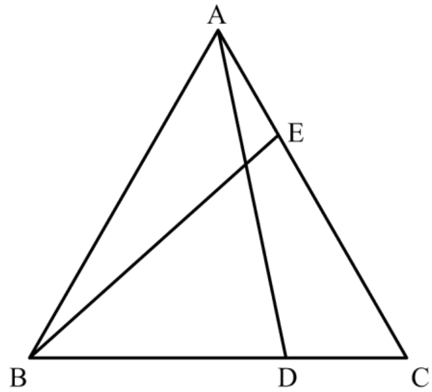
3．合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2016 年度出題】

【問 1】

右の図の正三角形 ABC で，BC，CA 上にそれぞれ点 D，E をとる。BD ＝CE のとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県　2016 年度）



(1) △ABD と△BCE が合同になることを次のように証明した。

ⓐ ，ⓘ にあてはまる式やことばを入れなさい。

〔証明〕

△ABD と△BCE で

仮定より，BD＝CE …①

また，△ABC は正三角形だから

ⓐ …②

∠ABD＝∠BCE …③

①，②，③から，ⓘ がそれぞれ等しいので

△ABD≡△BCE

(2) AD と BE の交点を F とするとき，∠AFB の大きさを求めなさい。

解答欄

(1)	ⓐ	
	ⓘ	
(2)	度	

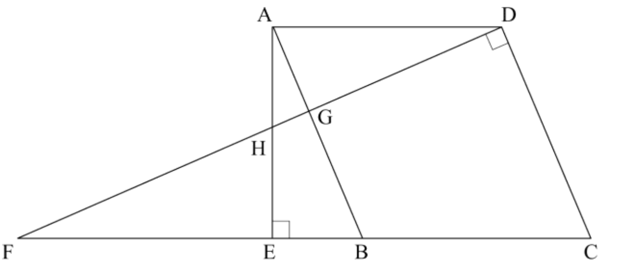
解答
(1)
㋐ AB＝BC
㋑ 2 組の辺とその間の角
(2) 120 度
解説
(1)
正三角形の性質を用いて合同条件「2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」ことを導く。
(2)
△ABD≡△BCE より
∠BAD＝∠CBE だから
∠BAD＋∠ABE＝60°
△ABF の内角の和より
∠AFB＝180°－60°＝120°

【問 2】

図1のように，1 辺の長さが 4 cm のひし形 ABCD があり，∠ABC の大きさは 90° より大きいものとする。線分 BC を B のほうへ延長した線上に，∠AEB＝90°，∠CDF＝90° となる点 E，F をとる。また，直線 DF と直線 AB，AE との交点をそれぞれ G，H とする。

このとき，あとの問いに答えなさい。

図1



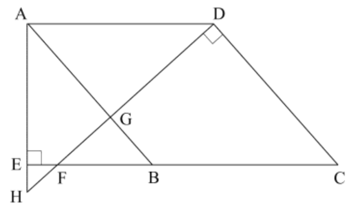
（山形県　2016 年度）

問1 CF＝10 cm であるとき，DF の長さを求めなさい。

問2 AG＝BE であることを証明しなさい。

問3　図2は，図1のひし形 ABCD の内角の大きさを変え，点 F を線分 BE 上にとったときのものである。CF＝6 cm であるとき，あとの問いに答えなさい。

図2



(1) EF の長さを求めなさい。

(2) 台形 AEFD と△CDF の面積の比を求めなさい。

解答欄

問1		cm
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	:

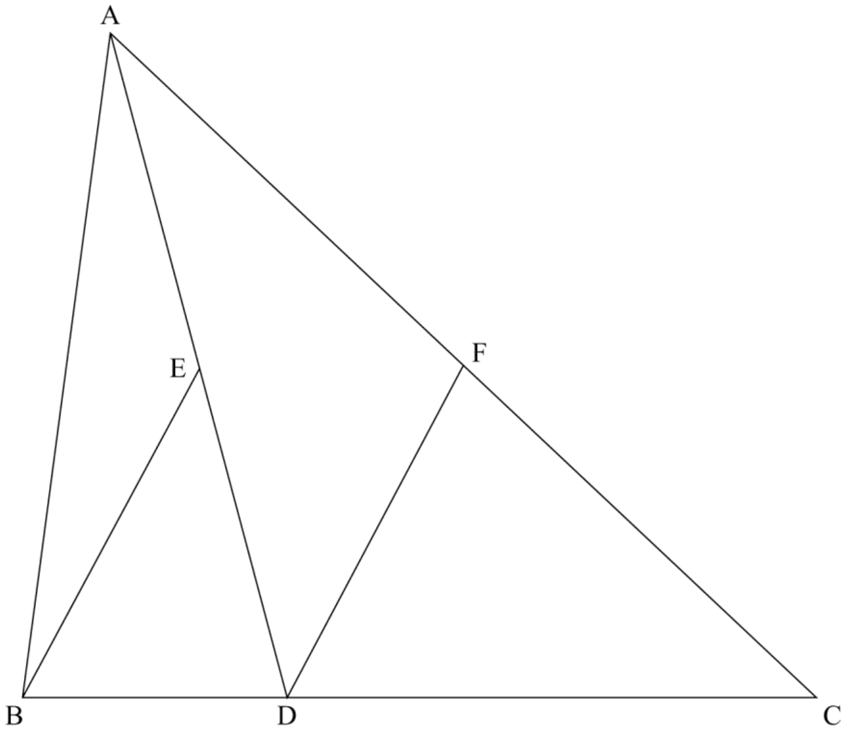
解答
問1　$2\sqrt{21}$ cm
問2
〔証明〕
△AGDと△BEAにおいて
CD // BAで，錯角は等しいから
∠CDG＝∠AGD＝90°…①
①より，∠AGD＝∠BEA＝90°　…②
AD // EBで，錯角は等しいから
∠GAD＝∠EBA…③
四角形ABCDはひし形であるから
AD＝BA…④
②，③，④より
直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので
△AGD≡△BEA
よってAG＝BE
問3
(1)　$\dfrac{2}{3}$ cm
(2)　7：9
解説
問1
△CDFは∠CDF＝90°の直角三角形であるから
三平方の定理 $CD^2+DF^2=CF^2$ より，$DF^2=CF^2-CD^2=10^2-4^2=84$
よって $DF=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$ cm
問2
AGとBEをふくむ△AGDと△BEAの合同を示す。
∠AGD＝90°より，直角三角形の合同条件を導く。
問3
(1)
EF＝x cmとする。
BF＝6－4＝2cmよりBE＝$x+2$ cm
△BEAに三平方の定理を用いて x を求める。
まず△DFCで三平方の定理より $DF^2=6^2-4^2=20$，$DF=2\sqrt{5}$ cm
△AGD∽△BGFで
相似比はAD：BF＝4：2＝2：1
よって $DG=\dfrac{2}{3}DF=\dfrac{2}{3}\times 2\sqrt{5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ cm
問2より△AGD≡△BEAだから $AE=DG=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ cm
△BEAに三平方の定理を用いて
$AE^2+BE^2=AB^2$，$\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2+(x+2)^2=4^2$，$\dfrac{80}{9}+(x+2)^2=16$，$(x+2)^2=\dfrac{64}{9}$ より，$x+2=\pm\dfrac{8}{3}$
$x>0$ だから $x=\dfrac{2}{3}$ cm
(2)
台形 $AEFD=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}+4\right)\times\dfrac{4\sqrt{5}}{3}=\dfrac{28\sqrt{5}}{9}$ cm^2
$△CDF=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ cm^2
よって $\dfrac{28\sqrt{5}}{9}:4\sqrt{5}=28:36=7:9$

