

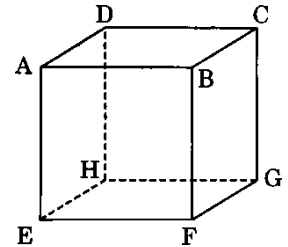
3.空間図形の求積（1.長さ・長さの比のみの出題）

【2002年度出題】

【問 1】

図のように、1辺が1 cm の立方体があります。頂点 A から出発して、すべての頂点を1回ずつ通って頂点 A にもどるとき、その最短の距離を求めなさい。

（北海道 2002 年度）



解答欄

cm

解答

8cm

解説

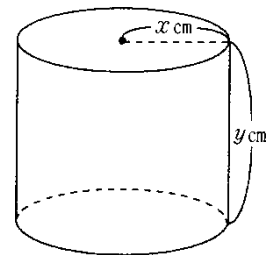
最短の距離になる道順の例として

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow A$ で 8cm

【問 2】

図のように、側面積が $10\pi \text{ cm}^2$ の円柱があります。この円柱の底面の半径を $x \text{ cm}$ ，高さを $y \text{ cm}$ とすると、 y は x に反比例します。その比例定数を求めなさい。ただし、 π は円周率とします。

（広島県 2002 年度）



解答欄

--

解答

5

解説

円柱の側面積は底面の円周×高さで求められるから

$$2x \times \pi \times y = 10\pi$$

$$2\pi xy = 10\pi$$

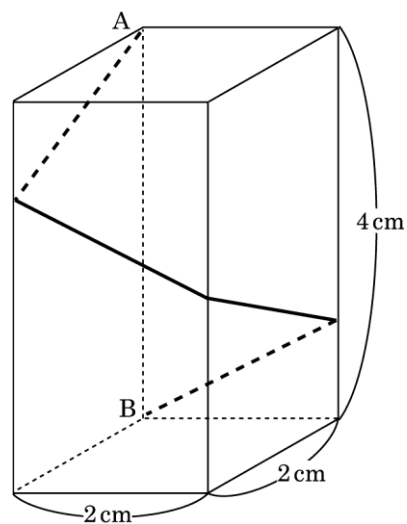
$$xy = 5$$

比例定数は 5 になる。

【問 3】

底面が1辺 2 cm の正方形で、高さが 4 cm の直方体がある。図のように、この直方体の側面を1周して、頂点 A から頂点 B に長さが最も短くなるようにひもをかけたとき、そのひもの長さを求めなさい。

(佐賀県 2003 年度)



解答欄

cm

解答

$$4\sqrt{5} \text{ cm}$$

解説

求めるひもの長さは

直角をはさむ2辺が 4cm と $2 \times 4 = 8\text{cm}$ の直角三角形の斜辺の長さに等しいから

三平方の定理より

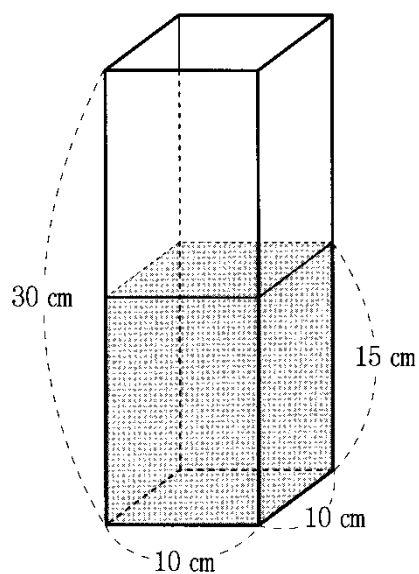
$$\sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

【問 4】

右の図のような、1 辺 10 cm の正方形を底面とし、深さ 30 cm の直方体の容器が台の上に水平においてあります。この容器には、深さ 15 cm まで水が入っています。いま、この容器の中に、1 辺 5 cm の正方形を底面とする正四角錐の鉄のおもりをはずめたところ水の深さが 16 cm になりました。この正四角錐のおもりの高さを求めなさい。

ただし、容器の厚さは考えないものとします。

(宮城県 2004 年度)



解答欄

cm

解答

12 cm

【問 5】

図 1 の $\triangle ABC$ は、辺 AB と辺 BC の長さの和が 10cm で、 $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形である。これを、2 点 A, C を通る直線 ℓ を軸として 1 回転させ、円すいをつくる。次は、あるクラスで、この円すいをもとに連立方程式の学習をしたときの、授業の場面です。円周率を π としあとの問いに答えなさい。

(山形県 2004 年度)

<授業の場面>

先生： AB の長さを $x\text{ cm}$ 、 BC の長さを $y\text{ cm}$ とするとき、 x と y の関係を等式に表すと、どうなりますか。

正男： $x + y = 10$ となります。

先生： そうですね。次に、この円すいの展開図において、図 2 のように、おうぎ形の中心角が 90° になるようにします。このときの x と y の関係を表す等式をつくってください。

明子： 図 2 で、ア の長さとおうぎ形の弧の長さが等しいことから、 $2\pi y = 2\pi x \times$ イ という式ができます。

先生： そうですね。それでは、これらの式を連立方程式として解くと、 x と y の値はいくらになりますか。

一郎： できました。 $x =$ ウ , $y =$ エ です。

先生： 正解です。今度は、展開図のおうぎ形の中心角を自分で決めて、そのときの x と y の値を求めてみましょう。

.....

図 1

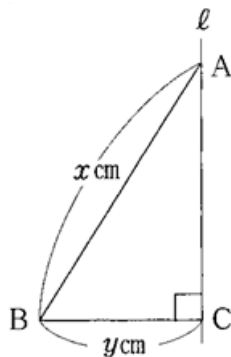
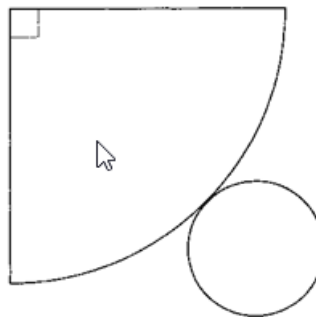


図 2



(1) ア にはあてはまる言葉を、イ ~ エ にはあてはまる数を、それぞれ書きなさい。

(2) 一郎さんが、展開図のおうぎ形の中心角を自分で決めて x と y の値を求めたところ、 $x = 6$ 、 $y = 4$ になった。このときの中心角の大きさを求めなさい。

解答欄

(1)	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
(2)	°	

解答

(1)

ア 円周

イ $\frac{1}{4}$

ウ 8

エ 2

(2) 240°

解説

(2)

おうぎ形の弧の長さは 8π cm であるから

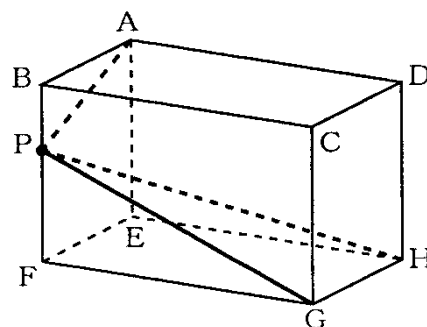
$$360^\circ \times \frac{8\pi}{12\pi} = 360^\circ \times \frac{2}{3} = 240^\circ$$

【問 6】

図は、A, B, C, D, E, F, G, Hを頂点とする直方体で、 $AB = 2$ cm, $AD = 6$ cm, $AE = 4$ cm である。また、Pは辺BF上の点で、 $AP + PG$ の大きさはPの位置によって変化する。

$AP + PG$ の大きさが最小になるとき、PHの長さは何 cm か。

(愛知県 2004 年度 B)



解答欄

cm

解答

7 cm

解説

$\triangle PFG \sim \triangle AEG$ より

$PF = x$ cm とすると

$$4 : (2 + 6) = x : 6$$

$$x = 3$$

$$PF = 3 \text{ cm}$$

$$\text{また } FH = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

$\triangle PFH$ において

$$PH^2 = 3^2 + (2\sqrt{10})^2 = \sqrt{49} = 7$$

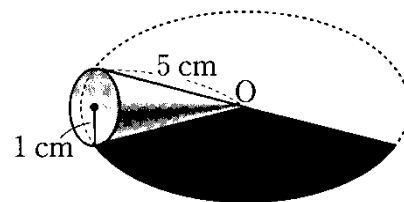
以上より

$AP + PG$ が最小になるときの PH の長さは 7 cm

【問 7】

底面の半径が 1 cm で、母線の長さが 5 cm の円すいがある。この円すいの側面に塗料をぬって平面上に置き、頂点 O を中心として、すべらないように円すいを 2 回転させると、右の図のように、平面上に塗料が付いて、おうぎ形がかけた。このおうぎ形の中心角を求めなさい。

(山口県 2004 年度)



解答欄

度

解答

144 度

解説

おうぎ形の弧の長さは

円すいの底面の円周の 2 倍に等しいので

$$2\pi \times 1 \times 2 = 4\pi \text{ cm}$$

よって中心角を x° とおくと

$$2\pi \times 5 \times \frac{x}{360} = 4\pi$$

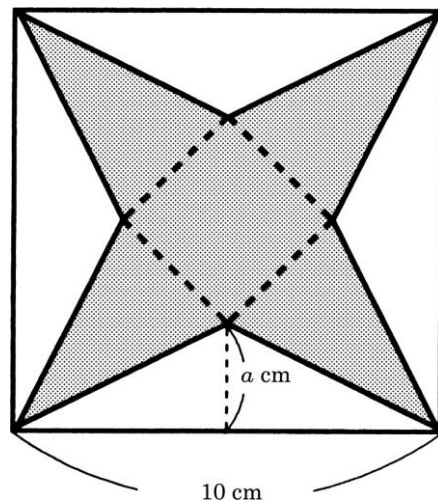
これを解いて $x = 144$ 度

【問 8】

図のように、1辺が 10 cm の正方形の紙から、この正方形の各辺を底辺とする4つの合同な二等辺三角形を切りとると、正四角錐の展開図となる。切りとる二等辺三角形の底辺に対する高さを a cm とするとき、次の (1)、(2)の問いに答えなさい。

(栃木県 2005 年度)

- (1) 展開図を組み立ててできる正四角錐の表面積が 50 cm^2 になるとき、 a の値を求めなさい。



- (2) $a=2$ のとき、展開図を組み立ててできる正四角錐の高さを求めなさい。

解答欄

(1)	$a=$
(2)	cm

解答

(1) $a = \frac{5}{2}$

(2) $2\sqrt{5} \text{ cm}$

解説

(1)
正四角錐の表面積が 50 cm^2 になるとき

$$10^2 - \frac{1}{2} \times 10 \times a \times 4 = 50 \text{ より } a = \frac{5}{2}$$

(2)

$$a=2 \text{ のとき正四角錐の底面の正方形の1辺の長さは } \frac{\sqrt{2}}{2} \times (10 - 2 \times 2) = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{側面の二等辺三角形の高さは } \frac{10\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{正四角錐の高さは } \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{98}{4} - \frac{18}{4}} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

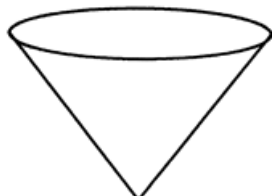
【問 9】

図で、A は側面の展開図が半径 10 cm で中心角が 216° のおうぎ形となる円すい形の容器、B は容器 A と底面の半径が等しい円柱形の容器である。

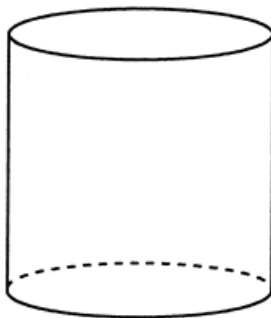
容器 A を底面が水平になるようにしていっぱいに満した水を容器 B に入れたところ、容器 B の高さの5分の1まで水が入ったという。容器 B の高さは何 cm か。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(愛知県 2005 年度 A)

A



B



解答欄

cm

解答

$$\frac{40}{3} \text{ cm}$$

解説

A の展開図において

おうぎ形の弧の長さ $2 \times 10 \times \pi \times \frac{216}{360} = 12\pi \text{ cm}$ が底面の円周の長さになるので

底面の半径は 6cm

A の高さは

$$\text{三平方の定理より } \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}$$

よってその体積は $6 \times 6 \times \pi \times 8 \div 3 \text{ cm}^3$ であり

B の水の高さを x とおくと

$$6 \times 6 \times \pi \times 8 \div 3 = 6 \times 6 \times \pi \times x$$

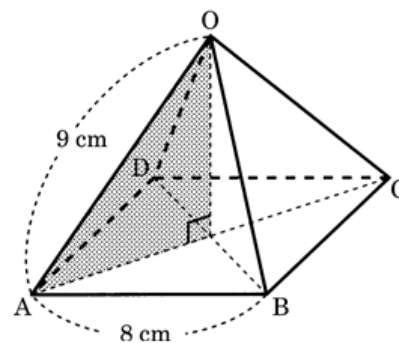
$$x = \frac{8}{3}$$

$$\text{よって B の高さは } \frac{8}{3} \times 5 = \frac{40}{3} \text{ cm}$$

【問 10】

図の四角すい $OABCD$ は底面が1辺 8 cm の正方形であり, 側面はすべて二等辺三角形で, その等しい辺は 9 cm である。この四角すいの高さを求めなさい。

(鳥取県 2005 年度)



解答欄

cm

解答

7 cm

解説

底面の正方形の対角線の交点を H とおくと OH は四角すいの高さにあたる。

$\triangle OAH$ は OA を斜辺とする直角三角形になるので

三平方の定理より $OH^2 = OA^2 - AH^2$

$AH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$ だから

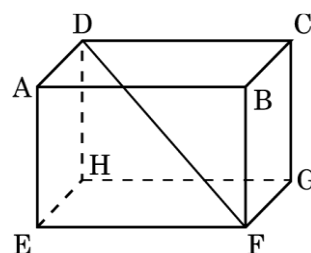
$OH^2 = 9^2 - (4\sqrt{2})^2 = 49$

よって $OH = 7\text{ cm}$

【問 11】

図のように, A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とする直方体がある。 $AB = 5\text{ cm}$, $AD = 3\text{ cm}$, $AE = 4\text{ cm}$ のとき, 対角線 DF の長さを求めよ。

(高知県 2005 年度)



解答欄

cm

解答

$5\sqrt{2}\text{ cm}$

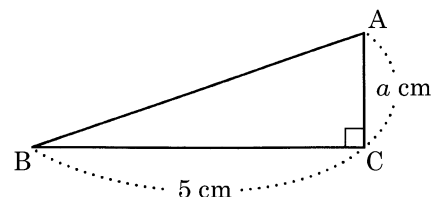
解説

三平方の定理より

$DF = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AE^2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = 5\sqrt{2}\text{ cm}$

【問 12】

図のように、 $AC=a\text{ cm}$ (a は定数)、 $BC=5\text{ cm}$ 、 $\angle C=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。 $\triangle ABC$ を AC を軸として1回転させてできる立体の体積が、 $\triangle ABC$ を BC を軸として1回転させてできる立体の体積の3倍であるとき、 a の値を求めなさい。



(熊本県 2005 年度)

解答欄

$a=$

解答

$$a=\frac{5}{3}$$

解説

AC を軸としたときの体積は $\pi \times 5^2 \times a \div 3$

BC を軸としたときの体積は $\pi \times a^2 \times 5 \div 3$

$$\pi \times 5^2 \times a \div 3 = (\pi \times a^2 \times 5 \div 3) \times 3 \text{ より } a = \frac{5}{3}$$

【問 13】

高さ $3\sqrt{15}$ cm, 体積 $9\sqrt{15} \pi \text{ cm}^3$ の円錐の展開図をできるだけ小さな正方形におさまるようにかくとき, この円錐の展開図をかくことのできる, もっとも小さな正方形の 1 辺の長さを求めなさい。

なお, 円錐の展開図で, 底面の円は側面のおうぎ形の弧とどこかで接しています。

(北海道 2006 年度)

