5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2010年度出題】

【問1】

図のように、3点 A, B, P があり、次の **1** ~ **5** の操作を順に行います。

- 1** 線分 AB をひく。
- 2** 点 A を中心とし、線分 AP を半径とする円をかく。
- 3** 点 B を中心とし、線分 BP を半径とする円をかく。
- 4** **2**, **3** でかいた 2 つの円の交点のうち、点 P と異なる点を Q とする。
- 5** 2 点 P, Q を通る直線をひく。

このとき、直線 PQ が、線分 AB の垂線であることを証明しなさい。

(北海道 2010 年度)

解答欄

〔証明〕

解答

$\triangle APB$ と $\triangle AQB$ において

AB は共通 …①

$AP=AQ$ (仮定)…②

$BP=BQ$ (仮定)…③

①, ②, ③から

3辺がそれぞれ等しいので

$\triangle APB \equiv \triangle AQB$ …④

よって $\angle PAB = \angle QAB$

二等辺三角形 APQ において

AB は頂角の二等分線だから底辺 PQ と垂直に交わる。

したがって直線 PQ は線分 AB の垂線である。

【問2】

図1のように、線分 AB を直径とする半円があり、 AB の中点を O とする。まず、弧 AB 上に点 C をとり、 C と A 、 C と B を線分で結ぶ。次に、下の条件を満たす3点 D 、 E 、 F をとる。

図1

条件

D は直径 AB 上の点で、 $AB \perp CD$ である。
 E 、 F は、それぞれ $\angle BAC$ の二等分線と線分 CB 、
 線分 CD との交点である。

図2

条件にしたがって3点 D 、 E 、 F をとると、三角形 CEF は、弧 AB 上の点 C の位置にかかわらず、つねに二等辺三角形になる。

次の問1～問3に答えなさい。

(群馬県 2010 年度)

問1 図2は、弧 AB 上の点 C の位置を変え、 C と A 、 C と B を線分で結んだものである。条件にしたがって3点 D 、 E 、 F を、コンパスと定規を用いて作図によりそれぞれ求めなさい。ただし、図をかくの用に用いた線は消さないこと。

問2 三角形 CEF が二等辺三角形であることを証明しなさい。

問3 三角形 CEF は正三角形となるときがある。このときの $AD:DB$ を、最も簡単な整数比で表しなさい。

解答欄

問1
問2	〔証明〕
問3	AD:DB= :

解答

問1

問2

$\triangle ACE$ と $\triangle ADF$ において

線分 AB は半円の直径だから

円周角の定理より $\angle ACB=90^\circ$

また仮定から $\angle ADF=90^\circ$

よって $\angle ACE=\angle ADF\cdots①$

E, F は $\angle BAC$ の二等分線上にあるから

$\angle CAE=\angle DAF\cdots②$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ACE\sim\triangle ADF$

対応する角は等しいので

$\angle AEC=\angle AFD\cdots③$

また対頂角は等しいので

$\angle AFD=\angle CFE\cdots④$

③, ④から

$\angle AEC=\angle CFE$

したがって三角形 CEF は二等辺三角形である。

問3

$AD:DB=1:3$

解説

問3

$\angle CAE=\angle BAE=a^\circ$ とすると

$\angle CFE=\angle CEF=(90-a)^\circ$ と表せる。

$\triangle CEF$ が正三角形になるとき

$90-a=60$ より $a=30^\circ$

よって $\angle CAB=30\times 2=60^\circ$

$\angle ACB=90^\circ$ だから

$\triangle ABC$ は $AC:AB:BC=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形になる。

$\triangle ABC\sim\triangle CBD$ だから

$AB:CB=CB:DB$

$2:\sqrt{3}=\sqrt{3}:DB$

$DB=\frac{3}{2}$

$\triangle ABC\sim\triangle ACD$ だから

$CA:DA=AB:AC$

$1:DA=2:1$

$DA=\frac{1}{2}$

よって $AD:DB=\frac{1}{2}:\frac{3}{2}=1:3$

【問3】

図のように、線分 AB があり、その中点を M とします。 $AM=PM$ となる点 P を、 $\angle PMB$ が鋭角となるようにとります。線分 PM を直径とする円をかき、この円と線分 AP , MB , PB との交点をそれぞれ Q , R , S とします。

このとき、次の各問に答えなさい。

(埼玉県 2010 年度 後期)

問1 この点 P を 1 点とり、線分 PM を直径とする円をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし、作図するためにかいた線は、消さないでおきなさい。