【問 3】

下の図のように，△ABC の辺 BC 上に BD:DC＝1:2 となる点 D をとる。また，線分 AD，辺 AC の中点をそれぞれ E，F とする。

このとき，BE＝DF となることを証明しなさい。

（福島県　2016 年度）



解答欄

〔証明〕

解答
(例1)
〔証明〕
線分 EF をひく。
BD:DC＝1:2 より
BD＝$\frac{1}{2}$DC…①
△ADC において
E, F はそれぞれ AD, AC の中点であるから
中点連結定理より EF＝$\frac{1}{2}$DC…②
EF // DC…③
①, ②より
BD＝EF…④
③より
BD // EF …⑤
④, ⑤より
1 組の対辺が平行でその長さが等しいから
四角形 BDFE は平行四辺形である。
平行四辺形の対辺は等しいから
BE＝DF
例2
線分 EF をひく。
△BDE と△FED において
DE は共通…①
BD:DC＝1:2 より
BD＝$\frac{1}{2}$DC…②
△ADC において E, F はそれぞれ AD, AC の中点であるから
中点連結定理より EF＝$\frac{1}{2}$DC…③
EF // DC…④
②, ③より
BD＝FE…⑤
④より
BD // EF であり平行線の錯角は等しいから
∠BDE＝∠FED…⑥
①, ⑤, ⑥より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△BDE≡△FED
したがって
BE＝DF
解説
BE＝DF を示すので
四角形 BEFD が平行四辺形であることを示せればよい。
E と F を結ぶ
EF // DC で EF＝$\frac{1}{2}$DC
また条件より BD＝$\frac{1}{2}$DC
これらより BD＝EF かつ BD // EF が言えるので
四角形 BEFD は平行四辺形となる。

【問 4】

図1のような，AB＜AD の平行四辺形 ABCD がある。この平行四辺形を図2のように，頂点 C が頂点 A に重なるように折った。折り目の線と辺 AD，BC との交点をそれぞれ P，Q とし，頂点 D が移った点を E とする。

このとき，△ABQ≡△AEP であることを証明しなさい。

（栃木県　2016 年度）

図1

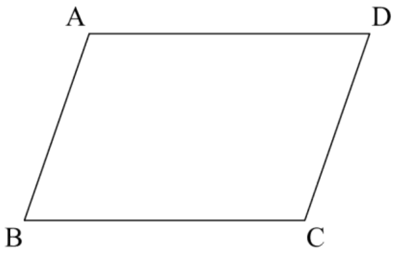
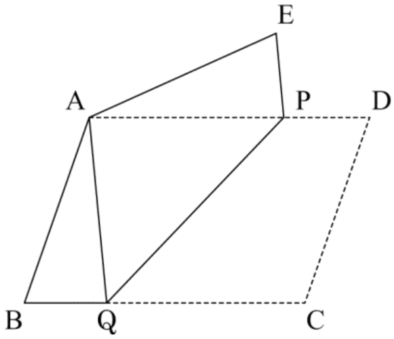


図2



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

△ABQ と△AEP において

平行四辺形の対辺は等しく，折り返しているので

AB＝AE…①

平行四辺形の対角は等しく，折り返しているので

∠ABQ＝∠AEP…②

∠BAP＝∠EAQ…③

ここで

∠BAQ＝∠BAP－∠QAP…④

∠EAP＝∠EAQ－∠QAP…⑤

③，④，⑤より

∠BAQ＝∠EAP…⑥

①，②，⑥より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△ABQ≡△AEP

解説

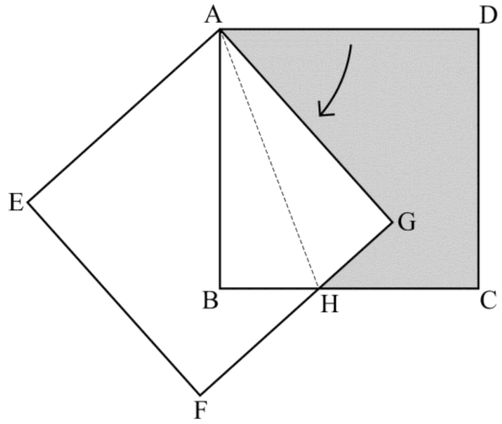
平行四辺形の性質を利用して等しい辺や角を見つける。

【問 5】

右の図の四角形 ABCD は 1 辺が 6 cm の正方形で，四角形 AEFG は四角形 ABCD を点 A を中心として回転移動させたものである。辺 BC と辺 FG の交点を H とするとき，次の問1〜問3に答えなさい。

ただし，点 G は四角形 ABCD の内部にあるものとする。

（群馬県 2016 年度）



問1　三角形 ABH と三角形 AGH が合同であることを証明しなさい。

問2　CH＝x cm とし，正方形 ABCD から四角形 ABHG を除いた部分の面積を y cm^2 とする。$0<x<6$ のとき，x と y はどのような関係であるか，y を x の式で表し，その式を根拠にして説明しなさい。

問3 点 G と辺 CD との距離が 2 cm であるとき，

(1) 点 G と辺 AD との距離を求めなさい。

(2) 正方形 ABCD から四角形 ABHG を除いた部分の面積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="1">問1</td><td colspan="3">〔証明〕</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="3">〔説明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
</table>

解答

問1

〔証明〕

△ABH と△AGH において

AH は共通…①

四角形 ABCD と四角形 AEFG はともに 1 辺が 6 cm の正方形であるから

∠ABH＝∠AGH＝90°…②

AB＝AG…③

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

△ABH≡△AGH

問2

〔説明〕

CH＝x cmであるから

BH＝$(6-x)$ cmと表せる。

問1より四角形 ABHG の面積は△ABH の面積の 2 倍であるから

$y=6^2-\left\{\frac{1}{2}\times6\times(6-x)\right\}\times2$

$=6x$

よって $y=6x$ と表せることから y は x に比例するといえる。

問3

(1) $2\sqrt{5}$ cm

(2) $18\sqrt{5}-18$ cm^2

解説

問1

正方形の性質より直角三角形の合同条件を導く。

問2

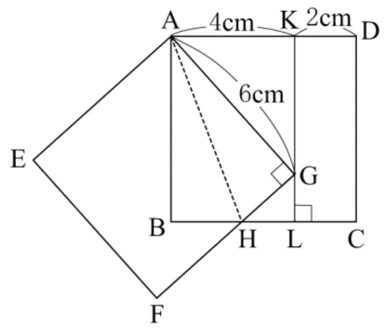
BH＝$(6-x)$ cm で

△ABH＝△AGH＝$\frac{1}{2}\times6\times(6-x)=18-3x$ cm^2 となることから考える。

問3

(1)

右の図で三平方の定理より GK＝$\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ cm



(2)

HL＝x cm とすると BH＝GH＝$(4-x)$cm　GL＝$(6-2\sqrt{5})$cm

△AGK∽△GHL であるから

AG : GH＝AK : GL

$6:(4-x)=4:(6-2\sqrt{5})$

$4(4-x)=6(6-2\sqrt{5})$を解くと

$x=3\sqrt{5}-5$ cm

BH＝GH＝$4-(3\sqrt{5}-5)=9-3\sqrt{5}$ cm

△ABH＝△AGH＝$\frac{1}{2}\times6\times(9-3\sqrt{5})=27-9\sqrt{5}$ cm^2 であるから

求める面積は

$6^2-2(27-9\sqrt{5})=36-54+18\sqrt{5}=18\sqrt{5}-18$ cm^2

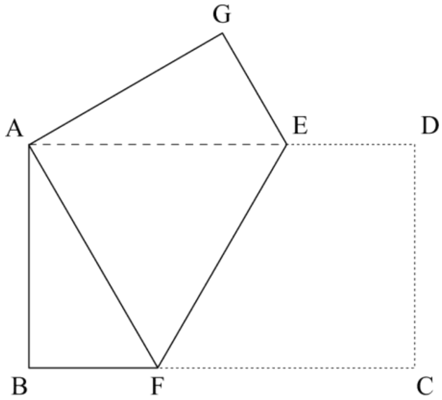
【問 6】

AB＝6 cm, BC＝9 cm の長方形 ABCD があります。図1のように，点 C が点 A に重なるように折ったとき，折り目の線を EF とし，点 D の移った点を G とします。

このとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県　2016 年度）

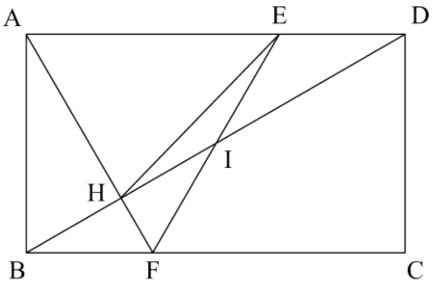
図1



問1　BF＝GE であることを証明しなさい。

問2　図2のように，もとの長方形 ABCD に戻して，線分 BD, AF, EF をかきます。線分 BD と線分 AF, EF との交点をそれぞれ H, I とするとき，△AEH と△EHI の面積の比を求めなさい。

図2



解答欄

問1	〔証明〕
問2	△AEH : △EHI＝　　　　　:

解答
問1
〔証明〕
△ABF と△AGE において
四角形 ABCD は長方形だから
AB＝AG…①
∠ABF＝∠AGE＝90°…②
また
∠BAF＝90° －∠EAF…③
∠GAE＝90° －∠EAF…④
③, ④から
∠BAF＝∠GAE…⑤
①, ②, ⑤から
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ABF≡△AGE
したがって BF＝GE
問2
△AEH:△EHI＝36:5
解説
問1
BF, GE をそれぞれ 1 辺にもつ 2 つの三角形に着目しその 2 つが合同であることを導く。
問2
BF＝x cm とすると, AF＝CF＝9－x cm
△ABF で∠ABF＝90° だから
三平方の定理より
$BF^2+AB^2=AF^2$
$x^2+6^2=(9-x)^2$
$18x=45$
$x=\dfrac{5}{2}$
△AHE∽△FHB より
AH:HF＝AD:BF＝$9:\dfrac{5}{2}=18:5$
したがって△AEH＝$\dfrac{18}{5}$△EHF
また△IED≡△IFB だから
EI:IF＝ED:BF＝1:1
したがって△EHI＝$\dfrac{1}{2}$△EHF
よって△AEH:△EHI＝$\dfrac{18}{5}:\dfrac{1}{2}=36:5$

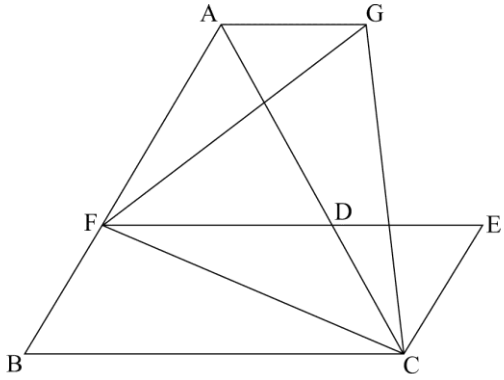
【問 7】

図のように，正三角形 ABC があり，辺 AC 上に 2 点 A，C と異なる点 D をとり，線分 CD を 1 辺とする正三角形 CDE をつくる。ただし，点 E は線分 CD に対して点 B と反対側にとるものとする。

線分 ED の延長線と辺 AB の交点を F とし，線分 CF を 1 辺とする正三角形 CFG をつくる。ただし，点 G は線分 CF に対して点 B と反対側にとるものとする。また，2 点 A，G を結ぶ。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（千葉県　2016 年度　後期）



問1　△ECF≡△AGC となることの証明を，次ページの [　　] の中に途中まで示してある。[(a)]，[(b)] に入る最も適当なものを，次ページの選択肢のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び，符号で答えなさい。また，[(c)] には証明の続きを書き，証明を完成させなさい。ただし，[　　] の中の①～⑤に示されている関係を使う場合，番号の①～⑤を用いてもかまわないものとする。

証明

四角形 FBCE において，

正三角形の角はすべて 60° であるから，

∠FBC＝ [(a)] ＝60°　…①

∠BCE＝60°＋60°＝120°　…②

①，②より，

∠BFE＝360°－(60°＋60°＋120°)

＝120°…③

①～③より，

[(b)] から，

四角形 FBCE は平行四辺形である。

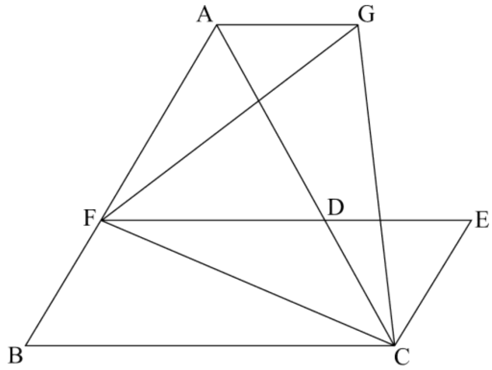
したがって，

BC＝EF …④

平行線の錯角は等しいので，

∠BCF＝∠EFC …⑤

[(c)]



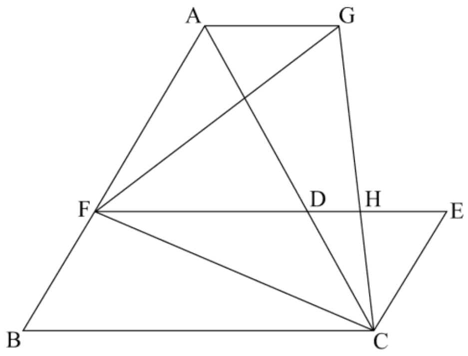
選択肢

ア　∠CEF　　イ　∠BFC　　ウ　∠GFD

エ　2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行である　　オ　2 組の向かい合う角がそれぞれ等しい

カ　2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい

問2　線分 EF と線分 CG の交点を H とする。AF＝3 cm，FB＝2 cm のとき，△CEH と△BFC の面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。



解答欄

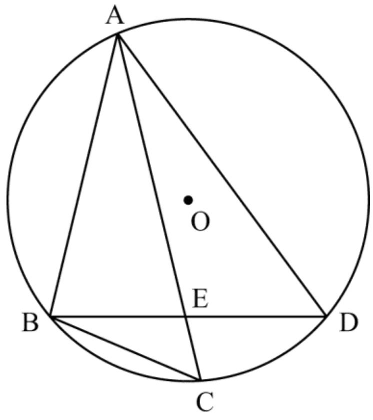
問1	(a)		(b)	
	(c)			
問2				

解答
問1
(a) ア
(b) オ
(c)
△ECFと△AGCにおいて
△ABCは正三角形であるから
BC＝AC…⑥
④，⑥より
EF＝AC…⑦
△GCFは正三角形であるから
CF＝GC…⑧
∠ACB＝∠GCF＝60°より，
∠ACG＝60°－∠ACF
∠BCF＝60°－∠ACF
したがって
∠BCF＝∠ACG…⑨
⑤，⑨より
∠EFC＝∠ACG…⑩
⑦，⑧，⑩より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ECF≡△AGC
問2 6:25
解説
問1
正三角形の角から四角形FBCEは平行四辺形であることを示し平行四辺形と正三角形の性質から合同を導く。
問2
△CEHと△BFCの底辺をそれぞれEH，BCとみるとFE // BCより高さは等しい。
よって
△CEH:△BFC＝EH:BCとなる。
BC＝AB＝5 cm
△AFCと△EHCにおいて
∠CAF＝∠CEH＝60° …①
∠ACF＝60°－∠ACG，∠ECH＝60°－∠ACGより
∠ACF＝∠ECH…②
①，②より
△AFC∽△EHCだから
AF:EH＝AC:EC
3:EH＝5:2より
EH＝$\frac{6}{5}$
よって△CEH:△BFC＝$\frac{6}{5}$:5＝6:25である。

【問 8】

右の図のように，円 O の円周上に 4 つの点 A, B, C, D があり，2 つの弦 AC, BD の交点を E とする。AB＝AE であり，AC は∠BAD の二等分線である。このとき，△ABC≡△AED であることを証明しなさい。