解答欄

cm

解答

$$3 + \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

解説

底面の円の半径を r cm とすると

$$\frac{1}{3} \pi r^2 \times 3\sqrt{15} = 9\sqrt{15} \pi$$

$$r^2 = 9$$

$r > 0$ より

$$r = 3 \text{ cm}$$

母線の長さは

$$\text{三平方の定理より } \sqrt{(3\sqrt{15})^2 + 3^2} = 12 \text{ cm}$$

側面のおうぎ形の中心角を x° とすると

$$2\pi \times 12 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 3$$

$$x = 90$$

よってこのおうぎ形と円が最小の正方形におさまるのは

正方形の対角線を対称の軸とするようにおうぎ形と円がくっついて並ぶとき。

その対角線の長さは

$$12 + 3 + 3\sqrt{2} = 15 + 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって正方形の 1 辺の長さは } \frac{15 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 + \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

【問 14】

底面の半径が 5 cm, 母線の長さが 13 cm の円錐の容器に水をいっぱいに入
れ, この容器と底面が合同である円柱の容器に水をそそいでみたところ, 円柱の $\frac{1}{5}$
まで入った。円柱の高さを求めなさい。

(青森県 2006 年度)



解答欄

cm

解答

20 cm

解説

円錐の容器の高さは

三平方の定理より $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

よって円柱の高さを h cm とすると

円錐の体積と円柱の $\frac{1}{5}$ の体積が等しいので

$$\frac{1}{3} \times 5^2 \pi \times 12 = \frac{1}{5} \times 5^2 \pi \times h$$

これを解いて

$h = 20$ cm

【問 15】

下の図 I のように、底面の 1 辺が 4 cm、側面の二等辺三角形の等しい辺がいずれも 5 cm の正四角錐 ABCDE があり、この正四角錐の頂点 B から辺 AC を通って頂点 D まで、長さが最も短くなるように、ひもをかけます。また、図 II は、この正四角錐の展開図です。

このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(岩手県 2006 年度)

図 I

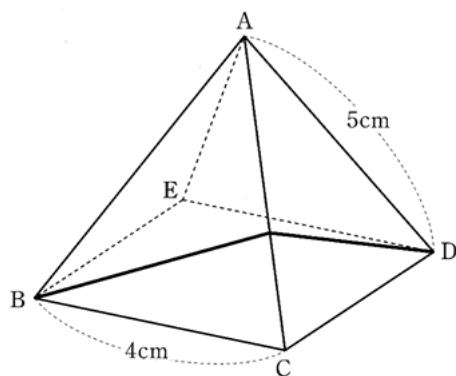
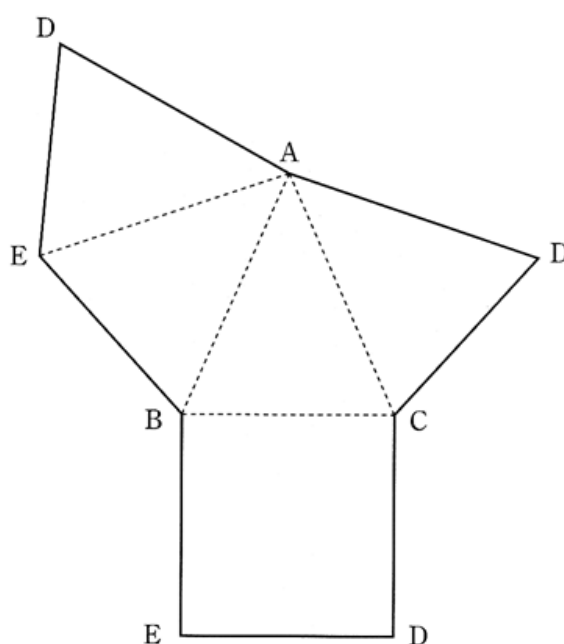


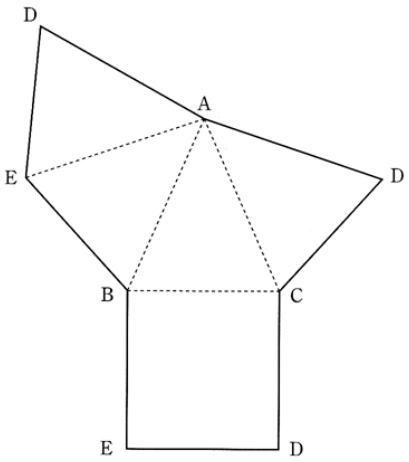
図 II



問1 ひものようすを、展開図に実線がかき入れなさい。

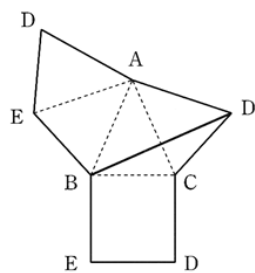
問2 ひもの長さを求めなさい。

解答欄

問1	
問2	cm

解答

問1



問2 $\frac{8\sqrt{21}}{5}$ cm

解説

問2

ACとBD の交点を H とおく。

AC⊥BD より

$$AB^2 - AH^2 = BC^2 - CH^2$$

AH = x cm とすると

$$5^2 - x^2 = 4^2 - (5 - x)^2$$

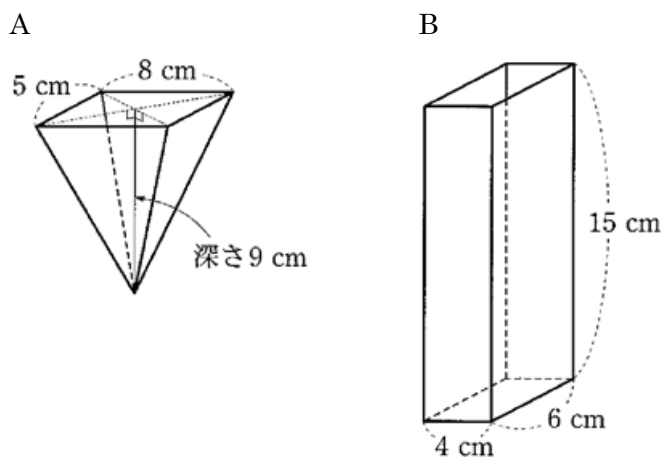
$$x = \frac{17}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって } BD = 2BH = 2\sqrt{5^2 - \left(\frac{17}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{21}}{5} \text{ cm}$$

【問 16】

図のような、底面が長方形の四角すいの容器 A と、直方体の容器 B がある。A を水でいっぱいに満たし、その水をこぼすことなく、すべて B に移す。B を水平な台の上に置いたとき、B に入った水の深さは何 cm になるか、求めなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(福島県 2006 年度)



解答欄

cm

解答

5 cm

解説

A の容積は

$$\frac{1}{3} \times 5 \times 8 \times 9 = 120 \text{ cm}^3$$

よって B に入った水の深さは

$$120 \div (4 \times 6) = 5 \text{ cm}$$

【問 17】

右の図 1 の立体は、底面が正方形で、高さが 10 cm の四角柱である。

また、図 2 の立体は、底面が正方形で、図 1 より底面の 1 辺の長さが 3 cm 長く、高さが 5 cm 短い四角柱である。

この図 2 の四角柱の体積が、図 1 の四角柱の体積の 2 倍となるとき、図 1 の四角柱の底面の 1 辺の長さを求めなさい。

(千葉県 2006 年度)

図 1

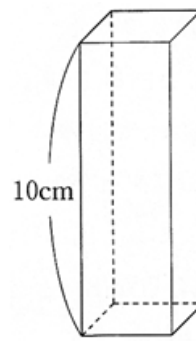
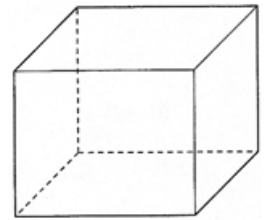


図 2



解答欄

cm

解答

3 cm

解説

図 1 の四角柱の底面の正方形の 1 辺の長さを x cm とする。

図 2 の体積は図 1 の体積の 2 倍より

$$(x+3)^2 \times (10-5) = 2 \times x^2 \times 10$$

$$5(x+3)^2 = 20x^2$$

$$(x+3)^2 = 4x^2$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$x > 0$ だから

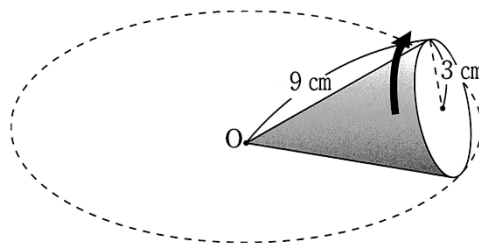
$$x = 3 \text{ cm}$$

【問 18】

右の図のように、底面の半径が 3 cm で、母線の長さが 9 cm の円錐を平面上におき、頂点 O を中心としてすべらないように転がす。

このとき、点線で示した円の上を 1 周してもとの場所にかえるまでに何回転するか、求めなさい。

(和歌山県 2006 年度)



解答欄

回転

解答

3 回転

解説

円錐の底面の周の長さは

$$2\pi \times 3 = 6\pi \text{ cm}$$

転がしてできる円周の長さは

$$2\pi \times 9 = 18\pi \text{ cm}$$

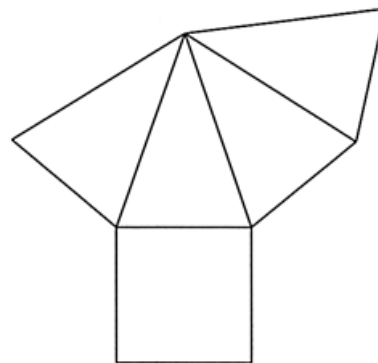
よって $18\pi \div 6\pi = 3$ 回転

【問 19】

右の図は、底面の正方形の1辺が4 cm、側面の二等辺三角形の等しい辺がいずれも6 cmの正四角すいの展開図である。

この正四角すいの高さを求めよ。

(高知県 2006 年度)



解答欄

cm

解答

$$2\sqrt{7} \text{ cm}$$

解説

底面の正方形の対角線は

$$\sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

三平方の定理より

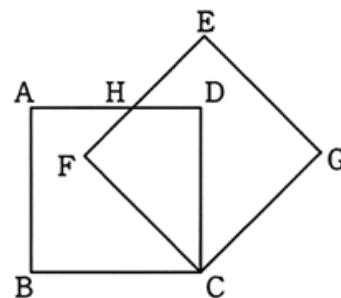
正四角すいの高さは

$$\sqrt{6^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

【問 20】

図のように、頂点 C が共通な 2 つの正方形 ABCD と EFCG があります。辺 AD と EF の交点を H とします。AB=EF=5 cm, $\angle BCF=45^\circ$ のとき、線分 AH の長さを求めなさい。

(北海道 2007 年度)



解答欄

cm

解答

$$10 - 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

解説

AC を結ぶ。

$\triangle ABC$ は $AB=BC$ の直角二等辺三角形より

$$\angle ACB=45^\circ$$

$\angle BCF=45^\circ$ より F は AC 上の点である。

$$AC = \sqrt{2} \times AB = 5\sqrt{2}$$

$$FC=5 \text{ より, } AF = 5\sqrt{2} - 5$$

$\triangle AFH$ において

$$\angle AFH=90^\circ, \angle FAH=45^\circ \text{ だから}$$

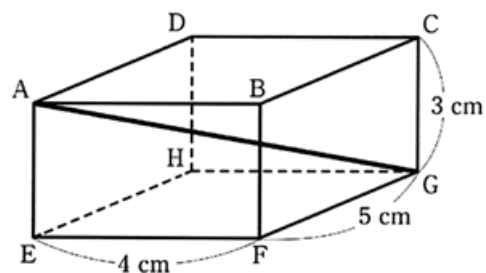
$\triangle AFH$ は $AF=FH$ の直角二等辺三角形

$$\text{したがって } AH = \sqrt{2} AF = \sqrt{2} (5\sqrt{2} - 5) = 10 - 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

【問 21】

直方体で対角線 AG の長さを求めなさい。

(青森県 2007 年度)



解答欄

cm

解答

$$5\sqrt{2} \text{ cm}$$

解説

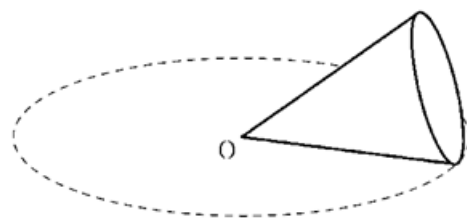
三平方の定理より

$$AG = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

【問 22】

底面の円の直径が 4cm, 母線の長さが 12cm の円すいがある。図のように, この円すいを頂点 O を中心として平面上をすべることなくころがした。円すいが点線で示した円の上を 1 周してもとの位置にかえるまでに何回転するか求めなさい。

(青森県 2008 年度)



解答欄

回転

解答

6 回転

解説

円すいが x 回転してもとの位置にかえたとすると
円すいの母線を半径とする円 O の周を 1 周するので

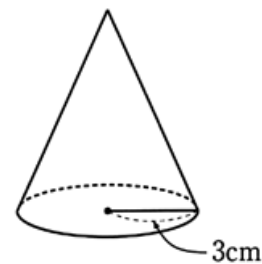
$$4\pi x = 2\pi \times 12$$

$$x = 6 \text{ 回転}$$

【問 23】

図のような、底面の半径が 3 cm 、体積が $18\pi\text{ cm}^3$ の円すいがある。この円すいの高さを求めなさい。

(福島県 2008 年度)



解答欄

cm

解答

6cm

【問 24】

体積が $32\pi\text{ cm}^3$ の円すいがある。この円すいの高さが 6 cm のとき、底面の円の半径を求めなさい。ただし、 π は円周率とする。

(茨城県 2008 年度)

解答欄

cm

解答

4 cm

【問 25】

図 1 の立体は、 $AB=AD=6$ cm、 $AE=10$ cm の直方体である。図 2 は、図 1 の直方体の面 $EFGH$ と合同な正方形 $IJKL$ を底面とし、4 つの側面がすべて合同な二等辺三角形である正四角すいの展開図である。この展開図を組み立ててできる正四角すいの体積が、図 1 の直方体の体積の $\frac{1}{6}$ であるときの、辺 MI の長さを求めなさい。

(静岡県 2008 年度)

図 1

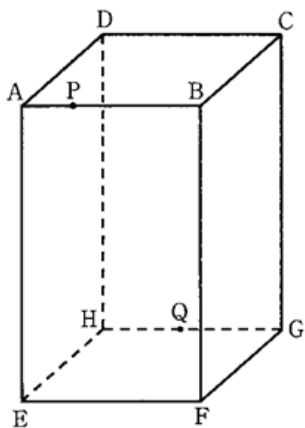
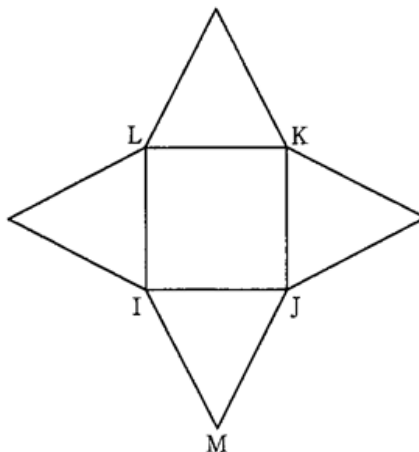


図 2



解答欄

cm

解答

$\sqrt{43}$ cm

解説

正四角すいの高さを MT とすると

正四角すいの体積は直方体の $\frac{1}{6}$ より

$$\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times MT = \frac{1}{6} \times 6 \times 6 \times 10$$

$$MT = 5$$

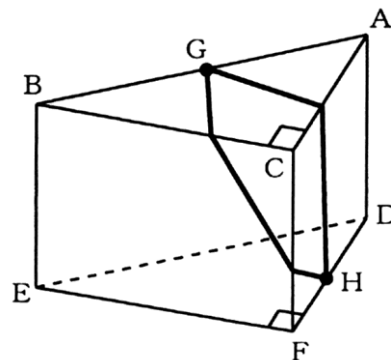
$$IT = \frac{1}{\sqrt{2}} IK = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 6 = 3\sqrt{2}$$

$\triangle MTI$ において

$$\text{三平方の定理より } MI = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{43} \text{ cm}$$

【問 26】

図は、 $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$ の 2 つの直角三角形 ABC , DEF を底面とし、側面はすべて長方形である三角柱で、 G は辺 AB の中点、 H は辺 DF 上の点である。三角柱の表面に、点 G から点 H まで、辺 BC と CF に交わるように赤い糸をかけ、点 G から点 H まで、辺 AC に交わるように青い糸をかける。それぞれの糸の長さが最短となるようにかけたとき、2 本の糸の長さが等しくなった。 $AC = CF = 2\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$ であるとき、 FH の長さは何 cm か。



