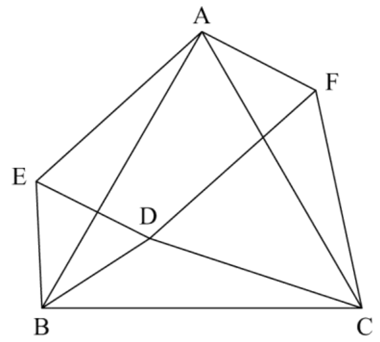
# 3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2018 年度出題】

【問 1】

　右の図のように，正三角形 ABC の内側に点 D をとり，△DBC の外側に BD，DC を 1 辺とする正三角形 BDE，DCF をつくり，点 A と点 E，F をそれぞれ結ぶとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県　2018 年度）




(1) △AEB と△CDB が合同になることを次のように証明した。ああ

[ あ ] ～ [ う ] にあてはまる辺や角やことばを入れなさい。

〔証明〕

△AEB と△CDB について

仮定より，AB＝ [ あ ] …①

BE＝BD …②，∠EBD＝∠ABC …③

また，∠EBA＝∠EBD－ [ い ] …④

∠DBC＝∠ABC－ [ い ] …⑤

③，④，⑤より，∠EBA＝∠DBC …⑥

①，②，⑥から，[ う ] がそれぞれ等しいので

△AEB≡△CDB

(2) 四角形 AEDF が正方形になるとき，∠DBC の大きさを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">(1)</td><td>あ</td><td></td></tr>
<tr><td>い</td><td></td></tr>
<tr><td>う</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">度</td></tr>
</table>

解答
(1)
㋐ CB

㋑ ∠ABD

㋒ 2 組の辺とその間の角

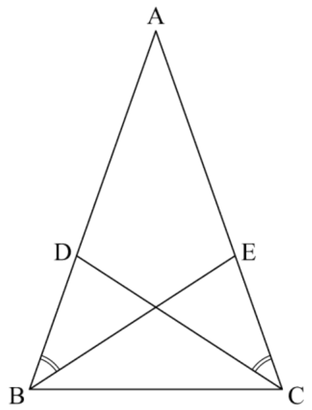
(2) 15 度
解説
(1)
仮定より
△ABC は正三角形で 3 つの辺はすべて等しいことから
㋐には「CB」が入る。∠EBD と∠ABC に共通する角だから
㋑には「∠ABD」が入る。
①, ②は辺に関する条件で
⑥は角に関する条件だから
㋒には「2 組の辺とその間の角」が入る。
(2)
四角形 AEDF は正方形より∠EDF＝90°, DB＝DC となるから
∠BDC＝360°－90°－60°×2＝150°
DB＝DC より
△DBC は二等辺三角形になるから
∠DBC＝(180°－150°)÷2＝15°

【問 2】

△ABC がある。点 D, E はそれぞれ直線 AB, AC 上にあり，∠ABE＝∠ACD である。ただし，点 D, E は，点 A と重ならないものとする。次の問1～問4に答えなさい。

（秋田県　2018 年度）

図1




問1　美咲さんは，図1のように AB＝AC で，点 D, E が辺 AB, AC 上にある場合について考えた。［美咲さんのメモ］が正しくなるように，［証明］の続きを書き，完成させなさい。

［美咲さんのメモ］

図1で，△ABE と△ACD が合同であることが証明できる。

〔証明〕
△ABE と△ACD において

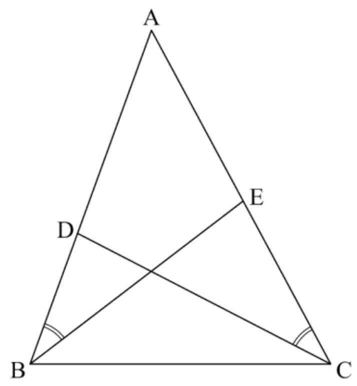
問2 ［美咲さんのメモ］を読んだ健司さんは，辺 AB と AC の長さが異なり，点 D, E が辺 AB, AC 上にある場合について考えた。［健司さんの説明］が正しくなるように，ⓐにあてはまるものを下のア～エから 1 つ選んで記号を書きなさい。

［健司さんの説明］

図2のように辺 AB と AC の長さが異なるとき，
△ABE と△ACD は，
ⓐ

ア必ず合同になります。
イ必ず相似になります。
ウ相似になるときもあるし，相似にならないときもあります。
エ合同にも相似にもなりません。

図2

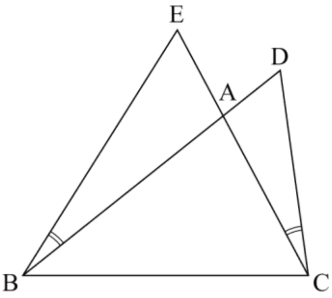


問3 ［健司さんの説明］を聞いた美咲さんは，点 D，E が辺 AB，AC を延長した直線上にある場合について考えた。［美咲さんの説明］が正しくなるようにⓑ，ⓒにあてはまる言葉を書きなさい。

［美咲さんの説明］

図3のように△ABC で辺 AB，AC を A の方向に延長した直線上にそれぞれ点 D，E があるとき，△ABE と△ACD は相似になることが証明できます。

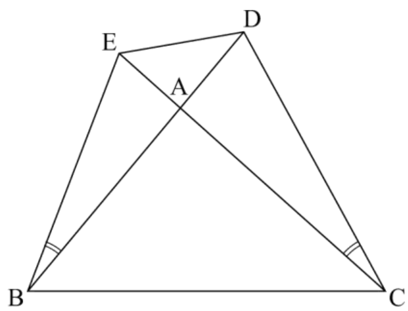
図3




〔証明〕
△ABE と△ACD において
仮定から，∠ABE＝∠ACD…①
$\boxed{\text{ⓑ}}$ は等しいことから，∠BAE＝∠CAD ………②
①，②より，$\boxed{\quad\text{ⓒ}\quad}$ から，△ABE∽△ACD

問4 図4のように，点 D，E が辺 AB，AC を A の方向に延長した直線上にある。BC＝6 cm，CD＝5 cm，DE＝2 cm，EB＝4 cm のとき，△ABE と△ABC の面積比を求めなさい。