（新潟県 2016 年度）



解答欄

〔証明〕

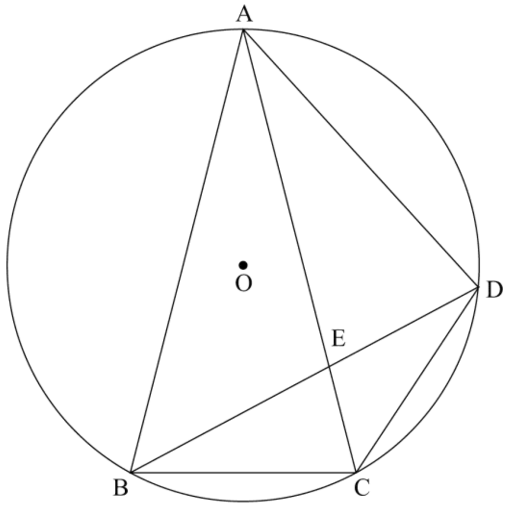
解答
〔証明〕
△ABC と△AED において
仮定より
AB＝AE…①
AC は∠BAD の二等分線であるから
∠BAC＝∠EAD…②
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角より
∠ACB＝∠ADE…③
∠ABC＝180°－∠BAC－∠ACB
∠AED＝180°－∠EAD－∠ADE
②，③より
∠ABC＝∠AED…④
①，②，④より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABC≡△AED
解説
△ABC と△AED において
仮定より
AB＝AE…①
∠BAD の二等分線が AC であるから
∠BAC＝∠EAD…②
円周角の定理より
∠ACB＝∠ADE…③
②，③より
∠ABC＝∠AED…④
①，②，④より
△ABC≡△AED

【問 9】

右の図のように，円 O の周上に 4 点 A，B，C，D があり，AB＝AC，∠BAC＝∠CAD である。また，線分 AC と線分 BD との交点を E とする。

このとき，次の問いに答えなさい。

（富山県　2016 年度）



問1 △ABE≡△ACD を証明しなさい。

問2　AB＝AC＝4 cm，AD＝3 cm とする。このとき，線分 BD の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答
問1
〔証明〕
△ABE と△ACD において
仮定から
AB＝AC…①
∠BAE＝∠CAD…②
$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角だから
∠ABE＝∠ACD…③
①, ②, ③より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△ACD
問2　$\frac{7}{2}$ cm
解説
問1
△ABE と△ACD において
AB＝AC…①
∠BAE＝∠CAD…②
同じ弧に対する円周角は等しいので
∠ABE＝∠ACD…③
①, ②, ③より
△ABE≡△ACD
問2
△ABE≡△ACD より
AE＝AD＝3, EC＝4－3＝1
また, 3 つの角が同じになるので
△ABC∽△AED で相似比は 4:3 である。
ここで BC＝BE＝x とおくと ED＝$\frac{3}{4}x$
円周角の定理と対頂角の関係で
△ABE∽△DCE より
AE:ED＝BE:EC
$3:\frac{3}{4}x=x:1$
$\frac{3}{4}x^2=3$
$x^2=4$
$x>0$ より
$x=2$
よって BD＝$x+\frac{3}{4}x=\frac{7}{4}\times 2=\frac{7}{2}$ cm

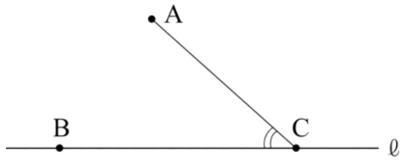
【問 10】

等しい角の作図について考える。

（長野県　2016 年度）

(1) 図1のように，点 B，C は直線 ℓ 上にある。$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{A'CB}$ となる点 A′ を，直線 ℓ について点 A の反対側に，次の❶，❷で作図した。

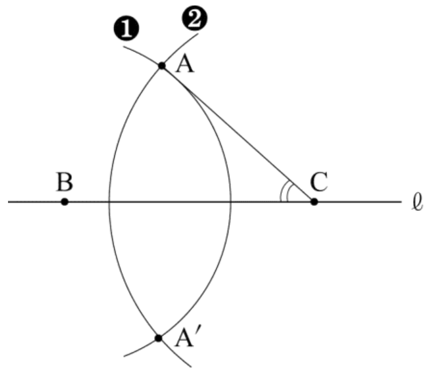
図1



〔作図〕

❶　点 B を中心として，半径 BA の円をかく。

❷　点 C を中心として，半径 CA の円をかき，2 円の交点の 1 つを A′ とする。

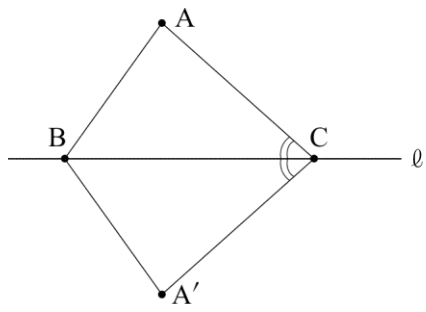


〔説明〕

この作図において，点 B から点 A，A′ までの距離は等しく，点 C から点 A，A′ までの距離も等しい。また，BC は共通な辺だから，$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'BC}$ となる。

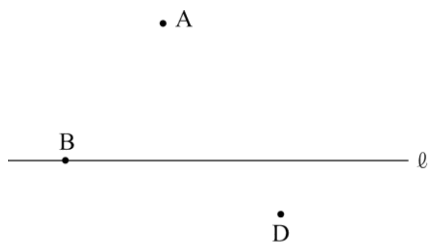
作図した点 A′ について，説明から，$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'BC}$ なので，図2のように $\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{A'CB}$ がいえる。説明で，根拠として使っている三角形の合同条件を書きなさい。

図2

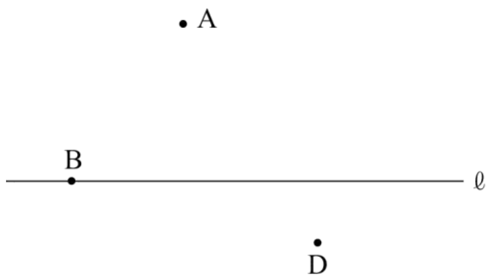


(2) 図3のように，点 D は，直線 ℓ について点 A の反対側にある。直線 ℓ 上にあり，$\angle \mathrm{AEB} = \angle \mathrm{DEB}$ となる点 E を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。ただし，点 E を表す文字 E も書き，作図に用いた線は消さないこと。

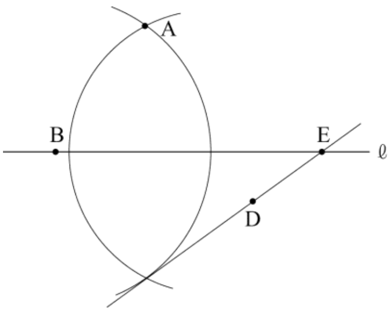
図3



解答欄

(1)	
(2)	

解答
(1) 3 組の辺が, それぞれ等しい。
(2)



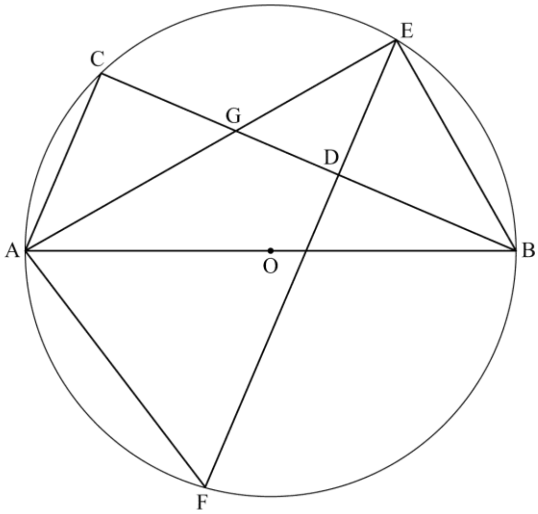
解説
(1)
AB＝A′B
AC＝A′C
BC は共通なので
3 組の辺がそれぞれ等しい。
(2)
(1)の作図を利用し直線 A′D と直線 ℓ との交点を E とすればよい。