問2 線分 QS と線分 AB が平行であることを証明しなさい。

問3 $AB=10$ cm, $MR=4$ cm のとき、線分 PS の長さを求めなさい。ただし、根号はつけたままで答えなさい。

解答欄

問1
問2	〔証明〕
問3	cm

解答
問1

問2

〔証明〕

AM=PM=BM なので点 M は線分 AB が直径で 3 点 A, B, P を通る円の中心だから

$$\angle APB = 90^\circ$$

また線分 PM は、2 点 Q, S を通る円の直径なので

$$\angle PSM = 90^\circ$$

したがって線分 AP と MS は平行なので

同位角が等しいから

$$\angle BMS = \angle MAQ \cdots \textcircled{1}$$

また△AMP は、AM=PM の二等辺三角形だから

$$\angle MAQ = \angle MPQ \cdots \textcircled{2}$$

線分 PM を直径とする円において

円周角が等しいから

$$\angle MPQ = \angle MSQ \cdots \textcircled{3}$$

よって①～③より

$$\angle BMS = \angle MSQ$$

これは線分 QS と線分 AB において

錯角が等しいことになるので

線分 QS と線分 AB は平行である。

問3 $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ cm

解説

問3

AB=10 cm より PM=AM=BM=5 cm

△PMR において

PM は直径なので $\angle PRM = 90^\circ$

三平方の定理より $PR = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm

$$PB = \sqrt{3^2 + (5-4)^2} = \sqrt{10}$$
 cm

$\angle BSM = \angle BPA = 90^\circ$ より

MS // PA だから

$$PS:SB = AM:MB = 5:5 = 1:1$$

よって $PS = \frac{1}{2} PB = \frac{\sqrt{10}}{2}$ cm

【問 4】

図のように、長方形 ABCD の辺 AD の中点を E とする。頂点 A を中心とする半径 AB の円 A の一部をかき、線分 CE との交点を F とすると、 $BF \perp CE$ となる。ただし、 $AB > AE$ とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(千葉県 2010 年度)

問1 次ページの [] の中は、 $BF \perp CE$ の証明を途中まで示してある。[(a)] に入る最も適当なものを、次ページの語群のア～エのうちから一つ選び、符号で答えなさい。また、[(b)] には適当なことばを、[(c)] には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。ただし、[] の中の①～⑤に示されている関係を使う場合、番号の①～⑤を用いてもかまわないものとする。

証明

辺 BA の延長と、線分 CE の延長との交点を G とする。

$\triangle GAE$ と $\triangle CDE$ において、

仮定から、

[(a)] …①

長方形の向かい合う辺は平行なので、

$GB \parallel DC$ …②

②より、平行線の錯角は等しいから、

$\angle GAE = \angle CDE$ …③

[(b)] は等しいから、

$\angle GEA = \angle CED$ …④

①、③、④より、一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle GAE \equiv \triangle CDE$ …⑤

[(c)]

したがって、 $BF \perp CE$ となる。

語群

- ア $AG = DC$
- イ $GE = CE$
- ウ $AE = DE$
- エ $\angle AGE = \angle DCE$

問2 $BF = 4$ cm、 $CF = EF$ のとき、長方形 ABCD の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2	cm^2	

解答

問1

(a) ウ

(b) 対頂角

(c)

⑤より

$$AG=DC \cdots \textcircled{6}$$

長方形の向かい合う辺は等しいので

$$AB=DC \cdots \textcircled{7}$$

⑥, ⑦より

$AG=AB$ なので GB は円 A の直径となる。

よって $\angle GFB$ は半円の弧に対する円周角となるので

$$\angle GFB=90^\circ$$

$$\text{問2 } \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

解説

問2

$BF \perp CE$, $EF=CF$ より $\triangle BCE$ は $BC=BE$

また $\triangle BAE \cong \triangle CDE$ になるので $BE=CE$

よって $\triangle BCE$ は正三角形である。

BF は CE の垂直二等分線だから $\triangle BCF$ は $\angle BCF=60^\circ$, $\angle BFC=90^\circ$ の直角三角形。

これより $BF:CF=\sqrt{3}:1$

$$BF=4 \text{ cm より}$$

$$4:CF=\sqrt{3}:1$$

$$\sqrt{3} CF=4$$

$$CF=\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって } BC=CE=2 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

また BF は正三角形の高さだから E から BC に垂線 EH をひくと

$$CD=EH=BF=4 \text{ cm}$$

$$\text{したがって長方形 } ABCD \text{ の面積は } 4 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