(愛知県 2008 年度 A)

解答欄

cm

解答

$$\frac{2}{3} \text{ cm}$$

解説

三角柱の一部分を展開し

$\triangle ABC$ と長方形 $BEFC$ が BC でくっつき長方形 $BEFC$ と長方形 $CFDA$ が CF でくっついた状態にする。

赤い糸はこの展開図における線分 GH となる。

G から BC に垂線 GP , EF に垂線 GQ をひくと

$GP \parallel AC$ より

$$GP:AC = BG:BA = 1:2$$

$$GP:2 = 1:2$$

$$GP = 1$$

$$BG:GA = BP:PC = 1:1 \text{ より}$$

$$PC = \frac{1}{2} BC = 2$$

$$\text{よって } QF = 2$$

$$FH = x \text{ cm とすると}$$

$$\text{三平方の定理を利用して } GH^2 = GQ^2 + QH^2 = (1+2)^2 + (2+x)^2 \cdots (1)$$

青い糸は $\triangle ABC$ と長方形 $CFDA$ が AC でくっついた状態で展開したときの線分 GH となる。

H から GP に垂線 HR をひくと

$$GH^2 = GR^2 + HR^2 = (1-x)^2 + 4^2 \cdots (2)$$

(1)と(2)は等しいので

$$(1+2)^2 + (2+x)^2 = (1-x)^2 + 4^2$$

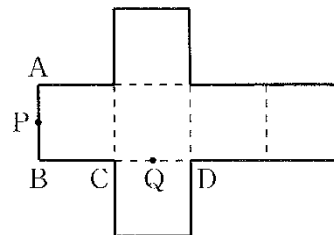
これを解いて

$$x = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

【問 27】

図のように、1 辺の長さが 6cm の立方体の展開図がある。線分 AB, 線分 CD の中点をそれぞれ P, Q とする。この展開図を組み立てて立方体をつくったとき、2 点 P, Q の間の距離を求めなさい。

(秋田県 2009 年度)



解答欄

cm

解答

$$3\sqrt{6} \text{ cm}$$

解説

展開図を組み立てる。

辺 AB に平行な点 C を含む辺を CE とする。

P から CE に垂線 PH をひき H と Q を結ぶと

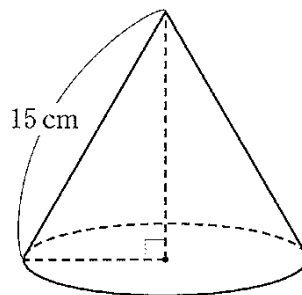
$$\triangle CHQ \text{ で } HQ = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\triangle PHQ \text{ で } PQ = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 6^2} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

【問 28】

図のような円錐の側面の展開図が半円であるとき、底面の半径の長さを求めよ。

(福井県 2009 年度)



解答欄

cm

解答

$$\frac{15}{2} \text{ cm}$$

解説

底面の半径を x cm とする。

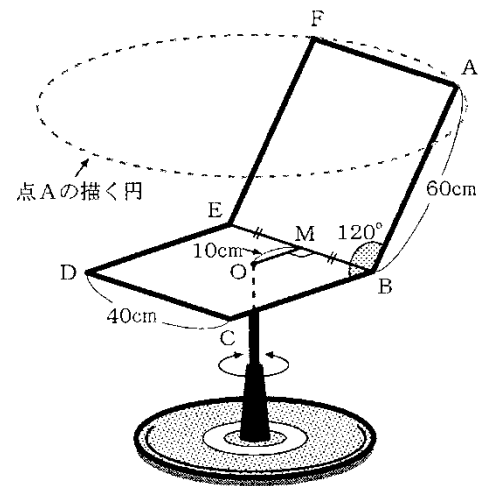
円周は側面のおうぎ形の弧の長さと等しいので

$$2\pi x = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 15 \quad x = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

【問 29】

図は、背もたれの面を長方形 $ABEF$ 、座る面を正方形 $BCDE$ とした回転式のいす椅子の見取図である。正方形 $BCDE$ 上の点 O を中心に、座る面を常に水平にして回転させるとき、点 A の描く円の半径は何 cm か。求めなさい。ただし、各線分の長さは図 4 のとおりであり、点 M は線分 BE の中点で、 $OM \perp BE$ 、 $\angle ABC = 120^\circ$ とする。

(滋賀県 2009 年度)



解答欄

cm

解答

$20\sqrt{5} \text{ cm}$

解説

A から CB の延長上に垂線 AH をひくと

点 A の描く円の半径は OH と等しくなる。

$\triangle ABH$ は $\angle ABH = 60^\circ$ の直角三角形だから

$BH:AB = 1:2$

$AB = 60\text{cm}$ より

$BH = 30 \text{ cm}$

ここで O から BC に垂線 OK をひくと

$OK = MB = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}$

$KB = OM = 10 \text{ cm}$

$KH = KB + BH = 10 + 30 = 40 \text{ cm}$

$\triangle OKH$ において

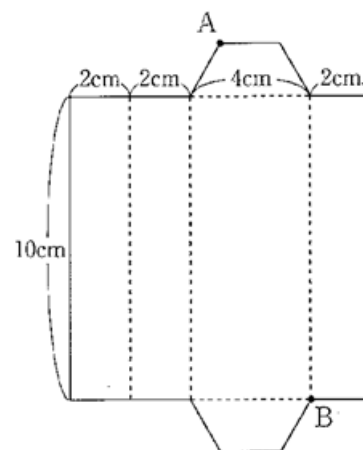
三平方の定理より $OH = \sqrt{40^2 + 20^2} = 20\sqrt{5} \text{ cm}$

よって $20\sqrt{5} \text{ cm}$

【問 30】

図は、底面が台形である四角柱の展開図である。これを組み立ててできる四角柱の 2 つの頂点 A, B を結ぶ線分 AB の長さを求めよ。

(愛媛県 2009 年度)



解答欄

cm

解答

$4\sqrt{7}$ cm

解説

頂点 A を含む底面の台形を ACDE ($AC=AE=ED=2\text{cm}$, $CD=4\text{cm}$ とおく。

A から CD に垂線 AH をひくと

$CH=(4-2)\div 2=1\text{ cm}$

$\triangle ACH$ において

三平方の定理より $AH=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}\text{ cm}$

四角柱を組み立てたときに頂点 A, B を結ぶ線分 AB は

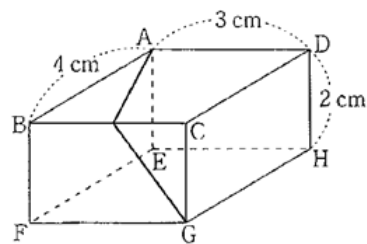
縦 $4-1=3\text{cm}$, 横 10cm , 高さ $\sqrt{3}\text{ cm}$ の直方体の対角線の長さと等しくなるので
三平方の定理を利用して

$AB=\sqrt{3^2+10^2+(\sqrt{3})^2}=4\sqrt{7}\text{ cm}$

【問 31】

図は A, B, C, D, E, F, G, H を頂点にもつ直方体で $AB=4\text{cm}$, $AD=3\text{cm}$, $DH=2\text{cm}$ である。この直方体に、頂点 A から辺 BC を通って、頂点 G まで糸をかけた。かけた糸の長さがもっとも短くなる時の糸の長さを求めよ。ただし、糸の伸び縮みおよび太さについては考えないものとする。

(高知県 2009 年度)



解答欄

cm

解答

$$3\sqrt{5} \text{ cm}$$

解説

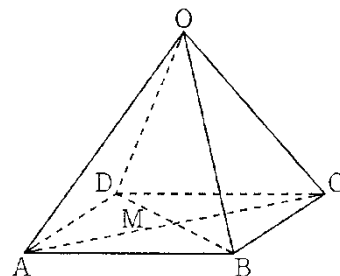
長方形 ABCD と長方形 BFGC を BC でくっつけたままの展開図において糸が最も短くなるのは、長方形 AFGD の対角線 AG と一致するときだから

$$\text{求める長さは } \sqrt{(4+2)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

【問 32】

図のように、1 辺の長さが 4 cm の正方形 ABCD を底面とする正四角錐があります。OA=6 cm とし、線分 AC と BD の交点を M とします。点 M から辺 OC に垂線をひき、辺 OC との交点を P とします。線分 MP の長さを求めなさい。

(北海道 2010 年度)



解答欄

cm

解答

$$OM^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 = 28$$

$OM > 0$ より

$$OM = 2\sqrt{7}$$

$\triangle CMP \sim \triangle COM$ より $MC:OC = MP:OM$

$$2\sqrt{2}:6 = MP:2\sqrt{7}$$

$$MP = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{14}}{3} \text{ cm}$$

【問 33】

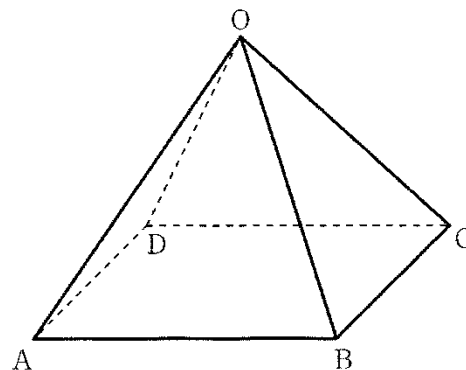
図の正四角すいは $OA=5\text{ cm}$, $AB=3\sqrt{2}\text{ cm}$ である。

次の(1), (2)に答えなさい。

(青森県 2010 年度 前期)

(1) 対角線 AC の長さを求めなさい。

(2) 点 C と直線 OA の距離を求めなさい。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm

解答

(1) 6 cm

(2) $\frac{24}{5}\text{ cm}$

解説

(1)

正四角すいの底面は正方形だから

$\triangle ABC$ は $AB=BC=3\sqrt{2}\text{ cm}$, $\angle ABC=90^\circ$ の直角二等辺三角形なので

$AC=\sqrt{2} AB=\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}=6\text{ cm}$

(2)

AC の中点を M とすると $AM=CM=\frac{6}{2}=3\text{ cm}$, $OM \perp AC$ となる。

$\triangle OAM$ で三平方の定理より

$OM=\sqrt{5^2-3^2}=4\text{ cm}$

$\triangle OAC=\frac{1}{2} \times 6 \times 4=12\text{ cm}^2$

点 C と直線 OA の距離を $h\text{ cm}$ とすると

$\triangle OAC=\frac{1}{2} \times OA \times h=\frac{1}{2} \times 5 \times h=\frac{5h}{2}\text{ cm}^2$ と表せる。

よって $\frac{5h}{2}=12$

$h=\frac{24}{5}\text{ cm}$

【問 34】

円周率を π とする。底面の半径が 3 cm 、体積が $63\pi\text{ cm}^3$ の円柱の高さを求めなさい。

(栃木県 2010 年度)

解答欄

cm

解答

7 cm

解説

円柱の高さを $h\text{ cm}$ とする。

$$\pi \times 3^2 \times h = 63\pi$$

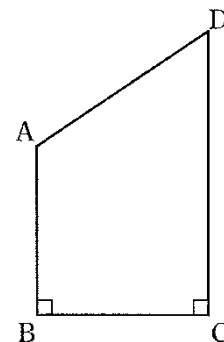
$$h = 7\text{ cm}$$

【問 35】

図は、 $AB \parallel DC$ の台形で、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $DC=5\text{ cm}$ 、 $AD=4\text{ cm}$ 、 $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$ である。

(長野県 2010 年度)

- (1) 辺 BC の長さを求めなさい。



- (2) 直線 AB を軸として 1 回転させてできる立体をア、直線 DC を軸として 1 回転させてできる立体をイとする。このとき、アとイの体積についてまとめた次の文の、Ⅰ にはアとイのいずれかの記号を、Ⅱ には当てはまる値を書きなさい。ただし、円周率は π とする。

アとイの体積を比べると、Ⅰ の方が Ⅱ cm^3 大きい。

解答欄

(1)	cm	
(2)	Ⅰ	
	Ⅱ	cm^3

解答

(1) $2\sqrt{3}\text{ cm}$

(2)

I ア

II $8\pi\text{ cm}^3$

解説

(1)

A から CD に垂線 AH をひく。

$$DH=5-3=2\text{ cm}$$

△ADH で三平方の定理より

$$AH=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$\text{よって } BC=AH=2\sqrt{3}\text{ cm}$$

(2)

立体アの体積は

$$\pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 5 - \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 60\pi - 8\pi = 52\pi\text{ cm}^3$$

立体イの体積は

$$\pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 3 + \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 36\pi + 8\pi = 44\pi\text{ cm}^3$$

$$52\pi - 44\pi = 8\pi\text{ cm}^3$$

よってアの方が $8\pi\text{ cm}^3$ 大きい。

【問 36】

1 辺の長さが 20 cm の立方体状の容器に水を入れた。この容器を傾けたところ、図1のようになった。次に、この容器を水平に戻したところ、図2のようになった。 x の値を求めなさい。

(岐阜県 2010 年度)

図1

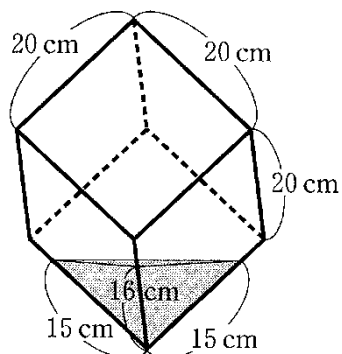
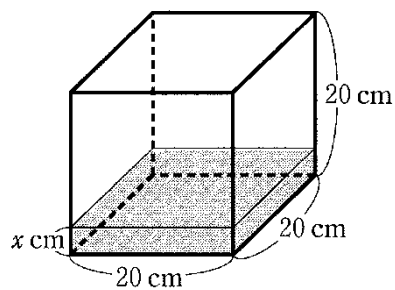


図2



解答欄

解答

1.5

解説

水の体積は変わらないから

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 15 \times 15 \times 16 = 20 \times 20 \times x$$

$$x = \frac{3}{2} = 1.5$$

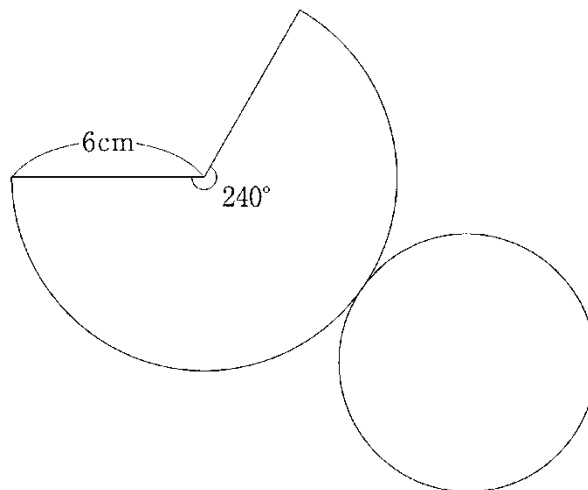
【問 37】

図のような円すいの展開図がある。側面の展開図は、半径が 6 cm 、中心角が 240° のおうぎ形である。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(佐賀県 2010 年度 後期)

(1) 底面の半径を求めなさい。



(2) 円すいの体積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³

解答

(1) 4 cm

(2) $\frac{32\sqrt{5}}{3} \pi \text{ cm}^3$

【問 38】

図のように、頂点が O で、底面の半径が 2 cm の円すいがある。また、底面の周上に直径 AB となるような 2 点 A, B をとる。図1はこの円すいの展開図で、おうぎ形の中心角は 120° である。このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(沖縄県 2010 年度)