【問 11】

図で，点 C は AB を直径とする円 O の周上の点であり，点 D は線分 BC 上の点で，AC＝BD である。また，点 E, F は D を通り BC に垂直な直線と円 O との交点であり，点 G は AE と BC との交点である。

次の問1，問2に答えなさい。

（岐阜県　2016 年度）



問1　△ACG≡△BDE であることを証明しなさい。

問2　AC＝4 cm，CG＝3 cm のとき，

(1)　DG の長さを求めなさい。

(2)　△AEF の面積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm^2

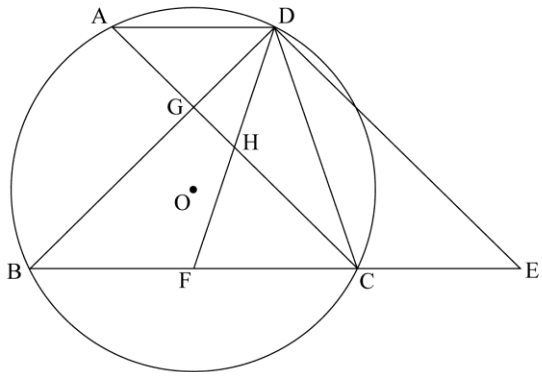
解答
問1
〔証明〕
△ACGと△BDEで
仮定から
AC＝BD…①
$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$に対する円周角だから
∠CAG＝∠DBE…②
半円の弧に対する円周角だから
∠ACG＝90°…③
仮定から
∠BDE＝90°…④
③, ④から
∠ACG＝∠BDE…⑤
①, ②, ⑤から
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ACG≡△BDE
問2
(1) $\frac{9}{4}$ cm
(2) $\frac{105}{4}$ cm^2
解説
問1
△ACGと△BDEにおいて
仮定からAC＝BD…①
$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$に対する円周角なので∠CAG＝∠DBE…②
また∠ACG＝∠BDE＝90°…③
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ACG≡△BDE
問2
(1)
△ACG≡△BDEによりDE＝3
これにより△ACG∽△EDGで相似比は
AC:ED＝4:3なので
$\mathrm{DG}=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$ cm
(2)
△ACG∽△EDGより
$\mathrm{EG}=5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$
したがって$\mathrm{AE}=\frac{35}{4}$,
また$\mathrm{GD}=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$
$\overset{\frown}{\mathrm{EB}}$に対する円周角の定理より∠EAB＝∠EFB, ∠AEB＝∠FDB＝90°
したがって△AEB∽△FDBで相似比はEB:BD=5:4
AE:FD＝5:4より$\mathrm{FD}=\frac{35}{4}\times\frac{4}{5}=7$
△AEFの面積は台形ACDFから△ACGを除き△EGDを加えればよいので
$\frac{1}{2}(7+4)\times\frac{21}{4}-\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times3=\frac{231}{8}-6+\frac{27}{8}=\frac{258-48}{8}=\frac{105}{4}$ cm^2

【問 12】

図において，4 点 A，B，C，D は円 O の円周上の点であり，AD // BC である。点 D を通り AC に平行な直線と BC の延長との交点を E とし，BE 上に∠ACD＝∠BDF となる点 F をとる。また，AC と DB，DF との交点をそれぞれ G，H とする。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（静岡県　2016 年度）



問1 BF＝EC であることを証明しなさい。

問2 $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}:\overset{\frown}{\mathrm{DC}}=1:2$，∠FHC＝65° のとき，∠FDC の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	度

解答
問1
〔証明〕
△BFD と△ECD において
仮定から
∠ACD＝∠BDF…①
AC // DE…②
②から
∠ACD＝∠EDC…③
①, ③より
∠BDF＝∠EDC…④
また, 仮定より
AD // BC…⑤
②, ⑤より
2 組の対辺がそれぞれ平行であるから, 四角形 ACED は平行四辺形である。
平行四辺形の 2 組の対角はそれぞれ等しいから,
∠DAC＝∠CED…⑥
$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角は等しいから
∠DAC＝∠FBD…⑦
⑥, ⑦より
∠FBD＝∠CED…⑧
⑧より
2 つの角が等しいから
△DBE は二等辺三角形である。
よって DB＝DE …⑨
④, ⑧, ⑨より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△BFD≡△ECD
合同な図形の対応する辺は等しいから
BF＝EC
問2 42 度
解説
問1
仮定から四角形 ACED が平行四辺形であることを示し
平行四辺形の性質と円周角の定理から
△DBE が二等辺三角形であることを示すと
△BFD≡△ECD が導ける。
問2
問1より
∠BDF＝∠EDC, ∠FBD＝∠CED より∠DFB＝∠DCE だから
△DFC は二等辺三角形で∠DFC＝∠DCF＝∠ACF＋∠DCA
$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}:\overset{\frown}{\mathrm{DC}}=1:2$ より
$\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$に対する円周角は$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角の 2 倍である。
∠DCA＝$\angle a$ とおくと
AD // BC より
∠DAC＝∠ACF＝$2\angle a$
∠DFC＝∠DCF＝∠DCA＋∠ACF＝$\angle x+2\angle x=3\angle x$
△HFC の内角の和から
$65^\circ+3\angle x+2\angle x=180^\circ$
$\angle x=23^\circ$
よって△DFC で∠DCF＝∠DFC＝$3\angle x=69^\circ$ より
∠FDC＝$180^\circ-69^\circ\times2=42^\circ$

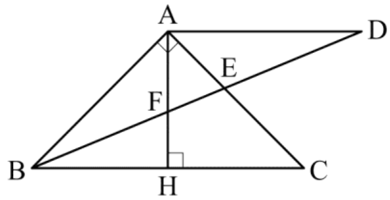
【問 13】

図で，△ABC は，∠BAC＝90° の直角二等辺三角形である。D は∠ABC の二等分線上の点で，AD // BC である。H は辺 BC 上の点で，AH⊥BC であり，E, F はそれぞれ線分 DB と AC, AH との交点である。

このとき，△ABF と△ADE が合同であることを，次のように証明したい。

（ Ⅰ ），（ Ⅱ ），（ Ⅲ ）にあてはまる最も適当なものを，下のアからケまでの中からそれぞれ選んで，そのかな符号を書きなさい。

なお，2 か所の（ Ⅰ ），（ Ⅱ ）には，それぞれ同じものがあてはまる。



（愛知県 2016 年度 A）

(証明)

△ABF と△ADE で，

BD は∠ABC の二等分線なので，∠ABF＝（ Ⅰ ）…①

AD // BC より，錯角は等しいから，∠ADE＝（ Ⅰ ）…②

①，②より，∠ABF＝∠ADE…③

よって，△ABD は二等辺三角形となるので，AB＝AD…④

また，∠BAF＝90°－（ Ⅱ ）…⑤

AD // BC より，錯角は等しいから，∠DAF＝∠BHF＝90° となるので，

∠DAE＝90°－（ Ⅱ ）…⑥

⑤，⑥より，∠BAF＝∠DAE…⑦

③，④，⑦より，△ABF と△ADE は，（ Ⅲ ）が，それぞれ等しいので，

△ABF≡△ADE

ア ∠FAD	イ ∠FAE	ウ ∠FEA
エ ∠FBH	オ ∠FHB	カ ∠FEC
キ 1 組の辺とその両端の角	ク 2 組の辺とその間の角	ケ 3 組の辺

解答欄

Ⅰ（　　　　），Ⅱ（　　　　），Ⅲ（　　　　）

解答

Ⅰ エ，Ⅱイ，Ⅲキ

解説

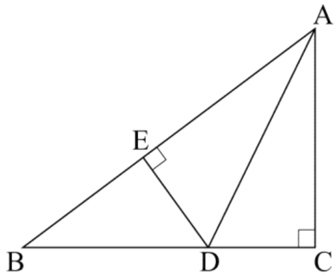
Ⅰにはエ，Ⅱにはイ，Ⅲにはキが入る。

【問 14】

右の図のように，直角三角形 ABC があり，AB＝6 cm，AC＝4 cm，∠ACB＝90°である。∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする。また，点 D から直線 AB にひいた垂線と直線 AB との交点を E とする。