【問5】

図のように、円 O の周上の3点 A, B, C を頂点とする $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC をつくり、点 A と中心 O を結ぶ直線が辺 BC と交わる点を H とする。

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2010 年度)

問1 点 O と点 B, C をそれぞれ結び、線分 AH と辺 BC が垂直であることを証明せよ。

問2 円 O の直径 BD と辺 AC との交点を E とする。

$AB=AC=5\text{ cm}, BC=6\text{ cm}$ のとき、

(1) 円 O の半径を求めよ。

(2) $\triangle BCE$ の面積を求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

〔証明〕

$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ で

仮定から $AB=AC$ …①

円 O の半径だから $OB=OC$ …②

共通な辺だから $OA=OA$ …③

①, ②, ③から

3辺がそれぞれ等しいので

$\triangle OAB \cong \triangle OAC$

よって $\angle OAB = \angle OAC$

ここで二等辺三角形 ABC の頂角の二等分線は底辺を垂直に2等分するので

$AH \perp BC$

問2

(1) $\frac{25}{8}$ cm

(2) $\frac{56}{13}$ cm²

解説

問2

(1)

$$BH = CH = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$AH \perp BC$ だから $\triangle ABH$ で

$$\text{三平方の定理より } AH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

円の半径を r cm とすると $OH = 4 - r$ cm とおける。

$\triangle BOH$ で

三平方の定理より $OB^2 = OH^2 + BH^2$

$$r^2 = (4 - r)^2 + 3^2$$

$$8r = 25$$

$$r = \frac{25}{8} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle BCD$ で

$BO = OD, BH = HC$ より

$$\text{中点連結定理から } CD = 2HO = 2\left(4 - \frac{25}{8}\right) = \frac{7}{4} \text{ cm}$$

また BD は直径より $\angle BCD = 90^\circ$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} \text{ cm}^2$$

$AH \parallel CD$ だから

$$DE : EO = DC : AO = \frac{7}{4} : \frac{25}{8} = 14 : 25$$

$$BE : ED = (25 + 14 + 25) : 14 = 64 : 14 = 32 : 7$$

$$\text{よって } \triangle BCE = \frac{32}{39} \triangle BCD = \frac{32}{39} \times \frac{21}{4} = \frac{56}{13} \text{ cm}^2$$

【問 6】

図において、3 点 A, B, C は円 O の円周上の点である。 $\angle ABC$ の二等分線と円 O との交点を D とし、点 A を通り DB に平行な直線と円 O との交点を E とする。ED と AB, AC との交点をそれぞれ F, G とし、ED 上に $\angle DGC = \angle DHB$ となる点 H をとる。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(静岡県 2010 年度)

問1 四角形 HBCG は平行四辺形であることを証明しなさい。

問2 $HF = 4 \text{ cm}$, $FG = 3 \text{ cm}$, $GD = 4 \text{ cm}$ のとき、EF の長さを求めなさい。

図

解答欄

問1	〔証明〕
	cm

解答

問1

〔証明〕

$\angle DGC = \angle DHB$ より

同位角が等しいので $GC \parallel HB \cdots \textcircled{1}$

$\angle ABD = \angle CBD = \angle x$ とすると $AE \parallel DB$ より

錯角が等しいので $\angle EAB = \angle ABD = \angle x$

弧 EB の円周角より $\angle EDB = \angle EAB = \angle x$

$\triangle BFD$ の外角だから

$\angle AFD = \angle EDB + \angle ABD = \angle x + \angle x = 2\angle x$

よって $\angle AFG = \angle ABC = 2\angle x$ より

同位角が等しいので $HG \parallel BC \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

向かい合う2組の辺がそれぞれ平行なので

四角形 $HBCG$ は平行四辺形である。

問2 $\frac{21}{4}$ cm

解説

問2

$BC = HG = 4 + 3 = 7$ cm

$\angle FDB = \angle FBD = \angle x$ だから

$FB = FD = 3 + 4 = 7$ cm

$\triangle ABC$ で

$FG \parallel BC$ より

$AF : AB = FG : BC$

$AF : (AF + 7) = 3 : 7$

$7AF = 3AF + 21$

$4AF = 21$

$AF = \frac{21}{4}$ cm

$AE \parallel BD$ より

$\angle AED = \angle EDB = \angle x$ だから

$EF = AF = \frac{21}{4}$ cm

【問 7】

平行四辺形 ABCD の辺 AB, CD 上にそれぞれ点 E, F を $AE=CF$ となるようにとり, 対角線 AC と線分 EF との交点を O とする。このとき, $OE=OF$ であることを証明したい。(I), (II) にあてはまる最も適当なものを, 下のアからカまでの中からそれぞれ選んで, そのかな符号を書きなさい。

