

4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2006 年度出題】

【問 1】

図 I は、 $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC で、線分 AM は、辺 BC の中点 M と頂点 A を結んだものです。この三角形を、図 II のように、辺 AC が線分 AM と重なるように折り、折ったあとの頂点 C の位置を D 、折り目の線を AE とします。

このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(岩手県 2006 年度)

問1 $\triangle ABM \sim \triangle EDM$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=10\text{ cm}$, $BC=16\text{ cm}$ のとき、線分 AE の長さを求めなさい。

図 I

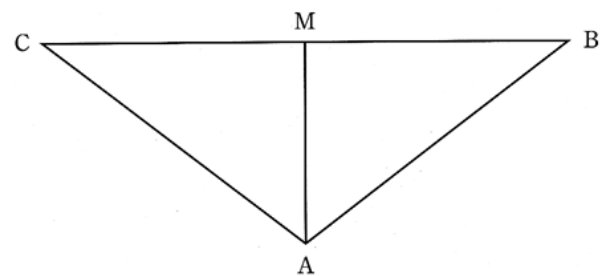
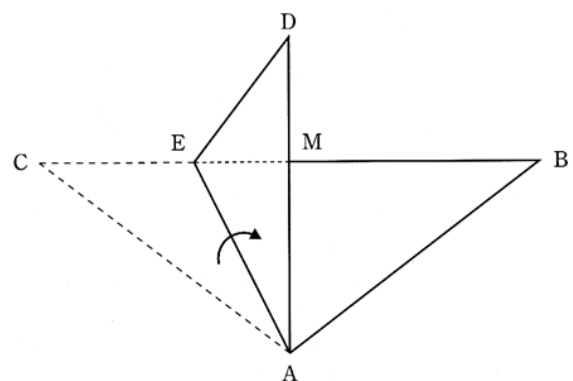


図 II



解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

問1

証明

$\triangle ABM$ と $\triangle EDM$ において

二等辺三角形の底角は等しいから

$$\angle ABM = \angle EDM$$

対頂角は等しいから

$$\angle AMB = \angle EMD$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABM \sim \triangle EDM$$

問2 $3\sqrt{5}$ cm

解説

問2

$\triangle ABM$ で三平方の定理より

$$AM = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = 6\text{cm}$$

$AD = AB = 10\text{cm}$ より, $DM = 10 - 6 = 4\text{cm}$

問1より $BM:DM = AM:EM$

$$8:4 = 6:EM$$

$$EM = \frac{4 \times 6}{8} = 3\text{cm}$$

よって $\triangle AEM$ で三平方の定理より

$$AE = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}\text{ cm}$$

【問 2】

図 I のように、ひし形 ABCD の辺 BC 上に点 P をとり、直線 AP と直線 DC との交点を Q とします。

あとの(1)～(3)の問いに答えなさい。

(宮城県 2006 年度)

(1) $\angle CDA$ と等しい角をすべて答えなさい。

(2) $\triangle BPA \sim \triangle CPQ$ を証明しなさい。

(3) 図 II は、図 I において、 $BP=4\text{ cm}$, $PC=2\text{ cm}$,

$\angle DAB=60^\circ$ とし、対角線 DB と直線 AP との交点を R としたものです。四角形 DRPC の面積を求めなさい。

図 I

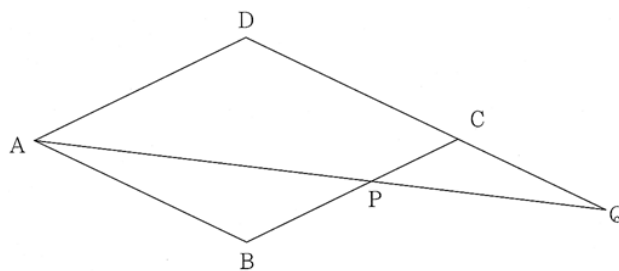
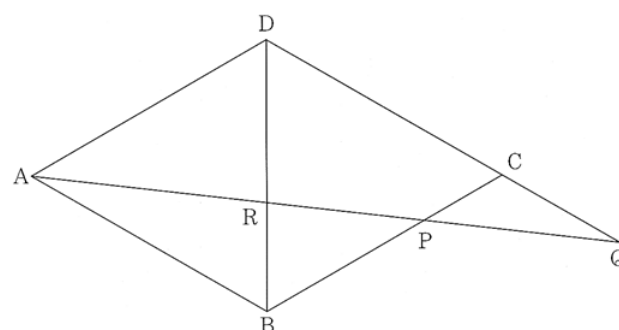


図 II



解答欄

(1)	
(2)	
(3)	cm^2

解答

(1) $\angle ABC$, $\angle QCP$

(2)

$\triangle BPA$ と $\triangle CPQ$ において

対頂角は等しいから

$$\angle BPA = \angle CPQ \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ABP = \angle QCP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BPA \sim \triangle CPQ$$

$$(3) \frac{33\sqrt{3}}{5} \text{ cm}^2$$

解説

問2

(3)

C, P から BD に垂線 CH, PK をひく。

$$\triangle CBD \text{ は正三角形になるから } CH = \sqrt{3} \text{ DH} = \frac{6}{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

PK // CH より

$$PK:CH = BP:BC$$

$$PK:3\sqrt{3} = 4:6$$

$$PK = 3\sqrt{3} \times \frac{4}{6} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

また $\triangle BPA \sim \triangle CPQ$ より

$$AB:QC = BP:CP$$

$$6:QC = 4:2$$

$$QC = 6 \times \frac{2}{4} = 3 \text{ cm}$$

さらに $\triangle ABR$ と $\triangle QDR$ は 2 組の角が等しいので相似になるから

$$BR:DR = AB:QD$$

$$BR = x \text{ cm とおくと } DR = 6 - x \text{ cm}$$

$$x:(6-x) = 6:(6+3)$$

$$9x = 6(6-x)$$

$$x = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

よって四角形 DRPC = $\triangle CBD - \triangle PBR$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \frac{12}{5} \times 2\sqrt{3}$$

$$= 9\sqrt{3} - \frac{12\sqrt{3}}{5}$$

$$= \frac{33\sqrt{3}}{5} \text{ cm}^2$$

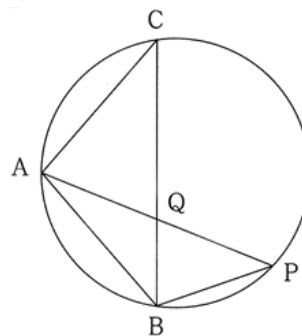
【問 3】

図 1 の $\triangle ABC$ は、3 点 A, B, C を同じ円周上にとったもので、 $AB=AC$ の二等辺三角形である。点 A をふくむ弧 BC を除いた円周上に点 P をとり、線分 AP と線分 BC との交点を Q とする。あとの問いに答えなさい。

(山形県 2006 年度)

問1 図 1 において、 $\triangle ABQ$ と $\triangle APB$ が相似であることを証明しなさい。

図 1

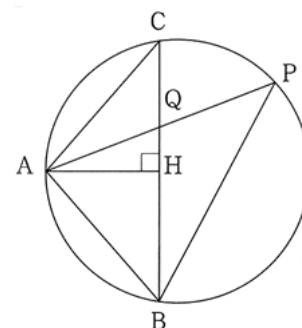


問2 図 2 は、図 1 で、 $PA=PB$ となるように点 P をとったときのものである。点 A から

ら BC にひいた垂線と BC との交点を H とし、 $AB=AC=4\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$ であるとき、あとの(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) AH の長さを求めなさい。

図 2



(2) $\triangle ABQ$ の面積を求めなさい。

問3 図 1 で、 $AB=AC=BP$ となるように 4 点 A, B, C, P をとったとき、点 A をふくまない 2 つの弧、弧 BP と弧 PC の長さの比が $1:3$ であった。このとき、 $\angle CQP$ の大きさを求めなさい。

問1	<証明>		
問2	(1)	cm	
	(2)	cm ²	
問3	°		

解答

問1

<証明>

$\triangle ABQ$ と $\triangle APB$ において

仮定より

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから

$$\angle ABQ = \angle ACB \cdots \textcircled{1}$$

円周角の定理より

$$\angle ACB = \angle APB \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle ABQ = \angle APB \cdots \textcircled{3}$$

