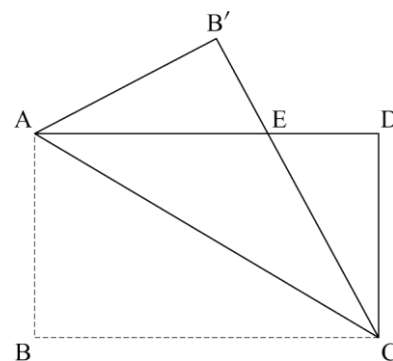


5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題 【2019 年度出題】

【問 1】

右の図のように，長方形 $ABCD$ を対角線 AC で折り，頂点 B が移動した点を B' ， AD と $B'C$ の交点を E とする。次の問 1，問 2 に答えなさい。

(群馬県 2019 年度 後期)



問 1 三角形 EAC が二等辺三角形であることを証明しなさい。

問 2 もとの長方形 $ABCD$ において， $AB=6\text{ cm}$ ， $BC=10\text{ cm}$ とする。 AE の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	[証明]
問 2	cm

解答

問 1

〔証明〕

△EAC において

AD // BC より、平行線の錯角は等しいから

$$\angle EAC = \angle BCA \cdots \textcircled{1}$$

折り返した角は等しいから

$$\angle BCA = \angle ECA \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle EAC = \angle ECA$$

よって△EAC は、2 つの角が等しい三角形であるから、二等辺三角形であるといえる。

問 2 $\frac{34}{5}$ (cm)

解説

問 1

平行線の錯角は等しいから

$$\angle EAC = \angle BCA \cdots \textcircled{1}$$

折り返した角は等しいから

$$\angle BCA = \angle ECA \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle EAC = \angle ECA$$

よって、△EAC は 2 つの角が等しいから二等辺三角形である。

問 2

△ACD において、三平方の定理より、 $AC = \sqrt{6^2 + 10^2} = 2\sqrt{34}(\text{cm})$ △EAC の頂点 E から辺 AC に垂線をひき、その交点を H とする。△EAC は二等辺三角形だから、 $AH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{34}(\text{cm})$

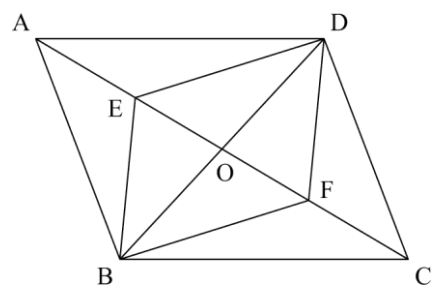
△ACD ∽ △AEH だから、 $AC : AE = AD : AH$ $2\sqrt{34} : AE = 10 : \sqrt{34}$ $AE = \frac{34}{5}(\text{cm})$

【問 2】

右の図のように，平行四辺形 $ABCD$ の対角線の交点を O とし，線分 OA ， OC 上に， $AE=CF$ となる点 E ， F をそれぞれとります。

このとき，四角形 $EBFD$ は平行四辺形であることを証明しなさい。

(埼玉県 2019 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから

$$OA=OC\cdots①$$

$$OB=OD\cdots②$$

仮定から

$$AE=CF\cdots③$$

①，③から

$$OA-AE=OC-CF$$

よって

$$OE=OF\cdots④$$

②，④から

対角線がそれぞれの中点で交わるので

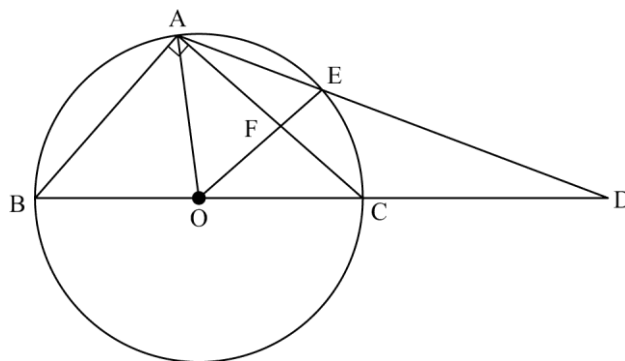
四角形 $EBFD$ は平行四辺形である。

解説

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わり，また，逆に対角線がそれぞれの中点で交わる四角形は平行四辺形である。これらの関係を利用して証明する。

【問 3】

右図において、 $\triangle ABC$ は $\angle BAC = 90^\circ$ ， $BC = 8$ cm， $AB < AC$ の直角三角形である。点 O は、3 点 A ， B ， C を通る円の中心である。このとき、 O は辺 BC の中点である。 A と O とを結ぶ。 D は直線 BC 上であって C について B と反対側にある点であり、 $CD = CA$ である。 D と A とを結ぶ。 E は、線分 AD と円 O との交点のうち A と異なる点である。 E と O とを結ぶ。 F は、線分 EO と辺 AC との交点である。