ただし E, F は平行四辺形の頂点上にはないものとする。

(愛知県 2010 年度 A)

〔証明〕

$\triangle OAE$ と $\triangle OCF$ で

AB // DC で, 錯角は等しいから

(I) …①

$\angle OEA = \angle OFC$ …②

また, $AE = CF$ …③

①, ②, ③から, (II) ので

$\triangle OAE \equiv \triangle OCF$

よって, $OE = OF$

ア $\angle DAO = \angle BCO$

イ $\angle OAE = \angle OCF$

ウ $\angle AOE = \angle COF$

エ 2 組の角が, それぞれ等しい

オ 2 辺とその間の角が, それぞれ等しい

カ 1 辺とその両端の角が, それぞれ等しい

解答欄

I (), II ()

解答

I イ

II カ

【問 8】

アケミさんとヒロさんは、長方形の紙を折ってできる図形に興味をもち、図1、図2のような模式図をかいて考えてみた。図1、図2において、四角形 ABCD は $AB=10$ cm, $AD=20$ cm の長方形である。P は、辺 AD 上にあって A, D と異なる点である。 $\triangle PEC \equiv \triangle PDC$ であり、E は直線 PC について D と反対側にある。 $DP=x$ cm とし、 $0 < x < 20$ とする。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2010 年度 後期)

問1 図1は、 $0 < x < 10$ のときの状態を示している。図1において、

(1) 四角形 ABCP の面積を x を用いて表しなさい。

(2) $PC=11$ cm であるときの x の値を求めなさい。

問2 図2は、 $10 < x < 20$ のときの状態を示している。図2において、Q は線分 PE と辺 BC との交点であり、F は P から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。

(1) アケミさんとヒロさんは、 $\triangle QCP$ が二等辺三角形であると予想し、そのことを証明しようと考えた。アケミさんは、 $\triangle QCP$ の二つの内角の大きさが等しいことを示そうと考えた。ヒロさんは、 $\triangle PFQ \equiv \triangle CEQ$ であることを証明してから、 $\triangle QCP$ のこの二つの辺の長さが等しいことを示そうと考えた。次の【アケミさんの証明】における ㉑ , ㉒ , ㉓ に入れるのに適している角を表す文字をそれぞれ書き入れて証明を完成させなさい。また、次の【ヒロさんの証明】における ㉔ の部分を書き加え、証明を完成させなさい。

【アケミさんの証明】

$\triangle PEC \equiv \triangle PDC$ だから
 $\angle \text{㉑} = \angle \text{㉒} \dots \text{㉑}$
 AD // BC だから
 $\angle \text{㉒} = \angle \text{㉓}$ (錯角) $\dots \text{㉒}$
 $\text{㉑}, \text{㉒}$ より $\angle \text{㉑} = \angle \text{㉓}$
 よって、 $\triangle QCP$ は二つの内角が等しいから二等辺三角形である。

【ヒロさんの証明】

$\triangle PFQ$ と $\triangle CEQ$ において

㉔

よって、 $\triangle QCP$ は二つの辺が等しいから二等辺三角形である。

図1

図2

(2) $x=15$ のときの線分 BQ の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm^2	
	(2)		
問2	(1)	㉑	
		㉒	
		㉓	
	(2)	㉔	
		(2)	cm

解答

問1

(1) $200 - 5x \text{ cm}^2$

(2) $\sqrt{21}$

問2

(1)

Ⓐ CPE

Ⓑ CPD

Ⓒ PCB

Ⓓ

PF ⊥ BC だから ∠PFQ = 90° …⑦

四角形 ABCD は長方形だから

$$\angle PDC = 90^\circ$$

$$\triangle PEC \cong \triangle PDC \text{ より } \angle PEC = \angle PDC$$

$$\text{よって } \angle PEC = 90^\circ \dots \text{⑧}$$

⑦, ⑧より

$$\angle PFQ = \angle CEQ = 90^\circ \dots \text{⑨}$$

四角形 PFCD は長方形だから PF = DC

$$\triangle PEC \cong \triangle PDC \text{ より } CE = CD$$

$$\text{よって } PF = CE \dots \text{⑩}$$

$$\angle QPF = 180^\circ - (\angle PFQ + \angle FQP)$$

$$= 90^\circ - \angle FQP$$

$$\angle QCE = 180^\circ - (\angle CEQ + \angle EQC)$$

$$= 90^\circ - \angle EQC$$

∠FQP = ∠EQC (対頂角) だから

$$\angle QPF = \angle QCE \dots \text{⑪}$$

⑨, ⑩, ⑪より

一辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PFQ \cong \triangle CEQ$$

$$\text{したがって } QP = QC$$

(2) $\frac{55}{6} \text{ cm}$

解説

問1

(1)