問1 図1のおうぎ形の弧の長さを求めなさい。

図

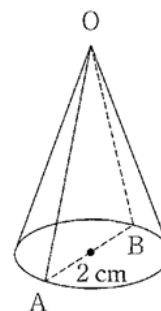


図1

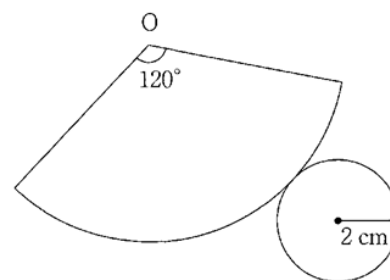


図2

問2 母線 OA の長さを求めなさい。

問3 母線 OA の中点を P とする。また、下の図2, 図3のように円すいの側面上で点 P, B を結び、その最小の長さを PB の長さとする。

(1) PB の長さを求めなさい。

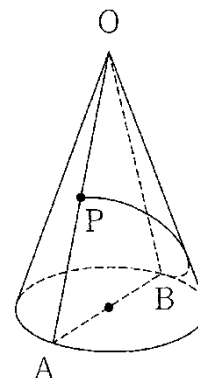
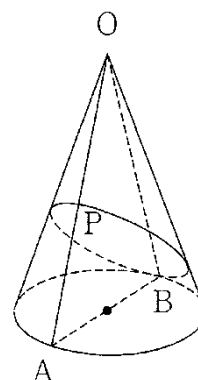


図3

(2) 円すいの側面上を点 P から B を通って点 P に戻ってきたとき、その線を境界として側面を 2 つに分ける。このとき、分けられた側面のうち点 A を含む部分の面積を求めなさい。



解答欄

問1	cm	
問2	cm	
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1 4π cm

問2 6 cm

問3

(1) $3\sqrt{3}$ cm

(2) $12\pi - 9\sqrt{3}$ cm²

解説

問1

おうぎ形の弧の長さは底面の円周と等しいので

$$2\pi \times 2 = 4\pi \text{ cm}$$

問2

OA=r cm とすると

おうぎ形の弧の長さが 4π cm より

$$2\pi r \times \frac{120}{360} = 4\pi$$

$$r = 6 \text{ cm}$$

問3

(1)

側面のおうぎ形において

ABを結ぶと OA=OB, $\angle AOB = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$ より△AOB は正三角形である。

BP が最小になるのは

展開図において B から OA に垂線をひいたときである。

正三角形 AOB において

$\angle OPB = 90^\circ$ より

△BOP は, OP:OB:BP = 1:2: $\sqrt{3}$ の直角三角形だから

$$BP = \frac{\sqrt{3}}{2} OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

(2)

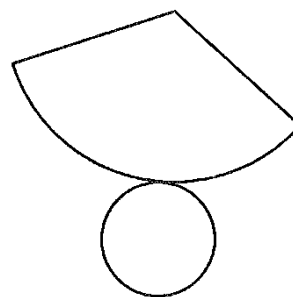
求める面積は

$$\text{側面のおうぎ形} - 2\triangle OBP = \pi \times 6^2 \times \frac{120}{360} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{2} \times 3\sqrt{3} = 12\pi - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 39】

図は、円錐の展開図である。底面の半径は 3 cm 、側面のおうぎ形の中心角は 120° である。この展開図を組み立てたときにできる円錐の高さを求めなさい。

(秋田県 2011 年度)



解答欄

cm

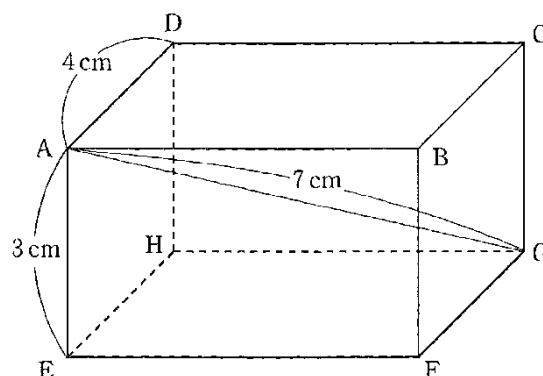
解答

$6\sqrt{2}\text{ cm}$

【問 40】

図のような、 $AD=4\text{ cm}$ 、 $AE=3\text{ cm}$ 、 $AG=7\text{ cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。このとき、 AB の長さを求めなさい。

(栃木県 2011 年度)



解答欄

cm

解答

$2\sqrt{6}\text{ cm}$

解説

$\triangle AGC$ で

三平方の定理より

$$AC = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\text{ cm}$$

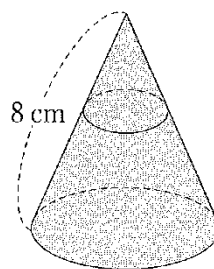
$\triangle ABC$ で三平方の定理より

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\text{ cm}$$

【問 41】

円錐の形のチョコレートがあります。このチョコレートの $\frac{1}{8}$ の量をもらえることになり、底面と平行に切って頂点のあるほうをもらうことにしました。母線の長さを 8 cm とすると、頂点から母線にそって何 cm のところを切ればよいかを求めなさい。

(埼玉県 2011 年度 前期)



解答欄

cm

解答

4 cm

解説

$1:8=1^3:2^3$ より

切り取った円錐の母線:もとの円錐の母線 $= 1:2$

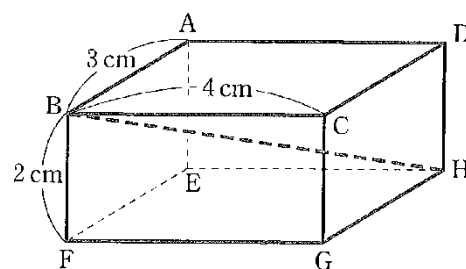
よって切り取った母線 $:8 = 1:2$

切り取った母線 $= \frac{8}{2} = 4\text{ cm}$

【問 42】

直方体で、対角線 BH の長さを答えなさい。

(新潟県 2011 年度)



解答欄

cm

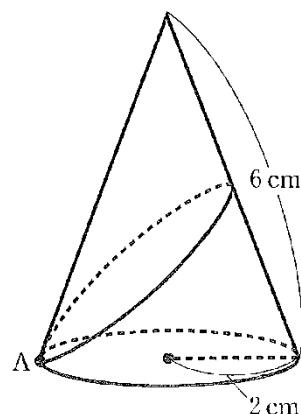
解答

$\sqrt{29}\text{ cm}$

【問 43】

図のように、底面の半径 2 cm、母線の長さ 6 cm の円すいがあり、底面の周上にある点 A から、円すいの側面を一周してもとの点 A まで、ひもをゆるまないようにかける。ひもの長さが最も短くなるとき、その長さを求めなさい。

(新潟県 2011 年度)



解答欄

cm

解答

$6\sqrt{3}$ cm

解説

円すいの頂点を O とし側面を OA で切り開く。

このときのおうぎ形を OAA' とする。

$\angle AOA' = x^\circ$ とすると

$$2\pi \times 6 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 2$$

$$x = 120^\circ$$

最も短いひもの長さは弦 AA' の長さと一致する。

O から AA' に垂線をひき交点を H とする。

OA = OA' = 6 cm より

$$\angle AOH = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$$

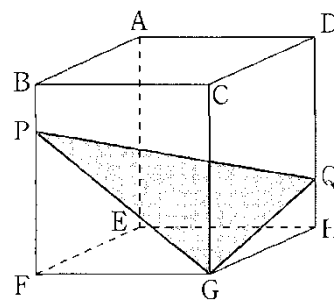
$$\text{よって } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$AA' = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

【問 44】

右の図のように、1 辺が 4 cm の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。点 P , Q は、それぞれ辺 BF , DH 上の点であり、 $BP=HQ=1$ cm である。このとき、 $\triangle PGQ$ の周りの長さを求めなさい。

(秋田県 2012 年度)



解答欄

cm

解答

$$11 + \sqrt{17} \text{ cm}$$

【問 45】

横が縦より 3 cm 長い長方形を底面とする、ふたのない合同な直方体の容器が 8 つある。すべての容器に水の深さが 3 cm となるように水を入れたところ、入った水の体積は 546 cm^3 であった。この容器の底面の縦の長さを求めなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。求める過程も書きなさい。

(福島県 2012 年度)

解答欄

〔求める過程〕

答 底面の縦の長さ cm

解答

〔求める過程〕

底面の縦の長さを x cm とすると横の長さは $(x+3)$ cm と表される。

容器 1 つ分の水の体積は $3x(x+3)$ cm³ であり

これが 8 つ分で 546 cm³ であるから

$$3x(x+3) \times 8 = 546$$

これを整理して

$$4x^2 + 12x - 91 = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 4 \times (-91)}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{1600}}{8}$$

$$= \frac{-12 \pm 40}{8}$$

$$x = \frac{-12 + 40}{8}, x = \frac{-12 - 40}{8}$$

$$x = \frac{7}{2}, x = -\frac{13}{2}$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{7}{2}$$

答 底面の縦の長さ $\frac{7}{2}$ cm

解説

容器の底面の縦を x cm とすると横は $(x+3)$ cm と表せる。

8 つの容器に入っている水の体積が 546 cm³ より

$$x(x+3) \times 3 \times 8 = 546$$

$$4x^2 + 12x - 91 = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 4 \times (-91)}}{2 \times 4} = \frac{-12 \pm 40}{8} = \frac{7}{2}, -\frac{13}{2}$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{7}{2}$$

よって底面の縦の長さは $\frac{7}{2}$ cm

【問 46】

表面積が $16\pi\text{ cm}^2$ である球の半径は何 cm か。

(長崎県 2012 年度)

解答欄

cm

解答

2 cm

解説

球の表面積は $4\pi r^2$ より

$$4\pi r^2 = 16\pi$$

$$r^2 = 4$$

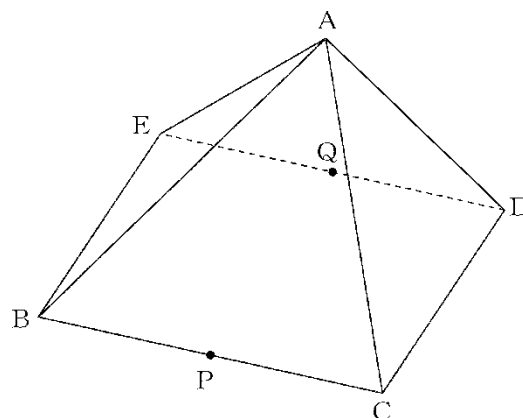
$r > 0$ より

$$r = 2\text{ cm}$$

【問 47】

図は、各辺の長さがすべて 8 cm の正四角すいである。辺 BC, DE の中点をそれぞれ点 P, Q とし、点 P から点 Q まで側面に糸をかける。この糸の長さが最も短くなるときの、糸の長さを求めなさい。

(青森県 2013 年度 前期)



解答欄

cm

解答

12 cm

解説

点 P から Q まで側面に糸をかけるとき

△ACD を通る場合と△ABE を通る場合の 2 通りがあるが、

同じことになるので△ACD を通る場合について考える。

この糸と辺 AC, AD との交点をそれぞれ F, G とする。

△ABC, △ACD, △ADE を辺 AC, AD がつながった状態で展開すると

PF+FG+GQ が最短になるのは

展開図において直線 PQ 上に F, G があるとき。

展開図の台形 CBED において P, Q はそれぞれ CB, DE の中点なので PQ // BE

よって PF:BA=1:2

$$PF = \frac{1}{2} BA = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$$

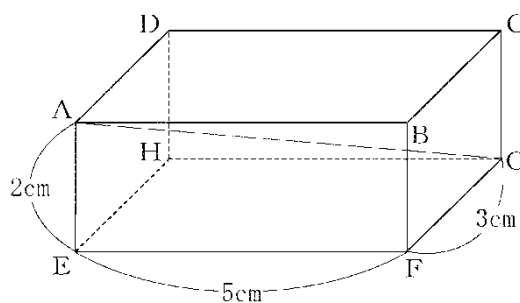
同様に FG=GQ=4 cm だから

求める長さは $4 \times 3 = 12 \text{ cm}$

【問 48】

右の図のような, $AE=2\text{ cm}$, $EF=5\text{ cm}$, $FG=3\text{ cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。この直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

(栃木県 2013 年度)



解答欄

cm

解答

$\sqrt{38}\text{ cm}$

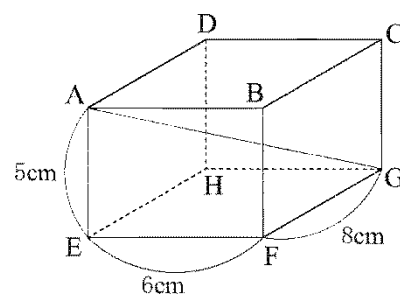
解説

三平方の定理を利用して $AG = \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{38}\text{ cm}$

【問 49】

図の直方体で, 対角線 AG の長さを求めなさい。

(島根県 2014 年度)



解答欄

cm

解答

$5\sqrt{5}\text{ cm}$

解説

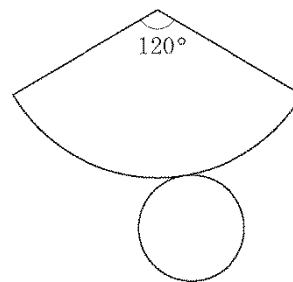
三平方の定理より

対角線 $AG = \sqrt{6^2 + 8^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}\text{ cm}$

【問 50】

展開図が下の図のような円すいがある。底面の円の半径が 2 cm のとき、円すいの高さは何 cm か。

(鹿児島県 2014 年度)



解答欄

cm

解答

$$4\sqrt{2}\text{ cm}$$

解説

側面のおうぎ形の半径を $r\text{ cm}$ とすると

$$2\pi r \times \frac{120}{360} = 2\pi \times 2$$

$$r = 6\text{ cm}$$

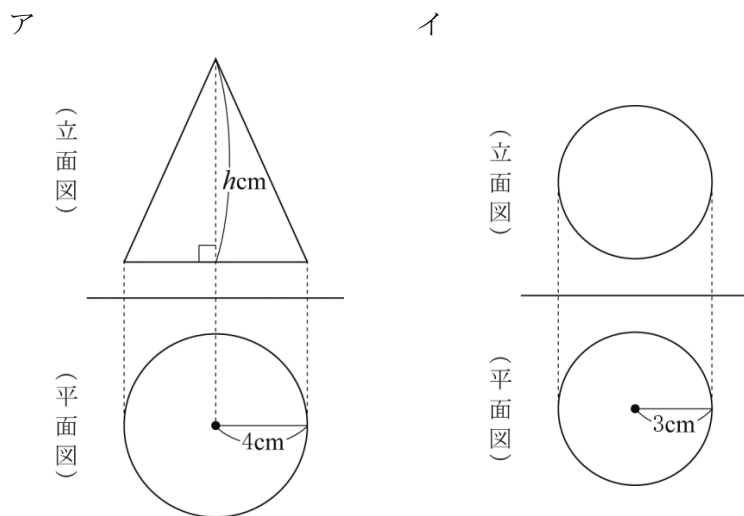
よって円すいの高さは

$$\sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

【問 51】

下のア、イは、体積が等しい立体のそれぞれの投影図である。アの立体の h の値を求めなさい。ただし、平面図は半径がそれぞれ 4 cm , 3 cm の円である。

(青森県 2015 年度)



解答欄

$h =$

解答

$$h = \frac{27}{4}$$

解説

立体アの体積は

$$\frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times h = \frac{16}{3} \pi h \text{ cm}^3$$

立体イの体積は

$$\frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 36 \pi \text{ cm}^3$$

立体アと立体イの体積が等しいので

$$\frac{16}{3} \pi h = 36 \pi$$

$$h = \frac{27}{4}$$

【問 52】

下の図1のように、底面が縦 12 cm、横 20 cm の長方形で、深さが 9 cm の直方体 ABCD－EFGH の容器に水が満たしてあります。

図2のように、この容器を傾けて、水面が頂点 H, A, F を通る平面になるように水をこぼしました。そして、図3のように、この容器を面 EFGH が底面となるように水平な机の上に置きました。このとき、容器に残った水の深さを求めなさい。

ただし、容器の厚さは考えないものとします。

(埼玉県 2015 年度)

図1

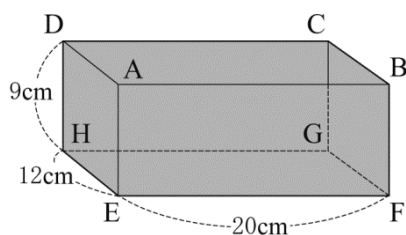


図2

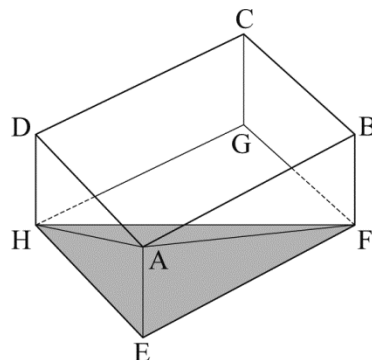
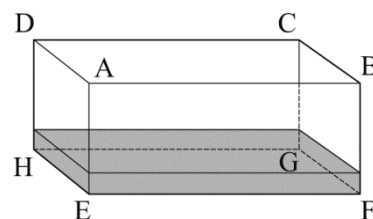


