

4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2013 年度出題】

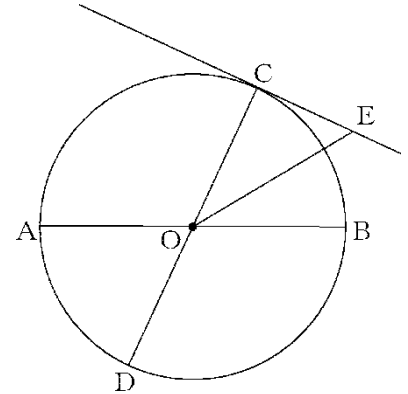
【問 1】

図のように、線分 AB を直径とする円 O の円周上に、点 C をとります。円 O と、 CO の延長との交点を D とし、点 C を通る円 O の接線と $\angle BOC$ の二等分線との交点を E とします。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2013 年度)

問1 $OB=4\text{ cm}$, $\angle BOD=120^\circ$ のとき, 線分 BD の長さを求めなさい。



問2 $\triangle ABC \sim \triangle OEC$ を証明しなさい。

解答欄

問1	〔計 算〕 答 cm
問2	〔証 明〕

解答

問1

〔計算〕

点 O から線分 BD に垂線をひき

線分 BD との交点を F とすると

△OFB において

$\angle BOF = 60^\circ$, $\angle OFB = 90^\circ$, $OB = 4$ である。

$OB:BF = 2:\sqrt{3}$ より $4:BF = 2:\sqrt{3}$

$BF = 2\sqrt{3}$

よって $BD = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

答 $4\sqrt{3}$ cm

問2

△ABC と △OEC において

$\angle ACB = 90^\circ$ (円周角)

円の接線は, 接点を通る半径に垂直なので

$\angle OCE = 90^\circ$

$\angle ACB = \angle OCE \cdots \text{①}$

$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ (円周角の定理) $\cdots \text{②}$

$\angle EOC = \angle EOB$ なので

$\angle EOC = \frac{1}{2} \angle BOC \cdots \text{③}$

②, ③から $\angle BAC = \angle EOC \cdots \text{④}$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \sim \triangle OEC$

解説

問1

△OBD は $OB = OD = 4$ cm, $\angle BOD = 120^\circ$ の二等辺三角形だから

O から BD に垂線をひき交点を H とすると

△OBH は $\angle OHB = 90^\circ$

$\angle BOH = 60^\circ$

の直角三角形となる。

よって $BO:OH:BH = 2:\sqrt{3}:2$ $4:OH = 2:\sqrt{3}$ $2BH = 4\sqrt{3}$ $BH = 2\sqrt{3}$ cm

よって, $BD = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm

問2

△ABC と △OEC において

AB は円 O の直径より

円周角の定理から $\angle ACB = 90^\circ$

また円の接線 CE は, 接点 C を通る半径 OC に垂直なので $\angle OCE = 90^\circ$

よって $\angle ACB = \angle OCE \cdots \text{①}$

また円周角の定理より $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

また OE は $\angle BOC$ の二等分線より

$\angle EOC = \frac{1}{2} \angle BOC$

よって $\angle BAC = \angle EOC \cdots \text{②}$

①, ②より

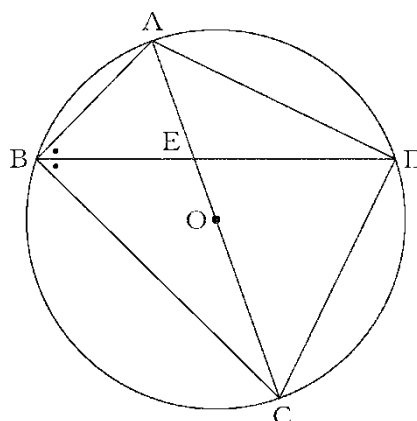
2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \sim \triangle OEC$

【問 2】

図で、AC を直径とする円 O の円周上に点 B, D があり、 $AC=12\text{ cm}$ 、 $\angle ABD=\angle CBD$ である。また、点 E は AC と BD との交点であり、 $OE=2\text{ cm}$ である。次の(1)～(3)に答えなさい。

(青森県 2013 年度 前期)



(1) $\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ が相似になることを証明しなさい。

(2) 点 A をふくまない $\widehat{CD}$ の長さを求めなさい。

(3) BE の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔証明〕
(2)	cm
(3)	cm

解答

(1)

$\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ において

対頂角の性質より

$$\angle AEB = \angle DEC \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{BC}$ に対する円周角だから

$$\angle BAE = \angle CDE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$

$$(2) \quad 3\pi \text{ cm}$$

$$(3) \quad \frac{8\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ において

2組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

(2)

AC は直径だから円周角の定理より $\angle ADC = 90^\circ$

また $\angle CAD = \angle CBD$, $\angle ACD = \angle ABD$, $\angle ABD = \angle CBD$ より, $\angle CAD = \angle ACD$

したがって $\triangle DAC$ は $DA = DC$ の直角二等辺三角形だから

$$\angle DAC = 45^\circ, \angle DOC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

この円の半径は $12 \div 2 = 6 \text{ cm}$ だから

$$\text{弧 } CD \text{ の長さは, } 2\pi \times 6 \times \frac{90}{360} = 3\pi \text{ cm}$$

(3)

$\triangle ODE$ において

$$\angle DOE = 90^\circ \text{ だから三平方の定理より } DE = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$ より

$$BE : CE = AE : DE \quad BE : 8 = 4 : 2\sqrt{10}$$

$$2\sqrt{10} BE = 32$$

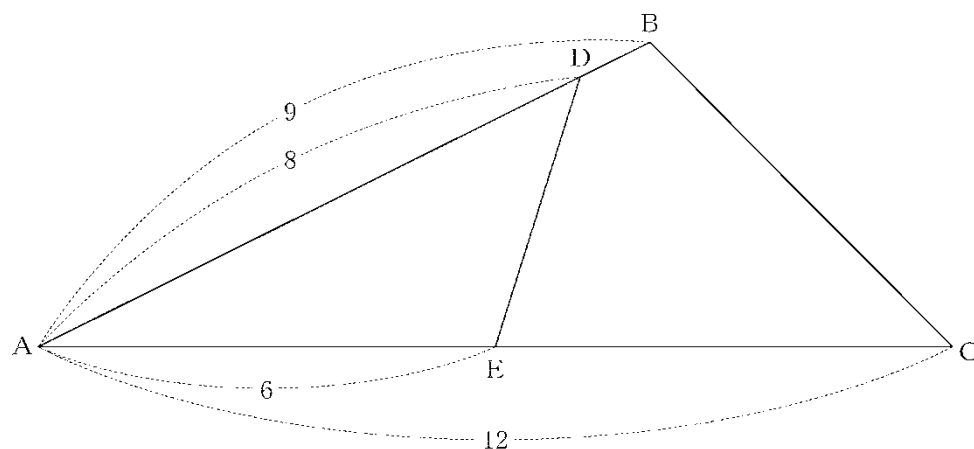
$$BE = \frac{8\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

【問 3】

次の図のように、 $AB=9$, $AC=12$ の $\triangle ABC$ があります。点 D が辺 AB 上に、点 E が辺 AC 上にあり、 $AD=8$, $AE=6$ となっています。

このとき、 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ であることを証明しなさい。

(岩手県 2013 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle AED$ において

$$AB:AE=9:6=3:2$$

$$AC:AD=12:8=3:2$$

したがって

$$AB:AE=AC:AD \cdots \text{①}$$

$\angle A$ は共通 $\cdots \text{②}$

①, ②より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle AED$$

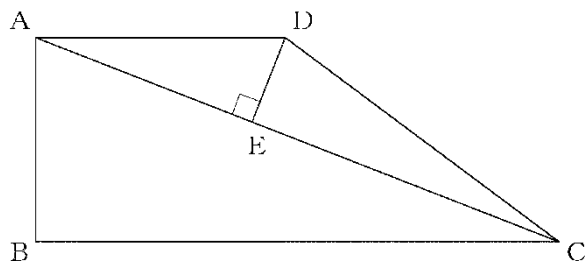
解説

$\triangle ABC$ と $\triangle AED$ において 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいことを示す。

【問 4】

図1のような、 $AD \parallel BC$ 、 $\angle ABC = 90^\circ$ の台形 ABCD があります。また、点 D から対角線 AC に垂線をひき、対角線 AC との交点を E とします。

図 1



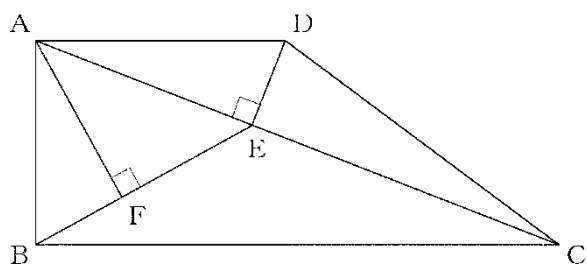
次の問1, 問2に答えなさい。

(宮城県 2013 年度 前期)

問1 $\triangle ABC \sim \triangle DEA$ であることを証明しなさい。

問2 図2は、図1において、点 B と点 E を結んだものです。また、点 A から線分 BE に垂線をひき、線分 BE との交点を F とします。

図 2



$AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 9 \text{ cm}$, $DA = 4 \text{ cm}$ のとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 AE と線分 EC の長さの比を求めなさい。

(2) 線分 EF の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	$AE:EC = \quad : \quad$
	(2)	$\quad \text{cm}$

解答

問1

〔証明〕

△ABC と△DEA において

条件により

$$\angle ABC = \angle DEA = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

AD // BC より

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ACB = \angle DAE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

△ABC ∽ △DEA

問2

$$(1) \quad AE:EC = 2:3$$

$$(2) \quad \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

解説

問1

△ABC と△DEA において

仮定より

$$\angle ABC = \angle DEA = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

AD//BC より平行線の錯角は等しいので

$$\angle ACB = \angle DAE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

△ABC ∽ △DEA

問2

(1)

$$\triangle ABC \text{ で三平方の定理より } AC = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10} \text{ cm}$$

△ABC ∽ △DEA より

$$CB:AE = AC:DA$$

$$9:AE = 3\sqrt{10}:4$$

$$3\sqrt{10} \cdot AE = 36$$

$$AE = \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

$$EC = 3\sqrt{10} - \frac{6\sqrt{10}}{5} = \frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって } AE:EC = \frac{6\sqrt{10}}{5} : \frac{9\sqrt{10}}{5} = 2:3$$

(2)

E から AB に垂線をひき交点を H とすると

$$HE//BC \text{ だから } AH:HB = AE:EC = 2:3 \text{ より } BH = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5} \text{ cm}$$

$$HE:BC = 2:5 \text{ より } EH:9 = 2:5 \quad EH = \frac{18}{5} \text{ cm}$$

$$\triangle EBH \text{ において三平方の定理より } BE = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \frac{9\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$EF = x \text{ cm とすると } AB^2 - BF^2 = AE^2 - EF^2$$

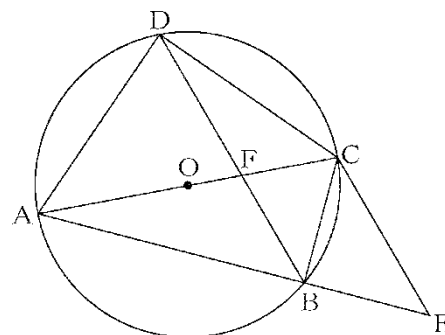
$$3^2 - \left(\frac{9\sqrt{5}}{5} - x\right)^2 = \left(\frac{6\sqrt{10}}{5}\right)^2 - x^2$$

$$\text{これを解いて } x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

【問 5】

右の図のように、円 O の周上に点 A, B, C, D があり、線分 AC は円 O の直径で、 $AB=12\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$ である。点 E は線分 AB を B の方向に延長した直線上の点で、 $BE=6\text{ cm}$ である。線分 CE と線分 DB は平行で、線分 DB と線分 AC の交点を F とする。

(秋田県 2013 年度)



(1) $\triangle ABF \sim \triangle DCF$ となることを証明しなさい。

(2) 線分 DF の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔証明〕
(2)	cm

解答

(1)

[証明]

$\triangle ABF$ と $\triangle DCF$ において

弧 BC の円周角は等しいから

$$\angle BAF = \angle CDF \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから

$$\angle AFB = \angle DFC \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \sim \triangle DCF$$

$$(2) \quad 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle ABF$ と $\triangle DCF$ において

