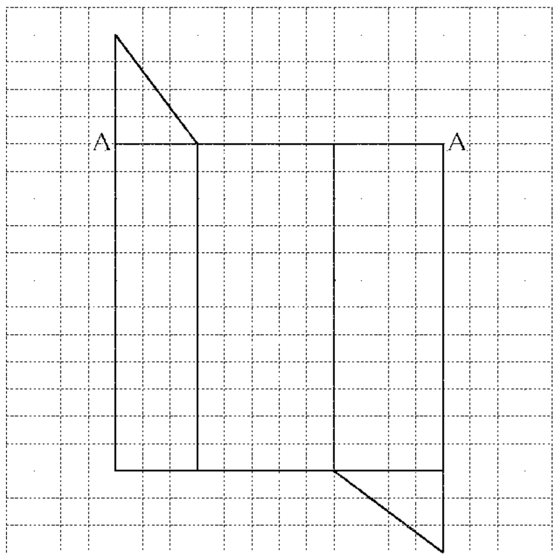


図２



次の問1～問3に答えなさい。

（大分県　2013 年度）

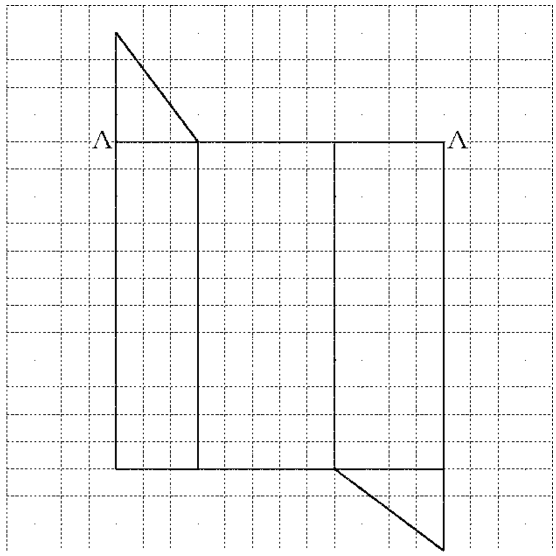
問1　三角柱の体積を求めなさい。

問2　三角柱にかけたひもを，図2の展開図に実線 ━━ で記入しなさい。頂点の記号は書き入れなくてもよい。

また，このときの PQ の長さを求めなさい。

問3　三角すい BEQP の体積を求めなさい。

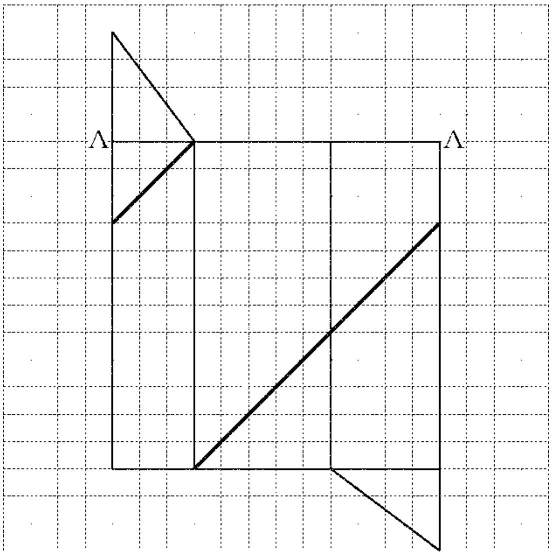
解答欄

問1	cm^3
問2	
	PQ＝　　　　　　cm
問3	cm^3

解答

問1　72cm^3

問2



$\text{PQ}=4\sqrt{2}$ cm

問3　24cm^3

解説

問1

△ABC において

三平方の定理より $\text{AC}=\sqrt{5^2-3^2}=4\text{cm}$

三角柱の体積は $\triangle\text{ABC}\times\text{BE}=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times12=72\text{cm}^3$

問2

展開図に点 A 以外の点も入れると考えやすい。

PQ は 1 辺が 4 cm の正方形の対角線になるので $4\sqrt{2}$ cm

問3

三角すい BEQP において

△BPE を底面とすると高さは CA と一致するから

求める体積は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times12\times3\times4=24\text{cm}^3$