また共通だから

$$\angle BAQ = \angle PAB \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABQ \sim \triangle APB$$

問2

$$(1) \sqrt{7} \text{ cm}$$

$$(2) 2\sqrt{7} \text{ cm}^2$$

問3 120°

解説

問2

(1)

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから

$$BH=CH=\frac{6}{2}=3\text{cm}$$

よって $\triangle ACH$ で三平方の定理より

$$AH=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle ABQ \sim \triangle APB$ より

$$BQ:PB=AB:AP$$

また, $PB=AP$ より

$$BQ=AB=4\text{cm}$$

$$\text{よって } \triangle ABQ = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7} \text{ cm}^2$$

問3

$AB=AC=BP$ より

弧 AB = 弧 AC = 弧 BP

弧 BP :弧 PC = 1:3 より

(弧 AB + 弧 AC + 弧 BP):弧 PC = 1:1

よって CP はこの円の直径となり円の中心を O とすると

$$\angle COA = \angle AOB = \angle BOP = 60^\circ$$

$\triangle COA$, $\triangle AOB$, $\triangle BOP$ は正三角形となる。

直径に対する円周角は 90° より

$$\angle CAP = 90^\circ$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

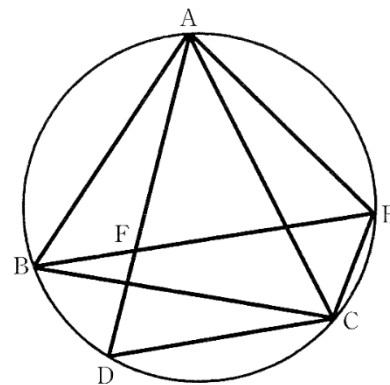
$$\text{よって } \angle CQP = \angle QAC + \angle ACQ = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

【問 4】

右の図のように、円周上の 3 点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ がある。
点 A をふくまない方の弧 BC 上に点 D をとり、点 B を通り DC に平行な
直線と円との交点を E とし、 BE と AD の交点を F とする。

このとき、 $\triangle ABF \sim \triangle ACE$ を証明しなさい。

(栃木県 2006 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$\triangle ABF$ と $\triangle ACE$ において

弧 AE に対する円周角は等しいから

$$\angle ABF = \angle ACE \cdots \textcircled{1}$$

弧 BD に対する円周角は等しいから

$$\angle BAF = \angle BCD \cdots \textcircled{2}$$

$BE \parallel DC$ より, 平行線の錯角は等しいから

$$\angle BCD = \angle CBE \cdots \textcircled{3}$$

弧 CE に対する円周角は等しいから

$$\angle CBE = \angle CAE \cdots \textcircled{4}$$

②, ③, ④より

$$\angle BAF = \angle CAE \cdots \textcircled{5}$$

①, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいから

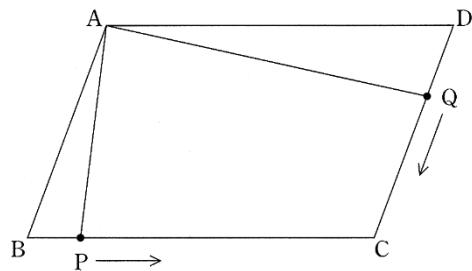
$$\triangle ABF \simeq \triangle ACE$$

【問 5】

右の図のように、平行四辺形 $ABCD$ の边上を、点 P と点 Q が頂点 A を同時に出発して、点 P は辺 AB , BC 上を、点 Q は辺 AD , DC 上を、頂点 C まで、それぞれ一定の速さで進みます。

出発後、点 P は頂点 B に、点 Q は頂点 D に、同時に到着しました。その後、点 P は辺 BC を 25 秒で、点 Q は辺 DC を 16 秒で、それぞれ頂点 C に到着しました。

このとき、次の各問に答えなさい。



(埼玉県 2006 年度)

問1 頂点 A を出発してから同時刻に、点 P が辺 BC 上に、点 Q が辺 DC 上にあり、 $\triangle ABP$ と $\triangle ADQ$ ができました。このとき、 $\triangle ABP$ と $\triangle ADQ$ が相似であることを証明しなさい。

問2 点 P と点 Q が、それぞれ頂点 B と頂点 D に、同時に到着したのは、頂点 A を出発してから何秒後であるかを求めなさい。

解答欄

問1	証明
問2	秒後

解答

問1

(証明)

$\triangle ABP$ と $\triangle ADQ$ において

平行四辺形の向かいあう角は等しいから

$$\angle ABP = \angle ADQ \cdots \textcircled{1}$$

点 P は頂点 B に点 Q は頂点 D に同時に到着することから

辺 AB と辺 AD の長さの比は点 P と点 Q の速さの比に等しい。

同様に辺 BP と辺 DQ の長さの比も点 P と点 Q の速さの比に等しい。

したがって

$$AB:AD=BP:DQ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2 組の辺の比が等しく、その間の角が等しいので

$$\triangle ABP \sim \triangle ADQ$$

問2 20 秒後

解説

問1

点 P, Q が同時に B, D に到着するから

距離 = 速さ $\times$ 時間で時間が等しいので距離は速さに比例する。

よって $AB:AD=BP:DQ$ = 点 P の速さ : 点 Q の速さ

問2

点 P, Q が x 秒後に B, D に到着するとすると

$$\text{点 P の速さは } \frac{AB}{x}$$

$$\text{点 Q の速さは } \frac{AD}{x} \text{ と表せる。}$$

$$\text{よって } BC=AD=\frac{AB}{x} \times 25$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{25}{x} \cdots \textcircled{1}$$

$$DC=AB=\frac{AD}{x} \times 16$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{x}{16} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\frac{25}{x} = \frac{x}{16}$$

$$x^2 = 25 \times 16$$

$$x^2 = 400$$

$x > 0$ より

$$x = 20 \text{ 秒後}$$

【問 6】

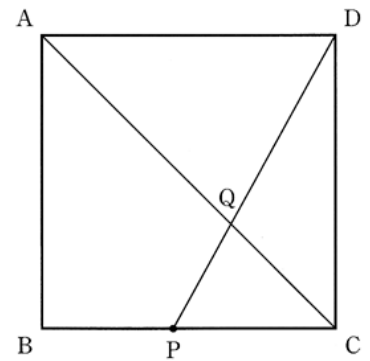
右の図 1 で、四角形 $ABCD$ は正方形である。頂点 A と頂点 C を結ぶ。点 P は正方形 $ABCD$ の辺 BC 上にある点で、頂点 B 、頂点 C のいずれにも一致しない。頂点 D と点 P を結び、対角線 AC との交点を Q とする。

次の各問に答えよ。

(東京都 2006 年度)

問1 図 1 において、 $\angle DPC = a^\circ$ とするとき、 $\angle DQC$ の大きさを a を用いた式で表せ。

図 1



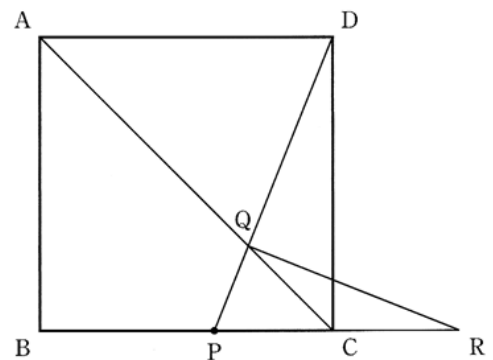
問2 右の図 2 は、図 1 において、点 Q を通り線分 DP と垂直に交わる直線をひき、辺 BC を C の方向に延ばした直線との交点を R とした場合を表している。

次の(1), (2)に答えよ。

(1) $\triangle DPC \sim \triangle RPQ$ であることを証明せよ。

(2) 図 2 において、頂点 B と点 Q を結んだ場合を考える。 $AB = 12 \text{ cm}$, $BP = 8 \text{ cm}$ のとき、 $\triangle BRQ$ の面積は何 cm^2 か。

図 2



解答欄

問1	度	
問2	(1)	[証 明]
	(2)	cm^2

解答

問1 ($a+45$)度

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle DPC$ と $\triangle RPQ$ において