円周角の定理や対頂角が等しいことから

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

(2)

AC は直径より

$$\text{円周角の定理から } \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\triangle ABC \text{ において三平方の定理より } AC = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

$\triangle AEC$ において

$BF \parallel EC$ より

$$AF:FC = AB:BE = 12:6 = 2:1$$

$$\text{よって } AF = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$FC = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\triangle BEC \text{ は } \angle CBE = 90^\circ, BC = BE = 6 \text{ cm の直角二等辺三角形だから } CE = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle AEC$ において

$BF \parallel EC$ だから

$$BF:EC = AB:AE$$

$$BF:6\sqrt{2} = 2:3$$

$$BF = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle ABF \sim \triangle DCF$ より

$$AF:DF = BF:CF$$

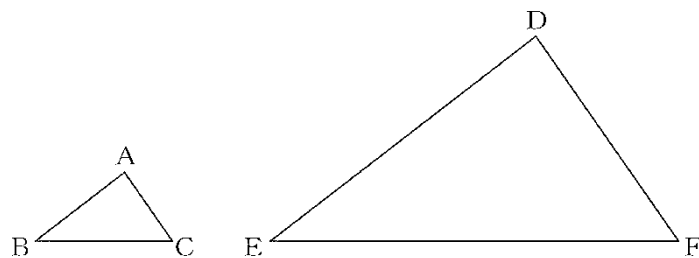
$$4\sqrt{5}:DF = 4\sqrt{2}:2\sqrt{5}$$

$$DF = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

【問 6】

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似であり、その相似比は $1:3$ である。このとき、 $\triangle DEF$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍か。

(栃木県 2013 年度)



解答欄

倍

解答

9 倍

解説

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で

相似比が $1:3$ より

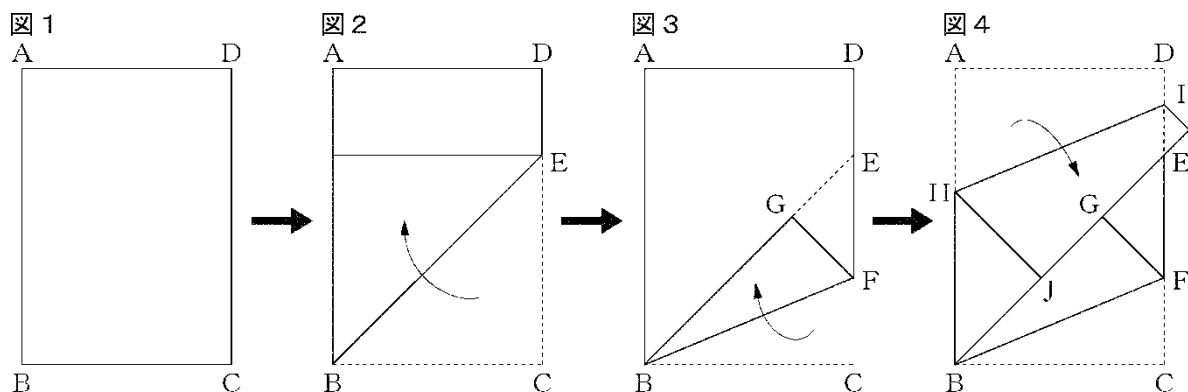
面積比は $1^2:3^2=1:9$

よって $\triangle DEF$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の 9 倍

【問 7】

下の図1のような、縦と横の長さの比が $\sqrt{2}:1$ の長方形 ABCD を、次の①～③のように折ります。

- ① 図2のように、辺 BC が辺 BA と重なるように折ったとき、折り目の線を BE とし、もとに戻します。
- ② 図3のように、線分 CE 上の点 F を通る線分 BF を折り目として点 C が線分 BE 上に重なるように折り、点 C の移った点を G とします。
- ③ 図4のように、辺 AB 上の点 H、線分 DE 上の点 I を通る線分 HI を折り目として、辺 AD が線分 BE に重なるように折り、点 A の移った点を J とします。



このとき、次の各問に答えなさい。

なお、考えるときに、別紙を点線にそって半分に切り取って利用してもさしつかえありません。切り取った用紙の辺の比は、 $\sqrt{2}:1$ です。

(埼玉県 2013 年度)

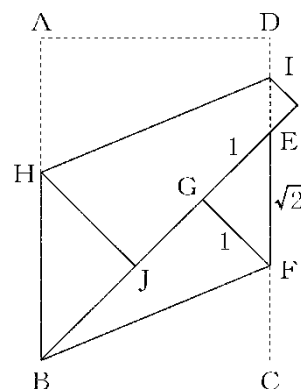
問1 $\triangle BJH$ と $\triangle EGF$ が相似であることを証明しなさい。

問2 $AD=5\text{ cm}$ のとき、線分 EF の長さを求めます。途中の説明も書いて答えを求めなさい。

その際、解答用紙の図に数や記号をかいて、それを用いて説明してもよいものとします。

問3 $\triangle BJH$ の面積が 2 cm^2 のとき、長方形 ABCD の面積を求めなさい。

問1	〔証明〕
問2	答え EF= cm
問3	cm^2

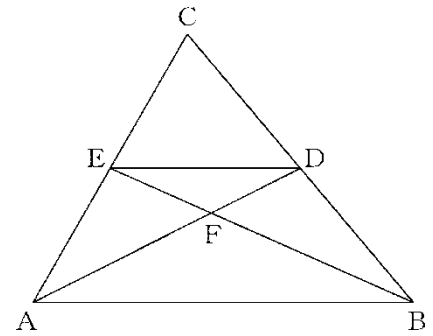
$$(2+2\sqrt{2})(\sqrt{2}+2)=2\sqrt{2}+4+4+4\sqrt{2}=8+6\sqrt{2} \text{ cm}^2$$


【問 8】

右の図のような三角形 ABC があり, 辺 BC の中点を D, 辺 AC の中点を E とする。また, 線分 AD と線分 BE との交点を F とする。

このとき, 三角形 ABF と三角形 DEF が相似であることを証明しなさい。

(神奈川県 2013 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle DEF$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AFB = \angle DFE \cdots ①$$

$\triangle ABC$ において

点 D は辺 BC の中点

点 E は辺 AC の中点であるから

中点連結定理より $AB \parallel ED \cdots ②$

②より平行線の錯角は等しいから $\angle ABE = \angle DEB$

よって $\angle ABF = \angle DEF \cdots ③$

①, ③より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\angle ABF \sim \triangle DEF$$

解説

$\triangle ABF$ と $\triangle DEF$ において

対頂角は等しいから $\angle AFB = \angle DFE \cdots ①$

$\triangle ABC$ において $CE = EA$, $CD = DB$ だから中点連結定理より $AB \parallel ED \cdots ②$

②より平行線の錯角は等しいので $\angle ABF = \angle DEB$

よって $\angle ABF = \angle DEF \cdots ③$

①, ③より

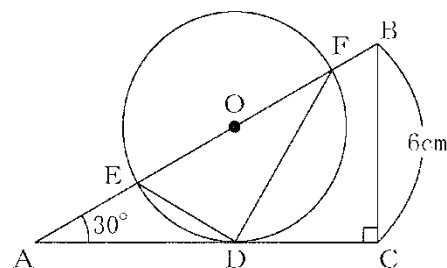
2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \sim \triangle DEF$$

【問 9】

右の図のように、 $\angle BAC=30^\circ$ 、 $\angle ACB=90^\circ$ 、 $BC=6\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ がある。辺 AB 上に点 O をとり、点 O を中心とする円が、辺 AC と点 D で接している。また、円 O と辺 AB の交点を、 A に近い方から順に E 、 F とする。このとき、 $\triangle ABC \sim \triangle FED$ であることを証明しなさい。

(新潟県 2013 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle FED$ において

仮定より $\angle ACB=90^\circ$ …①

直径 EF に対する円周角より $\angle FDE=90^\circ$ …②

①, ②より $\angle ACB = \angle FDE$ …③

また $\angle ABC=60^\circ$ …④

$OD \parallel BC$ より $\angle EOD=60^\circ$ だから $\triangle OED$ は正三角形

よって $\angle FED=60^\circ$ …⑤

④, ⑤より $\angle ABC = \angle FED$ …⑥

③, ⑥より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \sim \triangle FED$

解説

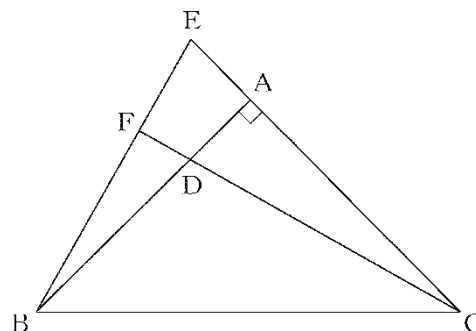
$\triangle ABC$ と $\triangle FED$ において

円周角の定理や円の接線の性質などを利用して

2 組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

【問 10】

右の図のように、 $AB=AC=3\text{ cm}$ 、 $\angle BAC=90^\circ$ の直角二等辺三角形があり、辺 AB 上に $AD=1\text{ cm}$ となる点 D を、辺 CA の延長上に $AE=1\text{ cm}$ となる点 E をとる。また、 CD の延長と BE との交点を F とする。



このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(石川県 2013 年度)

問1 BE の長さを求めなさい。

問2 $\triangle BDF \sim \triangle CDA$ である。このことを証明しなさい。

問3 $\triangle BDF$ の面積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

解答欄

問1	cm
問2	〔証明〕
問3	〔計算〕
	答 cm ²

解答

問1 $\sqrt{10}$ cm

問2

〔証明〕

$\triangle EAB$ と $\triangle DAC$ について

仮定より

$$AB=AC\cdots\textcircled{1}$$

$$AE=AD\cdots\textcircled{2}$$

$$\angle EAB=\angle DAC=90^\circ \cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle EAB\equiv\triangle DAC$$

$$\text{これより}\angle EBA=\angle DCA\cdots\textcircled{4}$$

$\triangle BDF$ と $\triangle CDA$ について

$$\textcircled{4}\text{より}\angle DBF=\angle DCA\cdots\textcircled{5}$$

$$\text{対頂角は等しいので}\angle BDF=\angle CDA\cdots\textcircled{6}$$

⑤, ⑥より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BDF\sim\triangle CDA$$

問3

〔計算〕

$$BD=2, DC=\sqrt{10}$$

$\triangle BDF\sim\triangle CDA$ より

$$\triangle BDF:\triangle CDA=4:10$$

$$\text{よって}\triangle BDF=\frac{2}{5}\times\triangle CDA=\frac{3}{5}$$

$$\text{答 } \frac{3}{5}\text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle ABE$ で

$$\angle BAE=90^\circ \text{ より三平方の定理を利用して } BE=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}\text{ cm}$$

問2

$\triangle CDA$ と $\triangle BEA$ は2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので合同である。

これを利用して $\triangle BDF$ と $\triangle CDA$ において2組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

問3

$$CD=BE=\sqrt{10}\text{ cm}, BD=3-1=2\text{ cm}$$

$$\triangle CDA=\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}\text{ cm}^2$$

$\triangle BDF$ と $\triangle CDA$ は相似で

$$\text{その相似比は } BD:CD=2:\sqrt{10} \text{ より}$$

$$\text{面積比は } 2^2:(\sqrt{10})^2=4:10=2:5$$

$$\text{よって}\triangle BDF=\frac{2}{5}\triangle CDA=\frac{2}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{5}\text{ cm}^2$$

【問 11】

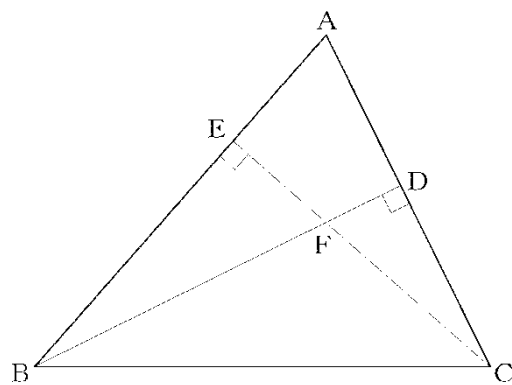
図のように、3つの内角がすべて鋭角である $\triangle ABC$ において、頂点 B, C から辺 AC, AB に垂線をひき、その交点をそれぞれ D, E とする。また、 BD と CE の交点を F とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(山梨県 2013 年度)