図4



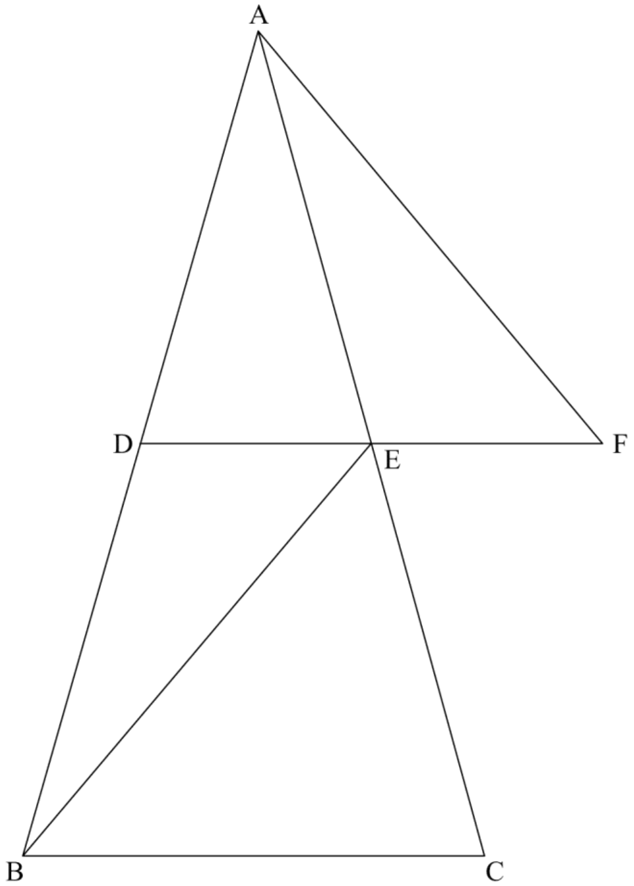
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">〔証明〕<br>△ABE と△ACD において</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>ⓐ</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>ⓑ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓒ</td><td></td></tr>
<tr><td>問4</td><td colspan="2">△ABE:△ABC＝　　　　:</td></tr>
</table>

解答
問1
〔証明〕
△ABEと△ACDにおいて
仮定から
AB＝AC…①
∠ABE＝∠ACD…②
∠Aは共通…③
①, ②, ③より
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△ACD
問2
ⓐ イ
問3
ⓑ 対頂角
ⓒ 2組の角がそれぞれ等しい
問4 △ABE:△ABC＝4:15
解説
問1
AB＝ACという条件により1組の辺が等しいことに加え
∠ABE＝∠ACDという条件と∠Aは共通という条件で
その両端の角がそれぞれ等しいことを示す。
問2
∠ABE＝∠ACD
∠Aは共通
よって2組の角がそれぞれ等しいから
△ABE∽△ACDは必ず成り立つ。
なお対応する辺ABとACの長さが異なるので合同ではない。
よってあてはまるのはイ
問3
∠BAEと∠CADは対頂角
問4
△AEDと△ABCで
対頂角だから
∠EAD＝∠BAC…①
問3より
△ABE∽△ACDだから
AE:AB＝AD:AC…②
①, ②より
2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから
△AED∽△ABC
よってAE:AB＝ED:BC＝2:6＝1:3…③
また△ABE∽△ACDより
AB:AC＝EB:DC＝4:5…④
③よりAE:AB＝4:12
④よりAB:AC＝12:15
よってAE:AC＝4:15
△ABEと△ABCは
それぞれAE, ACを底辺と見たときの高さが等しいから
底辺の比が面積の比になる。
したがって△ABE:△ABC＝4:15

【問 3】

下の図において，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であり，点 D，E はそれぞれ辺 AB，AC の中点である。また，点 F は直線 DE 上の点であり，EF＝DE である。




このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（福島県　2018 年度）

問1　AF＝BE であることを証明しなさい。

問2　線分 BF と線分 CE との交点を G とする。△AEF において辺 AF を底辺とするときの高さを $x$，△BGE において辺 BE を底辺とするときの高さを $y$ とするとき，$x$:$y$ を求めなさい。

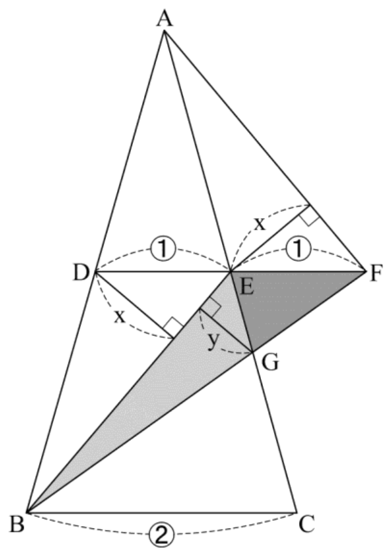
解答欄

| | |
|---|---|
| 問1 | 〔証明〕 |
| 問2 | $x$ ： $y$ ＝ |

解答
問1
〔証明〕例 1
△AEF と△BDE において
仮定から EF＝DE…①
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であり
点 D, E はそれぞれ辺 AB, AC の中点であるから
AE＝BD…②
AD＝AE…③
③より, △ADE は二等辺三角形であるから
∠ADE＝∠AED…④
また∠AEF＝180°－∠AED…⑤
∠BDE＝180°－∠ADE⑥
④, ⑤, ⑥より∠AEF＝∠BDE…⑦
①, ②, ⑦より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△AEF≡△BDE
したがって AF＝BE

例 2
△ADF と△ECB において
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であり
点 D, E はそれぞれ辺 AB, AC の中点であるから
AD＝EC…①
∠ABC＝∠ACB…②
中点連結定理より
DE // BC…③
DE＝$\frac{1}{2}$BC…④
③より
平行線の同位角は等しいから
∠ADF＝∠ABC…⑤
②, ⑤より∠ADF＝∠ECB…⑥
仮定から DF＝2DE…⑦
④, ⑦より DF＝CB…⑧
①, ⑥, ⑧より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ADF≡△ECB
したがって AF＝BE

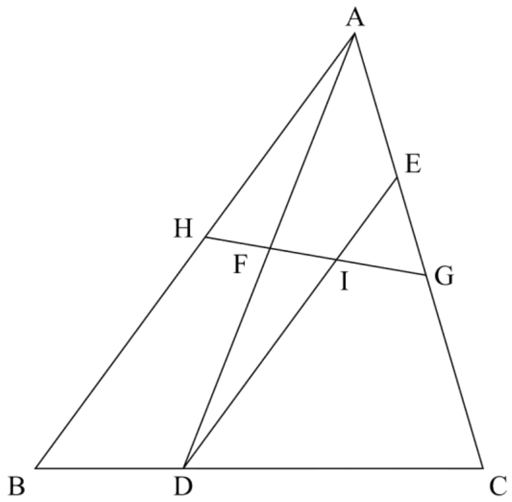
問2　$x$:$y$＝3:2
解説
問1
AF と BE をそれぞれ辺にもつ三角形(例えば△AEF と△BDE)に着目しそれらが合同であることを示す。
問2




△AEF≡△BDE より
△BDE で BE を底辺とするときの高さも $x$ と表される。
△BDE と△BGE は
底辺 BE が共通だから
高さの比 $x$:$y$ はそのまま面積の比になる。
また△BDE と△BFE は
それぞれ DE, EF を底辺としたときの高さが等しく
DE＝EF より面積も等しい。
したがって△BFE と△BGE の面積の比を求めれば $x$:$y$ がわかる。
△ABC で
2 点 D, E は辺 AB, AC の中点だから
中点連結定理より
DE // BC, DE＝$\frac{1}{2}$BC
また DE＝EF だから
EF // BC, EF:BC＝1:2 となる。
三角形と比の関係より
BG:GF＝BC:EF＝2:1
よって
$x$:$y$＝△BFE:△BGE＝BF:BG＝(2＋1):2＝3:2