四角形 $ABCD$ は正方形だから $\angle PCD = 90^\circ$

線分 QR は線分 DP に垂直だから $\angle PQR = 90^\circ$

よって $\angle PCD = \angle PQR \cdots (1)$

共通な角だから

$\angle DPC = \angle RPQ \cdots (2)$

(1), (2)より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle DPC \sim \triangle RPQ$

(2) 27cm^2

解説

問2

(2)

$PC = 12 - 8 = 4\text{cm}$

$\triangle DPC$ で三平方の定理より

$DP = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}\text{ cm}$

ここで $AD \parallel BC$ より

$\triangle QAD$ と $\triangle QCP$ は2組の角が等しいので相似になるから

$DQ:PQ = 12:4 = 3:1$

$QP = \frac{1}{4} DP = \sqrt{10}\text{ cm}$

(1)より $\triangle DPC \sim \triangle RPQ$ だから

$DP:RP = DC:RQ = PC:PQ$

$4\sqrt{10}:RP = 12:RQ = 4:\sqrt{10}$

$RP = 10\text{cm}$

$RQ = 3\sqrt{10}\text{ cm}$

よって $\triangle QPR = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{10} = 15\text{cm}^2$

$\triangle QBP:\triangle QPR = BP:PR = 8:10 = 4:5$

よって $\triangle QBP = \frac{4}{5} \triangle QPR = \frac{4}{5} \times 15 = 12\text{cm}^2$

$\triangle BRQ = \triangle QBP + \triangle QPR = 12 + 15 = 27\text{cm}^2$

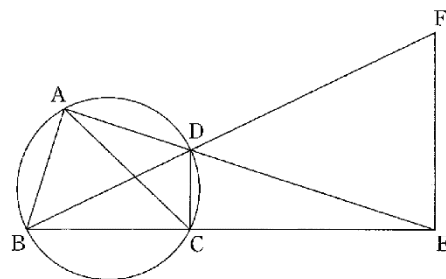
【問 7】

右の図のように、円周上に点 A, B, C, D がある。直線 AD, BC の交点を E とし、 E を通り直線 CD に平行な直線と直線 BD との交点を F とする。

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2006 年度)

問1 $\triangle ABC \sim \triangle FED$ であることを証明せよ。



問2 $BC=6\text{ cm}$, $CD=3\text{ cm}$, $CE=9\text{ cm}$, $\angle BCD=90^\circ$ のとき、

(1) AB の長さを求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

解答欄

問1	(証明)	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

(証明)

△ABC と△FED において

円周角の定理より

$$\angle ACB = \angle ADB \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから

$$\angle ADB = \angle EDF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle ACB = \angle EDF \cdots \textcircled{3}$$

円周角の定理より

$$\angle BAC = \angle BDC \cdots \textcircled{4}$$

DC // FE より

$$\angle BDC = \angle DEF (\text{錯角}) \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より

$$\angle BAC = \angle DFE = \angle EFD \cdots \textcircled{6}$$

③と⑥より

2 角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle FED$$

問2

$$(1) \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$$

$$(2) 13.5 \text{ cm}^2$$

解説

問2

(1)

DC//FE より

$$DC:FE = BC:BE$$

$$3:FE = 6:(6+9)$$

$$FE = \frac{3 \times 15}{6} = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

△DCE で三平方の定理より

$$ED = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ cm}$$

△ABC ∽ △FED より

$$AB:FE = BC:ED$$

$$AB:\frac{15}{2} = 6:3\sqrt{10}$$

$$AB = \frac{15}{2} \times \frac{6}{3\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$$

(2)

$$\triangle BCD \text{ で三平方の定理より } BD = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$DC // FE \text{ より } BD:DF = BC:CE \quad 3\sqrt{5}:DF = 6:9 \quad DF = \frac{3\sqrt{5} \times 9}{6} = \frac{9\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle FED \text{ より } AC:FD = BC:ED \quad AC:\frac{9\sqrt{5}}{2} = 6:3\sqrt{10} \quad AC = \frac{9\sqrt{5}}{2} \times \frac{6}{3\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

A から BC に垂線 AH をひく。

$$BH = x \text{ cm とすると } AH^2 = AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2 \text{ より } \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 - x^2 = \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (6-x)^2$$

$$\text{これを解いて } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } AH = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2} \text{ cm}^2$$

【問 8】

右の写真のように、円の上に三角定規を置いた。この様子を表したのが図である。 $\triangle ABC$ は $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ で、頂点 A, B は円周上にある。また、円周と辺 AC, BC との交点をそれぞれ D, E とする。このとき、下の各問いに答えなさい。

(長野県 2006 年度)

問1 A と E , B と D を直線で結ぶ。

(1) $\triangle AEC \sim \triangle BDC$ を証明しなさい。

(2) $\triangle AEC$ と $\triangle BDC$ の相似比を求めなさい。

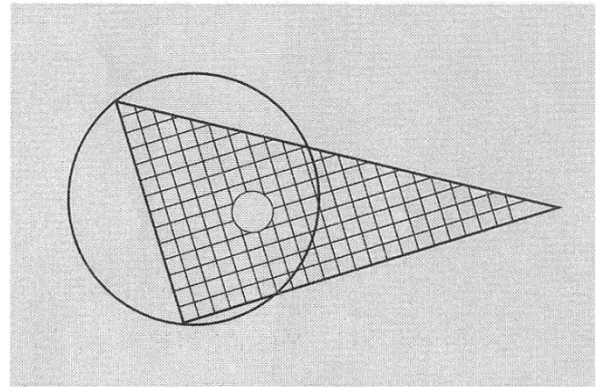
問2 $\angle CAE = 45^\circ$, $AD = 4 \text{ cm}$ とする。

(1) $\angle ADB$ の大きさを求めなさい。

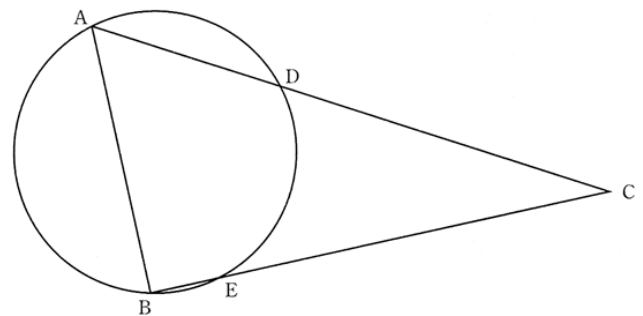
(2) $\triangle ADB$ の面積を求めなさい。

(3) 弧 AD の長さを求めなさい。ただし、円周率は π を用いなさい。

写真



図



解答欄

問1	(1)		
	(2)	:	
問2	(1)	。	
	(2)	cm ²	
	(3)	cm	

解答

問1

(1)

$\triangle AEC$ と $\triangle BDC$ で

共通な角だから

$$\angle ECA = \angle DCB \cdots \textcircled{1}$$

弧 DE に対する円周角は等しいから

$$\angle EAC = \angle DBC \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AEC \sim \triangle BDC$$

$$(2) \quad 2 : \sqrt{3}$$

問2

$$(1) \quad 75^\circ$$

$$(2) \quad 6 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$(3) \quad \sqrt{2} \pi \text{ cm}$$

解説

問1

(2)

$\triangle ABC$ は $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ より

$$AB : AC : BC = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

よって $\triangle AEC$ と $\triangle BDC$ の相似比は

$$AC : BC = 2 : \sqrt{3}$$

問2

(1)

円周角の定理より $\angle DBE = \angle DAE = 45^\circ$

$$\text{よって } \angle ADB = \angle DBE + \angle BCD = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

(2)

D から AB に垂線 DH をひく。

$\triangle DAH$ で $\angle DAH = 60^\circ$ より

$$AH = \frac{AD}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$HD = \sqrt{3} AH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{また } \angle ABD = 90^\circ - \angle DBE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

よって $\triangle HBD$ は $HB = HD = 2\sqrt{3}$ の直角二等辺三角形。

$$\text{したがって } \triangle ADB = \frac{1}{2} \times AB \times DH$$

$$= \frac{1}{2} (2\sqrt{3} + 2) \times 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(3)