問1 点 B, C, D, E は 1 つの円周上にある。この 4 点を通る円の中心 O はどこにあるか簡潔に書きなさい。

ただし、中心 O の位置が 1 点に決まるように書くこと。



問2 $\triangle AEC \sim \triangle FEB$ となることを証明しなさい。

解答欄

問1	
問2	〔証明〕

解答

問1

中心 O は辺 BC の中点にある。

問2

〔証明〕

$\triangle AEC$ と $\triangle FEB$ において

$CE \perp AB$ であるから

$$\angle AEC = \angle FEB = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 D, E は直線 BC について同じ側にあり

$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$ であるから 4 点 B, C, D, E は同一の円周上にある。

同一の弧に対する円周角の大きさは一定であるから

$$\angle ACE = \angle FBE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AEC \sim \triangle FEB$$

解説

問1

$$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ \quad \text{より}$$

円周角の定理の逆から 4 点 B, E, D, C は同一円周上にあり

BC はこの円の直径となる。

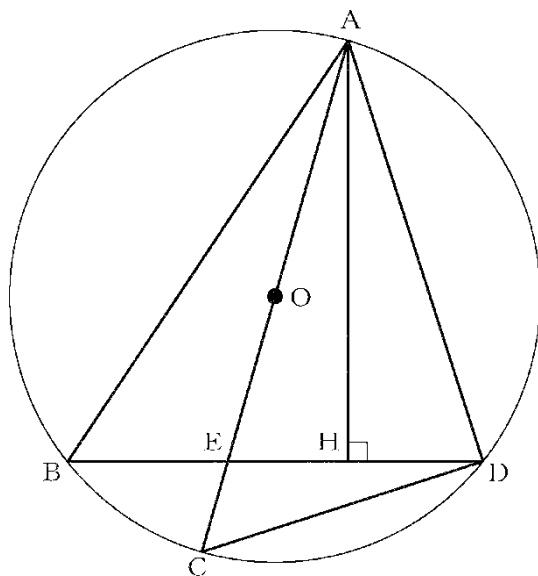
したがって円の中心 O は辺 BC の中点である。

問2

問1より円 O について円周角の定理から角が等しいことがいえる。

【問 12】

下の図で、4 点 A, B, C, D は円 O の周上にあり、AC は円 O の直径で、AH は $\triangle ABD$ の頂点 A から辺 BD にひいた垂線である。また、直径 AC と BD との交点を E とする。



次の問1, 問2に答えなさい。

(岐阜県 2013 年度)

問1 $\triangle ABH \sim \triangle ACD$ であることを証明しなさい。

問2 AC=10 cm, CD=6 cm, $\angle EAH = \angle DAH$ のとき,

(1) AD の長さを求めなさい。

(2) BE の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABH$ と $\triangle ACD$ で

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$$\angle ABH = \angle ACD \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{仮定から } \angle AHB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

半円の弧に対する円周角だから

$$\angle ADC = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle AHB = \angle ADC \cdots \textcircled{4}$$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABH \sim \triangle ACD$$

問2

$$(1) \ 8\text{cm}$$

$$(2) \ \sqrt{10} \text{ cm}$$

解説

問1

$\triangle ABH$ と $\triangle ACD$ において

円周角の定理を使って2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問2

(1)

$\triangle ACD$ において

AC が直径より $\angle ADC = 90^\circ$ だから

$$AD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{cm}$$

(2)

$\triangle AED$ において

$AH \perp ED$, $\angle EAH = \angle DAH$ より $AE = AD$ の二等辺三角形となる。

よって $AE = AD = 8\text{cm}$, $EC = 10 - 8 = 2\text{cm}$

$EH = DH = x \text{ cm}$, $BE = y \text{ cm}$ とおくと

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$ より

$$y:2 = AB:6$$

$$AB = 3y$$

$\triangle ABH \sim \triangle ACD$ より

$$(x+y):6 = 3y:10$$

$$10x + 10y = 18y$$

$$x = \frac{4}{5}y$$

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$ より

$$8:2x = y:2$$

$$8:\left(2 \times \frac{4}{5}y\right) = y:2$$

$$\frac{8}{5}y^2 = 16$$

$$y^2 = 10$$

$y > 0$ より

$$y = \sqrt{10} \text{ cm}$$

【問 13】

図 10 において、3 点 A, B, C は円 O の円周上の点であり、BC は円 O の直径である。中心 O を通り、AC に垂直な直線と円 O との 2 つの交点をそれぞれ D, E とする。また、AC と BE, DE との交点をそれぞれ F, G とする。

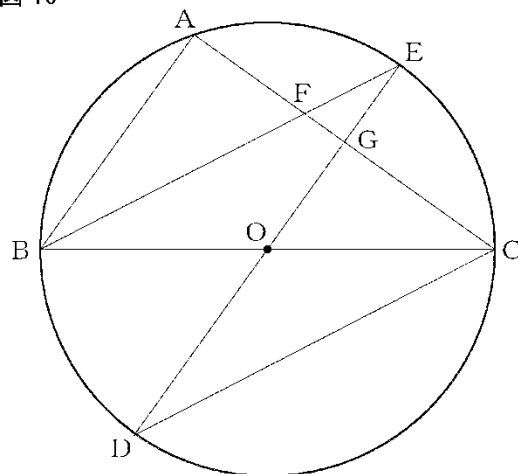
このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(静岡県 2013 年度)

問1 $\triangle ABF \sim \triangle GDC$ であることを証明しなさい。

問2 円 O の半径が 5 cm, $AB=6$ cm のとき、BF の長さを求めなさい。

図 10



解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答

問1

〔証明〕

△ABF と △GDC において

BC は円 O の直径より円周角の定理から $\angle BAF = \angle BAC = 90^\circ$

また仮定より $\angle DGC = 90^\circ$

よって $\angle BAF = \angle DGC \cdots \textcircled{1}$

弧 CE に対する円周角より $\angle CDE = \angle CBE$

また △OBE は $OB = OE$ より $\angle OBE = \angle OEB$

よって $\angle CDE = \angle OEB = \angle DEB$ より

錯角が等しいので $BE \parallel DC$

したがって同位角は等しいので $\angle AFB = \angle GCD \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABF \sim \triangle GDC$

問2 $3\sqrt{5}$ cm

解説

問2

△ABC で

三平方の定理より $AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

また $\angle CGD = \angle CAB = 90^\circ$ より

同位角が等しいので $GO \parallel AB$

よって三角形と比の定理から

$$CG : GA = CO : OB = 1 : 1 \quad GC = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm} \quad OG = \frac{1}{2} BA = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$$

△DCG で

$DG = 5 + 3 = 8$ cm, $CG = 4$ cm より

三平方の定理より $DC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ cm

$\triangle ABF \sim \triangle GDC$ より

$AB : GD = BF : DC$

$$6 : 8 = BF : 4\sqrt{5}$$

$$8BF = 24\sqrt{5}$$

$$BF = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

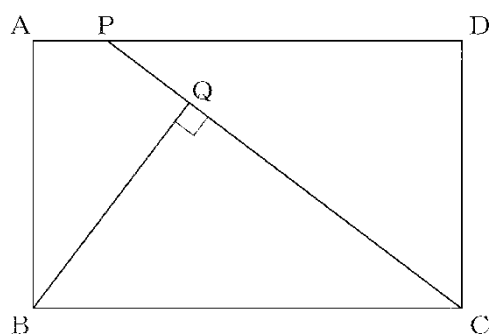
【問 14】

与えられた長方形と面積の等しい正方形をつくることを考える。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(滋賀県 2013 年度)

- (1) 図1のように, 長方形 $ABCD$ の辺 AD 上に点 P をとり, $BQ \perp CP$ となる線分 CP 上の点を Q とする。このとき, $\triangle BCQ \sim \triangle CPD$ を証明しなさい。

図 1



- (2) 図2のように, $BQ = CP$, $BQ \perp CP$ であるとき, 長方形 $ABCD$ をア, イ, ウの 3 つの図形に分けて, それらを並べかえると, 図3のような BQ , CP と同じ長さの線分を 1 辺とする正方形ができる。図3の正方形に線を書き入れ, ア, イ, ウのそれぞれがどこにおさまるか示しなさい。

図 2

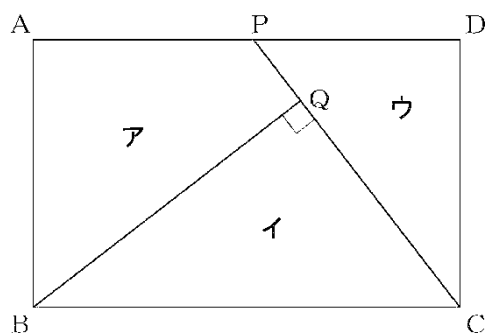
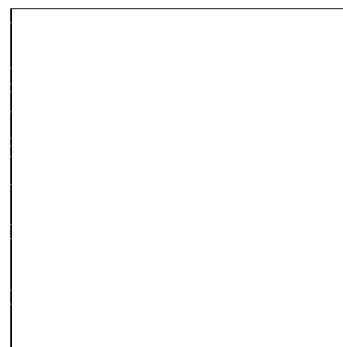


図 3



(1)	〔証明〕
(2)	

解答

(1)

〔証明〕

$\triangle BCQ$ と $\triangle CPD$ で

仮定より

$$\angle BQC = \angle CDP = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

$AD \parallel BC$ より

錯角は等しいので

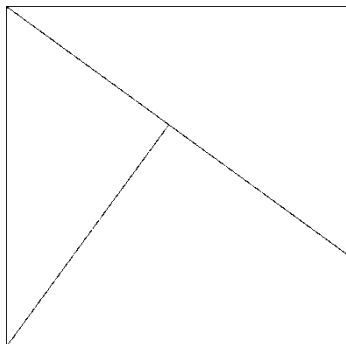
$$\angle BCQ = \angle CPD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BCQ \simeq \triangle CPD$

(2)



解説

(1)

$\triangle BCQ$ と $\triangle CPD$ について

2組の角がそれぞれ等しいことより合同を導く。

(2)

BQ や CP を 1 辺とする正方形ができる。

角の和が 90° になることをヒントにすると考えやすい。

【問 15】

図1, 図2において, $\triangle ABC$ は $AB=AC=3\text{ cm}$, $BC=2\text{ cm}$ の二等辺三角形であり, ℓ は B, C を通る直線である。 $\triangle DEC$ は $DE=DC$, $EC=4\text{ cm}$ の二等辺三角形であり, $\angle DCE=\angle ACB$ である。 D は, 直線 ℓ について A と同じ側にある。辺 AB と辺 EC は, A, B と異なる点で交わっている。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

(大阪府 2013 年度 前期)

問1 図1において, F は辺 AB と辺 EC との交点である。線分 AF の長さを $x\text{ cm}$ とし, $0 < x < 3$ とする。

(1) 線分 FB の長さを x を用いて表しなさい。

(2) $FC=2\text{ cm}$ であるときの x の値を求めなさい。

問2 図2は, $DC \perp \ell$ であるときの状態を示している。

図2において, G は辺 BC の中点であり, H は直線 AG と辺 DE との交点である。 I は, A から辺 DC にひいた垂線と辺 DC との交点である。このとき, 四角形 $AGCI$ は長方形である。 J は, E から ℓ にひいた垂線と ℓ との交点である。

(1) $\triangle EJC \cong \triangle AIC$ であることを証明しなさい。

(2) 線分 JC の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

(3) 線分 HA の長さを求めなさい。

図 1

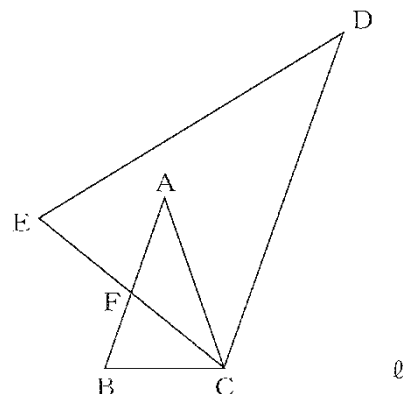
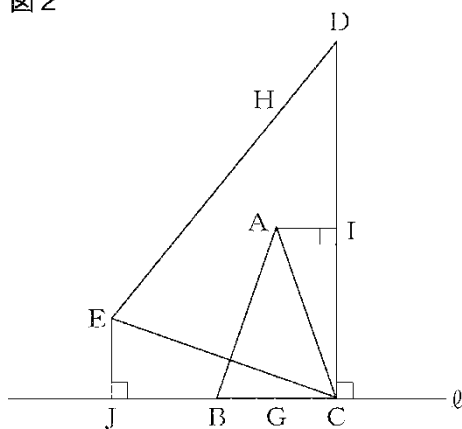
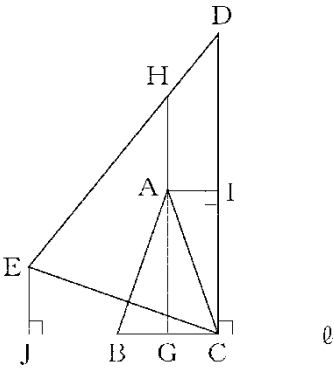