【問 4】

下の図のように，△ABC がある。辺 BC 上に BD：DC＝1：2 となる点 D をとる。点 D を通り辺 AB と平行な直線と辺 AC との交点を E とし，線分 AD の中点を F とする。また，線分 CE 上にあり，点 C，点 E のいずれにも一致しない点 G をとり，直線 FG と辺 AB，線分 DE との交点をそれぞれ H，I とする。




このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2018 年度）

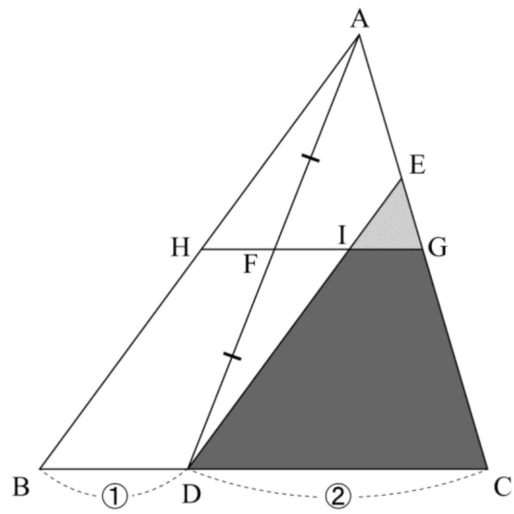
問1　△AHF≡△DIF であることを証明しなさい。

問2　HG // BC のとき，四角形 IDCG の面積は，△ABC の面積の何倍か求めなさい。

解答欄

| | |
|---|---|
| 問1 | |
| 問2 | 倍 |

解答
問1
△AHF と△DIF で
仮定から
AF＝DF…①
対頂角だから
∠AFH＝∠DFI…②
平行線の錯角だから
∠HAF＝∠IDF…③
①, ②, ③から
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△AHF≡△DIF
問2 $\frac{5}{12}$倍
解説
問1
平行線と角の性質などを利用する。
等しい辺や角に印をつけながら考えるとよい。
問2
BA // DE より
AE : EC＝BD : DC＝1 : 2
HG // BC より
AG : GC＝AF : FD＝1 : 1
よって AE : EC＝2 : 4, AG : GC＝3 : 3 と表すことができるから
AE : EG : GC＝2 : 1 : 3
△EDC∽△ABC で
相似比は DC : BC＝2 : (1＋2)＝2 : 3 だから
面積の比は $2^2 : 3^2 = 4 : 9$
よって$\triangle EDC = \frac{4}{9}\triangle ABC$
△EIG∽△EDC で
相似比は EG : EC＝1 : (1＋3)＝1 : 4 だから
面積の比は $1^2 : 4^2 = 1 : 16$
したがって
四角形 IDCG : △EDC＝(16－1) : 16＝15 : 16 だから
四角形 $IDCG = \frac{15}{16}\triangle EDC = \frac{15}{16} \times \frac{4}{9}\triangle ABC = \frac{5}{12}\triangle ABC$

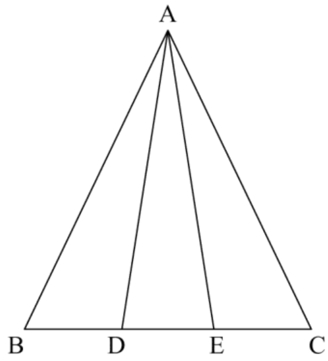


【問 5】

右の図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC の辺 BC 上に，BD＝CE となるようにそれぞれ点 D，E をとる。ただし，BD＜DC とする。

このとき，△ABE≡△ACD であることを証明しなさい。

（栃木県　2018 年度）




解答欄

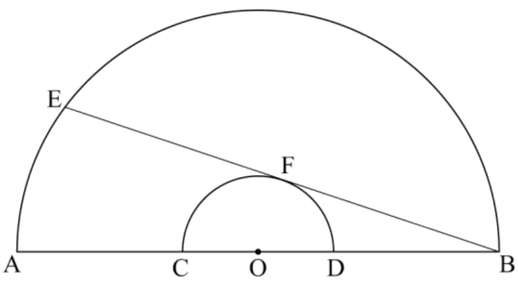
〔証明〕

解答
〔証明〕
$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において
仮定より
$AB=AC$…①
$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから
$\angle ABE=\angle ACD$…②
仮定より
$BD=CE$…③
ここで
$BE=BD+DE$…④
$CD=CE+DE$…⑤
③, ④, ⑤より
$BE=CD$…⑥
①, ②, ⑥より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABE\equiv\triangle ACD$
解説
$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において
仮定より
$AB=AC$…①
$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから
$\angle ABE=\angle ACD$…②
仮定より
$BD=CE$…③
ここで
$BE=BD+DE$…④
$CD=CE+DE$…⑤
③, ④, ⑤より
$BE=CD$…⑥
①, ②, ⑥より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABE\equiv\triangle ACD$

【問 6】

右の図のように，AB を直径とする大きい半円と，CD を直径とする小さい半円があり，ともに直径の中点は O で，直径 AB と直径 CD は同じ直線上にある。点 B から小さい半円にひいた接線と大きい半円との交点を E とし，接線 BE と小さい半円との接点を F とする。次の問1，問2に答えなさい。

（群馬県 2018 年度 後期）




問1 線分 OE と線分 OF をひいたとき，三角形 OEF と三角形 OBF が合同であることを証明しなさい。

問2 AO＝6 cm，CO＝$a$ cm とする。$a$ が $0<a<6$ の範囲で変化するとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) $a=2$ のとき，BE の長さを求めなさい。

(2) $a=3$ のとき，CE の長さを求めなさい。

(3) $a=3\sqrt{2}$のときの E の位置を P，$a=3\sqrt{3}$のときの E の位置を Q とする。線分 BP，線分 BQ および弧 PQ で囲まれた部分の面積を求めなさい。ただし，円周率は $\pi$ とする。

解答欄

| | | |
|---|---|---|
| 問1 | 〔証明〕 | |
| 問2 | (1) | cm |
| | (2) | cm |
| | (3) | $cm^2$ |

解答

問1

〔証明〕

△OEF と△OBF において

BE は小さい半円の接線なので OF⊥BE となるから

∠OFE＝∠OFB＝90°　…①

大きい半円の半径より

OE＝OB…②

OF は共通…③

①～③より

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

△OEF≡△OBF

問2

(1)　$8\sqrt{2}$　cm

(2)　$3\sqrt{3}$　cm

(3)　$3\pi-18+9\sqrt{3}$　$cm^2$

解説

問1

円の接戦は接点を通る半径に垂直であることなどを利用する。

問2

(1)