円周率を π として、次の問いに答えなさい。

(大阪府 C 2019 年度)

問 1 $\triangle OAB$ の内角 $\angle AOB$ の大きさを a° とするとき、半周より短い弧 $\widehat{AB}$ の長さを a を用いて表しなさい。

問 2 $FO = FC$ であることを証明しなさい。

問 3 $AC = 6$ cm であるとき、

(1) 線分 FC の長さを求めなさい。

(2) $\triangle AOF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	cm	
問 2	〔証明〕	
問 3	(1)	cm
	(2)	cm ²

問 $1 \frac{1}{45} \pi a$ cm

(1) $\frac{8}{3}$ cm

$$(2) \frac{5\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^2$$

弧の長さは中心角の大きさに比例するから、 $\widehat{\text{AB}} = \pi \times 8 \times \frac{a}{360} = \frac{1}{45} \pi a (\text{cm})$

1つの弧に対する中心角の大きさが円周角の大きさの2倍であることや、二等辺三角形の性質などを利用して、 $\triangle FOC$ の2つの角が等しいことを示す。

$$GO \parallel AB, \quad GO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} = \sqrt{7}(\text{cm})$$
$$FO = FC = x \text{ cm} \quad GF = GC - FC = \frac{1}{2}AC - FC = \frac{1}{2} \times 6 - x = 3 - x (\text{cm})$$

$\triangle OFG$ で, 三平方の定理より, $FO^2 = GO^2 + GF^2$

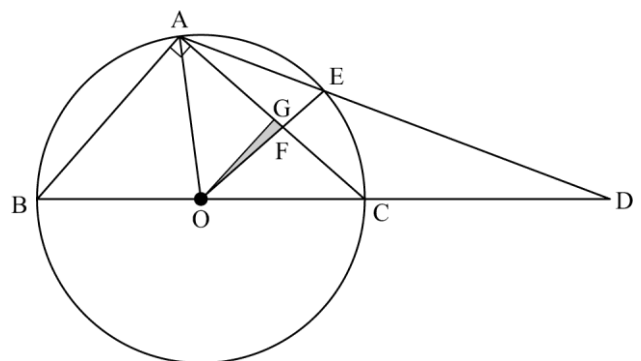
よって, $x^2=(\sqrt{7})^2+(3-x)^2$ $x^2=7+9-6x+x^2$ $6x=16$ $x=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

$$AF = AC - FC = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}(\text{cm}) \quad \text{よって, } AF : AC = \frac{10}{3} : 6 = 10 : 18 = 5 : 9$$

したがって、 $\triangle AOF$ の面積は $\triangle AOC$ の面積の $\frac{5}{9}$ 倍になる。

さらに、 $OC : BC = 1 : 2$ より、 $\triangle AOC$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ 倍。

よって、 $\triangle AOF = \triangle ABC \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \left(\frac{1}{2} \times AB \times AC\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 6\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5\sqrt{7}}{3} (\text{cm}^2)$



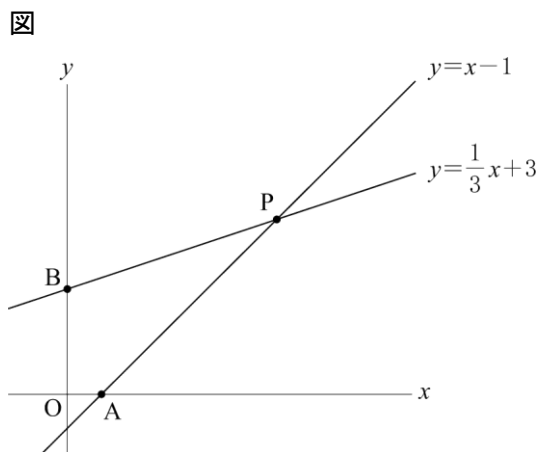
【問 4】

右の図において、直線 $y=x-1$ と x 軸との交点を A 、
直線 $y=\frac{1}{3}x+3$ と y 軸との交点を B とする。

また、この 2 つの直線の交点を P とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(鳥取県 2019 年度)



問 1 点 A の x 座標を求めなさい。

問 2 点 P の座標を求めなさい。

問 3 線分 AB の長さを求めなさい。

問 4 上の図において、 $\angle ABP=90^\circ$ である。このことを、3 つの線分 AB 、 BP 、 PA のそれぞれの長さに着目して、次のように証明した。□ にあてはまる数や、関係を表す式を入れて、この証明を完成しなさい。

〔証明〕

問 3 より $AB=$ (問 3 で求めた長さ)

また $BP=$ □ , $PA=$ □

このとき、 $\triangle ABP$ において、

という関係が成り立つので、 $\angle ABP=90^\circ$ となる。

(証明終)