図 2



問1	(1)	cm
	(2)	
問2	(1)	〔証 明〕
	(2)	〔求め方〕  cm
	(3)	cm

解答

問1

(1) $3-x$ cm

(2) $\frac{5}{3}$

問2

(1)

[証明]

$\triangle EJC$ と $\triangle AIC$ において

$$\angle EJC = \angle AIC = 90^\circ \text{ (仮定)} \cdots \textcircled{7}$$

$$\angle ACB = \angle DCE \text{ (仮定)} \cdots \textcircled{7}$$

$$\angle ECJ = \angle ACB - \angle ACE \cdots \textcircled{7}$$

$$\angle ACI = \angle DCE - \angle ACE \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{7}, \textcircled{7} \text{より } \angle ECJ = \angle ACI \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{7} \text{より}$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle EJC \sim \triangle AIC$

(2)

[求め方]

G は辺 BC の中点だから $GC = 1$ cm

四角形 AGCI は長方形だから $AI = GC = 1$ cm

$$\angle AIC = 90^\circ \text{ だから } AC^2 = AI^2 + IC^2$$

$IC = y$ cm とすると

$$3^2 = 1^2 + y^2$$

これを解くと

$$y > 0 \text{ より}$$

$$y = 2\sqrt{2}$$

$\triangle EJC \sim \triangle AIC$ だから

$$JC : IC = EC : AC = 4 : 3$$

$$\text{したがって } JC = \frac{4}{3} IC = \frac{8}{3} \sqrt{2} \text{ cm}$$

(3) $6 - \frac{23}{8} \sqrt{2}$ cm

解説

問1

(1)

$$FB = AB - AF = 3 - x \text{ cm}$$

(2)

FC = 2 cm のとき $\triangle CBF$ は $CB = CF = 2 \text{ cm}$ より $\angle CBF = \angle CFB$ の二等辺三角形である。

$\angle CBF = \angle ABC = \angle ACB$ より $\triangle CBF \sim \triangle ABC$ だから

$$CB : AB = BF : BC$$

$$2 : 3 = (3 - x) : 2$$

$$3(3 - x) = 4$$

$$\text{これを解いて } x = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

問2

(1)

$\triangle EJC$ と $\triangle AIC$ において

2組の角がそれぞれ等しいことより $\triangle EJC \sim \triangle AIC$ を導く。

(2)

$$AI = GC = 2 \div 2 = 1 \text{ cm}$$

$\triangle AIC$ において

$$\text{三平方の定理より } IC = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle EJC \sim \triangle AIC$ より

$$EC : AC = JC : IC$$

$$4 : 3 = JC : 2\sqrt{2}$$

$$3JC = 8\sqrt{2}$$

$$JC = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

(3)

$\triangle EJC \sim \triangle AIC$ より

$$EJ : AI = EC : AC$$

$$EJ : 1 = 4 : 3$$

$$3EJ = 4$$

$$EJ = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

$\triangle DEC$ と $\triangle ABC$ は底角が等しいので相似だから

$$DC : AC = EC : BC$$

$$DC : 3 = 4 : 2$$

$$2DC = 12$$

$$DC = 6 \text{ cm}$$

E から DC に垂線をひき交点を K とする。

$$DK = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3} \text{ cm}$$

EK と HG の交点を L とすると

$\triangle EKD$ において

HL // DK より

$$HL : DK = EL : EK$$

$$HL : \frac{14}{3} = \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - 1 \right) : \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{3} HL = \frac{14}{3} \times \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - 1 \right)$$

$$HL = \frac{14}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{よって } HA = \frac{14}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{8} + \frac{4}{3} - 2\sqrt{2} = 6 - \frac{23\sqrt{2}}{8} \text{ cm}$$

【問 16】

図1, 図2において, 四角形 ABCD は $AB=4\text{ cm}$, $AD=5\text{ cm}$ の長方形である。E は, 辺 BC 上にあって B, C と異なる点である。 $BE=x\text{ cm}$ とし, $0 < x < 5$ とする。A と E とを結ぶ。F は, B から直線 AE にひいた垂線と直線 AE との交点である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

(大阪府 2013 年度 後期)

問1 図1において,

- (1) 解答欄の図は, 図1中の点 B と線分 AE のみを示したものである。B を通り線分 AE に垂直な直線を, 定規とコンパスを使って解答欄の図中に作図しなさい。作図の方法がわかるように, 作図に用いた線は残しておくこと。

- (2) $\triangle ABE \sim \triangle AFB$ であることを証明しなさい。

図 1

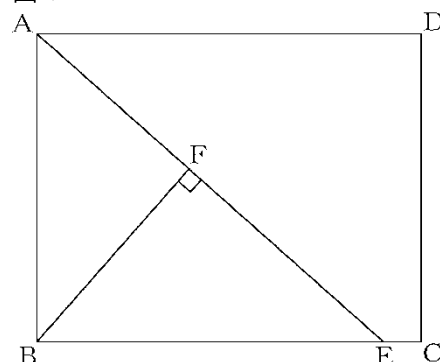
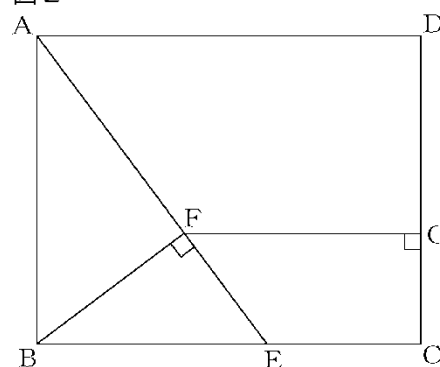
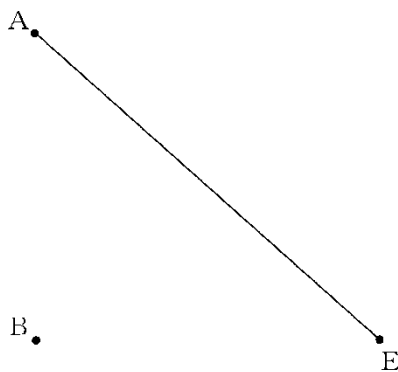
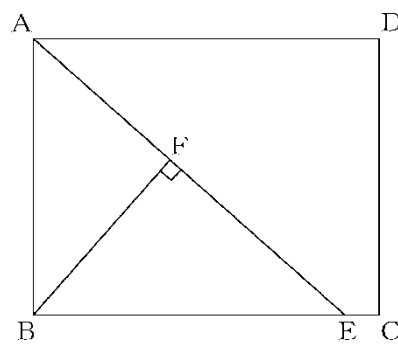


図 2



- (3) $BF=3\text{ cm}$ であるときの x の値を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

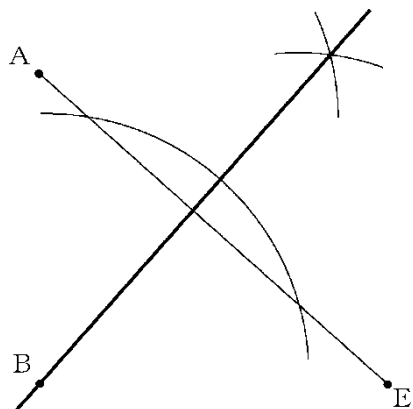
問2 図2は, $x=3$ であるときの状態を示している。図2において, G は, F から辺 DC にひいた垂線と辺 DC との交点である。線分 FG の長さを求めなさい。

問1	(1)		
	(2)	〔証 明〕	
	(3)	〔求め方〕  x の値	
問2	cm		

解答

問1

(1)



(2)

[証明]

$\triangle ABE$ と $\triangle AFB$ において

$\angle BAE = \angle FAB$ (共通) $\cdots \textcircled{7}$

四角形 $ABCD$ は長方形だから $\angle ABE = 90^\circ$

$AE \perp BF$ だから $\angle AFB = 90^\circ$

よって $\angle ABE = \angle AFB = 90^\circ \cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABE \sim \triangle AFB$

(3)

[求め方]

$\angle AFB = 90^\circ$ だから

$$AB^2 = AF^2 + BF^2$$

$AF = y$ cm とすると

$$4^2 = y^2 + 3^2$$

これを解くと

$y > 0$ より

$$y = \sqrt{7}$$

$\triangle ABE \sim \triangle AFB$ だから

$$AB:AF = BE:FB$$

$$\text{よって } 4:\sqrt{7} = x:3$$

$$\text{これを解くと } x = \frac{12}{7}\sqrt{7}$$

$$x \text{ の値 } \frac{12}{7}\sqrt{7}$$

$$\text{問2 } \frac{77}{25} \text{ cm}$$

解説

問1

(1)

Bを中心とする適当な半径の円をかき

AEとの2つの交点をP, Qとする。

P, Qを中心とする等しい半径の円をそれぞれかき交点をRとする。

BRを結ぶ。

(2)

$\triangle ABE$ と $\triangle AFB$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

(3)

$\triangle ABF$ で

$\angle AFB = 90^\circ$ より

三平方の定理から $AF = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ cm

$\triangle ABE \sim \triangle AFB$ より

$AB:AF = BE:FB$

$4:\sqrt{7} = x:3$

$\sqrt{7} x = 12$

$x = \frac{12\sqrt{7}}{7}$ cm

問2

$\triangle ABE$ において

三平方の定理より $AE = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm

$\triangle ABE \sim \triangle BFE$ だから

$BE:FE = AE:BE$

$3:FE = 5:3$

$FE = \frac{9}{5}$ cm

EからADに垂線をひきFG, ADとの交点をそれぞれH, Iとすると

$FH \parallel AI$ より

$FH:AI = EF:EA$

$FH:3 = \frac{9}{5}:5$

$FH = \frac{27}{25}$ cm

よって $FG = \frac{27}{25} + (5 - 3) = \frac{77}{25}$ cm

【問 17】

図1, 図2において, 四角形 $ABCD$ は $AB=5$ cm, $AD=10$ cm の長方形であり, 四角形 $EFGH$ は $EF=4$ cm, $EH=8$ cm の長方形である。E は, 辺 AD 上にあって A, D と異なる点である。C は, 辺 FG 上にあって F, G と異なる点である。辺 CD と辺 EH は交わっている。I は, 辺 CD と辺 EH との交点である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

(大阪府 2013 年度 後期)

問1 図1において,

- (1) 長方形 $ABCD$ の対角線 AC の長さを求めなさい。

図 1

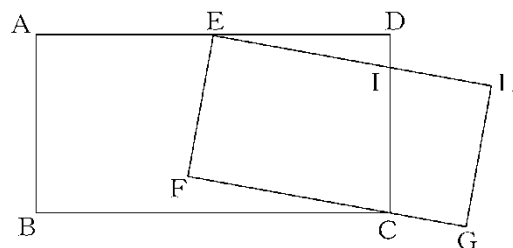
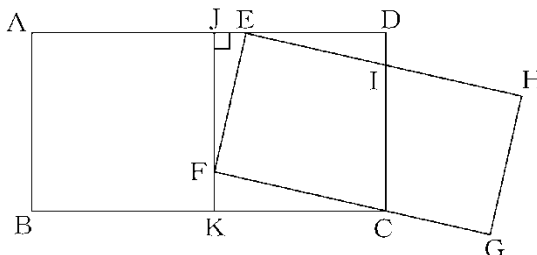


図 2



- (2) 四角形 $ICGH$ の内角 $\angle ICG$ の大きさを α° とするとき, $\triangle EDI$ の内角 $\angle DEI$ の大きさを α を用いて表しなさい。

問2 図2は, $CG=3$ cm であるときの状態を示している。J は F から辺 AD にひいた垂線と辺 AD との交点であり, K は直線 JF と辺 BC との交点である。