△OBF は∠OFB＝90°の直角三角形だから

三平方の定理より $OF^2+BF^2=OB^2$

BF＝$x$ cm とすると

OB＝OA＝6cm，OF＝OC＝2cm だから

$2^2+x^2=6^2$　$x^2=32$

$x>0$ より

$x=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

よって BE＝2BF＝$2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$cm

(2)

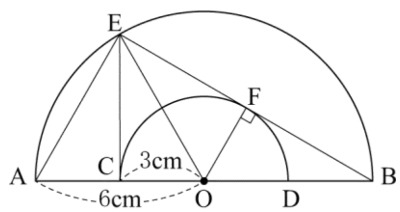
OB＝6cm，OF＝3cm だから OB:OF＝6:3＝2:1

よって△OBF は 30°，60° の角をもつ直角三角形になる。

∠BOF＝∠EOF＝∠EOC＝60°となるから

△OEC も△OBF と合同な直角三角形で

EC＝$\sqrt{3}$CO＝$\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$cm




(3)

$a=3\sqrt{2}$のとき

OB＝6cm，OF＝$3\sqrt{2}$cm だから

OB:OF＝$6:3\sqrt{2}=\sqrt{2}:1$

よって△OBF は OF＝BF の直角二等辺三角形になる。

∠BOF＝45° だから∠BOP＝45° ×2＝90°

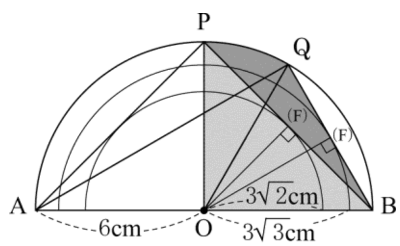
また $a=3\sqrt{3}$のとき

OB＝6cm，OF＝$3\sqrt{3}$cm だから

OB:OF＝$6:3\sqrt{3}=2:\sqrt{3}$

よって△OBF は∠BOF＝30°，∠OBF＝60° の直角三角形になる。

∠BOF＝30° だから∠BOQ＝30° ×2＝60°




したがって P，Q の位置は右上の図のようになる。

求める面積は

おうぎ形 OPQ と正三角形 OBQ の面積の和から直角二等辺三角形 OBP の面積をひけばよい。

おうぎ形 OPQ の中心角は 30°，正三角形 OBQ の高さは $3\sqrt{3}$cm だから

求める面積は

$$\pi\times6^2\times\frac{30}{360}+\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times6\times6=3\pi+9\sqrt{3}-18\text{cm}^2$$

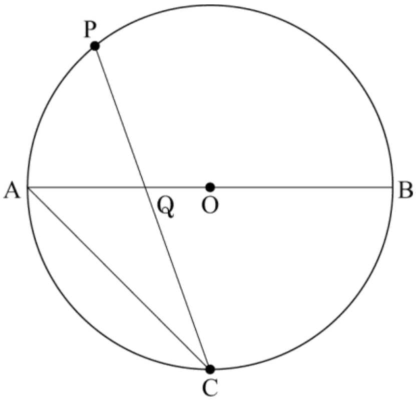
【問 7】

右の図1で，点 O は線分 AB を直径とする円の中心である。点 C は円 O の周上にある点で，$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$である。点 P は，点 C を含まない$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$上にある点で，点 A，点 B のいずれにも一致しない。点 A と点 C，点 C と点 P をそれぞれ結び，線分 AB と線分 CP との交点を Q とする。

次の各問に答えよ。

（東京都 2018 年度）

図1




問1　図1において，∠ACP＝$a$°とするとき，∠AQP の大きさを表す式を，次のア～エのうちから選び，記号で答えよ。

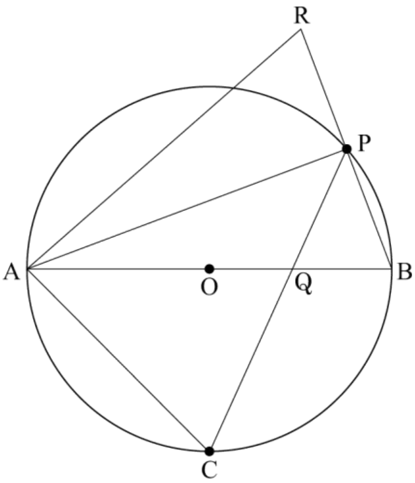
ア　$(60-a)$ 度

イ　$(90-a)$ 度

ウ　$(a+30)$ 度

エ　$(a+45)$ 度

図2




問2　右の図2は，図1において，点 A と点 P，点 B と点 P をそれぞれ結び，線分 BP を P の方向に延ばした直線上にあり BP＝RP となる点を R とし，点 A と点 R を結んだ場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　△ABP≡△ARP であることを証明せよ。

(2)　次の $\boxed{\phantom{か}}$ の中の「か」「き」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図2において，点 O と点 P を結んだ場合を考える。

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=2\overset{\frown}{\mathrm{BP}}$のとき，

△ACQ の面積は，四角形 AOPR の面積の $\dfrac{\boxed{か}}{\boxed{き}}$ 倍である。

解答欄

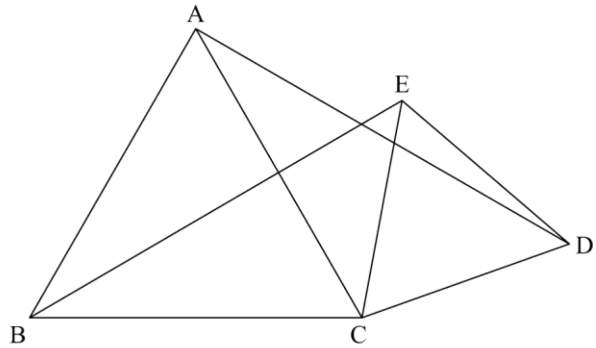
<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>(1)</td><td colspan="2">〔証明〕<br>△ABP と△ARP において,<br><br>△ABP≡△ARP</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>か</td><td></td></tr>
<tr><td>き</td><td></td></tr>
</table>