円の中心を O とすると $\angle AOD = 2\angle ABD = 90^\circ$

よって $\triangle OAD$ は直角二等辺三角形になる。

$OA : AD = 1 : \sqrt{2}$ より

$$OA = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

よって弧 AD の長さは

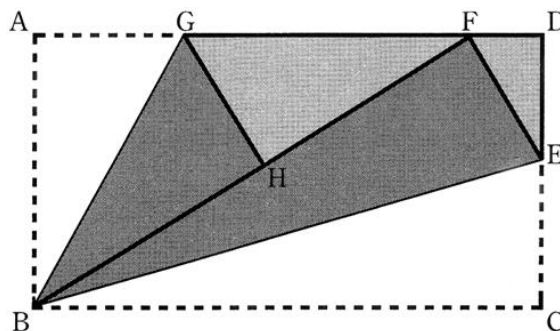
$$2\pi \times 2\sqrt{2} \times \frac{90}{360} = \sqrt{2} \pi \text{ cm}$$

【問 9】

図のように、長方形 ABCD で、辺 CD 上に点 E をとり、線分 BE を折り目として△BCE を折り返したところ、頂点 C が辺 AD 上の点 F に来た。さらに、線分 AF 上に点 G をとり、線分 BG を折り目として△ABG を折り返したところ、頂点 A が線分 BF 上の点 H に来た。

次の1～3の問いに答えなさい。

(岐阜県 2006 年度)



問1 $\angle GHF$ の大きさを求めなさい。

問2 $\triangle GHF \sim \triangle FDE$ であることを証明しなさい。

問3 $AG = 3 \text{ cm}$, $GF = 5 \text{ cm}$ のとき、

(1) HF と AB の長さを、それぞれ求めなさい。

(2) $\triangle FDE$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	度	
問2		
問3	(1)	HF の長さ cm AB の長さ cm
	(2)	cm ²

解答

問1 90 度

問2

$\triangle GHF$ と $\triangle FDE$ で

問1から $\angle GHF = \angle FDE \cdots \textcircled{1}$

問1から $\angle FGH + \angle GFH = 90^\circ$

よって $\angle FGH = 90^\circ - \angle GFH \cdots \textcircled{2}$

$\angle BFE = 90^\circ$ だから $\angle EFD + \angle GFH = 90^\circ$

よって $\angle EFD = 90^\circ - \angle GFH \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ から

$\angle FGH = \angle EFD \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ から

2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle GHF \sim \triangle FDE$

問3

(1) HF の長さ 4 cm AB の長さ 6 cm

(2) $\frac{8}{3} \text{ cm}^2$

解説

問1

$\angle BHG = \angle BAG = 90^\circ$

よって $\angle GHF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

問3

(1)

$GH = GA = 3 \text{ cm}$

$\triangle GHF$ で三平方の定理より

$HF = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$

$AB = HB = x \text{ cm}$ とすると

$\triangle ABF$ で三平方の定理より

$x^2 + (3 + 5)^2 = (x + 4)^2$

$8x = 48$

$x = 6 \text{ cm}$

(2)

$BC = BF = 6 + 4 = 10 \text{ cm}$

$FD = 10 - (3 + 5) = 2 \text{ cm}$

$\triangle GHF \sim \triangle FDE$ より

$GH : FD = HF : DE$

$3 : 2 = 4 : DE$

$DE = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}$

$\triangle FDE = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}^2$

【問 10】

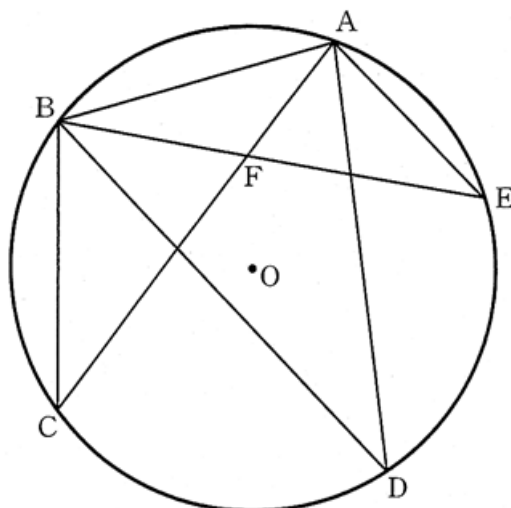
図 7 において、4 点 A, B, C, D は円 O の円周上の点であり、 $BA=BC$ である。点 A を通り BD に平行な直線と円 O との交点を E とする。AC と BE との交点を F とする。

このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(静岡県 2006 年度)

問1 $\triangle ABD \sim \triangle BFC$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=6\text{ cm}$, $AD=9\text{ cm}$, $AF=3\text{ cm}$ のとき、AE の長さを求めなさい。



解答欄

問1	
問2	cm

解答

問1

$\triangle ABD$ と $\triangle BFC$ において

$\angle ACB = a$, $\angle CBD = b$ とおくと

円周角の定理より

$\angle ADB = \angle ACB = \angle AEB = a$

$\angle CBD = \angle CAD = b$

$BA = BC$ より二等辺三角形の底角は等しいので

$\angle BAC = \angle ACB = a$

$BD \parallel AE$ より

平行線の錯角は等しいので

$\angle DBE = \angle AEB = a$

よって $\angle ADB = \angle BCF = a \cdots \textcircled{1}$

$\angle DAB = \angle CBF = a + b \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABD \sim \triangle BFC$

問2 $\frac{9}{2}$ cm

解説

問2

問1と同様に考えると

$\triangle AFE$ と $\triangle ABD$ において

円周角の定理より

$\angle EAD = \angle EBD = a$

$\angle AEF = \angle ADB = a$

$\angle EAF = \angle DAB = a + b$

よって

2組の角がそれぞれ等しくなるので

$\triangle AFE \sim \triangle ABD$

よって, $AF:AE = AB:AD$

$3:AE = 6:9$

$AE = \frac{3 \times 9}{6} = \frac{9}{2}$ cm

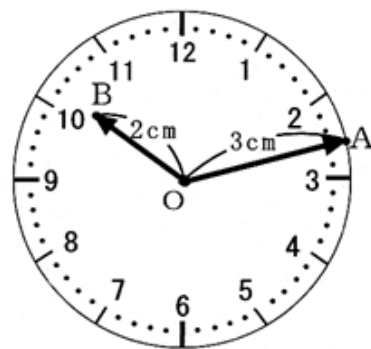
【問 11】

長針の長さが 3 cm, 短針の長さが 2 cm の時計がある。図 1 のように, 長針の先端を A, 短針の先端を B とし, A は円 O の円周上にあるとする。2 つの針はそれぞれ一定の速さで動くとして, 後の 1~3 の問いに答えなさい。

(滋賀県 2006 年度)

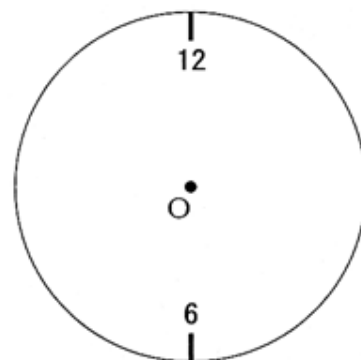
問1 時計が 1 時 30 分を示すとき, 長針と短針の間にできる小さい方の角度を求めなさい。

図 1



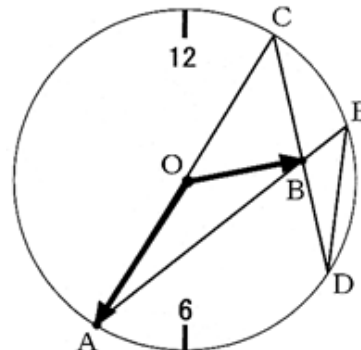
問2 時計が 2 時 25 分を示すときの長針の先端 A を, コンパスと定規を使って図 2 に作図しなさい。ただし, 作図に使った線は消さないこと。

図 2



問3 図 3 のように, 線分 AO の延長と円との交点を C, 線分 CB の延長と円との交点を D, 線分 AB の延長と円との交点を E とする。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