このとき，次の問1～問3に答えよ。

（京都府　2016 年度　前期）



問1 △ABC の面積を求めよ。

問2 △ACD≡△AED を証明せよ。

問3 線分 DE の長さを求めよ。

解答欄

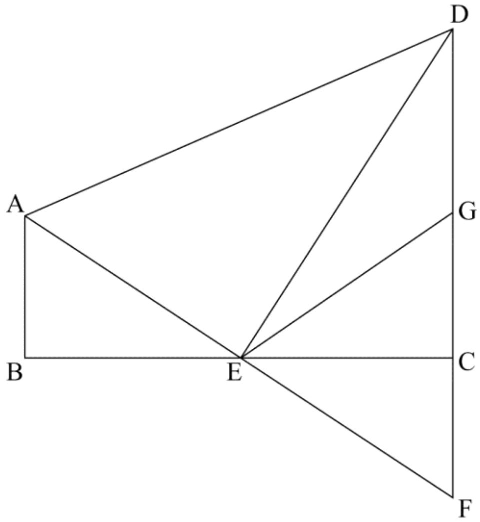
問1	cm^2
問2	
問3	cm

解答
問1　$4\sqrt{5}$ cm^2
問2
△ACD と△AED で
仮定より
∠ACD＝∠AED＝90°…①
また AD は共通だから
AD＝AD…②
AD は∠BAC の二等分線だから
∠DAC＝∠DAE…③
①, ②, ③から
直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので,
△ACD≡△AED
問3　$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ cm
解説
問1
$\mathrm{BC}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ cm
$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4=4\sqrt{5}$ cm^2
問2
直角三角形の合同条件「斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい」ことを示す。
問3
問2より
$\mathrm{DE}=\mathrm{DC}=x$ cm とおくと
$\mathrm{BD}=(2\sqrt{5}-x)$ cm
△BDE は直角三角形で
$\mathrm{BE}=6-4=2$ cm であるから
$(2\sqrt{5}-x)^2=2^2+x^2$
$20-4\sqrt{5}x+x^2=4+x^2$
$4\sqrt{5}x=16$
$x=\dfrac{16}{4\sqrt{5}}$
$=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ cm

【問 15】

右の図の四角形 ABCD は，AB＝4 cm，BC＝12 cm，AB // DC の台形である。点 E は辺 BC の中点であり，∠ABE＝∠AED＝90° である。点 F は直線 AE と直線 DC との交点であり，点 G は辺 CD 上の点で CF＝CG である。各問いに答えよ。

（奈良県　2016 年度）



問1 △ABE≡△FCE を証明せよ。

問2 ∠DAE＝a° とするとき，∠DEG の大きさを a を用いて表せ。

問3 3 点 D，E，G を通る円の半径を求めよ。

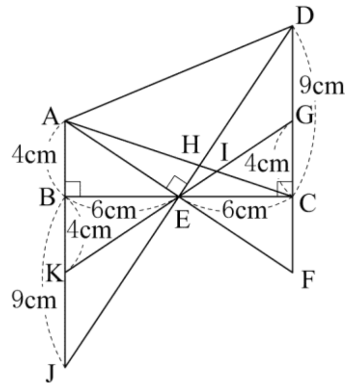
問4 線分 AC と線分 DE，GE との交点をそれぞれ H，I とする。このとき，△EIH の面積を求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	
問3	cm
問4	cm^2

解答
問1
〔証明〕
△ABE と△FCE において
仮定から
BE＝CE…①
対頂角は等しいから
∠AEB＝∠FEC…②
AB // DF より，錯角は等しいから
∠ABE＝∠FCE…③
①，②，③より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△FCE
問2　$2a^\circ-90^\circ$
問3　$\dfrac{13}{2}$ cm
問4　$\dfrac{10}{11}$ cm^2
解説
問1
平行線と角の性質などを利用して三角形の合同を導く。
問2
△AED と△FED で
問1より△ABE≡△FCE だから AE＝FE…①
共通だから DE＝DE…②
∠AED＝∠FED＝90°…③
①，②，③より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△AED≡△FED
よって∠DAE＝∠DFE＝a°
また△FCE と△GCE で
仮定より CF＝CG…④
共通だから CE＝CE…⑤
∠FCE＝∠GCE＝90°…⑥
④，⑤，⑥より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△FCE≡△GCE
よって∠FEC＝∠GEC＝$180^\circ-(90^\circ+a^\circ)=90^\circ-a^\circ$
∠DEG＝∠FED－2∠FEC＝$90^\circ-2(90^\circ-a^\circ)=2a^\circ-90^\circ$
問3
A と G を結ぶ。四角形 ABCG は長方形になるから∠AGD＝90°となる。
したがって 2 点 E，G は直線 AD について同じ側にあり∠AED＝∠AGD となるから
円周角の定理の逆より 4 点 D，A，E，G は 1 つの円周上にある。
また∠AGD＝90°より線分 DA はこの円の直径だから求める円の半径は $\dfrac{1}{2}$ DA となる。
△ABE で三平方の定理より AE＝$\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BE}^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$ cm
また△ABE と△AED で
∠ABE＝∠AED＝90°…①
∠EAB＝∠EFC＝∠DAE…②
①，②より 2 組の角がそれぞれ等しいから△ABE∽△AED
したがって，AB : AE＝EA : DA　$4:2\sqrt{13}=2\sqrt{13}:$DA　4DA＝$(2\sqrt{13})^2$　DA＝13
よって $\dfrac{1}{2}$ DA＝$\dfrac{13}{2}$ cm
これが 3 点 D，E，G を通る円の半径である。

△ABE と△ECD で
∠ABE＝∠ECD＝90°…①
∠AEB＝∠ADE＝∠EDC…②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABE∽△ECD
よって
AB：EC＝BE：CD
4：6＝6：CD
4CD＝36
CD＝9cm

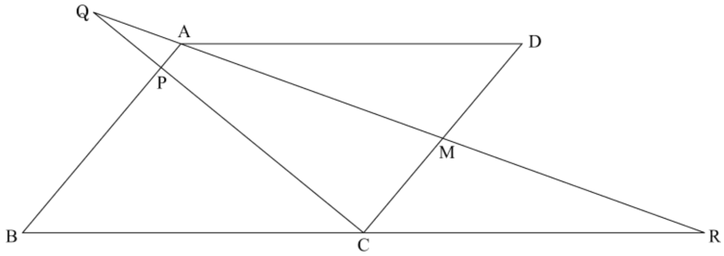


ここで，直線 DE と直線 AB との交点を J とすると，AJ // DC より
BJ：DC＝BE：EC＝6：6＝1：1
よって，BJ＝DC＝9cm
AH：HC＝AJ：DC＝(4＋9)：9＝13：9
AH：AC＝13：(13＋9)＝13：22
よって AH＝$\frac{13}{22}$AC…③
同様に
直線 GE と直線 AB との交点を K とすると
BK：GC＝BE：EC＝1：1
よって BK＝GC＝4cm
AI：IC＝AK：GC＝(4＋4)：4＝2：1
IC：AC＝1：(2＋1)＝1：3
よって IC＝$\frac{1}{3}$AC…④
③，④より
HI＝AC－AH－IC
$=AC-\frac{13}{22}AC-\frac{1}{3}AC$
$=\frac{5}{66}AC$
よって
△EIH＝$\frac{5}{66}$△AEC
$=\frac{5}{66}\times\frac{1}{2}\times6\times4$
$=\frac{10}{11}\text{cm}^2$