- (1) $\triangle JFE \sim \triangle KCF$ であることを証明しなさい。

- (2) 線分 JF の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

- (3) 四角形 $ICGH$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	度
問2	(1)	〔証 明〕
	(2)	〔求め方〕
	(3)	cm ²

解答

問1

(1) $5\sqrt{5}$ cm

(2) $a-90$ 度

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle JFE$ と $\triangle KCF$ において

四角形 $ABKJ$ は長方形だから

$$\angle E J F = \angle F K C = 90^{\circ} \cdots \textcircled{7}$$

四角形 $EFGH$ は長方形だから $\angle EFG = 90^{\circ}$

$$\angle JFE = 180^{\circ} - (\angle EFG + \angle CFK)$$

$$= 90^{\circ} - \angle CFK \cdots \textcircled{8}$$

$$\angle KCF = 180^{\circ} - (\angle FKC + \angle CFK)$$

$$= 90^{\circ} - \angle CFK \cdots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{8}, \textcircled{9} \text{より} \angle JFE = \angle KCF \cdots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{10} \text{より}$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle JFE \sim \triangle KCF$

(2)

〔求め方〕

$CG = 3$ cm だから $FC = 5$ cm

$\triangle JFE \sim \triangle KCF$ だから

$$JF : KC = EF : FC = 4 : 5$$

$$JF = x \text{ cm とすると } KC = \frac{5}{4} JF = \frac{5}{4} x \text{ cm}$$

四角形 $ABKJ$ は長方形だから $JK = AB = 5$ cm

$$\text{よって } FK = JK - JF = 5 - x \text{ cm}$$

$$\angle FKC = 90^{\circ} \text{ より}$$

$$FC^2 = FK^2 + KC^2 \text{ だから}$$

$$5^2 = (5 - x)^2 + \left(\frac{5}{4} x \right)^2$$

これを解くと

$$x > 0 \text{ より}$$

$$x = \frac{160}{41}$$

答 $\frac{160}{41}$ cm

(3) $\frac{69}{5}$ cm²

解説

問1

(1)

三平方の定理を利用して $AC = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ cm

(2)

四角形 EFGH は長方形より EH // FG

よって錯角は等しいので $\angle EIC = \angle ICG = a^\circ$

$\triangle EDI$ において

三角形と内角と外角の関係より

$\angle DEI = \angle EIC - \angle EDI = a - 90^\circ$

問2

(1)

$\triangle JFE$ と $\triangle KCF$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

(2)

$JF = x$ cm とすると $FK = 5 - x$ cm

$\triangle JFE \sim \triangle KCF$ より

$JF : KC = FE : CF$

$x : KC = 4 : 5$

$KC = \frac{5}{4}x$ cm

$\triangle KCF$ において三平方の定理より

$$(5-x)^2 + \left(\frac{5}{4}x\right)^2 = 5^2$$

$$41x^2 - 160x = 0$$

$$x(41x - 160) = 0$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{160}{41} \text{ cm}$$

(3)

$$x = \frac{160}{41} \text{ cm のとき}$$

$$CK = \frac{5}{4} \times \frac{160}{41} = \frac{200}{41} \text{ cm}$$

$$FK = 5 - \frac{160}{41} = \frac{45}{41} \text{ cm}$$

$\triangle KCF \sim \triangle JFE$ より

$$CK : FJ = FK : EJ$$

$$\frac{200}{41} : \frac{160}{41} = \frac{45}{41} : EJ$$

$$EJ = \frac{36}{41} \text{ cm}$$

$$ED = \frac{200}{41} - \frac{36}{41} = \frac{164}{41} \text{ cm}$$

$\triangle FJE \sim \triangle EDI$ だから

$$FJ : ED = FE : EI \quad \frac{160}{41} : \frac{164}{41} = 4 : EI \quad EI = \frac{41}{10} \text{ cm}$$

$$IH = 8 - \frac{41}{10} = \frac{39}{10} \text{ cm}$$

よって四角形 ICGH の面積は $\frac{1}{2} \times \left(3 + \frac{39}{10}\right) \times 4 = \frac{69}{5} \text{ cm}^2$

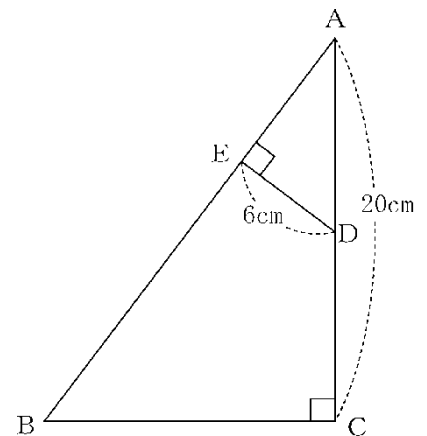
【問 18】

図のように、 $\angle C=90^\circ$ ， $AC=20\text{ cm}$ の直角三角形 ABC がある。 AC の中点 D から AB に垂線 DE をひくと、 $DE=6\text{ cm}$ であった。

次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2013 年度)

問1 3点 A , B , C を通る円を、定規とコンパスを使って解答欄に作図しなさい。ただし、作図に用いた線は残しておくこと。



問2 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ を次のように証明した。 $\boxed{(i)}$ ～ $\boxed{(iii)}$ にあてはまるものを語群ア～カから選んで記号を書き、この証明を完成させなさい。

<証明>

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において、

$\boxed{(i)}$ は共通…①

仮定から、 $\boxed{(ii)} = \angle AED$ …②

①, ②より $\boxed{(iii)}$ から、

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

語群

ア $\angle A$

イ $\angle B$

ウ $\angle C$

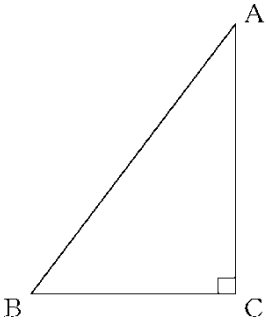
エ 3組の辺の比がすべて等しい

オ 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

カ 2組の角がそれぞれ等しい

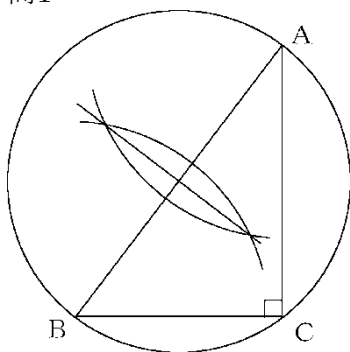
問3 線分 BE の長さは何 cm か、求めなさい。

問4 線分 BD と線分 CE の交点を F とするとき、 $\triangle DEF$ の面積は何 cm^2 か、求めなさい。

問1		
問2	(i)	
	(ii)	
	(iii)	
問3	cm	
問4	cm ²	

解答

問1



問2

(i) ア

(ii) ウ

(iii) カ

問3 17cm

問4 $\frac{68}{7} \text{ cm}^2$

解説

問1

ABの垂直二等分線をひきABとの交点をOとすると

$\angle ACB = 90^\circ$ よりOを中心とし半径OAの円周上に点Cがある。

問2

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において

2組の角がそれぞれ等しいことから相似を示す。

問3

$\triangle ADE$ において

三平方の定理より $AE = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ より

$AB:AD = AC:AE$

$AB:10 = 20:8$

$8AB = 200$

$AB = 25 \text{ cm}$

よって $BE = 25 - 8 = 17 \text{ cm}$

問4

$AB:AD = BC:DE$ より

$25:10 = BC:6$

$10BC = 150$

$BC = 15 \text{ cm}$

$\angle BED = \angle BCD = 90^\circ$ より

円周角の定理から4点B, C, D, EはBDを直径とする円周上にある。

よって $\triangle BCF \sim \triangle EDF$ だから

$CF:DF = BC:ED = 15:6 = 5:2 = 25:10$

また $\triangle BEF \sim \triangle CDF$ だから

$EF:DF = BE:CD = 17:10$

よって $CF:DF:EF = 25:10:17$

よって $\triangle DEF = \frac{17}{42} \triangle ECD = \frac{17}{42} \triangle AED = \frac{17}{42} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = \frac{68}{7} \text{ cm}^2$

【問 19】

1 辺の長さが 10 cm の正方形の紙がある。図1のように、この正方形の頂点を A, B, C, D とし、辺 BC 上に点 P をとる。次に、図2のように、頂点 A が点 P に重なるように折ったときにできる折り目を EF とする。このとき、点 D が移った点を G, 辺 PG と辺 CD の交点を H とする。

図 1

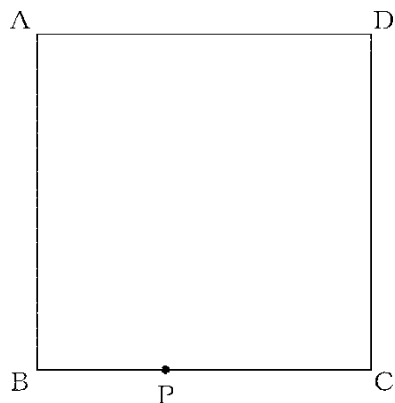
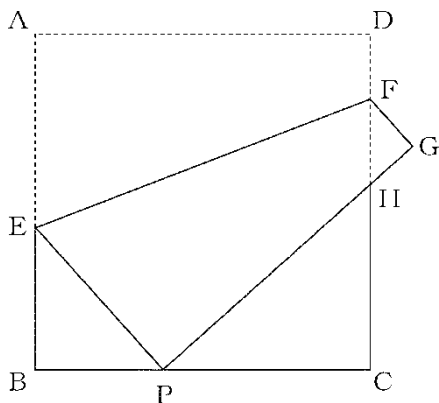


図 2



次の問1～問3に答えなさい。

(島根県 2013 年度)

問1 定規とコンパスを使って、折り目 EF を作図しなさい。ただし、作図に用いた線は消さないでおくこと。

問2 図2において、次の(1), (2)に答えなさい。

(1) $\angle BPE = \alpha^\circ$ とするとき、 $\angle BEP$ の大きさを α を用いて表しなさい。

(2) $\triangle EBP \sim \triangle PCH$ であることを証明しなさい。

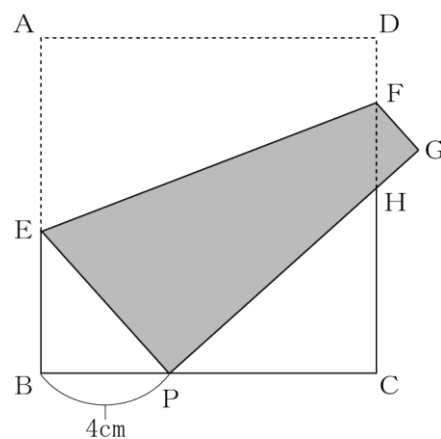
問3 図3は、図2において $BP = 4$ cm としたときのものである。

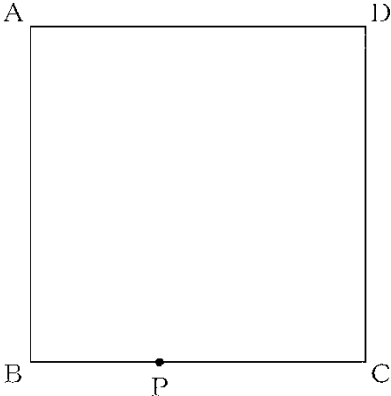
次の(1), (2)に答えなさい。

(1) EP の長さを求めなさい。

(2) 図3の  部分 (四角形 EPGF) の面積を求めなさい。

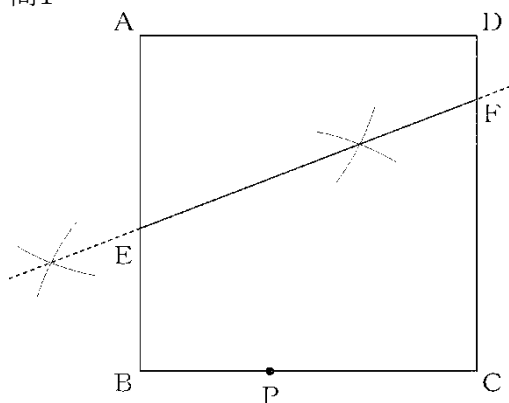
図 3



問1		
	(1)	。
問2	(2)	〔証明〕
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1



問2

(1) $(90-a)^\circ$

(2)

[証明]