【問 30】

次のような本立てがある。図1は，この本立てを参考にしてつくった，四角柱の形をした容器である。

AB＝5 cm，BC＝4 cm，CD＝3 cm，AE＝2 cm，AB // DC，AB⊥BC，AB⊥BF とするとき，下の問1～問4に答えなさい。

ただし，円周率はπとし，容器の厚さや変形は考えないものとする。

（宮崎県　2013 年度）

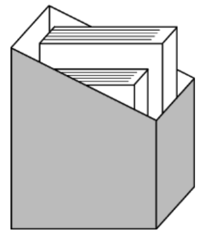


図１

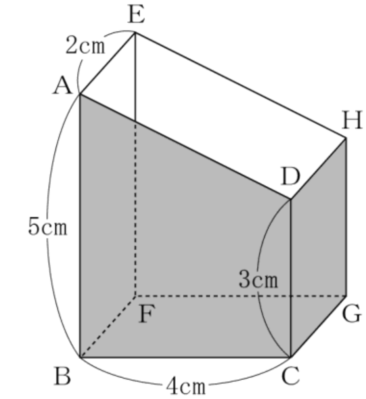


図２

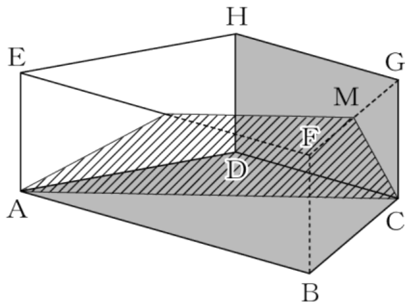
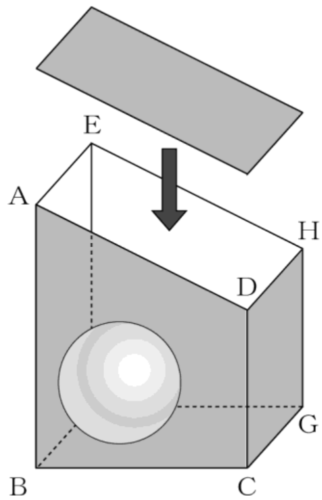


図３



問1　図1において，辺 AD の長さを求めなさい。

問2　図1において，頂点 B から頂点 F まで，辺 AD と辺 EH に交わるように，ひもをかける。ひもの長さが最も短くなるとき，その長さを求めなさい。

ただし，ひもはゆるまないようにかけ，ひもの太さは考えないものとする。

問3　図1の辺 FG の中点を M とする。この容器に水を入れ，容器を傾けて点 A から静かに水をこぼす。

図2は，水面が点 A，C，M を通る状態になったものである。

このとき，容器に入っている水の体積を求めなさい。

問4　図3のように，図1の容器の中に半径 1 cm の球を入れ，長方形のふたをする。この長方形の 4 つの頂点は，容器の点 A，D，H，E にぴったり重なるものとする。

この容器の中で球が自由に動くことのできる部分を立体とみたとき，その立体の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm^3
問4	cm^3

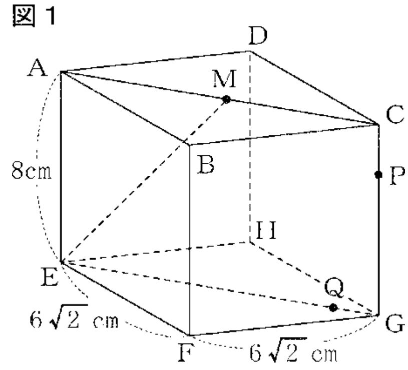
解答
問1　$2\sqrt{5}$ cm
問2　$2+4\sqrt{5}$ cm
問3　$\dfrac{35}{3}$ cm^3
問4　$12-2\sqrt{5}+\dfrac{16}{3}\pi$　cm^3
解説
問1
D から AB に垂線をひき交点を K とすると AK＝5－3＝2cm，DK＝4 cm より
△ADK において
三平方の定理から AD＝$\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ cm
問2
ひもの長さがもっとも短くなるのは四角形 ADHE の辺 AD と辺 EH で切り離さない展開図において
B と F を結んだ線が直線になるときである。
このときひもを表す直線 BF と AD，EH の交点をそれぞれ P，Q とすると
AE // BF より AP⊥BF，EQ⊥BF となる。
△BCD において
三平方の定理より BD＝$\sqrt{3^2+4^2}=5$ cm
よって△ABD は BA＝BD の二等辺三角形である。
これより BP＝$\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ cm
FQ＝BP＝$2\sqrt{5}$ cm だから
求める長さは BP＋PQ＋FQ＝$2\sqrt{5}+2+2\sqrt{5}=2+4\sqrt{5}$ cm
問3
水面と EF との交点を N とし AN，BO，CM の延長線の交点を O とする。
△OBC において FM//BC より OF：OB＝FM：BC＝2：4＝1：2
よって OF：FB＝1：1　OF＝FB＝2 cm
立体 O－NFM と立体 O－ABC は相似で
その相似比は 1：2 より体積比は $1^3:2^3=1:8$
立体 O－ABC の体積は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times5\times(2+2)=\dfrac{40}{3}$ cm^3 だから
立体 O－NFM の体積は $\dfrac{40}{3}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{3}$ cm^3
よって求める体積は $\dfrac{40}{3}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{35}{3}$ cm^3
問4
台形 ABCD の各辺から 1 cm 内側に辺をひき∠WZY＝∠DAB となるように台形 XYZW をとる。
また W から XY に垂線をひき交点を S とする。
△WXS∽△DAK で，YZ＝4－2＝2 cm より WX：$2\sqrt{5}$＝2：4　WX＝$\sqrt{5}$ cm
接線の長さが等しいことを利用して DC－WZ－1＝x cm，AB－XY－1＝y cm とすると
AD＝$x+y+\sqrt{5}$ cm
AD＝$2\sqrt{5}$ cm だから $x+y=\sqrt{5}$ cm
求める立体は底面を台形 XYZW とし高さを 2 cm とする四角柱と
半径 1 cm の球と底面が半径 1 cm の半円で高さがそれぞれ XY，YZ，ZW，WX とする 4 つの柱の和となる。
底面が半径 1 cm の半円で高さがそれぞれ XY，YZ，ZW，WX とする 4 つの柱の高さの和は
$5+4+3+2\sqrt{5}-2(x+y)-1\times4=8$ cm だから
求める体積は$(3+5-\sqrt{5}-2)\times2\times\dfrac{1}{2}\times2+\dfrac{4}{3}\times\pi\times1^3+\pi\times1^2\times\dfrac{1}{2}\times8$
$=12-2\sqrt{5}+\dfrac{4}{3}\pi+4\pi=12-2\sqrt{5}+\dfrac{16}{3}\pi$　cm^3