図3



解答欄

cm

解答

$$\frac{3}{2} \text{ cm}$$

解説

容器に残った水の量は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times 20 \times 9 = 360 \text{ cm}^3$$

容器に残った水の深さを x cm とすると

$$12 \times 20 \times x = 360$$

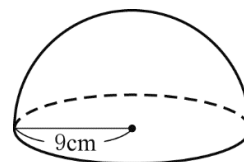
$$x = \frac{3}{2}$$

よって $\frac{3}{2} \text{ cm}$

【問 53】

図のような半径 9 cm の半球があります。この半球と等しい体積の円錐について考えます。円錐の底面の半径が 9 cm であるとき、円錐の高さは何 cm か求めなさい。

(滋賀県 2015 年度)



解答欄

cm

解答

18 cm

解説

半径 9 cm の半球の体積は

$$\frac{4}{3} \pi \times 9^3 \times \frac{1}{2} = 486 \pi \text{ cm}^3$$

底面の半径が 9 cm, 高さが h cm の円錐の体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times h = 27 \pi h \text{ cm}^3$$

この 2 つの体積が等しいので

$$27 \pi h = 486 \pi$$

$$h = 18 \text{ cm}$$

【問 54】

図1のように、相似な 2 つの円柱の形をした容器 A, B があり, その相似比は 3:2 である。容器 A の高さは 54 cm で, 容器 B には水がいっぱいに入っている。

図1

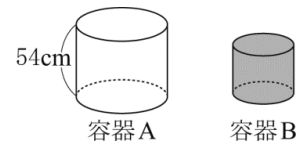
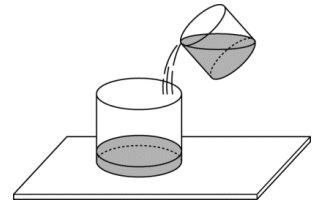


図2のように, 容器 B の水をこぼさないように, 水平な台に置かれた容器 A に移しかえた。

図2



このとき, 容器 A の底面から水面までの高さは何 cm になるか, 求めなさい。

ただし, 容器の厚さは考えないものとする。

(和歌山県 2015 年度)

解答欄

cm

解答

16 cm

解説

相似比が 3:2 より

容器 B の高さは

$$54:h=3:2$$

$$h=36$$

容器 A と容器 B の底面積の比は 9:4 より

容器 B の底面積を S とすると

$$\text{容器 A の底面積は } \frac{9}{4}S$$

容器 B に入っていた水の量は $36S$

よって容器 B の水を容器 A に入れたときの高さは

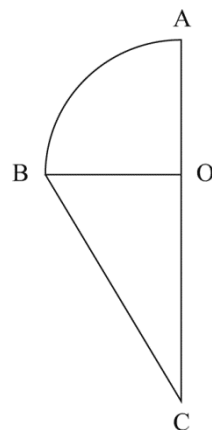
$$36S \div \frac{9}{4}S = 16 \text{ より}$$

16 cm

【問 55】

右の図のように、 $\angle AOB=90^\circ$ のおうぎ形 OAB と $\angle BOC=90^\circ$ の直角三角形 BCO があります。おうぎ形 OAB を線分 AO を軸として 1 回転させてできる立体の体積と直角三角形 BCO を辺 CO を軸として 1 回転させてできる立体の体積が等しいとき、線分 AO と辺 CO の長さの比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

(広島県 2015 年度)



解答欄

AO:CO= :

解答

$$AO:CO=1:2$$

解説

$AO=r$, $CO=h$ とする。

おうぎ形 OAB を線分 AO を軸に 1 回転してできる半球の体積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$\triangle OCB$ を辺 CO を軸として 1 回転してできる円すいの体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

この 2 つの回転体の体積が等しいので

$$\frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

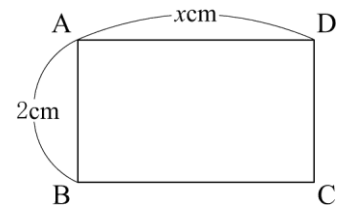
$$h=2r$$

よって $AO:CO=1:2$

【問 56】

図のような $AB=2\text{ cm}$, $AD=x\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ がある。この長方形を、直線 AB を軸として 1 回転させてできる立体の表面積は $96\pi\text{ cm}^2$ であった。このとき、 x の方程式をつくり、辺 AD の長さを求めなさい。ただし、 π は円周率である。

(栃木県 2016 年度)



解答欄

答え

cm

解答

$$\pi x^2 \times 2 + 2 \times 2 \pi x = 96 \pi$$

$$2 \pi x^2 + 4 \pi x = 96 \pi$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x+8)(x-6) = 0$$

$$x = -8, x = 6$$

$$x > 0 \text{ より}$$

$$x = 6$$

答え 6 cm

解説

長方形 $ABCD$ を 1 回転させてできる立体は底面の半径が $x\text{ cm}$ 、高さが 2 cm の円柱になる。

円柱の表面積 = 底面積 $\times 2$ + 側面積より

表面積に着目して方程式をつくと

$$\pi x^2 \times 2 + 2 \times 2 \pi x = 96 \pi$$

これを解くと

$$x = -8, x = 6$$

$$x > 0 \text{ より}$$

$$x = 6$$

よって $AD = 6\text{ cm}$

【問 57】

次の図1は、円柱の見取図とその投影図です。真上から見ると、平面図のように、6つの点 A, D, B, E, C, F が円周上に等間隔に並んでいます。図2のように、6つの点 A～F を 12本の線分をつなぎ、立体をつくります。図3は、その立体の見取図です。

このとき、下の問1、問2に答えなさい。

(岩手県 2017 年度)

図1

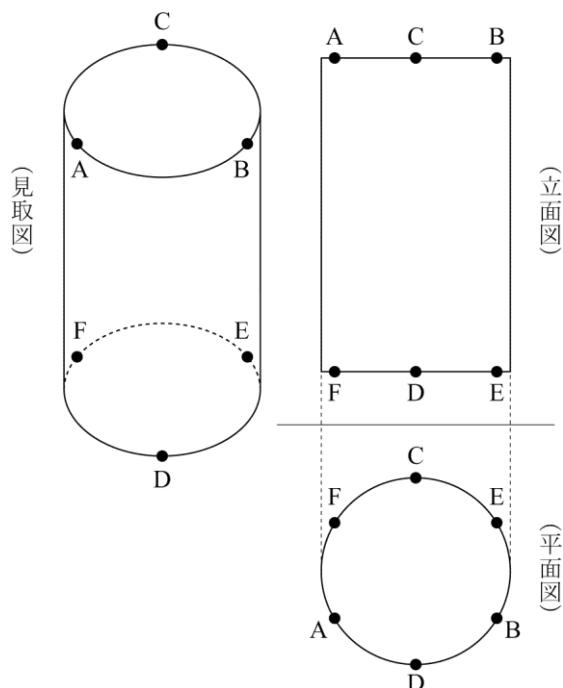


図2

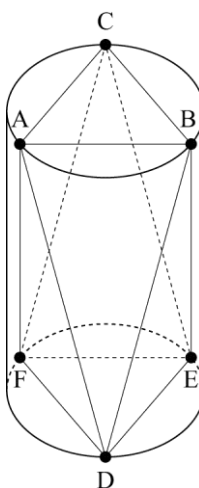
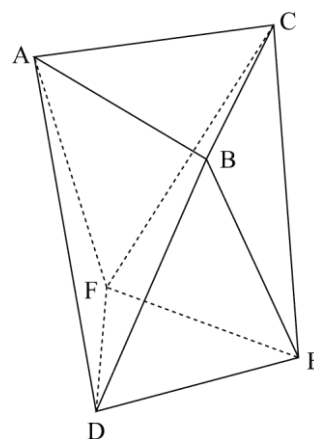
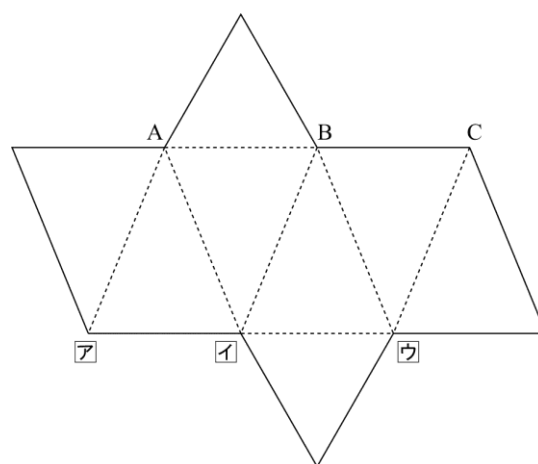


図3



問1 右の図4は、図3の立体の展開図で、図中の $\square \text{ア}$ ～ $\square \text{ウ}$ 図4

は、3点 D, E, F のいずれかの点です。3つの点 D, E, F のうち、 $\square \text{ア}$ ～ $\square \text{ウ}$ にあてはまる記号をそれぞれ書きなさい。



問2 図1の円柱の高さが 6 cm で、図3の $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が、ともに 1 辺の長さが 6 cm の正三角形のとき、AD の長さを求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	cm	

解答

問1

ア F

イ D

ウ E

問2 $4\sqrt{3}$ cm

解説

問1

辺 AB でつながっているのは面 ABC と面 ABD だから ☐ にあてはまるものは D である。

辺 AD でつながっているのは面 ABD と面 AFD だから ☐ にあてはまるものは F である。

辺 BD でつながっているのは面 ABD と面 EBD だから ☐ にあてはまるものは E である。

問2

点 D を通り底面に垂直な直線と $\widehat{AB}$ との交点を D' とすると

円周角の定理より

$$\angle AD'C = \angle ABC = 60^\circ$$

半円の弧に対する円周角は直角であるから $\angle D'AC = 90^\circ$

よって $\triangle CAD'$ は 90° , 30° , 60° の直角三角形になるから

$$AD' = \frac{1}{\sqrt{3}} AC = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 6 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$\triangle ADD'$ において

三平方の定理より

$$AD^2 = AD'^2 + D'D^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 = 48$$

$AD > 0$ より

$$AD = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

【問 58】

右の図1は、1 辺の長さが 12 cm の正方形から、かげ () をつけた部分を切り取ってできる正四角柱の展開図です。この展開図を組み立てて、図2のような正四角柱をつくれます。

この正四角柱の底面の 1 辺の長さが、高さの 2 倍になるとき、この正四角柱の高さを求めなさい。

(埼玉県 2017 年度)

図1

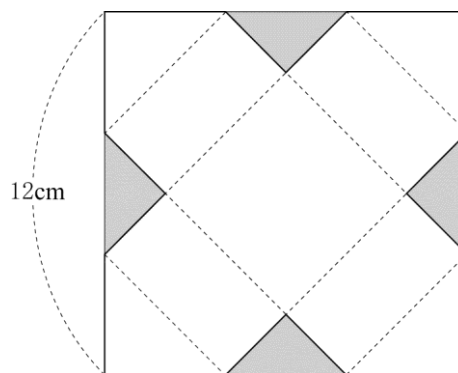
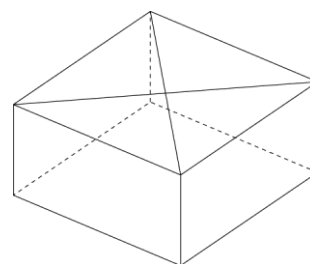


図2



解答欄

cm

解答

$$2\sqrt{2} \text{ cm}$$

解説

この正四角柱の高さを x cm とすると

底面の 1 辺の長さは $x \times 2 = 2x$ cm と表される。

かげをつけた部分を切り取る前の正方形の対角線の長さを x を使って表すと
 $2x \div 2 + x + 2x + x + 2x \div 2 = 6x$ cm になる。

1 辺の長さが 12 cm の正方形の対角線の長さは $12\sqrt{2}$ cm だから

$$6x = 12\sqrt{2}$$

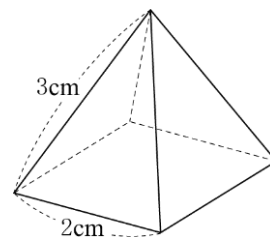
$$x = 2\sqrt{2}$$

【問 59】

右の図のように、底面が 1 辺 2 cm の正方形で、ほかの辺の長さがすべて 3 cm の正四角すいがある。

この正四角すいの高さを求めなさい。

(富山県 2017 年度)



解答欄

cm

解答

$\sqrt{7}$ cm

解説

底面の正方形の対角線の長さは $2\sqrt{2}$ cm

頂点と底面の対角線を通る面で切り取ったときの切り口は

辺の長さが 3 cm, 3 cm, $2\sqrt{2}$ cm の二等辺三角形になる。

この二等辺三角形の高さが正四角すいの高さと等しくなるので
高さを h cm とすると

三平方の定理より

$$h^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

$h > 0$ より

$$h = \sqrt{7} \text{ cm}$$

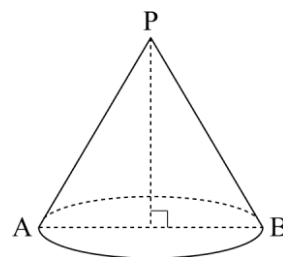
【問 60】

図1のように、底面の直径 AB と母線の長さ PA について $AB=PA=4\text{ cm}$ の円錐がある。

図1

(長野県 2017 年度)

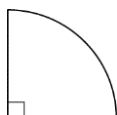
- (1) この円錐の側面の展開図はおうぎ形になる。その展開図として正しいものを、次のア～エから 1 つ選び、記号を書きなさい。



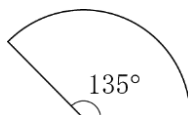
ア



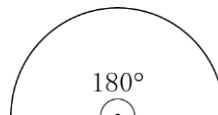
イ



ウ



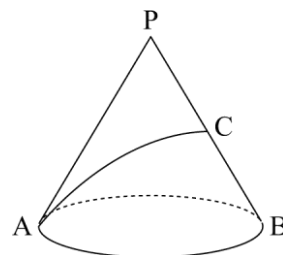
エ



- (2) 線分 PB の中点を C とする。図2のように、この円錐の表面に、点 A から点 C ま

図2

で、ひもをゆるまないようにかける。ひもの長さが最も短くなるとき、その長さを求めなさい。



解答欄

(1)	
(2)	cm

解答

(1) エ

(2) $2\sqrt{5}$ cm

解説

(1)

この円錐の底面の半径は $4 \div 2 = 2$ cm , 円周率を π , 側面のおうぎ形の中心角の大きさを a° とする。
円錐の展開図では側面のおうぎ形の弧の長さ と 底面の円の周の長さは等しくなるから

$$2\pi \times 4 \times \frac{a}{360} = 2\pi \times 2$$

$$\frac{a}{360} = \frac{2\pi \times 2}{2\pi \times 4}$$

$$\frac{a}{360} = \frac{1}{2}$$

$$a = 180$$

よってエが正しい。

(2)

ひもの長さが最も短くなる様子を側面の展開図上に表すと
右の図のように A と C を結んだ線分 AC となる。

図1で線分 AB は底面の円の直径であるから

$$\text{右の図において } \angle APB = 180^\circ \times \frac{1}{2} = 90^\circ$$

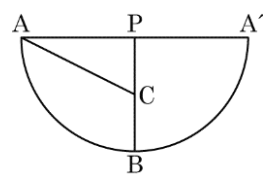
右の図の $\triangle ACP$ において

三平方の定理より

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$AC > 0$ より

$$AC = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

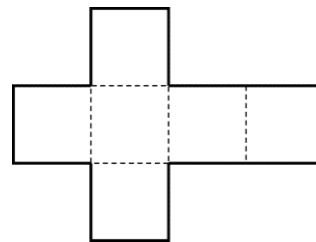


【問 61】

立方体と直方体の展開図について、次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2017 年度)