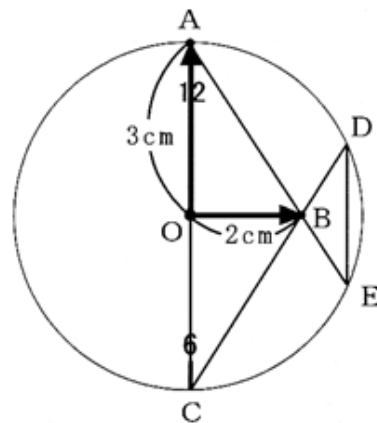
図 3

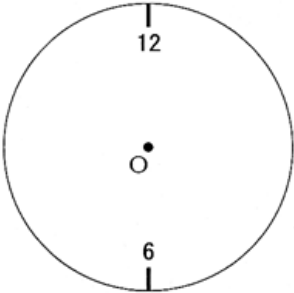


(1) 図 3 において, $\triangle BCA \sim \triangle BED$ を証明しなさい。

(2) 図 4 のように時計が 3 時 00 分を示すとき, $\triangle BCA$ と $\triangle BED$ の相似比を求めなさい。

図 4

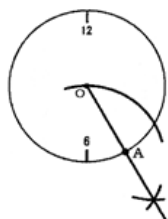


問1	度	
問2		
問3	(1)	【証明】
	(2)	:

解答

問1 135 度

問2



問3

(1)

【証明】

$\triangle BCA$ と $\triangle BED$ において

弧 AD に対する円周角は等しいから

$$\angle ACB = \angle DEB \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから

$$\angle CBA = \angle EBD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BCA \sim \triangle BED$$

(2) 13:5

解説

問1

12 の位置から短針は 1 時間に $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

長針は 12 の位置から 1 分間に $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

ずつ移動する。

1 時 30 分に、短針は $30^\circ \times 1.5 = 45^\circ$ 進み

長針は 1 回転したあと $6^\circ \times 30 = 180^\circ$ 進むから $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

問2

A は文字盤の 5 の位置にある。O, 5, 6 を結んだときの中心角が 30° になればよい。

O, 4, 6 を結ぶと正三角形になるのでその中心角の二等分線をひく。

問3

(2)

CE を結ぶ。

$\triangle ABO$ と $\triangle ACE$ において

$\angle AEC$ は直径に対する円周角より 90° だから

$$\angle AOB = \angle AEC$$

$\angle A$ は共通

よって 2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABO \sim \triangle ACE$$

したがって $AB:AC = BO:CE$

$\triangle AOB$ において $\angle AOB = 90^\circ$ だから $AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$$\text{よって } \sqrt{13}:6 = 2:CE \quad CE = \frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

$$\triangle CBE \text{ において } BC = BA = \sqrt{13} \text{ だから } BE = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - \left(\frac{12\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{よって } BC:BE = \sqrt{13}:\frac{5\sqrt{13}}{13} = 13:5 \text{ より}$$

$\triangle BCA$ と $\triangle BED$ の相似比は 13:5

【問 12】

図 I, 図 II において, 四角形 ABCD は $AB=13\text{ cm}$, $AD=8\text{ cm}$ の長方形である。E は, 辺 AD 上にあって A, D と異なる点である。四角形 ECFG は $EG \parallel BF$ の台形であって台形 ECFG = 台形 EBCD であり, 台形 ECFG の辺 FG は長方形 ABCD の 2 辺 AB, AD と交わっている。H は辺 FG と辺 AB との交点であり, $AH=3\text{ cm}$ である。I は辺 FG と辺 AD との交点である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 2006 年度 後期)

問1 図 I において,

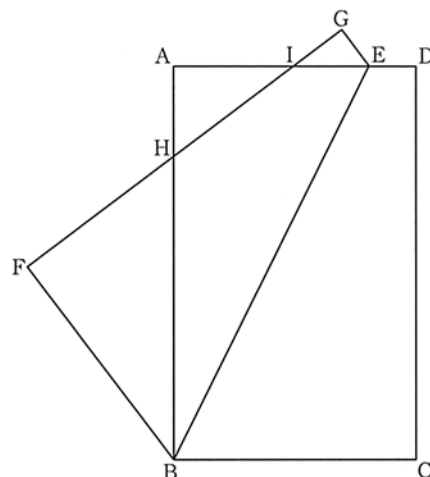
(1) 台形 ECFG の辺 FG の長さを求めなさい。

(2) $\triangle HFB$ の面積を求めなさい。

(3) $\triangle AHI \sim \triangle GEI$ であることを証明しなさい。

(4) 線分 ED の長さを求めなさい。

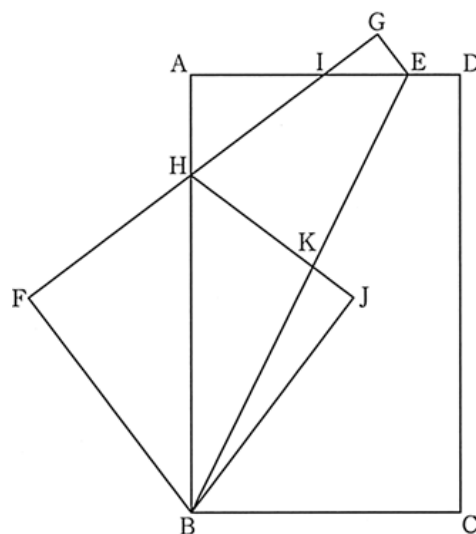
図 I



問2 図 II において, J は, 直線 AB について F と反対側にあって $\triangle HJB \equiv \triangle HFB$ となる点である。このとき, J は台形 EBCD の内部の点となる。K は, 線分 HJ と線分 EB との交点である。

台形 EBCD の内角 $\angle EBC$ の大きさを α° とするとき, $\triangle KBJ$ の内角 $\angle KBJ$ の大きさを α を用いて表しなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

図 II



解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	cm ²
	(3)	
	(4)	cm
問2	度	
	(求め方)	

解答

問1

(1) 13 cm

(2) 24 cm^2

(3)

$\triangle AHI$ と $\triangle GEI$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AIH = \angle GIE \cdots \textcircled{7}$$

四角形 ABCD は長方形だから

$$\angle HAI = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle EDC = 90^\circ$$

台形 ECFG $\equiv$ 台形 EBCD だから

$$\angle EGI = \angle EDC = 90^\circ \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{7}$ より

$$\angle HAI = \angle EGI \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AHI \sim \triangle GEI$

$$(4) \frac{3}{2} \text{ cm}$$

問2 $3a - 180$ 度

(求め方)

台形 ECFG $\equiv$ 台形 EBCD だから

$$\angle EBF = \angle EBC = a^\circ$$

また四角形 ABCD は長方形だから $\angle ABC = 90^\circ$

よって

$$\angle HBF = \angle EBF + \angle EBC - \angle ABC$$

$$= (2a - 90)^\circ$$

$\triangle HJB \equiv \triangle HFB$ だから

$$\angle HBJ = \angle HBF = (2a - 90)^\circ$$

$$\text{また } \angle HBK = \angle ABC - \angle EBC = (90 - a)^\circ$$

$$\text{したがって } \angle KBJ = \angle HBJ - \angle HBK = (3a - 180)^\circ$$

解説

問1

(2)

$\triangle HFB$ で $BF = BC = 8 \text{ cm}$, $HB = AB - AH = 13 - 3 = 10 \text{ cm}$, $\angle HFB = 90^\circ$ より

$$\text{三平方の定理から } HF = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle HFB = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ cm}^2$$

(4)

$ED = x \text{ cm}$ とする。

$$EG = ED = x \text{ cm}$$

(3)より $\triangle GEI \equiv \triangle AHI$

また $\triangle AHI \equiv \triangle FHB$ より $\triangle GEI \equiv \triangle FHB$

$$\text{よって } GE:IE = FH:BH \quad x:IE = 6:10 \quad IE = \frac{10}{6}x = \frac{5}{3}x$$

$$\text{また } AH:AI = FH:FB \quad 3:AI = 6:8 \quad AI = \frac{24}{6} = 4 \text{ cm}$$

$$AI + IE + ED = 8 \text{ より } 4 + \frac{5}{3}x + x = 8 \quad x = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

問2

台形 ECFG $\equiv$ 台形 EBCD

$$\text{よって } \angle EBF = \angle EBC = a^\circ \quad \angle FBH = \angle EBF + \angle EBC - \angle ABC = 2a^\circ - 90^\circ$$