【問 16】

図のように，平行四辺形 ABCD がある。辺 CD の中点を M とし，辺 AB 上に AP：PB＝1：8 となるように点 P をとる。また，直線 AM と直線 PC の交点を Q，直線 AM と直線 BC の交点を R とする。

次の問1～問4に答えなさい。



（和歌山県　2016 年度）

問1 ∠ADC＝50°，∠ARB＝20° のとき，∠BAR の大きさを求めなさい。

問2 △AMD≡△RMC であることを証明しなさい。

問3 QP：PC を求めなさい。

問4 平行四辺形 ABCD の面積が 36 cm^2 のとき，四角形 APCM の面積を求めなさい。

解答欄

問1	∠BAR＝　　　　　　度
問2	〔証明〕
問3	QP：PC＝
問4	cm^2

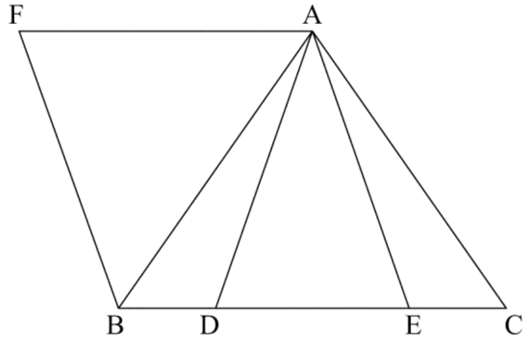
解答
問1 ∠BAR＝110 度
問2
〔証明〕
△AMD と△RMC で
仮定より
DM＝CM…①
対頂角は等しいから,
∠AMD＝∠RMC…②
平行線の錯角は等しいから
∠ADM＝∠RCM…③
①, ②, ③から
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△AMD≡△RMC
問3 QP:PC＝2:7
問4 11cm^2
解説
問1
AD // BR なので, 錯角が等しいことにより∠DAR＝∠ARC＝20°
平行四辺形より∠BAD＝180°－50°＝130°
よって∠BAR＝130°－20°＝110°
問2
△AMD と△RMC で
対頂角が等しいことより
∠AMD＝∠RMC
また錯角が等しいことより
∠MDA＝∠MCR, ∠MAD＝∠MRC
点 M は CD の中点なので
DM＝MC
よって△AMD≡△RMC
問3
△APQ∽△MCQ
相似比は$\frac{1}{9}$AB:$\frac{1}{2}$AB＝2:9
よって QP:PC＝2:(9－2)＝2:7
問4
A と C を結び平行四辺形 ABCD の面積を S とおく。
△ACD＝△ABC＝$\frac{1}{2}S$
△APC＝$\frac{1}{9}$△ABC＝$\frac{1}{18}S$,
△ACM＝$\frac{1}{2}$△ADC＝$\frac{1}{4}S$
よって四角形 APCM の面積は
$\frac{1}{18}S+\frac{1}{4}S$
$=\frac{11}{36}S$
$=\frac{11}{36}\times 36$
$=11\text{cm}^2$

【問 17】

右の図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC の辺 BC 上に，2 点 D，E があり，BE＝CD である。また，四角形 AFBE は，平行四辺形である。

次の問1，問2に答えなさい。

（山口県　2016 年度）



問1 △AFB≡△CDA であることを証明しなさい。

問2 AF＝3 cm，BF＝3 cm，BD＝1 cm のとき，四角形 AFBC の面積を求めなさい。

解答欄

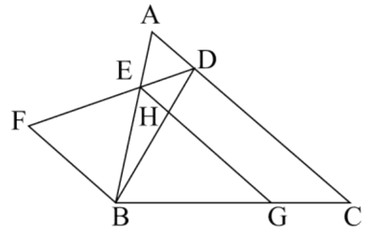
問1	〔証明〕
問2	cm^2

解答
問1
〔証明〕
△AFBと△CDAで
仮定から
AB＝CA…①
BE＝CD…②
四角形AFBEは平行四辺形だから
AF＝BE…③
②, ③から
AF＝CD…④
△ABCは二等辺三角形だから
∠ABC＝∠ACB…⑤
四角形AFBEは平行四辺形だから
AF // BE…⑥
⑥から, 錯角は等しいので
∠BAF＝∠ABC…⑦
⑤, ⑦から
∠BAF＝∠ACB
よって
∠BAF＝∠ACD…⑧
①, ④, ⑧から
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△AFB≡△CDA
問2　$7\sqrt{2}$ cm^2
解説
問1
△AFBと△CDAにおいて
平行四辺形AFBEなので
AF＝EB
またEB＝CDなので
AF＝CD…①
同様に∠AFB＝∠AEBで△ADEも二等辺三角形なので
∠ADE＝∠AED
したがって∠AFB＝∠ADE…②
次にABは平行四辺形の対角線なので
∠FAB＝∠ABE
また△ABCは二等辺三角形なので∠ABE＝∠ACBなので
∠ABF＝∠ACD…③
①～③より
1辺とその両側の角が等しいので
△AFB≡△CDA
問2
平行四辺形より, AE＝FB＝3cm
Aから辺BCへ垂線AHを下ろすと, DH＝HE＝1cm。
△AEHに三平方の定理を用いると
AH＝$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$
四角形AFBCはAF＝3, BC＝4,
高さAHの台形なので
面積は$\dfrac{1}{2}\times(3+4)\times 2\sqrt{2}=7\sqrt{2}$ cm^2

【問 18】

図のように，∠A が 60° で，∠ABC が 60° より大きい△ABC がある。辺 AC 上に点 D を∠CBD＝60° となるようにとり，点 B と点 D を結ぶ。続いて，辺 AB 上に点 E を∠ADE＝60° となるようにとり，直線 DE と，点 B を通り辺 AC と平行な直線との交点を F とする。また，点 E を通り辺 AC と平行な直線と，辺 BC，線分 BD との交点をそれぞれ G，H とする。

このとき，次の問いに答えなさい。



（愛媛県 2016 年度）

問1 △EBG≡△FBD であることを証明せよ。

問2 AB＝6 cm，AC＝9 cm とするとき，

(1) 線分 FB の長さを求めよ。

(2) △EHD の面積を S，△BHG の面積を T とする。このとき，$S:T$ を最も簡単な整数の比で表せ。

(3) 線分 BH の長さを求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	$S:T=$:
	(3)	cm

解答
問1
〔証明〕
△EBG と△FBD において
AC // FB だから
∠FBE＝∠EAD＝60°
∠BFE＝∠EDA＝60°
よって，△FBE は正三角形だから
EB＝FB…①
AC // EG だから
∠BEG＝∠EAD＝60°
よって
∠BEG＝∠BFD…②
∠GBD＝60° だから
∠GBE＝60° ＋∠DBE
また
∠DBF＝60° ＋∠DBE
よって
∠GBE＝∠DBF…③
①，②，③で
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△EBG≡△FBD
問2
(1) 4 cm
(2) (S:T＝) 1:7
(3) $\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$ cm

解説

問1

平行線と角の性質や正三角形の性質などを利用して 2 つの三角形が合同であることを導く。

問2

(1)

$\triangle$FBE, $\triangle$AED は正三角形だから FB＝FE＝BE, ED＝EA

よって FD＝FE＋ED＝BE＋EA＝AB＝6 cm

問1より$\triangle$EBG≡$\triangle$FBD だから EG＝FD＝6 cm

AC // EG より

BE:BA＝EG:AC

BE:6＝6:9

9BE＝36

BE＝4cm

よって FB＝4cm

(2)

BE＝4 cm, EA＝AB－BE＝6－4＝2cm

AC // EG より, BH:HD＝BE:EA＝4:2＝2:1

$\triangle$EBH:$\triangle$EHD＝BH:HD＝2:1

よって, $S=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{EBH}$…①

また, EH:AD＝BE:BA＝4:6＝2:3 より,

$\mathrm{EH}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AD}=\dfrac{2}{3}\times 2=\dfrac{4}{3}\,\mathrm{cm}$