問1 図1は、立方体を辺にそって切り開いたときの展開図である。このように立方体を切り開くときに切った辺は何本あるか、求めなさい。



問2 図2のような縦 3 cm、横 2 cm、高さ 1 cm の直方体を辺にそって切り開いたときの展開図をかく。図3は、その展開図のうちの 1 つである。

図2

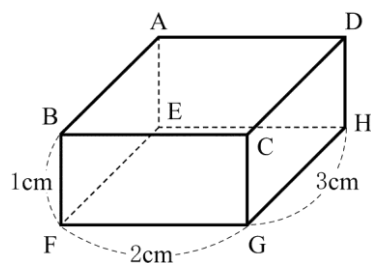
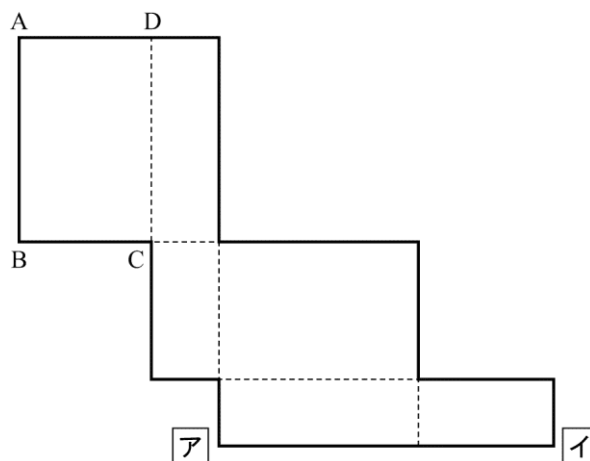


図3



(1) 図3の ア , イ の点は、それぞれ図2の A～H のどの頂点に対応するか、その記号を書きなさい。

(2) 図3のように切り開くときに切った辺の長さの合計は何 cm か、求めなさい。

(3) 図2の直方体の展開図のうち、周の長さが最長となるのは何 cm か、また、最短となるのは何 cm か、求めなさい。

解答欄

問1	本		
問2	(1)	ア	
		イ	
	(2)	cm	
	(3)	最長	cm
		最短	cm

解答

問1 7本

問2

(1)

ア B

イ D

(2) 14 cm

(3)

最長 34cm

最短 22cm

解説

問1

図1の立方体の展開図を見ると

面と面の間の破線が5本ありこの破線は立方体を切り開くときに切らなかった辺を表している。

よって立方体には辺が12本あるから切った辺は $12 - 5 = 7$ 本

問2

(1)

辺 CD でつながっているのは面 ABCD と面 DCGH だから

図3において点 D の右隣は点 H, 点 C の右隣は点 G である。

辺 CG でつながっているのは面 DCGH と面 CBFG だから

図3において点 C のすぐ下は点 B, 点 G のすぐ下は点 F である。

辺 FG でつながっているのは面 CBFG と面 GFEH だから

図3において点 G の右隣は点 H, 点 F の右隣は点 E である。

辺 FE でつながっているのは面 GFEH と面 FBAE だから

図3において点 F のすぐ下は点 B(ア) 点 E のすぐ下は点 A である。

辺 AE でつながっているのは面 FBAE と面 EADH だから

図3において点 E の右隣は点 H, 点 A の右隣は点 D(イ) である。

(2)

図3より

切らなかった辺は 3 cm が 2 本, 2 cm が 1 本, 1 cm が 2 本である。

図2の直方体には 3 cm の辺, 2 cm の辺, 1 cm の辺が 4 本ずつあるから

切った辺は 3 cm が 2 本, 2 cm が 3 本, 1 cm が 2 本である。

よって $3 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 2 = 14$ cm

(3)

3 cm の辺を多く切ると展開図の周の長さが長くなる。

逆に 1 cm の辺を多く切ると展開図の周の長さが短くなる。

周の長さが最長となる場合は

切らなかった 5 本の辺の長さを 1 cm, 1 cm, 1 cm, 2 cm, 2 cm としたときで

切った辺は 3 cm が 4 本, 2 cm が 2 本, 1 cm が 1 本となる。

辺を 1 本切ると展開図上では 2 本に分かれることから

展開図の周の長さは切った辺の長さの 2 倍になる。

よって $3 \times 2 \times 4 + 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 1 = 24 + 8 + 2 = 34$ cm

周の長さが最短となる場合は

切らなかった 5 本の辺の長さを 3 cm, 3 cm, 3 cm, 2 cm, 2 cm としたときで

このとき切った辺は 3 cm が 1 本, 2 cm が 2 本, 1 cm が 4 本となる。

よって $3 \times 2 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 4 = 22$ cm

【問 62】

図1のように、底面の 2 辺が 30 cm, 20 cm, 高さが x cm の直方体の木材がある。

図1

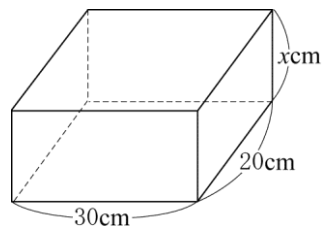
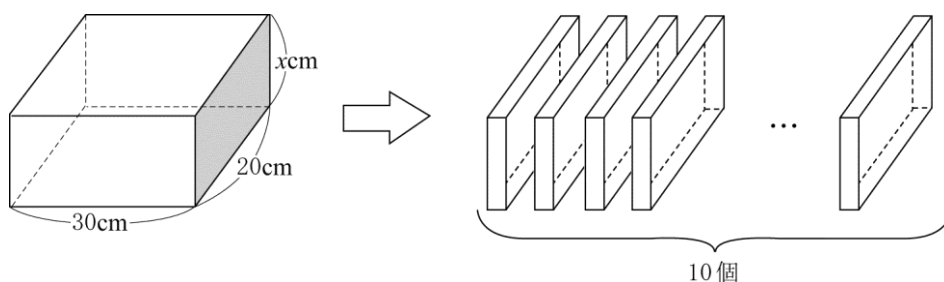


図2のように、その木材を  の面と平行に、10 個の直方体の木材に等しく切り分けた。

切り分けた 10 個の木材の表面積の和が、切る前の木材の表面積の 3 倍になるとき、 x の値を求めなさい。ただし、切る前の木材の体積と、切り分けた 10 個の木材の体積の和は、等しいものとする。

(和歌山県 2017 年度)

図2



解答欄

$x =$

解答

$$x = 15$$

解説

切る前の木材の表面積は

$$20 \times 30 \times 2 + x \times 30 \times 2 + x \times 20 \times 2 = 100x + 1200 \text{ cm}^2$$

切り分けた 10 個の木材は

縦 20cm, 横 $30 \div 10 = 3$ cm, 高さ x cm の直方体になるから

その表面積の和は

$$(20 \times 3 \times 2 + x \times 3 \times 2 + x \times 20 \times 2) \times 10 = 460x + 1200 \text{ cm}^2$$

よって $460x + 1200 = 3(100x + 1200)$ が成り立つ。

$$460x + 1200 = 300x + 3600$$

$$160x = 2400$$

$$x = 15$$

【問 63】

右の図のような三角柱があり、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $BC=2\text{ cm}$ 、 $CF=5\text{ cm}$ 、 $\angle DEF=90^\circ$ である。また、辺 AB 、 DF の中点をそれぞれ P 、 Q とし、点 P と点 Q を結ぶ。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えよ。

(香川県 2017 年度)

- (1) 次の㉑～㉕の辺のうち、面 $BCFE$ と平行な辺はどれか。正しいものを 1 つ選んで、その記号を書け。

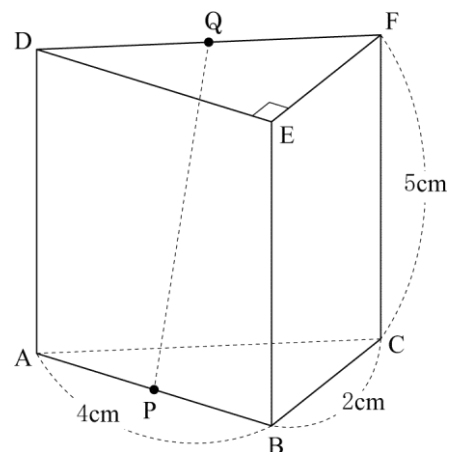
㉑ 辺 AB

㉒ 辺 AD

㉓ 辺 DE

㉔ 辺 DF

- (2) 線分 PQ の長さは何 cm か。



解答欄

(1)	
(2)	cm

解答

(1) ㉒

(2) $\sqrt{26}\text{ cm}$

解説

(1)

㉑～㉔の辺のうち交わらない辺は㉒の辺 AD

(2)

$\triangle ABC$ において

点 P を通り辺 BC に平行な直線と辺 AC との交点を R とする。

このとき中点連結定理より $PR=1\text{ cm}$ 、 $AR=RC$

$\triangle ABC$ と四角形 $DACF$ は垂直だから

$\angle QRP=90^\circ$ となり

$\triangle QPR$ において

三平方の定理より

$$PQ^2 = QR^2 + RP^2 = 25 + 1 = 26$$

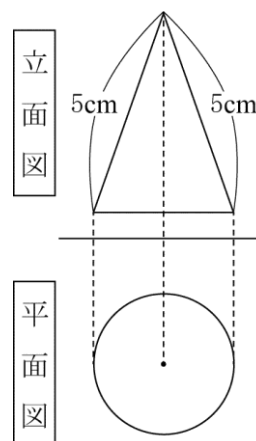
$PQ > 0$ より

$$PQ = \sqrt{26}\text{ cm}$$

【問 64】

図は、ある立体の投影図であり、平面図は円である。この立体の側面積が $15\pi\text{ cm}^2$ であるとき、底面の周の長さは何 cm か。ただし、 π は円周率とする。

(鹿児島県 2017 年度)



解答欄

cm

解答

$6\pi\text{ cm}$

解説

この立体は母線の長さが 5 cm の円錐である。

この円錐の展開図において

側面になるおうぎ形の中心角の大きさを a° とすると

側面積が $15\pi\text{ cm}^2$ であることから

$$\pi \times 5^2 \times \frac{a}{360} = 15\pi$$

$$\frac{a}{360} = \frac{15\pi}{25\pi}$$

$$\frac{a}{360} = \frac{3}{5}$$

$$a = 216$$

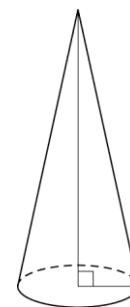
底面の周の長さは、側面になるおうぎ形の弧の長さに等しいから

$$2\pi \times 5 \times \frac{216}{360} = 6\pi\text{ cm}$$

【問 65】

右の図のように、底面の半径が 2 cm 、表面積が $40\pi\text{ cm}^2$ の円錐^{すい}がある。この円錐の高さを求めなさい。ただし、円周率を π とする。

(秋田県 2018 年度)



解答欄

cm

解答

$$8\sqrt{5}\text{ cm}$$

解説

底面積は $\pi \times 2^2 = 4\pi\text{ cm}^2$ だから側面積は $40\pi - 4\pi = 36\pi\text{ cm}^2$
円錐の母線の長さを $a\text{ cm}$ とし側面積について方程式をつくると

$$\pi a^2 \times \frac{2\pi \times 2}{2\pi a} = 36\pi$$

$$a = 18$$

円錐の高さを $h\text{ cm}$ とすると

三平方の定理より

$$h^2 + 2^2 = 18^2$$

$$h^2 = 320$$

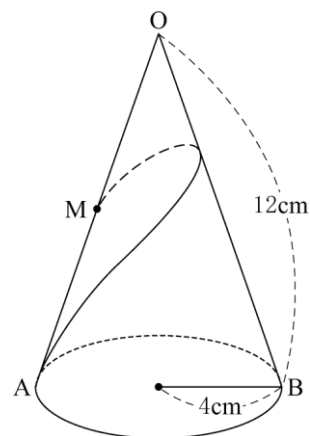
$h > 0$ より

$$h = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$$

【問 66】

底面の半径が 4 cm, 母線の長さが 12 cm の円錐があります。底面の 1 つの直径を AB とし, 円錐の頂点を O とします。また, 線分 OA の中点を M とします。この円錐の側面上に, 図のように点 A から線分 OB と交わり点 M まで線をひくとき, 最も短くなるようにひいた線の長さを求めなさい。

(埼玉県 2018 年度)



解答欄

cm

解答

$$6\sqrt{7}\text{cm}$$

解説

円すいを母線 OA に沿って展開する。

側面のおうぎ形において

組み立てたときに点 A と重なる点を A' とする。

側面のおうぎ形 OAA' の弧の長さは底面の円周の長さに等しいから

$$\text{側面のおうぎ形 OAA' の中心角の大きさを } \alpha^\circ \text{ とすると } 2\pi \times 12 \times \frac{\alpha}{360} = 2\pi \times 4$$

整理すると $\alpha = 120$

おうぎ形 OAA' において

点 M を線分 OA' 上にとると

ひいた線が最も短くなるのは

その線が線分 AM と一致するときである。

線分 AO を点 O の方向に延ばした直線に点 M から垂線をひき

直線 AO との交点を C とすると

$$\angle COM = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle OCM = 90^\circ \text{ で}$$

OM = 6cm だから

$$OC = 6 \times \frac{1}{2} = 3\text{cm}$$

$$CM = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

△AMC は $\angle ACM = 90^\circ$ の直角三角形だから

$$\text{三平方の定理より } AM = \sqrt{(12+3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{7} \text{ cm}$$

【問 67】

右の図1のような円すいがあり, 図2は図1の円すいの展開図である。図2において, 図1における側面の展開図は半円であり, その直径は 12 cm である。このとき, 円すいの底面の円の半径を求めよ。

(高知県 2018 年度 A)

図1

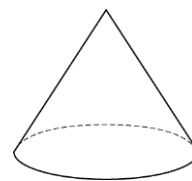
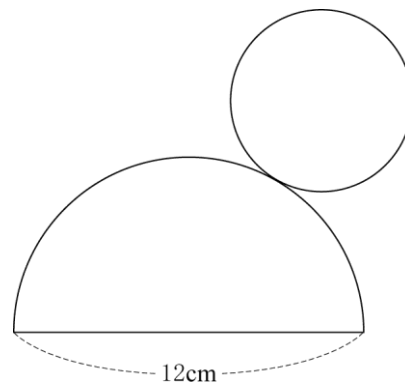


図2



解答欄

cm

解答

3cm

解説

円すいの底面の円の半径を $x\text{ cm}$ とする。

円すいの底面の円の円周と半円の弧の長さは等しいから

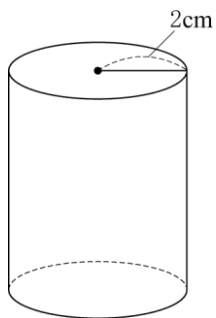
$$2\pi x = \pi \times 12 \times \frac{1}{2}$$

$$x = 3\text{cm}$$

【問 68】

下の図のように、底面の半径が 2 cm 、体積が $24\pi\text{ cm}^3$ の円柱があります。この円柱の高さを求めなさい。

(北海道 2019 年度)



解答欄

cm

解答

6 cm

解説

円柱の高さを $h\text{ cm}$ とすると

体積について

方程式 $\pi \times 2^2 \times h = 24\pi$ が成り立つ。

よって $4\pi h = 24\pi$

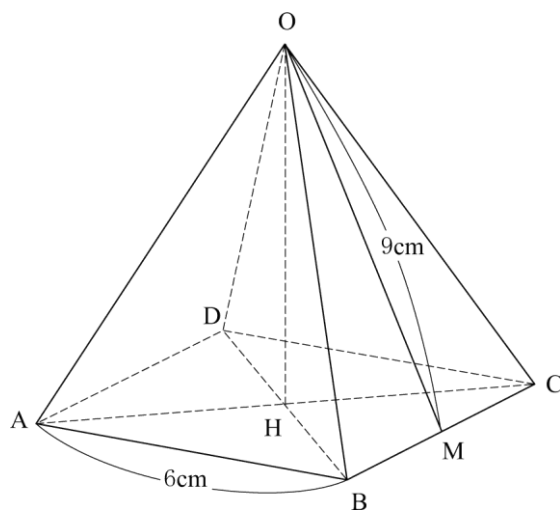
$h = 6$

したがって、求める高さは 6 cm

【問 69】

下の図において、四角すい $OABCD$ は、 $AB=6\text{ cm}$ の正四角すいである。点 M は辺 BC の中点であり、 $OM=9\text{ cm}$ である。四角形 $ABCD$ の 2 つの対角線 AC 、 BD の交点を H とするとき、 OH の長さを求めなさい。