問 5 3 点 A 、 B 、 P を通る円と x 軸との交点のうち、点 A と異なる点を C とする。また、この円における点 P を含まない弧 AC と弦 AC とで囲まれてできる図形を S とする。この図形 S を、直線 $y=x-1$ を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	$x=$
問 2	$P(\quad , \quad)$
問 3	
問 4	〔証明〕 問 3 より $AB=$ (問 3 で求めた長さ) また $BP=$, $PA=$ このとき, $\triangle ABP$ において, という関係が成り立つので, $\angle ABP=90^\circ$ となる。 (証明終)
問 5	

解答

問 1 $x=1$

問 2 $P(6, 5)$

問 3 $\sqrt{10}$

問 4

〔証明〕

問 3 より $AB =$ (問 3 で求めた長さ)

また $BP = 2\sqrt{10}$, $PA = 5\sqrt{2}$

このとき, $\triangle ABP$ において,

$$AB^2 + BP^2 = PA^2$$

という関係が成り立つので, $\angle ABP = 90^\circ$ となる。

(証明終)

問 5 $\frac{125}{12}\sqrt{2}\pi$

解説

問 1

$y=x-1$ に $y=0$ を代入して, $0=x-1$ $x=1$ よって, $A(1, 0)$

問 2

$y=x-1$ と $y=\frac{1}{3}x+3$ を連立方程式として解くと, $x-1=\frac{1}{3}x+3$ $3x-3=x+9$ $2x=12$ $x=6$

$y=x-1$ に $x=6$ を代入して, $y=6-1=5$ よって, $P(6, 5)$

問 3

問 1 より, $A(1, 0)$, また, $B(0, 3)$ だから, $\triangle OAB$ は $\angle AOB = 90^\circ$, $OA=1$, $OB=3$ の直角三角形なので, 三平方の定理より, $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

問 4

問 2 より, $P(6, 5)$, また, $B(0, 3)$ だから, 線分 BP を斜辺とし, 残りの 2 辺が x 軸, y 軸に平行な直角三角形を考えると, 三平方の定理より, $BP = \sqrt{6^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸との交点を Q とすると, $Q(6, 0)$ で, $AQ = 6-1=5$, $PQ=5$ より, $\triangle AQP$ は $\angle AQP = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となるから, $AQ : PA = 1 : \sqrt{2}$ なので, $PA = 5\sqrt{2}$

このとき, $\triangle ABP$ において, $AB^2 + BP^2 = PA^2$ が成り立つから, 三平方の定理の逆より, $\triangle ABP$ は $\angle ABP = 90^\circ$ の直角三角形である。

《注意》実際に計算すると, $AB^2 + BP^2 = (\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2 = 10 + 40 = 50$, $PA^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$ となる。

問 5

点 A , B , P と問 4 で考えた点 Q について, $\angle ABP = 90^\circ$, $\angle AQP = 90^\circ$ だから, 4 点 A , B , P , Q は同じ円の周上にあり, 円の直径は線分 AP である。よって, 問題の点 C は点 Q と一致し,

$C(6, 0)$ である。円の中心を R とすると, 点 R は線分 AP の中点だから, $\triangle ARC$ は $\angle ARC = 90^\circ$ の

直角二等辺三角形であり, $AR = AC \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ となるから, 図形 S を 1 回転させてできる立体は, 半径

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ の半球から, 底面が半径 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ の円で高さが $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ の円すいを取り除いた立体となる。

したがって, $\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3 \div 2 - \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{125\sqrt{2}}{12}\pi$

【問 5】

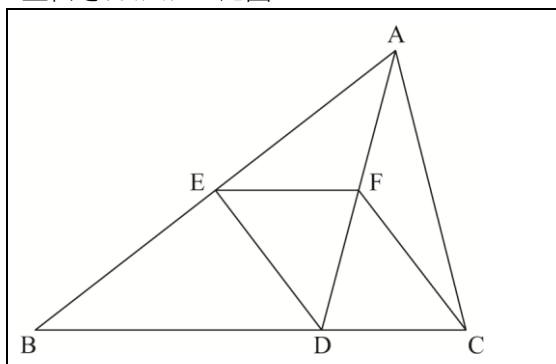
ある学級の数学の授業で、先生から下の【課題】が提示されました。上田さんたちは、この【課題】について各自で考えた後、グループで自分たちの考えたことを話し合いました。