$\triangle HJB \equiv \triangle HFB$ より

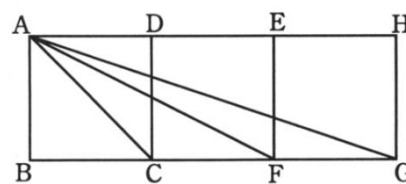
$$\angle JBH = \angle FBH = 2a^\circ - 90^\circ \quad \text{また } \angle HBK = \angle ABC - \angle EBC = 90^\circ - a^\circ$$

$$\text{よって } \angle KBJ = \angle JBH - \angle HBK = 2a^\circ - 90^\circ - (90^\circ - a^\circ) = 3a^\circ - 180^\circ$$

【問 13】

図で、四角形 $ABCD$, $CDEF$, $EFGH$ はそれぞれ 1 辺の長さが 1 cm の正方形である。各問いに答えよ。

(奈良県 2006 年度)



問1 $\triangle ACF \sim \triangle GCA$ であることを証明せよ。

問2 $\angle DAG = \alpha^\circ$ とするとき、 $\angle FAG$ の大きさを α を用いて表せ。

問3 線分 CH と線分 AF , AG との交点をそれぞれ I , J とする。このとき、 $\triangle AIJ$ の面積を求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	
問3	cm^2

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ACF$ と $\triangle GCA$ において

三平方の定理より $AC = \sqrt{2}$ cm であるから

$$CF:CA = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$AC:GC = \sqrt{2}:2$$

$$= 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle ACF = \angle GCA \text{ (共通)} \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2組の辺の比が等しくその間の角が等しいから

$$\triangle ACF \sim \triangle GCA$$

問2 $45^\circ - 2a^\circ$

$$\text{問3 } \frac{9}{40} \text{ cm}^2$$

解説

問2

AH // BG より

錯角が等しいので

$$\angle AGC = \angle DAG = a^\circ$$

$\triangle ACF \sim \triangle GCA$ より

$$\angle AGC = \angle FAC = a^\circ$$

$$\text{よって } \angle FAG = 45^\circ - \angle DAG - \angle FAC = 45^\circ - 2a^\circ$$

問3

AH // BG より

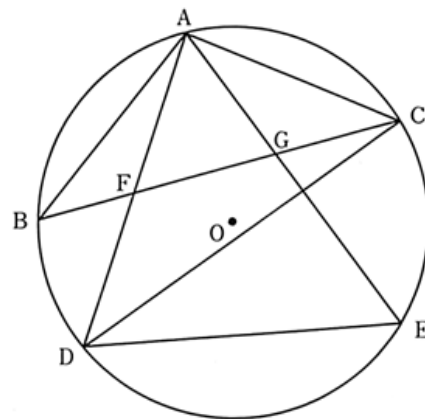
$$GJ:GA = CG:AH = 2:3$$

$$\text{また } FI:IA = CF:AH = 1:3$$

$$\text{よって } \triangle AIJ = \frac{3}{4} \triangle AFJ = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \triangle AFG = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{9}{40} \text{ cm}^2$$

【問 14】

右の図のような、円 O の円周上にある 3 点 A, B, C を頂点とする $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC がある。点 A を含まない弧 $\widehat{BC}$ 上に 2 点 B, C と異なる点 D をとり、点 A と点 D 、点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。また、点 B を含まない弧 $\widehat{CD}$ 上に 2 点 C, D と異なる点 E をとり、点 A と点 E 、点 D と点 E をそれぞれ結ぶ。線分 BC と線分 AD との交点を F 、線分 BC と線分 AE との交点を G とする。



このとき、次の問1では指示に従って答え、問2では に適当な数を書き入れなさい。

(岡山県 2006 年度)

問1 $\triangle AFG$ の $\triangle AED$ を証明しなさい。

問2 円 O の半径が 4 cm、点 B を含む弧 $\widehat{AD}$ の長さが円 O の円周の長さの $\frac{1}{3}$ 、 $AF = FD$ であるとき、

$\angle AED = \boxed{\text{(ア)}}^\circ$ 、 $AD = \boxed{\text{(イ)}} \text{ cm}$ 、 $BC = \boxed{\text{(ウ)}} \text{ cm}$ である。

また、 $\triangle ABF$ の面積は cm^2 である。

問1	(証明)		
問2	(ア)	°	
	(イ)	cm	
	(ウ)	cm	
	(エ)	cm ²	

解答

問1

(証明)

$\triangle AFG$ と $\triangle AED$ において

$$\angle FAG = \angle EAD \cdots (1)$$

また $\triangle ABC$ は二等辺三角形だから

$$\angle ABC = \angle ACB \cdots (2)$$

同じ弧 $\widehat{AD}$ に対する円周角から

$$\angle ACD = \angle AED \cdots (3)$$

同じ弧 $\widehat{BD}$ に対する円周角から

$$\angle BAD = \angle BCD \cdots (4)$$

また $\angle AFG$ は $\triangle ABF$ の外角だから

$$\angle AFG = \angle ABF + \angle BAF$$

$$= \angle ABC + \angle BAD$$

(2), (4)から

$$\angle AFG = \angle ACB + \angle BCD$$

$$= \angle ACD \cdots (5)$$

(3), (5)から

$$\angle AFG = \angle AED \cdots (6)$$

よって(1), (6)から

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFG \sim \triangle AED$$

問2

(ア) 60°

(イ) $4\sqrt{3}$ cm

(ウ) $2\sqrt{15}$ cm

(エ) $\frac{3}{2}(\sqrt{15} - \sqrt{3})\text{cm}^2$

解説

問2

$$\angle AOD = \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$$

$$\text{円周角の定理より } \angle AED = \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{OF を結ぶと } OA = OD, AF = FD \text{ より } \angle AOF = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ, \angle OFA = 90^\circ$$

よって $\triangle OAF$ において

$$AF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3} \text{ cm} \quad AD = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

OA と BC の交点を H とすると BC はこの円の弦だから $\angle OHB = 90^\circ$

$$\triangle AHF \text{ で, } \angle AHF = 90^\circ, \angle FAH = 30^\circ \text{ より } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{よって } OH = 4 - 3 = 1 \text{ cm}$$

$\triangle OBH$ で

$$\text{三平方の定理より } BH = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15} \text{ cm} \quad BC = 2 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15} \text{ cm}$$

したがって

$$\triangle ABF = \triangle ABH - \triangle AFH$$

$$= \frac{1}{2} \times BH \times AH - \frac{1}{2} \times FH \times AH$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{15} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{2} \times 3$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

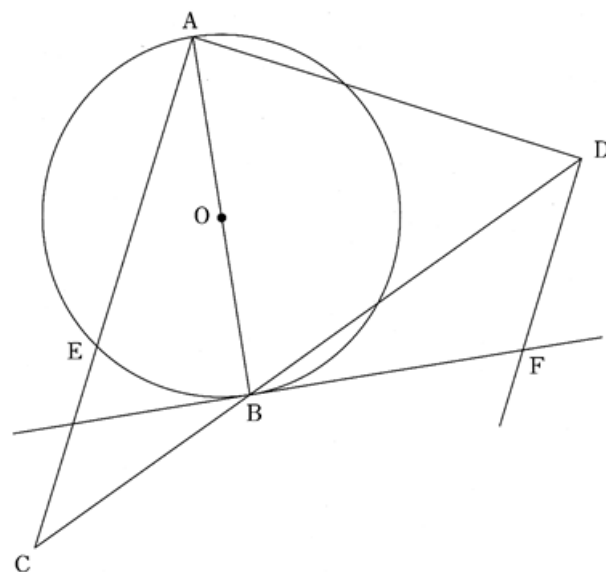
【問 15】

図のように、1 つの平面上に、 AB を直径とする円 O と $\angle CAD=90^\circ$ の直角三角形 ACD があります。点 B は辺 CD 上にあり、 $\angle ABD=\angle BAD$ です。辺 AC が点 A 以外で円 O と交わる点を E 、点 B における円 O の接線と、点 D を通り辺 AC に平行な直線との交点を F とします。

これについて、次の問1・問2に答えなさい。

(広島県 2006 年度)