$$\text{四角形 } ABCP = \text{長方形 } ABCD - \triangle CPD = 10 \times 20 - \frac{1}{2} \times x \times 10 = 200 - 5x$$

(2)

△PCE において

$$\text{三平方の定理より } x = \sqrt{11^2 - 10^2} = \sqrt{21} \text{ cm}$$

問2

(2)

$x = 15 \text{ cm}$ のとき $BQ = y \text{ cm}$ とすると $QC = 20 - y \text{ cm}$ と表せる。

また $QP = QC = 20 - y \text{ cm}$, $FQ = 15 - (20 - y) = y - 5 \text{ cm}$ と表せる。

△PFQ において

$$\text{三平方の定理より } PQ^2 = PF^2 + FQ^2$$

$$(20 - y)^2 = 10^2 + (y - 5)^2$$

$$30y = 275$$

$$y = \frac{275}{30} = \frac{55}{6} \text{ cm}$$

【問9】

図で、2点Q, Rは、半径4cmの円Oと半径3cmの円Pの交点である。4点S, T, U, Vは、2つの円の中心O, Pを通る直線と円との交点である。また、 $OP=5\text{ cm}$, $\angle OQP=90^\circ$ である。

次の問1～問4に答えなさい。

(和歌山県 2010年度)

問1 TUの長さを求めなさい。

問2 $\angle OPQ = a^\circ$ のとき、 $\angle OSQ$ の大きさを a の式で表しなさい。

問3 $\angle OPQ = \angle QVR$ であることを証明しなさい。

問4 $\triangle OQS$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	TU = cm
問2	$\angle OSQ =$ 度
問3	[証明]
問4	$\triangle OQS =$ cm^2

解答

問1 $TU=2\text{cm}$

問2 $\angle OSQ = \frac{90-a}{2}$ 度

問3

OとR, PとRを結ぶ。

$\triangle OPQ$ と $\triangle OPR$ で

$OP=OP$ (共通)…①

$OQ=OR$ (円Oの半径)…②

$PQ=PR$ (円Pの半径)…③

①, ②, ③から

3辺が、それぞれ等しいので

$\triangle OPQ \equiv \triangle OPR$

よって $\angle OPQ = \angle OPR$ …④

また $\angle QPR = \angle OPQ + \angle OPR$ …⑤

円周角の定理から $\angle QVR = \frac{1}{2} \angle QPR$ …⑥

④, ⑤, ⑥から

$\angle OPQ = \angle QVR$

問4 $\triangle OQS = \frac{24}{5} \text{cm}^2$

解説

問1

$TU = 4 + 3 - 5 = 2 \text{ cm}$

問2

$\angle POQ = 180 - 90 - a = 90 - a^\circ$

円周角の定理より $\angle OSQ = \angle USQ = \frac{1}{2} \angle QOU = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{90-a}{2}^\circ$

問4

QからOPに垂線QHをひく。

$\triangle OPQ$ と $\triangle OQH$ は

2組の角がそれぞれ等しいので相似になる。

よって $OP:OQ = PQ:QH$

$5:4 = 3:QH$

$5QH = 12$

$QH = \frac{12}{5} \text{ cm}$

よって $\triangle OQS = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} \text{ cm}^2$

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle EBC$ において

四角形 $ADEB$ と四角形 $BFGC$ は

正方形だから

$$AB = EB \cdots \textcircled{1}$$

$$BF = BC \cdots \textcircled{2}$$

また

$$\angle ABF = 90^\circ + \angle ABC$$

$$\angle EBC = 90^\circ + \angle ABC$$

よって

$$\angle ABF = \angle EBC \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2 辺とその間の角がそれぞれ等しい