(山形県 2019 年度)



解答欄

cm

解答

$$6\sqrt{2}\text{ cm}$$

解説

正四角すいの底面は正方形で
正方形の対角線はそれぞれの中点で交わるから
点 H は対角線 AC の中点である。
また、点 M は辺 BC の中点だから
 $\triangle ABC$ で中点連結定理より

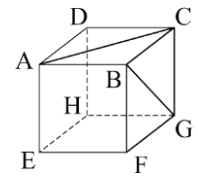
$$HM = \frac{1}{2}AB = 3(\text{cm})$$

よって、 $\triangle OHM$ で三平方の定理より

$$OH = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$$

【問 70】

右の図のような立方体がある。面 ABCD 上の線分 AC と面 BFGC 上の線分 BG の長さについて、正しく述べられている文は、ア～エのうちではどれですか。一つ答えなさい。



(岡山県 2019 年度 一般)

- ア 線分 AC の方が長い。
- イ 線分 BG の方が長い。
- ウ 線分 AC と線分 BG の長さは等しい。
- エ どちらが長いかは、問題の条件だけでは決まらない。

解答欄

解答

ウ

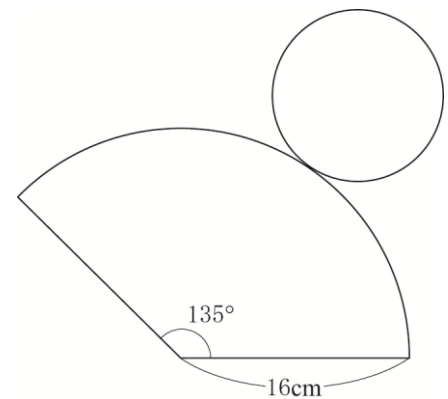
解説

線分 AC、線分 BG とともに、立方体の面である正方形の対角線だから、長さは等しい。よって、ウ

【問 71】

右の図は、円錐の展開図である。この展開図を組み立てたとき、側面となるおうぎ形は、半径が 16 cm、中心角が 135° である。底面となる円の半径を求めなさい。

(徳島県 2019 年度)



解答欄

cm

解答

6 (cm)

解説

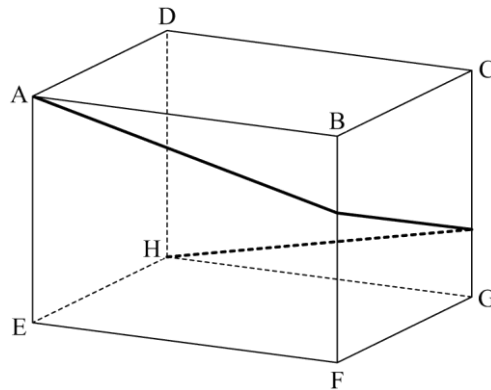
側面となるおうぎ形の弧の長さは、底面となる円の周の長さと等しい。

よって、底面となる円の半径を r cm とすると、 $2\pi r = 2\pi \times 16 \times \frac{135}{360}$ $r = 6$

【問 72】

下の図のように、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $AD=2\text{ cm}$ 、 $AE=3\text{ cm}$ の直方体の表面に、ひもを、頂点 A から頂点 H まで、辺 BF と辺 CG に交わるようにかける。ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さを求めよ。

(愛媛県 2019 年度)



解答欄

cm

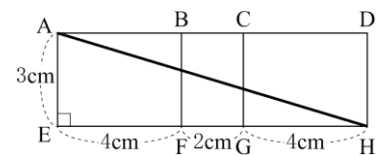
解答

$\sqrt{109}$ (cm)

解説

ひもの長さが最も短くなるのは、右の展開図で線分 AH のようにひもをかけるときである。

$\triangle AEH$ で、三平方の定理より、 $AH^2 = AE^2 + EH^2 = 3^2 + (4 + 2 + 4)^2 = 109$
 $AH > 0$ だから、 $AH = \sqrt{109}(\text{cm})$

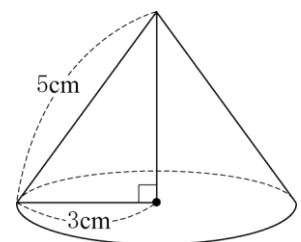


【問 73】

右の図のような、底面の半径が 3 cm 、母線の長さが 5 cm の円錐があります。この円錐の高さと体積をそれぞれ求めなさい。

ただし、円周率は π とします。

(埼玉県 2020 年度)



解答欄

高さ	cm
体積	cm^3

解答

高さ 4 (cm)

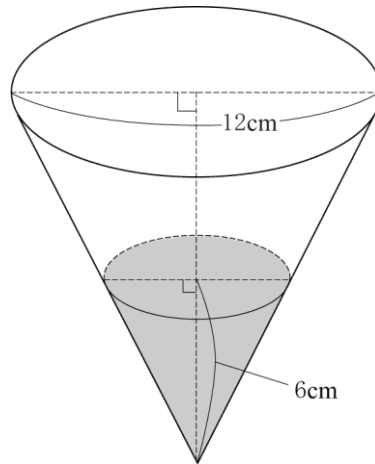
体積 12π (cm^3)

【問 74】

下の図のように、底面の直径が 12 cm 、高さが 12 cm の円錐^{すい}の容器を、頂点を下にして底面が水平になるように置き、この容器に頂点からの高さが 6 cm のところに水面がくるまで水を入れた。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

このとき、(1)、(2)の問いに答えなさい。

(佐賀県 2020 年度 一般)



- (1) 水面のふちでつくる円の半径を求めなさい。
- (2) 容器の中の水をさらに増やし、容器の底面までいっぱいに入れた。このときの体積は、水を増やす前に比べて何倍になったか求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	倍

解答

(1) 3 cm

(2) 8 倍

【問 75】

右の図 1 は、線分 AB を直径とする円 O を底面とし、線分 AC を母線とする円すいである。

また、点 D はこの円すいの側面上に、点 A から点 B まで長さが最も短くなるように線を引き、この線を 2 等分した点である。

$AB=6\text{ cm}$ 、 $AC=9\text{ cm}$ のとき、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(神奈川県 2021 年度)

問 1 この円すいの体積として正しいものを次の 1～6 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 $9\sqrt{5}\pi\text{ cm}^3$ | 2 $18\sqrt{2}\pi\text{ cm}^3$ |
| 3 $27\sqrt{5}\pi\text{ cm}^3$ | 4 $54\sqrt{2}\pi\text{ cm}^3$ |
| 5 $36\sqrt{5}\pi\text{ cm}^3$ | 6 $72\sqrt{2}\pi\text{ cm}^3$ |

問 2 この円すいの表面積として正しいものを次の 1～6 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1 $\frac{33}{4}\pi\text{ cm}^2$ | 2 $9\pi\text{ cm}^2$ |
| 3 $15\pi\text{ cm}^2$ | 4 $\frac{117}{4}\pi\text{ cm}^2$ |
| 5 $36\pi\text{ cm}^2$ | 6 $63\pi\text{ cm}^2$ |

問 3 この円すいの側面上に、図 2 のように点 D から線分 AC 、線分 BC と交わるように点 D まで円すいの側面上に引いた線のうち、長さが最も短くなるように引いた線の長さを求めなさい。

図 1

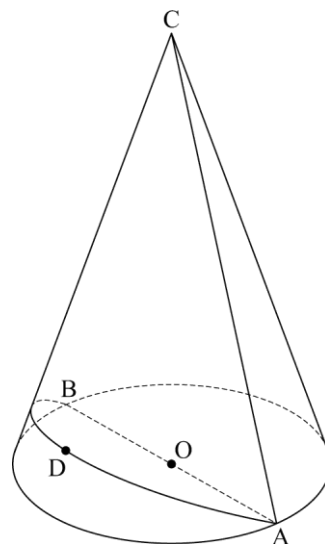
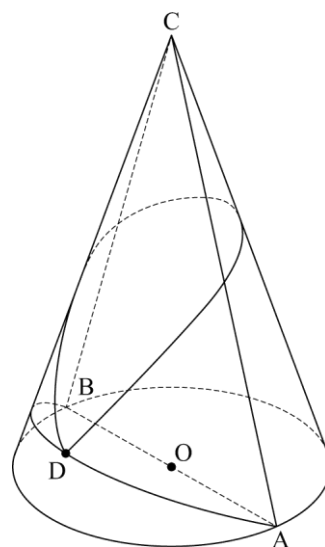


図 2



解答欄

問 1	
問 2	
問 3	cm

解答

問 1 2

問 2 5

問 3 $\frac{27}{2}$ (cm)

解説

問 1

$\triangle ABC$ に着目すると, $CO \perp AB$ なので, $\triangle COA$ は直角三角形である。

よって, $OC^2 + OA^2 = CA^2 \Rightarrow OC^2 + 3^2 = 9^2 \Rightarrow OC^2 = 72$

$\Rightarrow OC > 0$ より, $OC = 6\sqrt{2}$ (cm)

したがって, 円すいの体積は, $\pi \times 3^2 \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = 18\sqrt{2}\pi$ (cm³)

問 2

円すいの側面は, 点 C を中心とする半径 9 cm のおうぎ形であり
その弧の長さは, 円すいの底面の円周と等しく, 6π cm である。

また, 弧の長さは, $18\pi \times \frac{(\text{おうぎ形の中心角})}{360}$ とも表せるので

$18\pi \times \frac{(\text{おうぎ形の中心角})}{360} = 6\pi \Rightarrow (\text{おうぎ形の中心角}) = 120^\circ$

よって, おうぎ形の面積は, $\pi \times 9^2 \times \frac{120}{360} = 27\pi$ (cm²) だから

底面の面積 $\pi \times 3^2 = 9\pi$ (cm²) をたして, 円すいの表面積は, $27\pi + 9\pi = 36\pi$ (cm²)

問 3

まず, 円すいの側面を直線 CA で切り開いた展開図で考える (図 1)。

おうぎ形の中心角が 120° で

この図において, 点 B はおうぎ形の弧の midpoint に位置するので
 $\angle BCA = 60^\circ$ とわかる。

さらに, $CB = CA$ より

$\triangle ABC$ は正三角形だから

$\triangle CBD$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ を内角にもつ直角三角形である。

よって $CB : CD = 2 : \sqrt{3} \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{3}}{2} CB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 9 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm)

次に, 円すいの側面を直線 CD で切り開いた展開図で考える (図 2)。

点 D どうしを結んだ線分に点 C から垂線 CF をひくと

$\triangle CFD$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ を内角にもつ直角三角形となる。

よって, $CD : FD = 2 : \sqrt{3}$

$\Rightarrow FD = \frac{\sqrt{3}}{2} CD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4}$ (cm)

したがって, 求める線の長さは, $\frac{27}{4} \times 2 = \frac{27}{2}$ (cm)

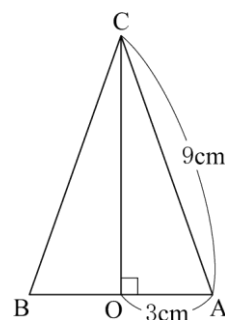


図 1

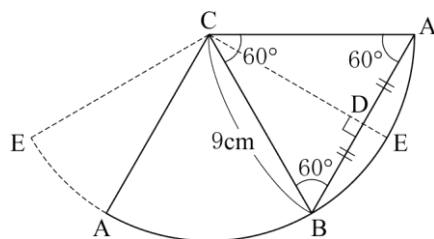
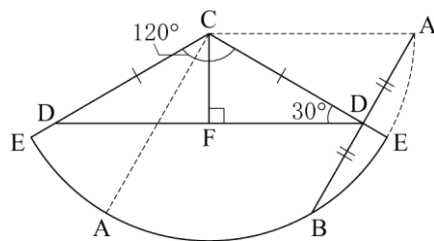


図 2



【問 76】

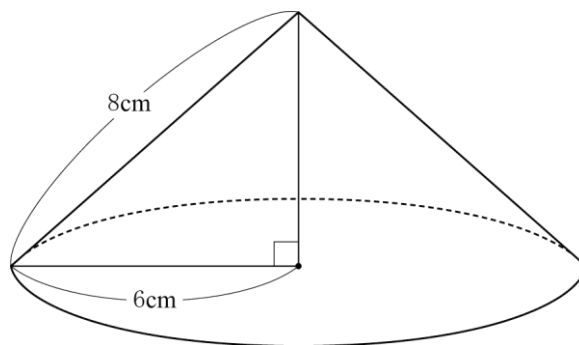
図 1 のような底面の円の半径が 6 cm、母線の長さが 8 cm の円錐がある。

このとき、次の問 1、問 2 に答えなさい。

(山梨県 2021 年度)

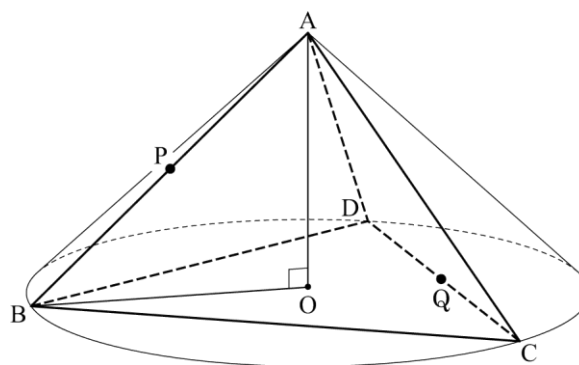
問 1 この円錐の高さを求めなさい。

図 1



問 2 図 2 のように、図 1 の円錐の頂点を A、底面の円の中心を O とする。また、底面の円周上に 3 点 B、C、D を等間隔にとり、4 点 A、B、C、D を頂点とする三角錐 ABCD を考える。さらに、辺 AB、CD の中点をそれぞれ P、Q とする。

図 2



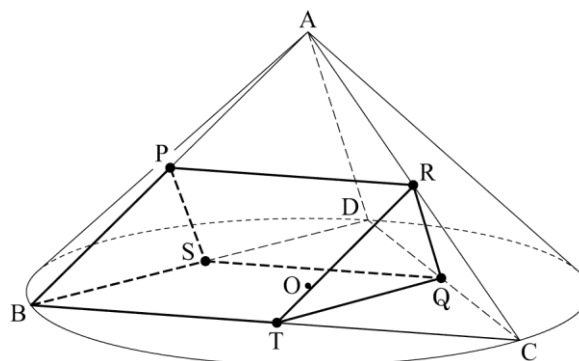
このとき、次の (1) ~ (4) に答えなさい。

- (1) 次のア～オから、辺 AC とねじれの位置にある辺や線分をすべて選び、その記号を書きなさい。

図 3

- ア 辺 AB イ 辺 BC
ウ 辺 BD エ 線分 AO
オ 線分 OB

- (2) 三角錐 ABCD の体積を求めなさい。



- (3) 線分 PQ の長さを求めなさい。

- (4) 図 3 のように、辺 AC、BD、BC の中点をそれぞれ R、S、T とするとき、6 点 P、B、S、R、T、Q を頂点とする立体の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	cm	
問 2	(1)	
	(2)	cm ³
	(3)	cm
	(4)	cm ³

解答

問1 $2\sqrt{7}$ cm

問2

(1) ウ, オ

(2) $18\sqrt{21}$ cm³

(3) $\sqrt{43}$ cm

(4) $\frac{27\sqrt{21}}{4}$ cm³

解説

問2

(2)

3点B, C, Dは円周上に等間隔にとった点だから
△BCDは正三角形である。

よって, △OQCで, $OQ \perp CD$, $\angle OCQ = 30^\circ$ より

$OQ : OC : QC = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$OC = 6\text{cm}$ より, $OQ = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$, $QC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}(\text{cm})$

だから△BCDの面積は $2 \times 3\sqrt{3} \times (6+3) \times \frac{1}{2} = 27\sqrt{3}$
(cm²)

問1より $AO = 2\sqrt{7}\text{cm}$ だから, 三角錐ABCDの体積は,
 $27\sqrt{3} \times 2\sqrt{7} \times \frac{1}{3} \times 18\sqrt{21}$ (cm³)

(3)