問1 $\triangle ACB \sim \triangle BDF$ であることを証明しなさい。



問2 $\triangle ABD$ の面積が 10 cm^2 、 $AE=4 \text{ cm}$ のとき、線分 BD の長さを求めなさい。

解答欄

問1	
問2	cm

解答

問1

$\triangle ACB$ と $\triangle BDF$ において

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ACB = \angle BDF \cdots \textcircled{1}$$

$\angle CAD = 90^\circ$ であるから

$$\angle BAC = 90^\circ - \angle BAD \cdots \textcircled{2}$$

BF が円 O の接線であることより

$AB \perp BF$ であるから

$$\angle FBD = 90^\circ - \angle ABD \cdots \textcircled{3}$$

$\angle ABD = \angle BAD$ であることと $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ より

$$\angle BAC = \angle FBD \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACB \sim \triangle BDF$$

問2 5cm

解説

問2

円 O と AD との交点を H とし BH を結ぶと

直径に対する円周角より $\angle AHB = 90^\circ$

同様に $\angle AEB = 90^\circ$

また $\angle CAD = 90^\circ$ だから四角形 $AEBH$ は長方形である。

よって $BH = AE = 4\text{cm}$ $\triangle ABD$ の面積が 10cm^2 より

$$\frac{1}{2} \times AD \times 4 = 10 \quad AD = 5\text{cm}$$

$\angle ABD = \angle BAD$ より

$$BD = AD = 5\text{cm}$$

【問 16】

AB=6 cm, AD=8 cm の長方形 ABCD がある。点 P は辺 AB 上の点で $AP:PB=1:3$ であり, 点 Q は辺 AD 上の点で $AQ:QD=1:3$ である。また, 2 点 R, S は, それぞれ, 辺 BC, CD の中点である。次の問1・問2に答えなさい。

(徳島県 2006 年度)

問1 図 1 のように, 線分 PQ, RS をひく。

次の(1)・(2)に答えなさい。

(1) 線分 PQ の長さを求めなさい。

図 1

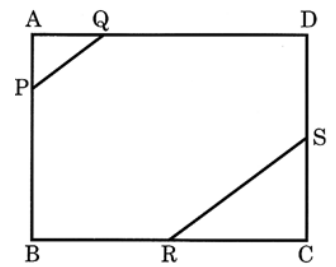
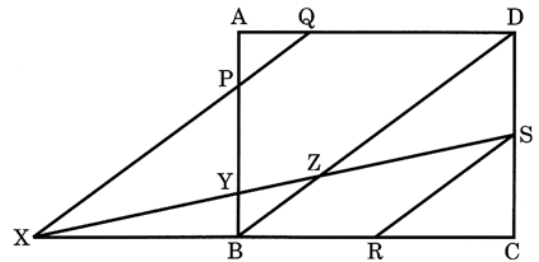


図 2



(2) $\triangle APQ \sim \triangle CSR$ であることを証明しなさい。

問2 図 2 のように, 線分 QP と辺 CB をそれぞれ延長した直線の交点を X とし, 2 点 X, S を結ぶ。線分 XS と辺 AB, 対角線 BD との交点を, それぞれ, Y, Z とする。

次の(1)・(2)に答えなさい。

(1) 線分 XY と線分 YZ の長さの比を, 最も簡単な整数の比で表しなさい。

(2) 四角形 BRSZ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm	
	(2)	(証明)	
問2	(1)	XY:YZ= :	
	(2)	cm ²	

解答

問1

(1) $\frac{5}{2}$ cm

(2)

(証明)

$\triangle APQ$ と $\triangle CSR$ で

$$AP = \frac{3}{2} \text{ cm}, CS = 3 \text{ cm}$$

$$AQ = 2 \text{ cm}, CR = 4 \text{ cm} \text{ から}$$

$$AP:CS = 1:2$$

$$AQ:CR = 1:2$$

よって

$$AP:CS = AQ:CR \cdots \textcircled{1}$$

四角形 ABCD は長方形だから

$$\angle PAQ = \angle SCR = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle APQ \sim \triangle CSR$$

問2

(1) $XY:YZ = 5:2$

(2) $\frac{48}{5} \text{ cm}^2$

解説

問1

(1)

$$AP = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2} \text{ cm}, AQ = \frac{1}{4} AD = \frac{1}{4} \times 8 = 2 \text{ cm} \quad \angle A = 90^\circ \text{ より}$$

$$\text{三平方の定理を利用して } PQ = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

問2

(1)

$$AP:PB = AQ:QD = 1:3 \text{ より } PQ \parallel BD$$

$$\text{よって } XY:YZ = XP:BZ \cdots \textcircled{1}$$

$$AQ \parallel XB \text{ より } XP:PQ = PB:AP = 3:1$$

$$\text{よって } XP = \frac{3}{4} XQ \cdots \textcircled{2}$$

四角形 QXBD は 2組の向かい合う辺が平行だから、平行四辺形になる。

$$\text{よって } XB = QD = \frac{3}{4} BC$$

$$BR = \frac{1}{2} BC \text{ より } BZ:RS = XB:XR = \frac{3}{4} BC : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) BC = 3:5 \quad BZ = \frac{3}{5} RS$$

$$\text{中点連結定理より } RS = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} XQ \text{ だから}$$

$$BZ = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} XQ = \frac{3}{10} XQ \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } XY:YZ = \frac{3}{4} XQ : \frac{3}{10} XQ = 5:2$$

(2)

$$BZ = \frac{3}{10} XQ = \frac{3}{10} BD \text{ より } \triangle SBZ = \frac{3}{10} \triangle BSD = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} \triangle BCD = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{18}{5} \text{ cm}^2$$

$$\triangle SBR = \frac{1}{2} \triangle SBC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \triangle BCD = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 6 \text{ cm}^2$$

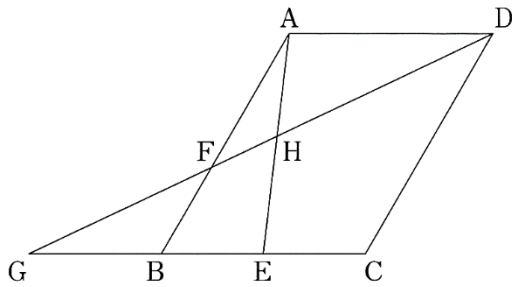
$$\text{よって四角形 BRSZ} = \triangle SBZ + \triangle SBR = \frac{18}{5} + 6 = \frac{48}{5} \text{ cm}^2$$

【問 17】

$AB=10$ cm, $BC=8$ cm, $\angle ABC=60^\circ$ の平行四辺形 $ABCD$ がある。下の図のように、辺 BC の中点 E , 辺 AB 上に $AF=6$ cm となる点 F をとり、点 D と点 F を通る直線と辺 CB を延長した直線との交点を G とする。点 A と点 E を結び、線分 AE , DG の交点を H とする。

次の問1は指示にしたがって答え、問2、問3は の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2006 年度)



問1 上の図において、相似な三角形を 1 組選び、その 2 つの三角形が相似であることを右の の中に証明せよ。

(証明)

問2 台形 $AECD$ の面積は cm^2 である。

問3 四角形 $FBEH$ の面積は、 $\triangle AFH$ の面積の 倍である。

解答欄

問1		
問2		
問3		

解答

問1

$\triangle FGB$ と $\triangle DGC$ において

共通な角だから

$$\angle FGB = \angle DGC \cdots \textcircled{1}$$

平行線の同位角は等しいから

$$\angle GFB = \angle GDC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle FGB \sim \triangle DGC$$