よって

$$\triangle ABF \equiv \triangle EBC$$

したがって $AF = EC$

問2 $2\sqrt{13}$ cm

解説

問2

$\triangle AFG$ で三平方の定理より

$$AF = \sqrt{(3+6)^2 + 6^2} = 3\sqrt{13} \text{ cm}$$

$AC \parallel BF$ より

$$AJ : JF = AC : BF = 3 : 6 = 1 : 2$$

$$\text{よって } JF = \frac{2}{3} AF = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{13} = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

【問 11】

図で、 $\triangle ABC$ と $\triangle DBE$ は、 $\angle ABC = \angle DBE = 90^\circ$ の合同な直角三角形である。 AB と DE の交点を P 、 AC と BE の交点を Q 、 AC と DE の交点を R とし、点 Q から BC に垂線をひき、その交点を H とする。 $DE \parallel BC$ 、 $BC = 3 \text{ cm}$ 、 $CA = 5 \text{ cm}$ とすると、次の問1～問5に答えなさい。

(佐賀県 2010 年度 後期)

問1 DBの長さを求めなさい。

問2 $\triangle QBC$ が二等辺三角形であることを証明しなさい。

問3 QHの長さを求めなさい。

問4 PBの長さを求めなさい。

問5 四角形PBQRの面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	
問3	cm
問4	cm
問5	cm ²

解答

問1 4cm

問2

$\triangle QBC$ で

$\triangle ABC$ と $\triangle DBE$ が合同だから

$$\angle QCB = \angle DEB \cdots \textcircled{1}$$

$DE \parallel BC$ だから

$$\angle BED = \angle QBC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

$$\angle QBC = \angle QCB$$

よって 2 つの角が等しいので

$\triangle QBC$ は二等辺三角形である。

問3 2cm

問4 $\frac{12}{5}$ cm

問5 $\frac{51}{25}$ cm²

解説

問5

$\triangle ABC \sim \triangle QHB$ で

$$AC : QB = AB : QH$$

$$5 : QB = 4 : 2$$

$$QB = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

$$QE = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$RE \parallel BC$ より

$$RE : BC = QE : QB = \frac{1}{2} : \frac{5}{2} = 1 : 5$$

$$RE : 3 = 1 : 5$$

$$RE = \frac{3}{5} \text{ cm}$$

$\triangle ABC \sim \triangle BPE$ で

$$BC : PE = AC : BE$$

$$3 : PE = 5 : 3$$

$$PE = \frac{9}{5} \text{ cm}$$

$$PR = \frac{9}{5} - \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \text{ cm}$$

$$PR : RE = \frac{6}{5} : \frac{3}{5} = 2 : 1$$

$$\text{よって四角形 } PBQR = \frac{2}{3} \triangle BPE + \frac{5}{6} \triangle BRE$$

$$= \frac{2}{3} \triangle BPE + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \triangle BPE$$

$$= \frac{17}{18} \triangle BPE$$

$$= \frac{17}{18} \times \frac{1}{2} \times \frac{12}{5} \times \frac{9}{5}$$

$$= \frac{51}{25} \text{ cm}^2$$

【問 12】

図のように、底面が $EF \parallel HG$, $\angle EFG = 90^\circ$ の台形 $EFGH$ である四角柱がある。

$BC = BF$ とするとき、次の問1～問3に答えなさい。

(佐賀県 2010 年度 後期)

問1 辺 AB とねじれの位置にある辺はどれか、すべて答えなさい。

問2 $AC = AF$ であることを証明しなさい。

問3 $AB = 8 \text{ cm}$, $CD = 4 \text{ cm}$, $DA = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ とするとき、次の(1)～(3)の各問いに答えなさい。

- (1) 辺 BC の長さを求めなさい。
- (2) AG の長さを求めなさい。
- (3) $\triangle ACF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1		
問2		
問3	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	cm^2

解答

問1 CG, DH, FG, EH

問2

$\triangle ABC$ と $\triangle ABF$ で

$$BC = BF \cdots \textcircled{1}$$

共通な辺だから

$$AB = AB \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle ABC = \angle EFG = 90^\circ \text{ で}$$

角柱の側面は長方形だから $\angle ABF = 90^\circ$

$$\text{よって } \angle ABC = \angle ABF \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \equiv \triangle ABF$$

$$\text{よって } AC = AF$$

問3

$$(1) 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$(2) 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$(3) 16\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

解説

問3

(3)

$$AC = AF = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$CF = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \text{ cm}$$

AC = AF より A から CF に垂線 AM をひくと

$$CM = FM = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$AM = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 - 4^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\triangle ACF = \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5} \text{ cm}^2$$