【課題】

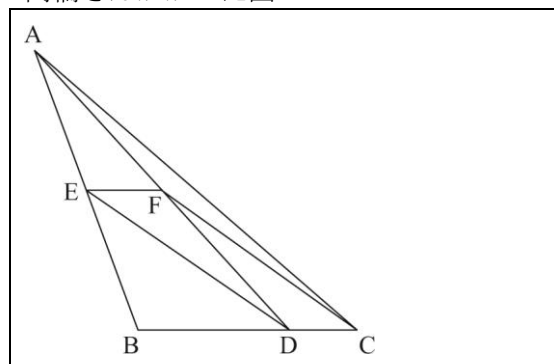
$\triangle ABC$ の辺 BC 上に $BD=2CD$ となる点 D をとります。辺 AB と線分 AD の中点をそれぞれ E 、 F とします。このとき、四角形 $EDCF$ はどんな形になるのでしょうか。

この【課題】に対して、上田さんと高橋さんは、自分のノートに下のような図をそれぞれかきました。

上田さんがかいた図



高橋さんがかいた図



上田さんたちは、自分たちがかいた図から、四角形 $EDCF$ はどんな形になるのかを考えることにしました。

上田 「僕と高橋さんがかいた図を見ると、四角形 $EDCF$ はどちらも平行四辺形になっているように見えるね。」

高橋 「本当だね。中村さんと森山さんのかいた図はどんなふうになったの？」

中村 「私がかいた図でも、上田さんや高橋さんと同じように四角形 $EDCF$ は平行四辺形のようになったわ。」

森山 「私のかいた図では、四角形 $EDCF$ はひし形のようになったわ。」

高橋 「ひし形は平行四辺形の特別な場合だね。」

上田 「そうだったね。みんなの図から、 $\triangle ABC$ がどのような三角形でも、四角形 $EDCF$ は平行四辺形になると予想できるね。」

森山 「そうだね。それにしても、どんな条件を加えれば、四角形 $EDCF$ がひし形になるのかな。」

次の問 1・問 2 に答えなさい。

(広島県 2019 年度)

問1 上田さんは、自分が予想した「△ABC がどのような三角形でも、四角形 EDCF は平行四辺形」が成り立つことを明らかにしたいと考えました。そこで上田さんは、四角形 EDCF が平行四辺形になることの証明を、下のようにノートに書きました。

【上田さんのノート】

〔仮 定〕 図において、 $BD=2CD$ 、点 E は辺 AB の中点、点 F は線分 AD の中点

〔結 論〕 四角形 EDCF は平行四辺形

〔証 明〕

点 E は辺 AB の中点、点 F は線分 AD の中点だから、



【上田さんのノート】の  に〔証 明〕の続きを書き、〔証 明〕を完成させなさい。

問2 森山さんは、問1の【上田さんのノート】の〔仮 定〕に $\boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{イ}}$ という条件を加えることで、〔結 論〕が「四角形 EDCF はひし形」になることに気付きました。 $\boxed{\text{ア}} \cdot \boxed{\text{イ}}$ に当てはまる線分を、下の①～⑤の中からそれぞれ選び、その番号を書きなさい。

① AB

② AC

③ AD

④ AE

⑤ AF

解答欄

問 1	〔仮定〕 図において、$BD=2CD$、点 E は辺 AB の中点、点 F は線分 AD の中点 〔結論〕 四角形 EDCF は平行四辺形 〔証明〕 点 E は辺 AB の中点、点 F は線分 AD の中点だから、	
問 2	ア	
	イ	

解答

問 1

$EF \parallel BD \cdots ①$

$EF = \frac{1}{2}BD \cdots ②$

辺 BC 上に点 D があることと①より

$EF \parallel DC \cdots ③$

$BD = 2CD$ であることと②より

$EF = DC \cdots ④$

③, ④より

1組の対辺が平行で、その長さが等しいから、四角形 $EDCF$ は平行四辺形である。

問 2

ア②

イ④

解説

問 1

点 E は辺 AB の中点、点 F は線分 AD の中点だから、 $\triangle ABD$ で中点連結定理より、

$EF \parallel BD \cdots ①$

$EF = \frac{1}{2}BD \cdots ②$

辺 BC 上に点 D があることと①より、 $EF \parallel DC \cdots ③$

$BD = 2CD$ であることと②より、 $EF = DC \cdots ④$

③, ④より、1組の対辺が平行で、その長さが等しいから、四角形 $EDCF$ は平行四辺形である。

問 2

平行四辺形のうち、対角線が垂直に交わるものはひし形だから、 $AD \perp CE$ となるような条件を加えればよい。線分 AD と線分 CE との交点を G とすると、 $\triangle AEG$ と $\triangle ACG$ において、平行四辺形の対角線は互いの中点で交わるので、 $EG = CG$ 、共通な辺だから、 $AG = AG$ この他に $AE = AC$ がいえれば 3組の辺がそれぞれ等しいから $\triangle AEG \equiv \triangle ACG$ がいえて、 $\angle AGE = \angle AGC = 90^\circ$ となり、 $AD \perp CE$ がいえる。つまり、 $AE = AC$ を条件に加えればよい。