$\triangle EBP$ と $\triangle PCH$ において

四角形 ABCD は正方形であるから

$\angle EBP = \angle PCH = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

また

$\angle BEP = 90^\circ - \angle BPE \cdots \textcircled{2}$

$\angle CPH = 90^\circ - \angle BPE \cdots \textcircled{3}$

したがって②, ③より

$\angle BEP = \angle CPH \cdots \textcircled{4}$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle EBP \sim \triangle PCH$

問3

(1) $\frac{29}{5} \text{ cm}$

(2) 38 cm^2

解説

問1

線分 AP の垂直二等分線を作図する。

問2

(1)

$\triangle BEP$ において $\angle EBP = 90^\circ$ だから $\angle BEP = 180 - 90 - a = 90 - a^\circ$

(2)

$\triangle EBP$ と $\triangle PCH$ において 2組の角がそれぞれ等しいことを証明する。

問3

(1)

$EP = EA = x \text{ cm}$ より $EB = 10 - x \text{ cm}$ と表せる。

$\triangle EBP$ において, 三平方の定理より $x^2 = (10 - x)^2 + 4^2$ これを解いて $x = \frac{29}{5} \text{ cm}$

(2)

$\triangle EBP \sim \triangle PCH$ で相似比は $EB:PC = \frac{21}{5}:6 = 21:30 = 7:10$

よって $PH = \frac{29}{5} \times \frac{10}{7} = \frac{58}{7} \text{ cm}$ $HG = 10 - \frac{58}{7} = \frac{12}{7} \text{ cm}$

同様に $\triangle PCH \sim \triangle FGH$ だから

$\triangle EBP \sim \triangle FGH$ $EB:BP = \frac{21}{5}:4 = 21:20$ より $FG = \frac{21}{20} \times HG = \frac{21}{20} \times \frac{12}{7} = \frac{9}{5} \text{ cm}$

よって求める面積は $\left(\frac{9}{5} + \frac{29}{5}\right) \times 10 \times \frac{1}{2} = 38 \text{ cm}^2$

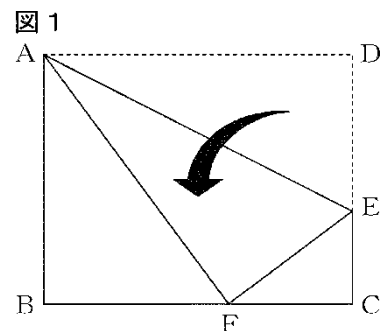
【問 20】

図1のように、長方形の紙 ABCD を、頂点 D が辺 BC 上にくるように折る。このとき、頂点 D が移った点を F, 折り目の線分を AE とする。

次の問1, 問2に答えなさい。

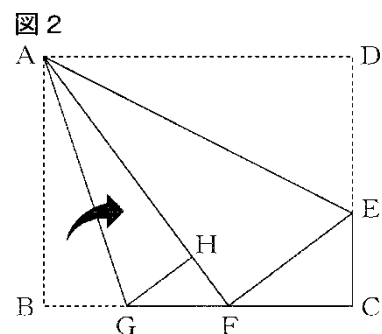
(山口県 2013 年度)

問1 $\triangle ABF \sim \triangle FCE$ であることを証明しなさい。



問2 図2のように、図1の状態から、さらに辺 AB が辺 AF に重なるように折る。このとき、頂点 B が移った点を H, 折り目の線分を AG とする。

$AB=12\text{ cm}$, $AD=13\text{ cm}$ のとき、線分 FG の長さを求めなさい。



解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle FCE$ で

四角形 $ABCD$ は長方形だから

$$\angle ABF = \angle FCE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$\angle AFE = 90^\circ$ だから

$$\angle AFB = 180^\circ - \angle AFE - \angle EFC$$

$$= 90^\circ - \angle EFC \cdots \textcircled{2}$$

また $\textcircled{1}$ より

$$\angle FEC = 180^\circ - \angle FCE - \angle EFC$$

$$= 90^\circ - \angle EFC \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$\angle AFB = \angle FEC \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \sim \triangle FCE$$

$$\text{問2} \quad \frac{13}{5} \text{ cm}$$

解説

問1

$\triangle ABF$ と $\triangle FCE$ において

2組の角がそれぞれ等しいことから相似を証明する。

問2

$\triangle ABF$ において

$AB = 12 \text{ cm}$, $AF = AD = 13 \text{ cm}$, $\angle ABF = 90^\circ$ より

三平方の定理を利用して $BF = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ cm}$

$\triangle GHF \sim \triangle ABF$ だから

$HF = 13 - 12 = 1 \text{ cm}$ より

$$FG : 13 = 1 : 5 \quad 5FG = 13 \quad FG = \frac{13}{5} \text{ cm}$$

【問 21】

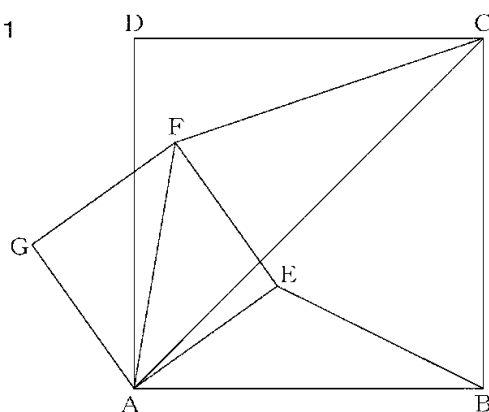
1 辺が 5 cm の正方形 ABCD がある。図1のように、正方形 ABCD の内側に点 E をとり、線分 AE を1辺とする正方形 AEF G をつくる。また、点 B と点 E を結び $\triangle ABE$ を、3 点 A, C, F を結び $\triangle ACF$ をそれぞれつくる。

このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2013 年度)

問1 線分 AC の長さを求めよ。

図 1

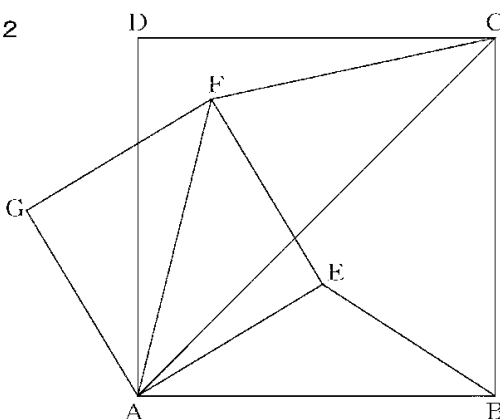


問2 $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ を証明せよ。

問3 下の図2のように、 $AE = 3$ cm, $\angle BAE = 30^\circ$ であるとき、

(1) $\triangle ABE$ の面積を求めよ。

図 2



(2) 四角形 BCFE の面積を求めよ。

解答欄

問1	cm	
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm ²
	(2)	cm ²

解答

問1 $5\sqrt{2}$ cm

問2

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle ACF$ において

四角形 ABCD, AEFG は正方形だから

$$AB:AC=1:\sqrt{2}$$

$$AE:AF=1:\sqrt{2}$$

よって, $AB:AC=AE:AF$ …①

また

$$\angle BAE = \angle BAC - \angle EAC$$

$$\angle CAF = \angle EAF - \angle EAC$$

$$\angle BAC = \angle EAF = 45^\circ \text{ だから}$$

$$\angle BAE = \angle CAF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②で

2つの三角形は2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいことがいえたから

$\triangle ABE \sim \triangle ACF$

問3

$$(1) \frac{15}{4} \text{ cm}^2$$

$$(2) \frac{47}{4} \text{ cm}^2$$

解説

問1

AC は 1 辺が 5 cm の正方形の対角線なので $AC = 5\sqrt{2}$ cm

問2

$\triangle ABE$ と $\triangle ACF$ において

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

問3

(1)

E から AB に垂線をひき交点を H とする。

$\triangle AEH$ において

$$\angle EAH = 30^\circ, \angle AHE = 90^\circ \text{ より } EH = \frac{1}{2} AE = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ABE = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4} \text{ cm}^2$$

(2)

$\triangle ABE \sim \triangle ACF$ で

相似比は $5:5\sqrt{2} = 1:\sqrt{2}$ より

面積比は $1^2:(\sqrt{2})^2 = 1:2$

$$\text{よって } \triangle ACF = 2\triangle ABE = 2 \times \frac{15}{4} = \frac{15}{2} \text{ cm}^2$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2} \text{ cm}^2$$

$$\triangle AEF = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

四角形 BCFE の面積は

$$\triangle ACF + \triangle ABC - \triangle AEF - \triangle ABE = \frac{15}{2} + \frac{25}{2} - \frac{9}{2} - \frac{15}{4} = \frac{47}{4} \text{ cm}^2$$

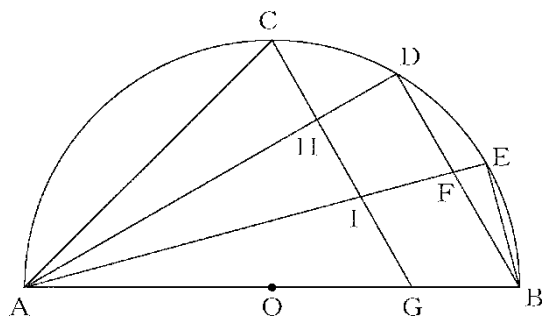
【問 22】

線分 AB を直径とし、点 O を中心とする半円がある。下の図のように、 $\widehat{AB}$ 上に点 C を $\widehat{AC} = \widehat{CB}$ となるようにとり、 $\widehat{CB}$ 上に点 D と点 E を、 $\widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EB}$ となるようにとる。 $\triangle ADB$ 、 $\triangle AEB$ をつくり、辺 DB 、 AE の交点を F とする。線分 AB 上に点 G を $DB \parallel CG$ となるようにとり、 $\triangle ACG$ をつくる。辺 CG と辺 AD 、 AE との交点をそれぞれ H 、 I とする。

次の問1は指示にしたがって答え、問2は の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2013 年度)



(証明)

問1 上の図において、 $\triangle AEB$ と相似な三角形を1つ選び、その三角形と $\triangle AEB$ が相似であることを、 の中に証明せよ。

問2 上の図において、 $AB = 4 \text{ cm}$ とするとき、線分 DH の長さは cm である。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答

問1

〔証明〕 $\triangle ADF$ と $\triangle AEB$ においての例

$\triangle ADF$ と $\triangle AEB$ において

$\widehat{DE} = \widehat{EB}$ から

$\angle DAF = \angle EAB \cdots ①$

線分 AB は直径だから

$\angle ADF = \angle AEB \cdots ②$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADF \sim \triangle AEB$

問2 $\sqrt{3} - 1$ cm

解説

問1

$\triangle AEB$ と相似になる三角形は $\triangle BEF$, $\triangle ADF$, $\triangle AHI$, $\triangle AHC$ がある。

円周角の定理や平行線の角の性質などを利用して

2組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問2

弧 AC = 弧 CB より

$\angle AOC = 90^\circ$ になるから $\angle CAO = 45^\circ$

弧 CD = 弧 DE = 弧 EB より $\angle CAD = \angle DAE = \angle EAB = 15^\circ$

$\triangle AOC$ は $OA = OC = 2$ cm の直角二等辺三角形だから

$AC = \sqrt{2}$ $AO = 2\sqrt{2}$ cm

$\triangle ABD$ において

$\angle ADB = 90^\circ$, $\angle DAB = 30^\circ$, $AB = 4$ cm より $BD = 2$ cm, $AD = 2\sqrt{3}$ cm

また $\triangle COG$ において

$\angle COG = 90^\circ$, $CG \parallel DB$ より $\angle CGO = \angle DBO = 60^\circ$

$OC = 2$ cm より $OG = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm

$CG \parallel DB$ より

$AH:AD = AG:AB$

$AH:2\sqrt{3} = \left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right):4$

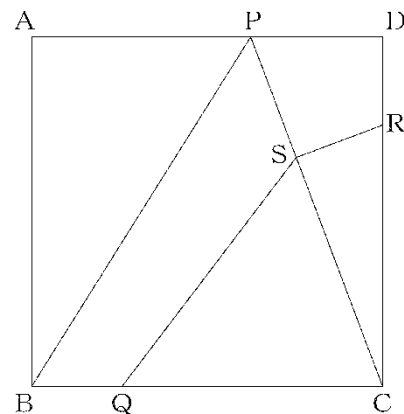
$4AH = 4\sqrt{3} + 4$

$AH = \sqrt{3} + 1$

よって $DH = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} - 1$ cm

【問 23】

1 辺の長さが 12 cm の正方形 ABCD がある。右の図のように、正方形 ABCD の辺 AD 上に点 D と異なる点 P をとり、点 B と点 P、点 C と点 P をそれぞれ結ぶ。辺 BC 上に点 C と異なる点 Q をとり、辺 CD 上に点 R を $CQ = CR$ となるようにとり、線分 PC 上に点 S を $\angle RSC = 90^\circ$ となるようにとり、点 Q と点 S、点 R と点 S をそれぞれ結ぶ。