解答
問1　エ
問2
(1)
〔証明〕
△ABPと△ARPにおいて
仮定から
BP＝RP…(1)
半円の弧に対する円周角だから
∠APB＝90°…(2)
(2)より, AP⊥BRだから
∠APB＝∠APR…(3)
共通な辺だから
AP＝AP…(4)
(1), (3), (4)より, 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABP≡△ARP
(2)
か　2
き　3
解説
問1
点Bと点Cを結ぶと$\overset{\frown}{AC}＝\overset{\frown}{BC}$より
AC＝BCであり
半円の弧に対する円周角は直角だから∠ACB＝90°で
△ACBは直角二等辺三角形なので∠BAC＝45°
よって△ACQにおいて
三角形の内角・外角の性質より∠AQP＝$\alpha$°＋45°
問2
(1)
△ABPと△ARPにおいて
仮定からBP＝RP…(1)
半円の弧に対する円周角は直角だから∠APB＝90°…(2)
(2)よりAP⊥BRだから∠APB＝∠APR…(3)
共通な辺だからAP=AP…(4)
(1), (3), (4)より
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABP≡△ARP
(2)
△ACQと△OBPにおいて
円周角の大きさは対応する弧の長さに比例するから$\overset{\frown}{BC}＝2\overset{\frown}{BP}$より, ∠BAC＝2∠BAP…(5)
同じ弧に対する中心角の大きさは円周角の大きさの2倍だから∠BOP＝2∠BAP…(6)
(5), (6)より∠BAC＝∠BOP…(7)
$\overset{\frown}{AP}$に対する円周角だから∠ACQ＝∠OBP…(8)
(7), (8)より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ACQ∽△OBP
ここで∠CAO＝45°だから△OACは∠AOC＝90°の直角二等辺三角形でありOA:AC＝1:$\sqrt{2}$
よってOB:AC＝1:$\sqrt{2}$だから△ACQ:△OBP＝$1^2$:$(\sqrt{2})^2$＝1:2となり△ACQ＝2△OBP
さらにOA＝OBより△AOP＝△OBP
△ABP≡△ARPより△ARP＝△ABP＝2△OBPだから
四角形AOPRの面積は△ARP＋△AOP＝3△OBP
したがって△ACQの面積は四角形AOPRの面積の$\frac{2}{3}$倍

【問 8】

下の図のように，2 つの正三角形 ABC，CDE がある。頂点 A，D を結んで△ACD をつくり，頂点 B，E を結んで△BCE をつくる。このとき，△ACD≡△BCE であることを証明しなさい。

（新潟県 2018 年度）




解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

△ACD と△BCE において

△ABC，△CDE は正三角形だから

AC＝BC…①

CD＝CE…②

また∠ACB＝60°，∠DCE＝60°より

∠ACD＝∠DCE＋∠ACE

＝60°＋∠ACE…③

∠BCE＝∠ACB＋∠ACE

＝60°＋∠ACE…④

③，④より∠ACD＝∠BCE…⑤

よって，①，②，⑤より

2 組の辺とその間の角の大きさがそれぞれ等しいから

△ACD≡△BCE

解説

△ACD と△BCE は∠ACE を共有していることと△ABC と△CDE が正三角形であることに着目する。

【問 9】

右の図1のように，線分 AB を直径とする円 O がある。点 A を通る円 O の接線をひき，その接線上に点 C をとる。また，点 C から接線 AC とは異なる円 O の接線をひき，接点を D とする。さらに，点 B を通る円 O の接線をひき，直線 OC との交点を E とする。

このとき，次の問いに答えなさい。

（富山県 2018 年度）

問1 △OCA≡△OEB を証明しなさい。

問2 右の図2のように，円 O の直径を 12 cm，点 O を通り線分 AB に垂直な直線と接線 CD との交点を F とし，$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{DB}=1:3$ とする。

このとき，次の問いに答えなさい。ただし，$\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{DB}$ は，それぞれ短い方の弧を指すものとする。

(1) 線分 CD の長さを求めなさい。

(2) 四角形 OEBD の面積を求めなさい。

図1

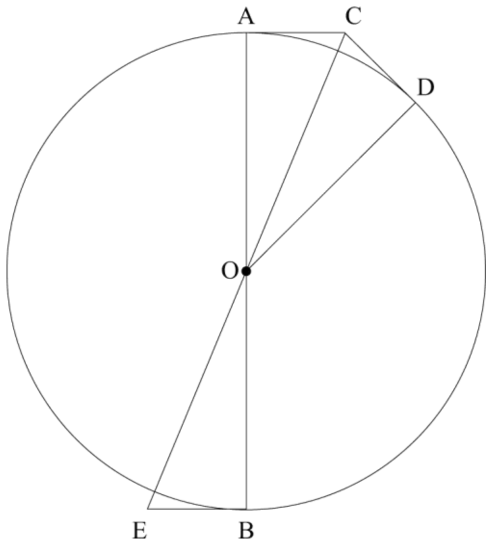
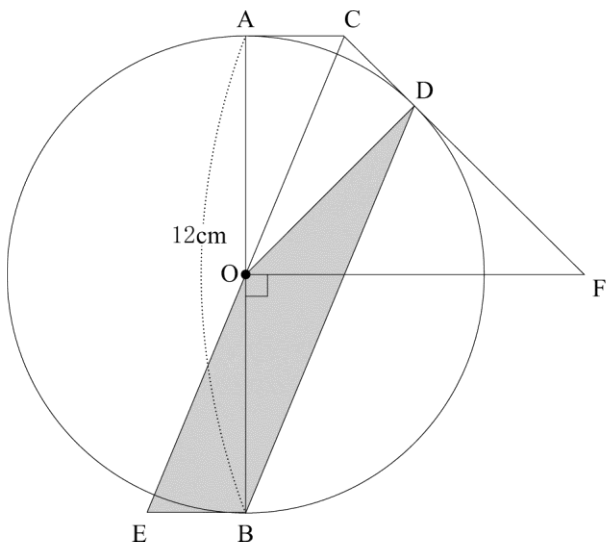


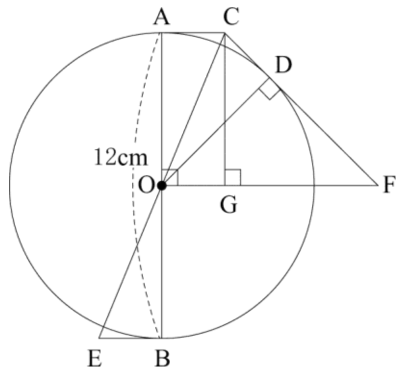

図2



解答欄

| | | |
|---|---|---|
| 問1 | 〔証明〕 | |
| 問2 | (1) | cm |
| | (2) | $cm^2$ |

解答
問1
〔証明〕
△OCA と△OEB において
円 O の半径は等しいから
OA＝OB…①
対頂角は等しいから
∠COA＝∠EOB…②
円の接線は，接点を通る半径に垂直なので
∠OAC＝∠OBE＝90°…③
①，②，③より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい
よって△OCA≡△OEB
問2
(1)　$(6\sqrt{2}-6)$ cm
(2)　$(27\sqrt{2}-18)$ $\mathrm{cm}^2$
解説
問1
直角三角形が合同であることを証明するとき，直角三角形の合同条件ではなく
一般的な三角形の合同条件を使う場合もあることに注意。
問2
(1)