【問 31】

図1の直方体は，高さが 8 cm で，底面は 1 辺の長さが $6\sqrt{2}$ cm の正方形である。また，点 M は線分 AC の中点であり，辺 CG 上に CP＝2 cm となる点 P，線分 GE 上に GQ＝2 cm となる点 Q をとる。このとき，次の各問いに答えなさい。

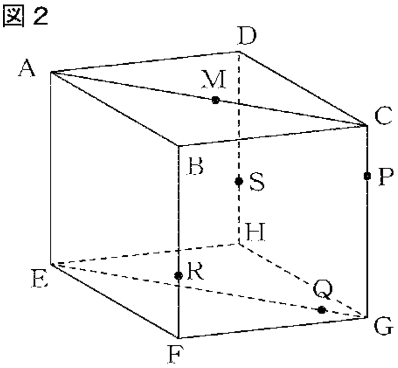
（沖縄県　2013 年度）

図 1



問1　線分 EM の長さを求めなさい。

図 2



問2　線分 MQ と線分 EP の交点を T とするとき，線分 MT の長さを求めなさい。

問3　図2は，図1において，辺 BF 上に FR＝3 cm となる点 R，辺 DH 上に HS＝3 cm となる点 S をとったものである。このとき，四角すい MERPS の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm^3

解答
問1　10cm
問2　$2\sqrt{5}$ cm
問3　120cm^3
解説
問1
△ABCは等しい辺が$6\sqrt{2}$ cmの直角二等辺三角形だから
AC＝$6\sqrt{2}\times\sqrt{2}$＝12cm
AM＝12÷2＝6cm
△AEMにおいて
∠EAM＝90°　だからEM＝$\sqrt{6^2+8^2}$＝10cm
問2
MからEGに垂線をひき交点をJとすると
△MJQにおいてMJ＝8 cm，JQ＝4 cmだから
三平方の定理よりMQ＝$\sqrt{8^2+4^2}$＝$4\sqrt{5}$ cm
またACとEPを延長し交点をIとする。
CP // AEより
CP：AE＝IC：IA
IC＝x cmとすると
2：8＝x：(x＋12)
$2x$＋24＝$8x$
$6x$＝24
x＝4cm
AI // EGより
MT：TQ＝MI：EQ＝(4＋6)：(12－2)＝10：10＝1：1
よってMT＝$\frac{1}{2}$MQ＝$\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}$＝$2\sqrt{5}$ cm
問3
四角すいMERPSは三角すいP－MSRと三角すいEMSRを合わせたものと考える。
△MSR＝$\frac{1}{2}$×12×(8－3)＝30cm^{2}で
三角すいP－MSRと三角すいEMSRの高さは6 cmだから
求める体積は2×$\frac{1}{3}$×30×6＝120cm^3