次の問1、問3は の中にあてはまる最も簡単な数または式を記入し、問2は指示にしたがって答えよ。

ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2013 年度 追加問題)

問1 図において、線分 CR の長さが 9 cm で、四角形 DPSR の面積と $\triangle RSC$ の面積が等しいとき、線分 DP の長さは cm である。

問2 図において、「 $\triangle PBC \sim \triangle QSC$ である」ことを の中に証明せよ。

ただし、 $\triangle CDP \sim \triangle CSR$ であることは、証明せずに使ってよい。

〔証明〕

問3 図において、線分 DP の長さを 3 cm、線分 QS の長さを a cm とするとき、線分 RS の長さを、 a を使って表すと cm となる。

解答欄

問1	cm
問2	〔証明〕
問3	cm

解答

問1 $3\sqrt{2}$ cm

問2

〔証明〕

△PBC と△QSC において

仮定から

$$CB=CD\cdots①$$

$$CQ=CR\cdots②$$

△CDP $\sim$ △CSR だから

$$CD:CS=CP:CR\cdots③$$

①, ②, ③より

$$CB:CS=CP:CQ\cdots④$$

$$\angle PCB=\angle QCS\cdots⑤$$

④, ⑤より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

△PBC $\sim$ △QSC

問3 $\frac{a}{5}$ cm

解説

問1

△RSC と△PDC は 2組の角がそれぞれ等しいので相似である。

面積比は 1:2 より

相似比は $1:\sqrt{2}$

よって $9:CP=1:\sqrt{2}$

$$CP=9\sqrt{2} \text{ cm}$$

△CPD において

$$\text{三平方の定理より } DP=\sqrt{(9\sqrt{2})^2-12^2}=3\sqrt{2} \text{ cm}$$

問2

△CDP と△CSR において

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

△CDP $\sim$ △CSR

問3

△ABP において

$$\text{三平方の定理より } PB=\sqrt{12^2+9^2}=15\text{cm}$$

△CPD において

$$\text{三平方の定理より } PC=\sqrt{12^2+3^2}=3\sqrt{17} \text{ cm}$$

△PBC $\sim$ △QSC より

$$PC:QC=PB:QS$$

$$3\sqrt{17}:QC=15:a$$

$$QC=\frac{\sqrt{17}}{5}a \text{ cm}$$

△RSC $\sim$ △PDC より

$$RS:PD=RC:PC$$

$$RC=QC=\frac{\sqrt{17}}{5}a \text{ cm より}$$

$$RS:3=\frac{\sqrt{17}}{5}a:3\sqrt{17}$$

$$3\sqrt{17}RS=3\times\frac{\sqrt{17}}{5}a$$

$$RS=\frac{a}{5} \text{ cm}$$

【問 24】

図のように、 $AB=10\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ がある。線分 AB 上に $AD:DB=3:2$ となる点 D をとり、線分 BC 上に中点 E をとると $AE=8\text{ cm}$ となった。さらに、線分 AE 上に $AF=\frac{24}{5}\text{ cm}$ となる点 F をとる。

このとき、問1～問4に答えなさい。

(佐賀県 2013 年度 特色)

問1 線分 AD の長さを求めなさい。

問2 $\triangle ABE \sim \triangle ADF$ であることを証明しなさい。

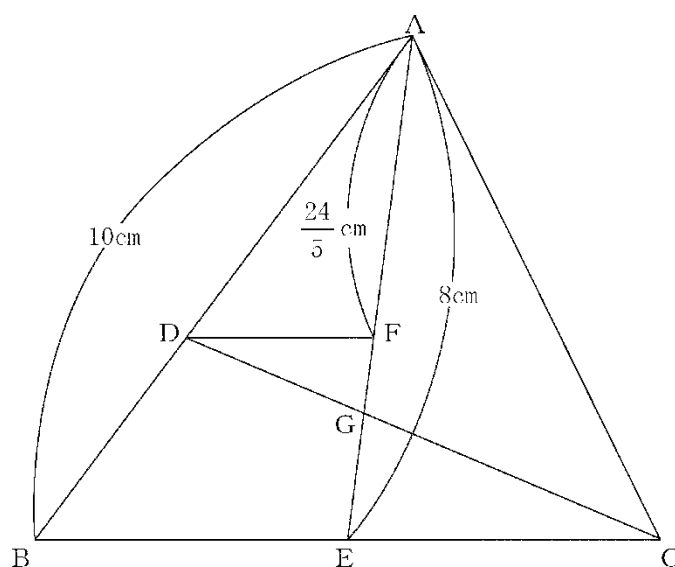
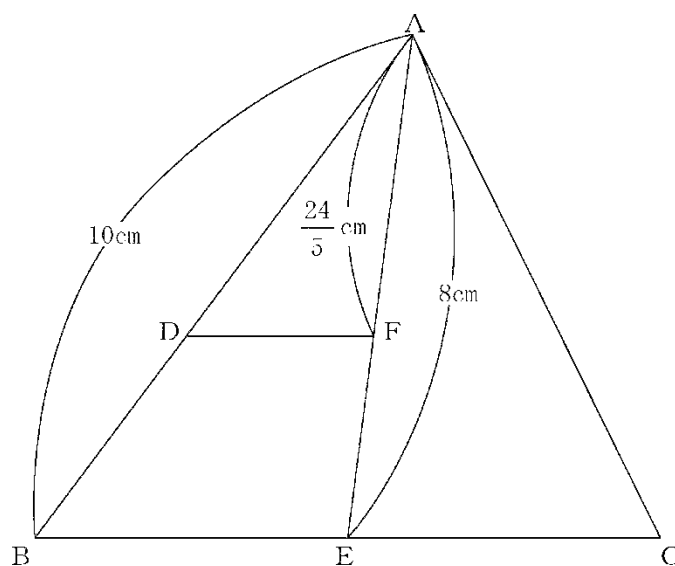
問3 $\triangle ABE$ の面積を S_1 、 $\triangle ADF$ の面積を S_2 とするとき、 $S_1:S_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

問4 線分 CD と線分 AE の交点を G とする。

このとき、(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 FG の長さを求めなさい。

(2) $\triangle ABC$ の面積は、 $\triangle DGF$ の面積の何倍か、求めなさい。



解答欄

問1	cm	
問2		
問3	S ₁ :S ₂ = :	
問4	(1)	cm
	(2)	倍

解答

問1 6cm

問2

$\triangle ABE$ と $\triangle ADF$ において

$AD:DB=3:2$ から

$AB:AD=5:3$

$AE=8\text{ cm}$, $AF=\frac{24}{5}\text{ cm}$ から

$AE:AF=5:3$

よって

$AB:AD=AE:AF\cdots\textcircled{1}$

共通な角だから

$\angle BAE=\angle DAF\cdots\textcircled{2}$

①, ②より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE\sim\triangle ADF$

問3 $S_1:S_2=25:9$

問4

(1) $\frac{6}{5}\text{ cm}$

(2) $\frac{200}{9}$ 倍

解説

問1

$AD:DB=3:2$ より $AD=\frac{3}{5}AB=\frac{3}{5}\times 10=6\text{ cm}$

問2

$\triangle ABE$ と $\triangle ADF$ において

$AB:AD=AE:AF=5:3$

$\angle BAE=\angle DAF$

よって 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE\sim\triangle ADF$

問3

$\triangle ABE$ と $\triangle ADF$ の相似比は $5:3$ だから面積比 $S_1:S_2=5^2:3^2=25:9$

問4

(1)

$\triangle ADF\sim\triangle ABE$ より

$DF\parallel BE$

$DF:BE=AD:AB=3:5$

$EC=BE$ より $FG:EG=DF:CE=3:5$

よって $FG=\frac{3}{8}FE=\frac{3}{8}\times\left(8-\frac{24}{5}\right)=\frac{6}{5}\text{ cm}$

(2)

$\triangle DGF$ と $\triangle GCE$ の面積比は $3^2:5^2=9:25$ より $\triangle GCE=\frac{25}{9}\triangle DGF$

$AF:FE=3:2$, $FG:GE=3:5$ より

$AF:FG:GE=12:3:5$

$AG:GE=15:5=3:1$

よって $\triangle AEC=4\triangle GCE=4\times\frac{25}{9}\triangle DGF=\frac{100}{9}\triangle DGF$

また $BE=CE$ だから $\triangle ABE=\triangle AEC$

よって $\triangle ABC=2\times\triangle AEC=2\times\frac{100}{9}\triangle DGF=\frac{200}{9}\triangle DGF$

したがって $\frac{200}{9}$ 倍

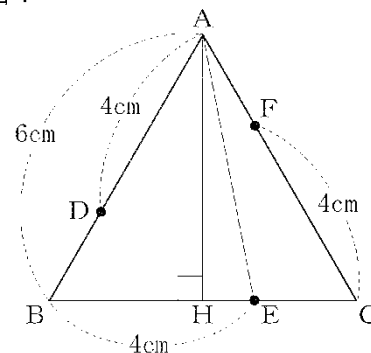
【問 25】

図1～図3のように、1 辺が 6 cm の正三角形 ABC がある。3 辺 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 D, E, F があり、 $AD=BE=CF=4$ cm である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2013 年度)

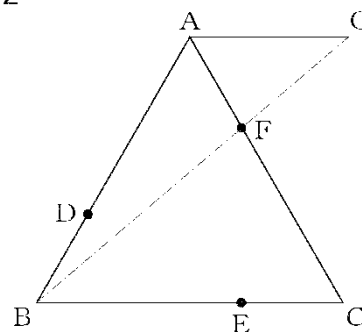
問1 図1のように、頂点 A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を H とするとき、 $\angle BAH$ の大きさは何度か。

図 1



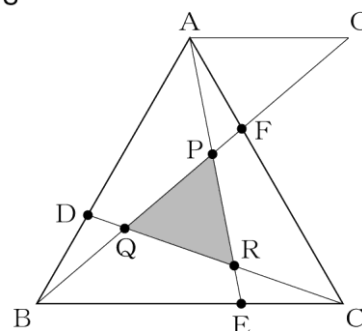
問2 図1において、線分 AE の長さは何 cm か。

図 2



問3 図2, 図3のように、線分 BF を F のほうへ延長し、その上に $BC \parallel AG$ となる点 G をとる。このとき、次の(1), (2)に答えよ。

図 3



(1) $\triangle AFG \sim \triangle CFB$ であることを証明せよ。

(2) 図3のように、線分 AE と線分 BF の交点を P, 線分 BF と線分 CD の交点を Q, 線分 CD と線分 AE の交点を R とする。このとき、次の(ア), (イ)に答えよ。

(ア) 線分 AP と線分 PE の長さの比を最も簡単な整数の比で表せ。

(イ) $\triangle PQR$ の面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	$\angle BAH = \quad \quad \quad ^\circ$		
問2	$\quad \quad \quad \text{cm}$		
問3	(1)		
	(2)	ア	$AP:PE = \quad \quad \quad :$
		イ	$\quad \quad \quad \text{cm}^2$

解答

問1 $\angle BAH = 30^\circ$

問2 $2\sqrt{7}$ cm

問3

(1)

$\triangle AFG$ と $\triangle CFB$ において

$\begin{cases} \angle FAG = \angle FCB \text{ (平行線の錯角) } \dots \textcircled{1} \\ \angle AFG = \angle CFB \text{ (対頂角) } \dots \textcircled{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \angle FAG = \angle FCB \text{ (平行線の錯角) } \dots \textcircled{1} \\ \angle AFG = \angle CFB \text{ (対頂角) } \dots \textcircled{2} \end{cases}$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AFG \sim \triangle CFB$

(2)

ア $AP:PE = 3:4$

イ $\frac{9\sqrt{3}}{7}$ cm²

解説

問1

$\triangle ABC$ は正三角形だから $\angle BAH = \angle CAH = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$

問2

$\triangle ABH$ は 60° の角をもつ直角三角形で $AB = 6$ cm より

三平方の定理から $BH = 3$ cm, $AH = 3\sqrt{3}$ cm

よって $EH = 4 - 3 = 1$ cm

$\triangle AEH$ において

三平方の定理より $AE = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm

問3

(1)