∠AOB＝180°で$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{DB}=1:3$ だから
∠AOD＝$180^\circ\times\dfrac{1}{1+3}=45^\circ$
∠DOF＝∠AOF－∠AOD＝90°－45°＝45°
円の接線は接点を通る半径に垂直だから∠ODF＝90°
△OFD で∠OFD＝180°－(90°＋45°)＝45°
よって△OFD は直角二等辺三角形で
FD＝OD＝12÷2＝6cm
また，C から OF に垂線 CG をひくと
∠CGF＝90°，∠CFG＝45°より△CGF も直角二等辺三角形。
CG＝AO＝6cm より CF＝$\sqrt{2}$CG＝$\sqrt{2}\times6=6\sqrt{2}$cm
よって CD＝CF－FD＝$6\sqrt{2}-6$cm
(2)
△OCA と△OCD で
∠OAC＝∠ODC＝90°
OA＝OD，OC は共通
直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから
△OCA≡△OCD
また問1より
△OCA≡△OEB
よって EB＝CA＝CD＝$6\sqrt{2}-6$cm
四角形 OEBD＝△OEB＋△OBD で
△OEB＝$\dfrac{1}{2}\times\mathrm{EB}\times\mathrm{OB}=\dfrac{1}{2}\times(6\sqrt{2}-6)\times6=18\sqrt{2}-18\mathrm{cm}^2$
また，D から AB に垂線 DH をひくと△ODH は直角二等辺三角形になるから
DH＝$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{OD}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times6=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$cm
△OBD＝$\dfrac{1}{2}\times\mathrm{OB}\times\mathrm{DH}=\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{2}=9\sqrt{2}\mathrm{cm}^2$
よって四角形 OEBD＝$(18\sqrt{2}-18)+9\sqrt{2}=27\sqrt{2}-18\mathrm{cm}^2$

【問 10】

図1のように，半径 2 cm の円 O と，円 O の外部の点 A があり，円 O と線分 OA の交点を B とする。

図1

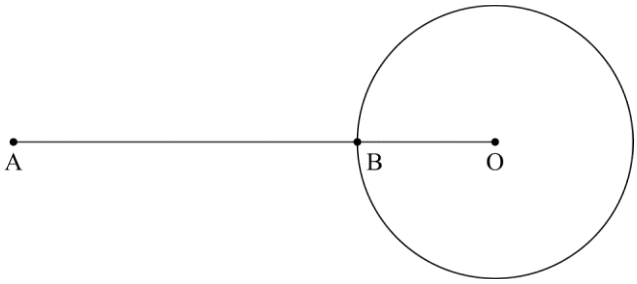



図2は，図1をもとに，次のかく手順に従ってかいたものである。

（長野県 2018 年度）

〔かく手順〕

❶ 点 P を線分 AB 上にとる。ただし，点 P は点 B と重ならないものとする。

❷ 線分 PO の中点 M を中心として，MO を半径とする円 M をかく。

❸ 円 M と円 O の交点をそれぞれ C，D とする。

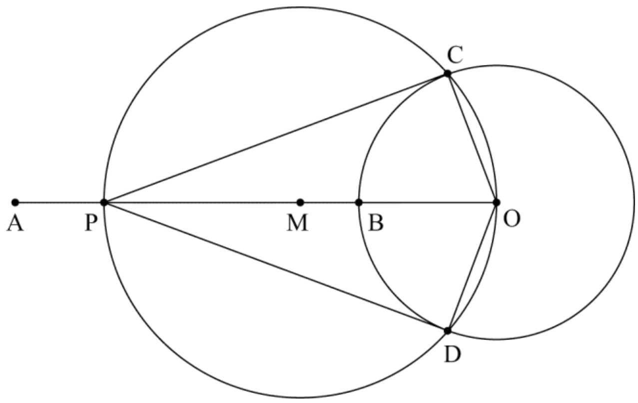
❹ 点 O と点 C，点 O と点 D，点 C と点 P，点 D と点 P をそれぞれ結ぶ。

問1 図2において，2 つの三角形が合同であることを示し，PC＝PD を証明したい。各問いに答えなさい。

(1) 合同を示す 2 つの三角形の 1 つを△POC としたとき，もう 1 つの三角形を記号を用いて書きなさい。

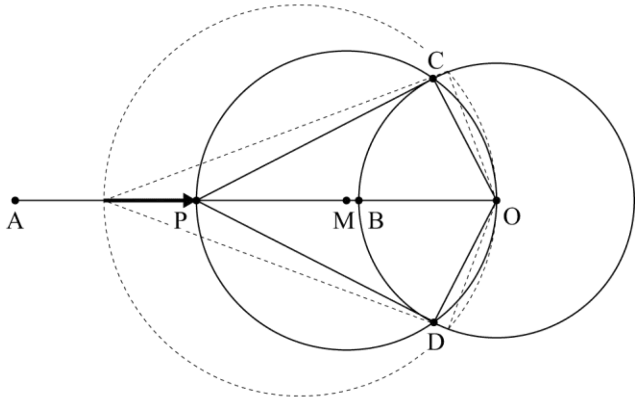
(2) (1)で示した 2 つの三角形の合同を証明し，PC＝PD を証明しなさい。

図2



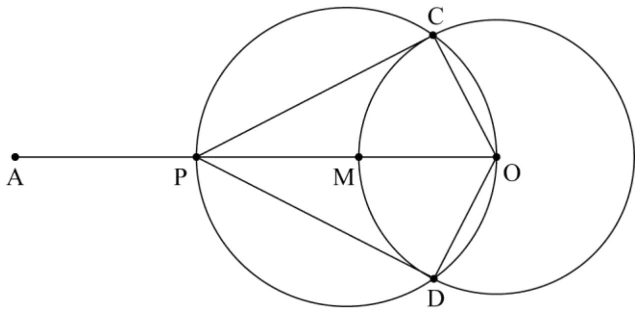
問2　図3は，図2の点 P を点 O の方向に動かしていく様子を表したものである。ただし，かく手順は変えないものとする。各問いに答えなさい。

図3




(1)　図4は，図3のように点 P を点 O の方向に動かして点 M と点 B が一致したときの図である。ただし，点 B を表す文字 B を省いて表している。このとき，PC の長さを求めなさい。

図4




(2)　さらに，点 P を点 O の方向へ動かしていき，3点 C，M，D が一直線上に並ぶときを考える。

①　∠CPO の大きさを求めなさい。

②　四角形 OCPD の面積を求めなさい。

(3)　さらに，点 P を点 O の方向へ動かしていく。円 M の面積が円 O の面積の$\frac{1}{3}$になるとき，△OCD の面積を求めなさい。

解答欄

| | | | |
|---|---|---|---|
| 問1 | (1) | | △ |
| | (2) | | |
| 問2 | (1) | | cm |
| | (2) | ① | ° |
| | | ② | $cm^2$ |
| | (3) | | $cm^2$ |

解答

問1

(1)　△POD

(2)

△POC と△POD について

PO は共通だから

PO＝PO…①

円 O の半径だから

OC＝OD…②

円 M の半円の弧に対する円周角は 90°だから

∠PCO＝∠PDO＝90°…③

①, ②, ③から

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

△POC≡△POD

合同な図形では, 対応する辺は等しいので

PC＝PD

問2

(1)　$2\sqrt{3}$cm

(2)