点Pから△BCDに垂線をひき, △BCDとの交点をHとすると, △PHB ∽ △AOB

相似比は $PB : AB = 1 : 2$ だから,

$PH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} = \sqrt{7}$ (cm), $BH = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$

△PHQにおいて, 三平方の定理より,

$PQ^2 = PH^2 + QH^2 = (\sqrt{7})^2 + (9-3)^2 = 7 + 36 = 43$

よって, $PQ = \sqrt{43}$ (cm)

(4)

立体PBSRTQの体積は, 三角錐PBTS, 三角錐RSTQ,
三角錐SPTRの体積の和として求められる。三角錐PBTSは△BTSを底面と考えると, 高さは(3)で求めたPHに等しい。△BTSは1辺 $3\sqrt{3}\text{cm}$ の正三角形だから, その面積は,

$3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (cm²)

よって, 三角錐PBTSの体積は,

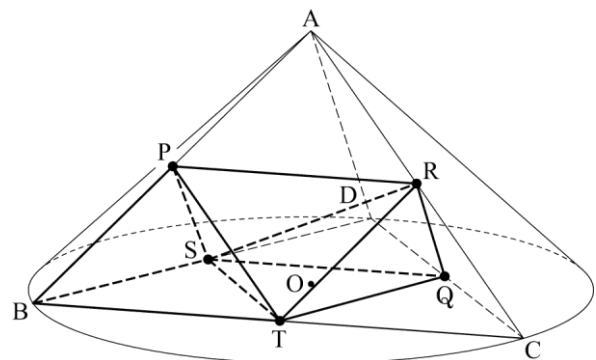
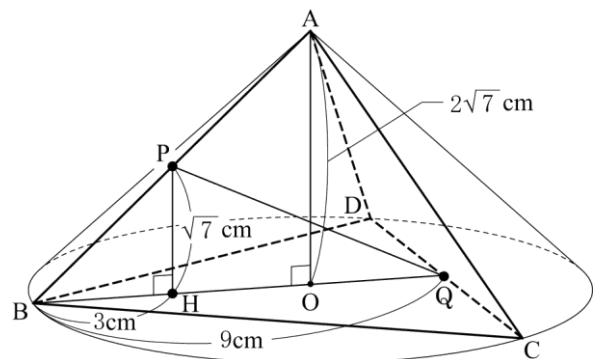
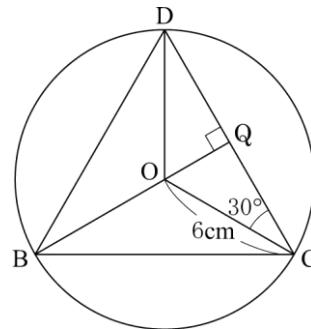
$\frac{27\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{7} \times \frac{1}{3} = \frac{9\sqrt{21}}{4}$ (cm³)

三角錐RSTQも△STQを底面と考えると高さはPHに等しく, △STQは1辺 $3\sqrt{3}\text{cm}$ の正三角形だから,
体積は三角錐PBTSと等しく, $\frac{9\sqrt{21}}{4}$ cm³

三角錐SPTRを, △PTRを底面と考えたときの高さは, 三角錐PBTSを, △TPBを底面と考えたときの高さと等しい。

△PTR ≡ △TPB であるから, 三角錐SPTRの体積は, 三角錐PBTSの体積に等しく, $\frac{9\sqrt{21}}{4}$ cm³

よって, 立体PBSRTQの体積は, $\frac{9\sqrt{21}}{4} \times 3 = \frac{27\sqrt{21}}{4}$ (cm³)



【問 77】

太郎さんは、花子さんと体育大会で使う応援用のメガホンを学級の人数分作ることにしました。後の問 1 から問 4 に答えなさい。

(滋賀県 2021 年度)

まず、ボール紙に図 1 の展開図をかき、母線の長さが 60 cm の円すいの形を作ると図 2 のようになりました。

点 A は頂点、線分 BC は底面の直径を表しています。また点 D、E は、母線 AB を 3 等分する点です。

問 1 図 2 の直径 BC の長さを求めなさい。

図 1

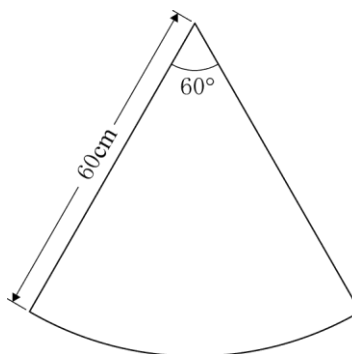
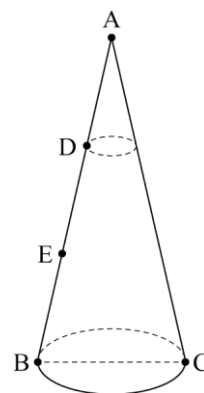


図 2



次に、点 D を通り、底面に平行な平面でこの円すいを切って図 3 のメガホンを作りました。線分 DF はメガホンの上面の円の直径を表しています。図 4 の実線は、図 3 のメガホンの展開図です。このメガホンに図 5 のような飾りのついたひもを側面に巻きながら貼りつけて完成となります。

図 3

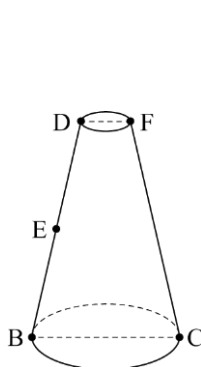


図 4

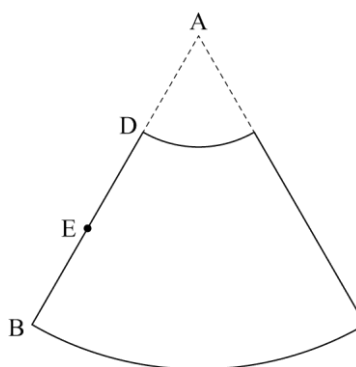


図 5

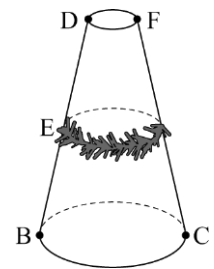


2人は飾りのついたひもをどのように巻きつけるか、またどれぐらいの長さのひもが必要かを考えました。ただし、ボール紙の厚さとひもの太さは考えないものとします。

考えたこと

- 図3のメガホンに、図6のように飾りのついたひもを点Eから側面に沿って点Eまで1周巻きつけたとき、どのように巻きつけるとひもの長さが最も短くなるのかを考えました。

図6



太郎さん

①ひもを底面の円周と平行になるように1周巻きつけたときに、ひもの長さが最も短いのではないかな。

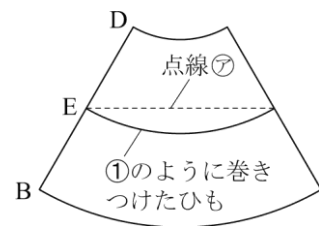
メガホンのままではわからないね。メガホンに飾りのついていないひもを巻きつけて展開図で確かめてみましょう。



花子さん

- 2人は、図7の展開図で考えてみました。

図7



太郎さん

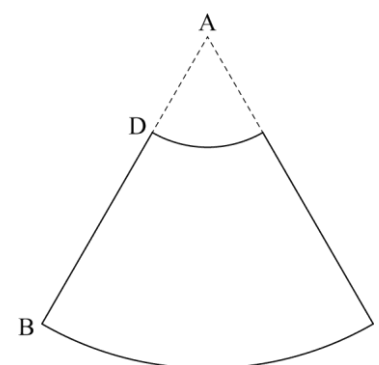
点線⑦のようにひもを巻きつければ短くなるね。

図7のように、展開図でひもの巻きつけ始める点と巻きつけ終わる点を直線で結べばよさそうね。



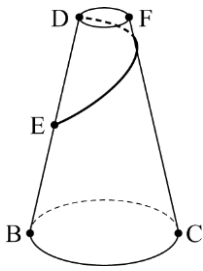
花子さん

問2 下線部①のように太郎さんがひもを巻きつけたとき、ひもと線分FCとの交点Pをコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし、作図に使った線は消さないこと。



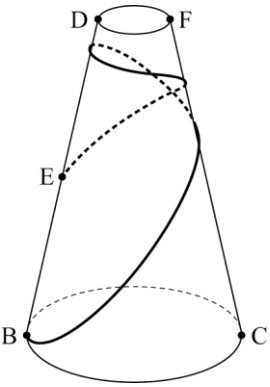
問 3 次に太郎さんは、図 8 のようにひもを点 E から側面に沿って線分 FC を横切って点 D まで巻きつけようと考えました。巻きつけるひもの長さが最も短いときのひもの長さを求めなさい。

図 8



問 4 さらに太郎さんは、ひもを点 B から側面に沿って線分 FC を 2 回横切って点 E まで巻きつけようと考えました。図 9 は、花子さんと考えたことを応用して、ひもの長さが最も短くなるように巻きつける様子を表したものです。巻きつけるひもの長さを求めなさい。

図 9



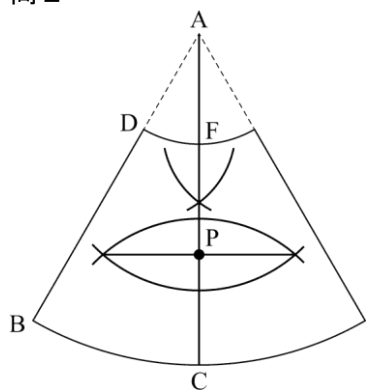
解答欄

問 1	cm
問 2	
問 3	cm
問 4	cm

解答

問 1 20 cm

問 2



問 3 $20\sqrt{3}$ cm

問 4 $20\sqrt{19}$ cm

解説

問 1

円すいの側面のおうぎ形の弧の長さと、円すいの底面の円周の長さは等しいので直径 BC の長さを x cm とすると、

$$2\pi \times 60 \times \frac{60}{360} = \pi x, \quad x = 20 \text{ (cm)}$$

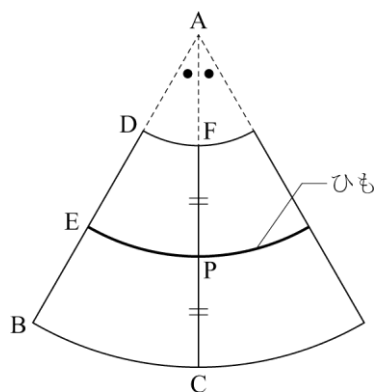
問 2

完成図を予想すると、図 1 のようになる。

おうぎ形の中心角の二等分線を作図したあと

線分 FC の中点をとるために、線分 FC の垂直二等分線を作図すればよい。

図 1



問 3

展開図にひもの様子を示すと、図 2 のようになる。

図 3 のように、 $\triangle AED'$ を取り出して考える。

図 2

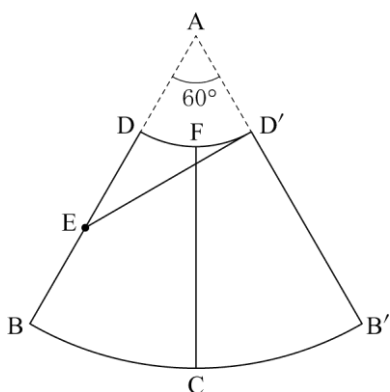
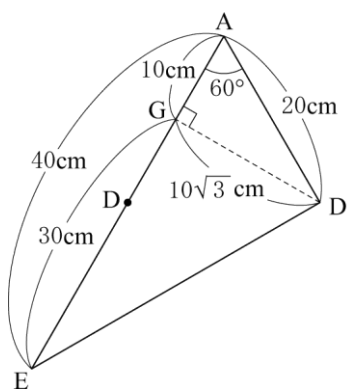


図 3



点 D' から線分 AE に垂線 $D'G$ をおろすと

$\triangle GAD'$ において、 $\angle GAD' = 60^\circ$, $\angle AGD' = 90^\circ$,

$AD' = 20$ (cm) より、 $AG : AD' = 1 : 2$, $AG = 10$ (cm)

$AG : GD' = 1 : \sqrt{3}$, $GD' = 10\sqrt{3}$ (cm)

$\triangle EGD'$ において、 $EG = AE - AG = 30$ (cm), 三平方の定理より、

$ED'^2 = EG^2 + GD'^2 = 30^2 + (10\sqrt{3})^2 = 1200$, $ED' > 0$ より、 $ED' = 20\sqrt{3}$ (cm)

問 4

ひもが線分 FC を 2 回横切ることに注意すると、展開図を 2 つ連ねた図にひもの様子を示すことができ、**図 4** のようになる。

点 E'' から直線 AB に垂線 $E''H$ をおろすと、 $\triangle AHE''$ において、 $\angle HAE'' = 180^\circ - \angle BAE'' = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 、 $\angle AHE'' = 90^\circ$ 、 $AE'' = 40\text{cm}$ より、 $AH : AE'' = 1 : 2$ より $AH = 20(\text{cm})$

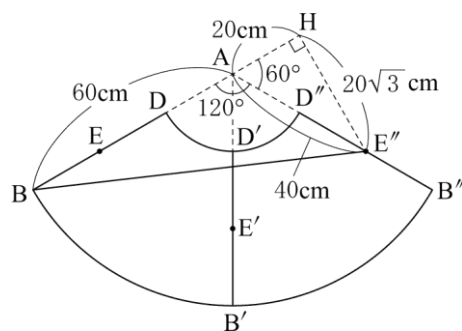
$AH : HE'' = 1 : \sqrt{3}$ だから、 $HE'' = 20\sqrt{3}(\text{cm})$

$\triangle BHE''$ において、 $BH = AB + AH = 80(\text{cm})$ 、三平方の定理より、

$$BE''^2 = BH^2 + HE''^2 = 80^2 + (20\sqrt{3})^2 = 7600$$

$BE'' > 0$ より、 $BE'' = 20\sqrt{19}(\text{cm})$

図 4



【問 78】

図 1 は、立方体の展開図である。この展開図を組み立ててできる立体において、頂点 P と頂点 A, B, C, D をそれぞれ結ぶ線分のうち、最も長いものはどれか。次のア～エから 1 つ選び、その記号を書け。

(奈良県 2021 年度)

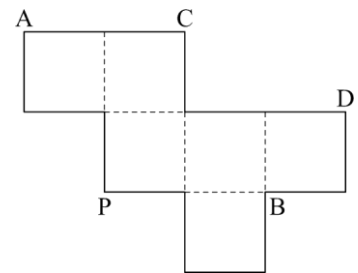
ア 線分 PA

イ 線分 PB

ウ 線分 PC

エ 線分 PD

図 1



解答欄

解答

ウ

解説

右の図のように、展開図を組み立てたときに点 P と重なる 2 点を P', P'', 点 C と重なる点を C', 点 D と重なる点を D' とし、立方体の 1 辺の長さを 1cm として考える。

ア P'A は面の正方形の 1 辺となるから、 $PA = P'A = 1\text{cm}$

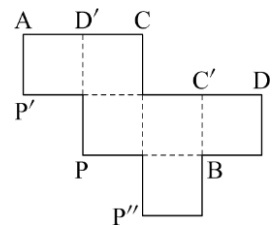
イ P''B は面の正方形の対角線となるから、 $PB = P''B = \sqrt{2}\text{cm}$

ウ 点 P, P', P'' と点 C, C' はどの組み合わせでも同じ面の正方形の頂点にならないことから、PC は立方体の対角線となるとわかる。

よって、 $PC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}\text{cm}$

エ P'D' は正方形の対角線となるから、 $PD = P'D' = \sqrt{2}\text{cm}$

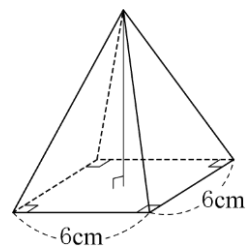
以上より、最も長い線分は、線分 PC である。



【問 79】

底面が 1 辺 6 cm の正方形で、体積が 96 cm^3 である四角すいの高さを求めなさい。

(山口県 2021 年度)



解答欄

cm

解答

8 cm

解説

四角すいの高さを $x \text{ cm}$ とすると

四角すいの体積は

$$6^2 \times x \times \frac{1}{3} = 12x (\text{cm}^3) \text{ である。}$$

よって、 $12x = 96$

$$x = 8 (\text{cm})$$