$\triangle AFG$ と $\triangle CFB$ において

対頂角や平行線の錯角が等しいことを利用して相似を導く。

(2)

(ア)

$BC \parallel AG$ より

$AG:CB = AF:CF$

$AG:6 = 2:4$

$4AG = 12$

$AG = 3$ cm

同様に $AP:PE = AG:BE = 3:4$

(イ)

$BC \parallel AG$ より

$FG:FB = 3:6 = 1:2 = 7:14$

$GP:PB = 3:4 = 9:12$

よって

$BP:PF:FG = 12:2:7$

$BP:PF = 12:2 = 6:1$

よって $AR:RE = 6:1$ より

$AP:PR:RE = BQ:QP:PF = 3:3:1$

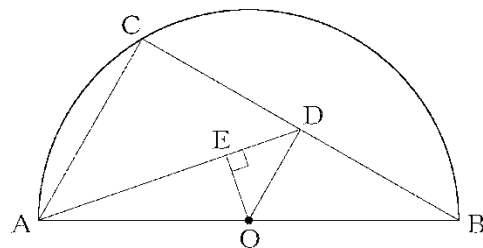
よって

$$\triangle PQR = \frac{3}{4} \triangle PQE = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \triangle PBE = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \triangle ABE = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{7} \text{ cm}^2$$

【問 26】

右の図は、線分 AB を直径とする半円で、点 O は AB の中点である。点 C は $\widehat{AB}$ 上にあり、点 D は線分 BC 上にあつて、 $OD \parallel AC$ である。点 E は線分 AD 上にあつて、 $OE \perp AD$ である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。



(熊本県 2013 年度)

問1 $\triangle ACD \sim \triangle DEO$ であることを証明しなさい。

問2 $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 2 \text{ cm}$ のとき、

(1) 線分 OD の長さを求めなさい。

(2) 線分 DE の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ACD$ と $\triangle DEO$ において

$OD \parallel AC$ だから

$$\angle CAD = \angle EDO \cdots \textcircled{1}$$

AB は半円の直径だから

$$\angle ACD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

一方, $OE \perp AD$ だから

$$\angle DEO = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle ACD = \angle DEO \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACD \sim \triangle DEO$$

問2

(1) 1cm

(2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}\text{cm}$

解説

問1

$\triangle ACD$ と $\triangle DEO$ において

円周角の定理や平行線の錯角が等しいことを利用して

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問2

(1)

$\triangle ABC$ において

$OD \parallel AC$ より

$$OD:AC = BO:BA$$

$$OD:2 = 2:4$$

$$OD = 1\text{cm}$$

(2)

$\triangle ABC$ において

$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$AC:AB = 2:4 = 1:2$$

$$\text{よって } BC = 2\sqrt{3}\text{ cm}$$

$OD \parallel AC$ より

$$BD:DC = BO:OA = 1:1$$

$$DC = BD = \sqrt{3}\text{ cm}$$

$\triangle ACD$ において

$$\angle ACD = 90^\circ \text{ より } AD = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}\text{ cm}$$

$\triangle ACD \sim \triangle DEO$ より

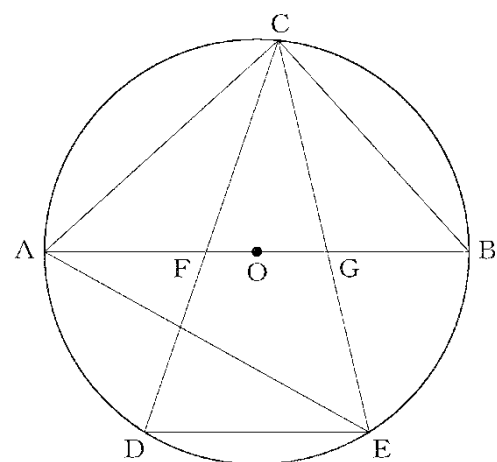
$$AC:DE = AD:DO$$

$$2:DE = \sqrt{7}:1$$

$$\text{よって } DE = \frac{2\sqrt{7}}{7}\text{ cm}$$

【問 27】

右の図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に点 C があり、 C を含まない $\widehat{AB}$ 上に点 D を、 $\widehat{AD}$ の長さが $\widehat{DB}$ の長さより短くなるようにとる。 D を通り、線分 AB に平行な直線と円 O との交点のうち、 D と異なる点を E とし、線分 AB と線分 CD 、線分 CE との交点をそれぞれ F 、 G とする。



このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2013 年度)

問1 $\triangle AEC \sim \triangle FBC$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=9\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$, $BG=3\text{ cm}$ のとき、線分 BF の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AEC$ と $\triangle FBC$ において

$\angle AEC$ と $\angle FBC$ は $\widehat{AC}$ に対する円周角だから

$$\angle AEC = \angle FBC \cdots ①$$

$\angle CAE$ と $\angle CDE$ は $\widehat{CE}$ に対する円周角だから

$$\angle CAE = \angle CDE \cdots ②$$

$AB \parallel DE$ だから

$$\angle CFB = \angle CDE \cdots ③$$

②, ③より

$$\angle CAE = \angle CFB \cdots ④$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AEC \sim \triangle FBC$$

$$\text{問2} \quad \frac{72}{13} \text{ cm}$$

解説

問1

$\triangle AEC$ と $\triangle FBC$ において

円周角の定理や平行線の同位角が等しいことを利用して

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問2

円周角の定理より $\angle ACB = 90^\circ$

$$\text{よって } AC = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

C から AB に垂線をひき交点を H とする。

$$\frac{1}{2} \times 9 \times CH = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{5}$$

$$CH = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\triangle OCH \text{ で三平方の定理より } OH = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - (2\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } HG = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} = 1 \text{ cm}$$

$$\triangle CHG \text{ で三平方の定理より } CG = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{21} \text{ cm}$$

$\triangle AEG \sim \triangle CBG$ より

$$AE : 6 = 6 : \sqrt{21}$$

$$AE = \frac{36}{\sqrt{21}} \text{ cm}$$

$$GE : 3 = 6 : \sqrt{21}$$

$$GE = \frac{18}{\sqrt{21}} \text{ cm}$$

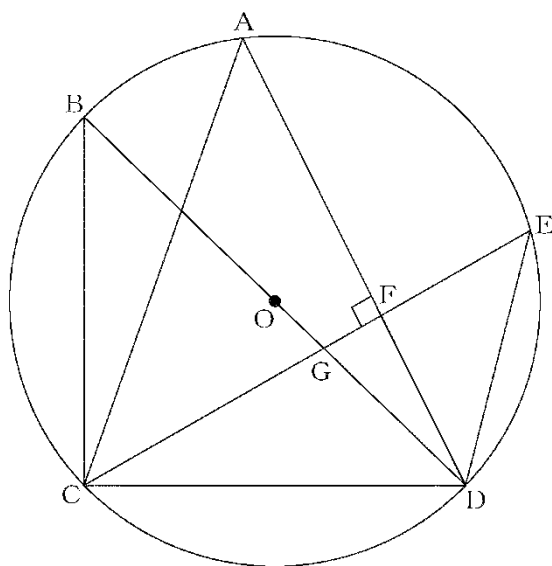
$$CE = \sqrt{21} + \frac{18}{\sqrt{21}} = \frac{13\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$$

$\triangle AEC \sim \triangle FBC$ より

$$\frac{36}{\sqrt{21}} : BF = \frac{13\sqrt{21}}{7} : 6 \quad BF = \frac{72}{13} \text{ cm}$$

【問 28】

下の図のように、円 O の周上に A, B, C, D, E の順に 5 つの点をとる。このとき、線分 BD は円 O の直径であり、線分 AD と線分 CE は垂直に交わっている。また、線分 CE と、線分 AD, BD との交点をそれぞれ F, G とする。



次の問1, 問2に答えなさい。

(大分県 2013 年度)

問1 $\triangle BCD \sim \triangle AFC$ であることを証明しなさい。

問2 $AF = 2\sqrt{3}$ cm, $DF = \sqrt{3}$ cm, $DE = \sqrt{7}$ cm とする。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 直径 BD の長さを求めなさい。

(2) $\triangle DFG$ の面積を求めなさい。

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

〔証明〕

$\triangle BCD$ と $\triangle AFC$ において

仮定から $\angle AFC = 90^\circ$

半円の弧に対する円周角は 90° だから

$$\angle BCD = 90^\circ$$

したがって $\angle BCD = \angle AFC \cdots \textcircled{1}$

$\widehat{CD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle CBD = \angle FAC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BCD \sim \triangle AFC$$

問2

$$(1) \quad 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle BCD$ と $\triangle AFC$ において

円周角の定理を利用して相似を導く。

問2

(1)

$\triangle DEF$ において

$$\text{三平方の定理より } EF = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ cm}$$

$\triangle ACF \sim \triangle EDF$ だから

$$CF : \sqrt{3} = 2\sqrt{3} : 2$$

$$CF = 3 \text{ cm}$$

$$AC : \sqrt{7} = 3 : \sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{21} \text{ cm}$$

$\triangle CDF$ において

$$\text{三平方の定理より } CD = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$\triangle BCD \sim \triangle AFC$ より

$$BD : \sqrt{21} = 2\sqrt{3} : 3 \quad BD = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle BCD \sim \triangle AFC$ より

$$BC : 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} : 3$$

$$BC = 4 \text{ cm}$$

$$\triangle BDE \text{ で三平方の定理より } BE = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{21} \text{ cm}$$

$\triangle CDG \sim \triangle BEG$ より

$$CG : BG = CD : BE = 2\sqrt{3} : \sqrt{21} = 2 : \sqrt{7}$$

また $\triangle BCG \sim \triangle EDG$ より

$$BG : EG = BC : ED = 4 : \sqrt{7}$$

$$\text{よって } CG : BG : EG = 8 : 4\sqrt{7} : 7$$

$$EG = \frac{7}{15} \quad CE = \frac{7}{15} \times 5 = \frac{7}{3} \text{ cm}$$

$$GF = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} \text{ cm}$$

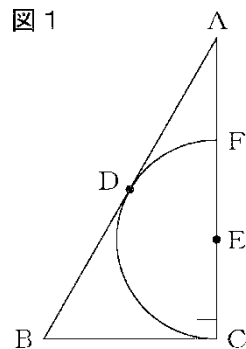
$$\text{よって } \triangle DFG = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2$$

【問 29】

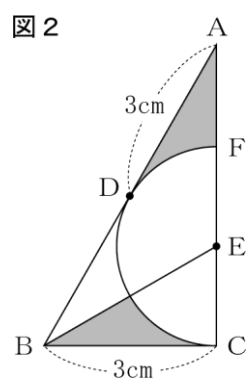
図1のように、 $\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC の中に半円がある。この半円の直径 FC は辺 AC 上にあり、点 E は線分 FC の中点である。また、点 D において半円と斜辺 AB が接している。このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2013 年度)

問1 $\triangle AED \sim \triangle ABC$ であることを証明しなさい。ただし、証明の中に根拠となることから必ず書くこと。



問2 図2は、図1において点 B と点 E を線分で結んだものである。 $AD=3\text{ cm}$ 、 $BC=3\text{ cm}$ のとき、図2の色をつけた部分を合わせた面積を求めなさい。ただし、円周率を π とする。



解答欄

問1	
問2	cm^2

解答

問1

$\triangle AED$ と $\triangle ABC$ において

$\angle ADE = 90^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$ より

$\angle ADE = \angle ACB \cdots \textcircled{1}$

共通であるから $\angle DAE = \angle CAB \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AED \sim \triangle ABC$

問2 $3\sqrt{3} - \pi \text{ cm}^2$

解説

問1

$\triangle AED$ と $\triangle ABC$ において

2組の角がそれぞれ等しいことより $\triangle AED \sim \triangle ABC$ を導く。

問2

$\triangle AED$ と $\triangle BEC$ は 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので合同である。

これより $\triangle EAB$ は $EA = EB$ の二等辺三角形だから

$\angle AED = \angle BED$ $\angle AED = \angle BEC$ でもあるから

$\angle AED = 180^\circ \div 3 = 60^\circ$

三平方の定理より $DE = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ cm}$

色のついた部分の面積は $2 \times \left\{ \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 - \pi \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{60}{360} \right\} = 3\sqrt{3} - \pi \text{ cm}^2$