①　45°

②　4cm$^2$

(3)　$\sqrt{3}$cm$^2$

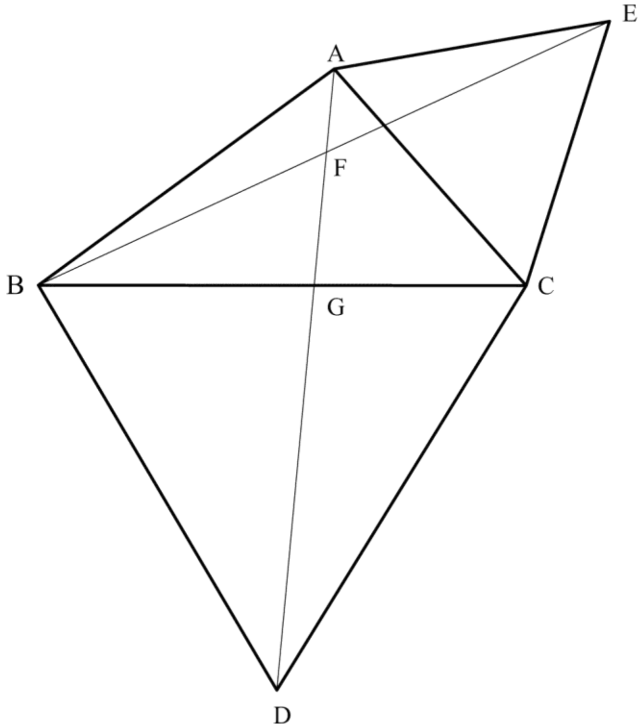
解説
問1
(1)
$PC＝PD$を証明するため，辺$PC$と辺$PD$がふくまれる2つの三角形を見つける。
このうち辺$PC$は$\triangle POC$にふくまれるので辺$PD$がふくまれる三角形を記号△を用いて解答する。
(2)
合同な2つの図形の対応する辺は長さが等しいことを用いて$PC＝PD$であることを示す。
$\triangle POC$と$\triangle POD$において
$PO$は共通だから$PO＝PO$…①
円$O$の半径だから$OC＝OD$…②
円$M$の半円の弧に対する円周角は$90°$だから$\angle PCO＝\angle PDO$…③
①，②，③から
直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので
$\triangle POC \equiv \triangle POD$
合同な図形では対応する辺は等しいので
$PC＝PD$
問2
(1)
$OC＝2cm$，$PO＝2OM＝2\times 2＝4cm$
円$M$の半円の弧に対する円周角は$90°$だから$\angle PCO＝90°$
よって$\triangle POC$において
三平方の定理より$PC＝\sqrt{4^2-2^2}＝2\sqrt{3}$ cm
(2)
①
$\triangle OCD$は$OC＝OD$の二等辺三角形で$\triangle POC \equiv \triangle POD$より$\angle POC＝\angle POD$である。
二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分するから$CD \perp PO$である。
3点$C$，$M$，$D$が一直線上に並ぶとき$\angle CMO＝90°$
線分$MC$，$MO$は円$M$の半径だから$MC＝MO$
よって$\triangle OCM$は$MC＝MO$の直角二等辺三角形だから$\angle CPO＝45°$
②
①より$MC＝MO＝MD＝MP$，$CD \perp PO$から四角形$OCPD$は正方形であり
1辺の長さは2cmである。
よってその面積は$2\times 2＝4cm^2$
③
円$O$と円$M$は相似な図形であり，円$O$の面積:円$M$の面積＝3:1だから
半径の比は$OC:MO＝\sqrt{3}:1$である。
点$M$から線分$OC$に引いた垂線と線分$OC$との交点を$E$とすると
円と弦の性質より点$E$は線分$OC$の中点だから$OE＝2\div 2＝1cm$
$\triangle OME$において
$\angle OEM＝90°$，$OE＝1cm$，$OM＝2\times\frac{1}{\sqrt{3}}＝\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cmだから
$OE:OM＝\sqrt{3}:2$
よって$\triangle OME$は$\angle OEM＝90°$，$\angle MOE＝30°$，$\angle OME＝60°$の直角三角形である。
同様にして$\angle MOD＝30°$であり$OC＝OD$だから
頂角が$\angle COD＝30°+30°＝60°$の二等辺三角形ということがわかり
つまり$\triangle OCD$は正三角形である。
したがって$\triangle MCD$，$\triangle MDO$，$\triangle MOC$は合同な三角形であり
$\triangle MOC＝\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{3}＝\frac{\sqrt{3}}{3}$ $cm^2$だから
$\triangle OCD＝3\triangle MOC＝3\times\frac{\sqrt{3}}{3}＝\sqrt{3}$ $cm^2$