$\mathrm{HG}=\mathrm{EG}-\mathrm{EH}=6-\dfrac{4}{3}=\dfrac{14}{3}\,\mathrm{cm}$

したがって, $\mathrm{EH}:\mathrm{HG}=\dfrac{4}{3}:\dfrac{14}{3}=2:7$

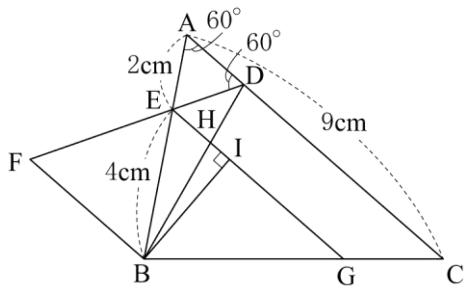
$\triangle$EBH:$\triangle$BHG＝EH:HG＝2:7

よって $T=\dfrac{7}{2}\triangle\mathrm{EBH}$…②

①, ②より,

$S:T=\dfrac{1}{2}:\dfrac{7}{2}=1:7$

(3)



点 B から線分 HG に垂線 BI をひく。

AC // EG より∠BEI＝∠BAD＝60°

$\triangle$EBI は 60° の角をもつ直角三角形だから

$\mathrm{BI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$

$\mathrm{EI}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BE}=\dfrac{1}{2}\times 4=2\mathrm{cm}$

$\mathrm{HI}=\mathrm{EI}-\mathrm{EH}=2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}\,\mathrm{cm}$

$\triangle$HBI で, 三平方の定理より

$\mathrm{BH}=\sqrt{\mathrm{BI}^2+\mathrm{HI}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{112}{9}}$

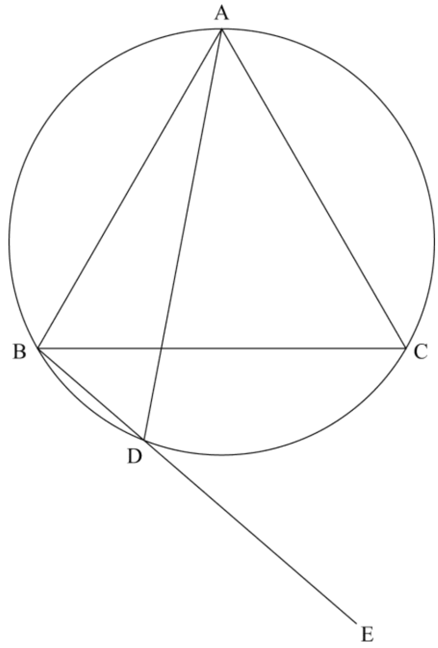
$=\dfrac{4\sqrt{7}}{3}\,\mathrm{cm}$

【問 19】

図のように，正三角形 ABC と 3 点 A，B，C を通る円がある。直線 BC について点 A と反対側の円周上に点 D をとる。線分 BD を D の方に延長した直線上に，AD＝BE となる点 E をとる。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（佐賀県　2016 年度　特色）



問1　∠ADB の大きさを求めなさい。

問2　△ADC≡△BEC であることを証明しなさい。

問3　線分 AD と線分 BC の交点を P とし，BE＝6 cm，EC＝4 cm とするとき，(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(1)　線分 BD の長さを求めなさい。

(2)　線分 PD の長さを求めなさい。

(3)　△ABC の面積を S_1，△CDE の面積を S_2 とするとき，$S_1:S_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

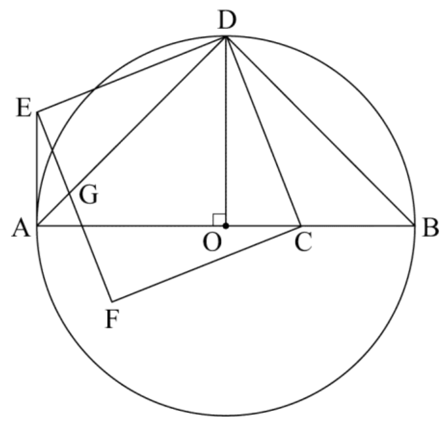
解答欄

問1		度
問2		
問3	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	$S_1:S_2$＝　　：

解答
問1　60度
問2
△ADCと△BECにおいて
仮定より AD＝BE…①
△ABCは正三角形なので
AC＝BC…②
$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は等しいので
∠DAC＝∠EBC…③
①, ②, ③より
2組の辺とその間の角が, それぞれ等しいので
△ADC≡△BEC
問3
(1)　2cm
(2)　$\frac{4}{3}$cm
(3)　$S_1:S_2=7:4$
解説
問1
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから
∠ADB＝∠ACB＝60°
問2
△ABCが正三角形であることやに対する円周角が等しいことを使って証明する。
問3
(1)
△ADC≡△BECより
DC＝EC, ∠BEC＝∠ADC＝∠ABC＝60°
よって△CDEは正三角形だから DE＝EC＝4 cm
したがって BD＝BE－DE＝6－4＝2 cm
(2)
△BECで∠BDP＝∠BEC＝60°より DP // EC
よって
BD:BE＝PD:CE
2:6＝PD:4
$PD=\frac{2\times4}{6}$
$=\frac{4}{3}$cm
(3)
△ABCの1辺の長さをx cmとする。
∠BEC＝∠ACP
∠EBC＝∠CAPより
△BEC∽△ACP
よって
BE:AC＝BC:AP
$6:x=x:\left(6-\frac{4}{3}\right)$
$x^2=28$
よって
$S_1:S_2=x^2:4^2=28:16=7:4$

【問 20】

右の図は，点 O を中心とする円で，線分 AB は円の直径である。点 C は線分 OB 上にあり，点 D は$\overset{\frown}{AB}$上にあって，DO⊥AB である。四角形 CDEF は線分 CD を 1 辺とする正方形で，点 E は円の外部にあり，点 F は円の内部にある。また，点 G は線分 AD と線分 EF との交点である。



このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

（熊本県　2016 年度）

問1 △ADE≡△BDC であることを証明しなさい。

問2 OC＝2 cm，OD＝5 cm のとき，線分 AG の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答
問1
〔証明〕
△ADEと△BDCにおいて
四角形CDEFは正方形だから
DE＝DC…①
∠DBAと∠DABは
それぞれ$\overset{\frown}{AD}$と$\overset{\frown}{BD}$に対する円周角で
DO⊥ABだから∠DBA＝∠DAB＝45°
よって△DABは二等辺三角形だから
AD＝BD…②
また四角形CDEFは正方形で∠EDC＝90°だから
∠ADE＝90°－∠ADC…③
ABは円Oの直径だから∠ADB＝90°
したがって
∠BDC＝90°－∠ADC…④
③, ④より
∠ADE＝∠BDC…⑤
①, ②, ⑤より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ADE≡△BDC
問2　$\dfrac{6\sqrt{2}}{7}$cm
解説
問1
△ADEと△BDCにおいて
正方形の1辺として
ED＝DC…①
また, ODはABの垂直二等分線上にあるので
AD＝BD…②
ABは直径なので∠ADB＝90°
∠EDA＝90°－∠ADC＝∠BDC…③
①, ②, ③より
2辺とその間の角が等しいので
△ADE≡△BDC
問2
EFとAOの交点をIとおくと
△EAI∽△DOC
△ADE≡△BDCより,
AE＝CB＝5－2＝3
AI : OC＝EA : DO
すなわちAI : 2＝3 : 5
AI＝$\dfrac{6}{5}$
また△AGI∽△ADCよりAG : AD＝AI : AC
ここでADは△OABが直角二等辺三角形よりAD＝$5\sqrt{2}$
よってAG : $5\sqrt{2}$ ＝ $\dfrac{6}{5}$: 7
AG＝$\dfrac{6\sqrt{2}}{7}$cm