問2 $30\sqrt{3}$

問3 $\frac{47}{18}$ または $2\frac{11}{18}$

解説

問2

A から BC に垂線 AK をひく。

$\triangle ABK$ において, $\angle ABK = 60^\circ$ より

$$AK:AB = \sqrt{3}:2$$

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって台形 AECD = $\triangle AEC + \triangle CAD$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8}{2} \times 5\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 8 \times 5\sqrt{3}$$

$$= 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$$

$$= 30\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

問3

AD // GB より

$$AD:GB = AF:FB$$

$$8:GB = 6:(10-6)$$

$$6GB = 8 \times 4$$

$$GB = \frac{16}{3}$$

$$\text{よって } AH:HE = AD:GE = 8:\left(\frac{16}{3}+4\right) = 6:7$$

したがって

$$\text{四角形 FBEH} = \triangle BEF + \triangle FEH$$

$$= \frac{4}{6} \triangle AEF + \frac{7}{13} \triangle AEF$$

$$= \frac{47}{39} \triangle AEF$$

$$\triangle AFH = \frac{6}{13} \triangle AEF$$

$$\text{よって } \frac{47}{39} \div \frac{6}{13} = \frac{47}{18} \text{ 倍}$$

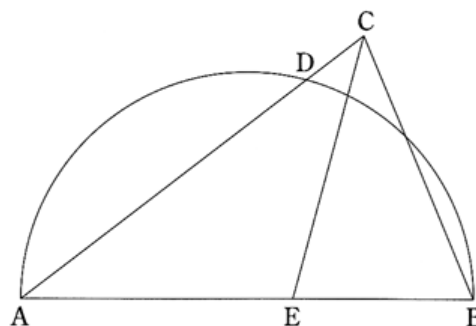
【問 18】

右の図のように、 AB を直径とする半円があり、半円の外に点 C をとり、 AC と半円との交点を D とする。 $\angle ACB$ の二等分線と AB との交点を E としたところ、 $AE = CE$ となった。

このとき、次の1, 2の問いに答えなさい。

(佐賀県 2006 年度 後期)

問1 $\triangle ABC \sim \triangle CBE$ であることを証明しなさい。



問2 $AB = 20$ cm, $BC = 4\sqrt{10}$ cm, $CD = \sqrt{10}$ cm のとき、次の(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(1) 線分 BE の長さを求めなさい。

(2) 線分 BD の長さを求めなさい。

(3) $\triangle AED$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	cm ²

解答

問1

$\triangle ABC$ と $\triangle CBE$ で

$\angle ABC = \angle CBE$ (共通) …①

$\triangle AEC$ は $AE = CE$ の二等辺三角形だから

$\angle EAC = \angle ECA$

また CE は $\angle ACB$ の二等分線だから

$\angle ECA = \angle ECB$

よって $\angle EAC = \angle ECB$

つまり $\angle BAC = \angle BCE$ …②

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \sim \triangle CBE$

問2

(1) 8cm

(2) $5\sqrt{6}$ cm

(3) $15\sqrt{15}$ cm²

解説

問2

(3)

$\triangle ADB$ で $\angle ADB = 90^\circ$ より $AD = \sqrt{20^2 - (5\sqrt{6})^2} = 5\sqrt{10}$ cm

$AE = 20 - 8 = 12$ cm

よって $\triangle AED = \frac{12}{20} \triangle ABD = \frac{12}{20} \times \frac{1}{2} \times 5\sqrt{10} \times 5\sqrt{6} = 15\sqrt{15}$ cm²

【問 19】

図のように、長方形 ABCD の辺 CD の中点を M とする。△AEM は△ADM を線分 AM を折り目にして折り返したときにできる三角形である。また、線分 AM と線分 DE の交点を F とする。

AB=30 cm, AD=20 cm であるとき、次の1～3の問いに答えなさい。

(大分県 2006 年度)

問1 線分 AF の長さを次のようにして求めた。(ア)には最も簡単な整数の比を,(イ)には適する数を記入しなさい。

△ADM は直角三角形なので

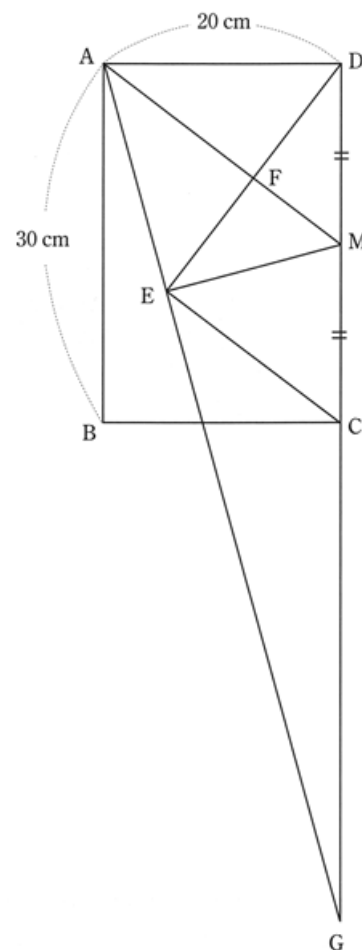
$AM:AD=(ア) \dots\dots\dots ①$

また、△ADM $\sim$ △AFD より、

$AM:AD=AD:AF \dots\dots\dots ②$

①, ②より、

$AF=(イ)cm$



問2 △AFD $\sim$ △DEC を証明しなさい。

問3 線分 AE の延長と線分 DC の延長の交点を G とする。線分 CG の長さを求めなさい。

解答欄

問1	ア	:
	イ	cm
問2	【証明】 	
問3	cm	

解答

問1

ア 5:4

イ 16 cm

問2

【証明】

$\triangle AFD$ と $\triangle DEC$ において

$$\angle DAF = 90^\circ - \angle ADF \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle CDE = 90^\circ - \angle ADF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

$$\angle DAF = \angle CDE \cdots \textcircled{3}$$

また

$$AD:DC = 20:30 = 2:3$$

$$AF:DE = 16:24 = 2:3$$

よって

$$AD:DC = AF:DE \cdots \textcircled{4}$$

③, ④から

2組の辺の比が等しくその間の角が等しいので

$\triangle AFD \sim \triangle DEC$

問3 $\frac{270}{7}$ cm

解説

問3

$\triangle AMD \sim \triangle DCE$ より

$$\angle AMD = \angle DCE$$

同位角が等しいので $EC \parallel AM$

よって $GC:GM = CE:MA$

$\triangle DCE$ は $EC:DE:DC = 3:4:5$ だから

$CE = 18\text{cm}$, $CG = x\text{cm}$ とすると

$$x:(x+15) = 18:25$$

$$25x = 18(x+15)$$

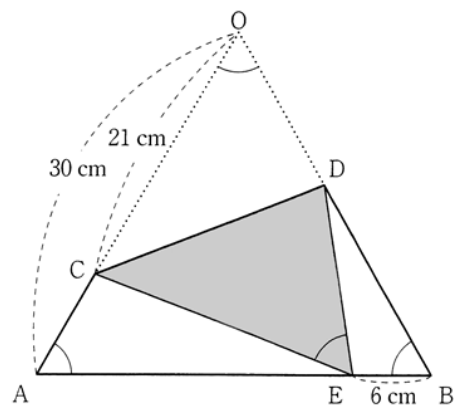
$$7x = 270$$

$$x = \frac{270}{7} \text{ cm}$$

【問 20】

図のような 1 辺の長さが 30 cm の正三角形 OAB において、辺 OA 上に点 C、辺 OB 上に点 D をとる。線分 CD を折り目として△OCD を折り返すと、頂点 O は辺 AB 上の点 E と重なる。OC=21 cm、BE=6 cm のとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2006 年度)



問1 △AEC∽△BDE であることを次のように証明した。□ をうめて証明を完成しなさい。

〔証明〕

△AEC と△BDE において、

$\angle CAE = \angle EBD$ (条件) ……①

△AEC において、 $\angle AEC$ の外角は他の 2 つの内角の和に等しいので、

$\angle CEB = \square \text{ ア } + \angle ECA$

また、 $\angle CEB = \angle CED + \angle DEB$ であり、

$\square \text{ ア } = \angle CED$ であるから

$\angle ECA = \square \text{ イ } \dots\dots \text{②}$

①、②より三角形の相似条件「 $\square \text{ ウ }$ 」が成り立つ。

したがって、△AEC∽△BDE である。

問2 線分 DE の長さを求めなさい。

問3 △CED の面積を求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	DE = cm	
問3	cm ²	

解答

問1

ア $\angle CAE$ $\angle EAC$ は可

イ $\angle DEB$ $\angle BED$ は可

ウ 2組の角がそれぞれ等しい

問2 $DE=14\text{ cm}$

問3 $\frac{147\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$

解説

問3

C から OB に垂線 CH をひく。

$\angle COH=60^\circ$ より $CH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 21=\frac{21\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$

$\triangle CED=\triangle COD=\frac{1}{2}\times OD\times CH=\frac{1}{2}\times 14\times \frac{21\sqrt{3}}{2}=\frac{147\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$