【問 11】

次の図で，△BDC と△ACE はともに正三角形である。また，線分 AD と BE との交点を F，AD と辺 BC との交点を G とする。

次の問1，問2に答えなさい。

（岐阜県 2018 年度）




問1 △ADC≡△EBC であることを証明しなさい。

問2 AB＝4 cm，AC＝4 cm，BC＝6 cm のとき，

(1) DG の長さを求めなさい。

(2) EF の長さを求めなさい。

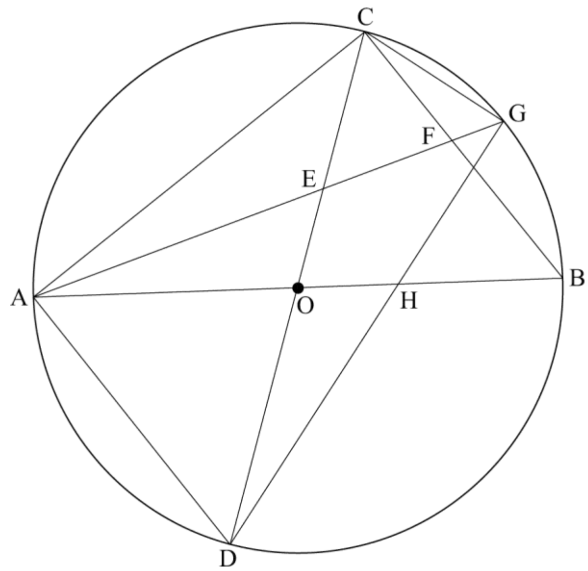
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
問1
〔証明〕
△ADC と△EBC で
仮定から DC＝BC…①
仮定から AC＝EC…②
仮定から∠BCD＝∠ECA＝60°…③
また∠ACD＝∠ACB＋∠BCD…④
∠ECB＝∠ECA＋∠ACB…⑤
∠ACB は共通な角だから
③, ④, ⑤から
∠ACD＝∠ECB…⑥
①, ②, ⑥から
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ADC≡△EBC
問2
(1) $3\sqrt{3}$cm
(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})$cm
解説
問1
△ADC と△EBC について
仮定より
ともに正三角形の辺であるから DC＝BC…①
同様に AC＝EC…②
また∠ACD＝∠ACB＋∠BCD＝∠ACB＋60°, ∠ECB＝∠ACB＋∠ECA＝∠ACB＋60°より
∠ACD＝∠ECB…③
①, ②, ③より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ADC≡△EBC
問2
(1)
AB＝AC より BC と AD は垂直に交わる。
△BDG において
三平方の定理より $DG^2=BD^2-BG^2=36-9=27$
DG＞0 より
$DG=3\sqrt{3}$cm
(2)
点 C から BE に垂線を下ろし BE と垂線との交点を H とする。
問1より△ADC≡△EBC であり
△ACG≡△ECH だから CH＝CG＝3cm
よって△ECH において三平方の定理より
$EH^2=CE^2-CH^2=16-9=7$
EH＞0 より
$EH=\sqrt{7}$cm
$AG=\sqrt{7}$cm だから$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times(AG+DG)\times CG=\frac{1}{2}\times(\sqrt{7}+3\sqrt{3})\times 3=\frac{3(\sqrt{7}+3\sqrt{3})}{2}$ cm²
また, HF＝$x$ cm とおくと△BGF≡△CGF≡△CHF より△BGF＝△CGF＝△CHF だから
$\triangle EBC=\triangle CEH+3\triangle CHF=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times 3+3\times\frac{1}{2}\times x\times 3=\frac{3(\sqrt{7}+3x)}{2}$ cm²
△ADC≡△EBC より△ADC＝△EBC だから $\frac{3(\sqrt{7}+3\sqrt{3})}{2}=\frac{3(\sqrt{7}+3x)}{2}$
したがって $x=\sqrt{3}$cm だから $EF=EH+HF=\sqrt{7}+\sqrt{3}$ cm

【問 12】

次の図のように，線分 AB を直径とする円 O の円周上に点 C をとり，△ABC をつくる。線分 CO を O の方に延長した直線と円 O との交点を D とし，線分 AD をひく。∠CAB の二等分線と線分 CO，線分 BC，円 O との交点をそれぞれ E，F，G とし，線分 CG をひく。線分 DG と線分 AB の交点を H とする。




このとき，あとの各問いに答えなさい。ただし，点 G は，点 A と異なる点とする。

（三重県 2018 年度）

問1 次の [ ] は，△AOE≡△DOH であることを証明したものである。$\boxed{(ア)}$ ～ $\boxed{(ウ)}$ に，それぞれあてはまる適切なことがらを書き入れなさい。

〔証 明〕
△AOE と△DOH において，
円 O の半径だから，OA＝OD…①
対頂角は等しいから，∠AOE＝$\boxed{(ア)}$…②
線分 AG は∠CAB の二等分線だから，∠EAO＝$\boxed{(イ)}$…③
弧 CG に対する円周角は等しいから，$\boxed{(イ)}$＝∠HDO…④
③，④より，∠EAO＝∠HDO…⑤
①，②，⑤より，$\boxed{\quad(ウ)\quad}$ がそれぞれ等しいので，
△AOE≡△DOH

問2 △ADH∽△GCE であることを証明しなさい。

問3 AB＝10 cm，BC＝6 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 線分 OE の長さを求めなさい。

(2) 線分 AE と線分 EG の長さの比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

(3) △ADH と△GCE の面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

| | | |
|---|---|---|
| 問1 | (ア) | |
| | (イ) | |
| | (ウ) | |
| 問2 | 〔証明〕 | |
| 問3 | (1) | cm |
| | (2) | AE：EG＝ ： |
| | (3) | △ADH：△GCE＝ ： |

解答
問1
(ア) ∠DOH
(イ) ∠EAC
(ウ) 1 組の辺とその両端の角
問2
〔証明〕
△ADH と△GCE において
△AOE≡△DOH より
∠AHD＝∠DEA…①
対頂角は等しいから
∠DEA＝∠GEC…②
①, ②より
∠AHD＝∠GEC…③
OA＝OD より
△OAD は二等辺三角形だから
∠DAH＝∠ODA…④
弧 CA に対する円周角は等しいから
∠ODA＝∠CGE…⑤
④, ⑤より
∠DAH＝∠CGE…⑥
③, ⑥より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ADH∽△GCE
問3
(1) $\frac{25}{13}$ cm
(2) AE : EG＝8 : 5
(3) △ADH : △GCE＝18 : 5

解説
問1
△AOEと△DOHにおいて
円Oの半径だからOA＝OD…①
対頂角は等しいから∠AOE＝∠DOH…②
線分AGは∠CABの二等分線だから∠EAO＝∠EAC…③
弧CGに対する円周角は等しいから∠EAC＝∠HDO…④
③, ④より∠EAO＝∠HDO…⑤
①, ②, ⑤より
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△AOE≡△DOH
問2
△ADHと△GCEにおいて
△OADは二等辺三角形だから∠HAD＝∠ADO…①
弧ACの円周角は等しいから∠EGC＝∠ADO…②
①, ②より∠HAD＝∠EGC…③
合同な図形の対応する角は等しいから∠DHA＝∠AEO…④
対頂角は等しいから∠CEG＝∠AEO…⑤
④, ⑤より∠DHA＝∠CEG…⑥
③, ⑥より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ADH∽△GCE
問3
(1)
AB＝10cmよりAO＝5cm
△ABCにおいて三平方の定理より$AC=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$cm
∠CAE＝∠OAEよりCE:OE＝AC:AO＝8:5
よって$OE=\frac{5}{13}OC=\frac{25}{13}$ cm
(2)
合同な図形の対応する辺は等しいからOE＝OH
△OADと△OHEについて
対頂角は等しいことと, ともに二等辺三角形であることから
△OAD∽△OHE
よって∠OAD＝∠OHEより
錯角が等しいからEH//AD…①
また$AD:HE=OD:OE=5:\frac{25}{13}=13:5$…②
①, ②よりGE:GA＝HE:AD＝5:13だからAE:EG＝(13－5):5＝8:5
(3)
△OAD≡△OBCよりAD＝BC＝6cm
点Oから辺ADに垂線を下ろし, 辺ADとの交点をIとする。
△OAIにおいて三平方の定理より$OI=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$cm
よってGI＝GO＋OI＝5＋4＝9cm
また, △GAIにおいて
三平方の定理より$GA=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ cm
AE:EG＝8:5より$EG=\frac{5}{13}\times3\sqrt{10}=\frac{15\sqrt{10}}{13}$ cm
△ADH∽△GCEで$AH=AO+OH=5+\frac{25}{13}=\frac{90}{13}$ cmより
$\triangle ADH:\triangle GCE=AH^2:GE^2=\frac{90^2}{13^2}:\frac{15^2\times10}{13^2}=90\times9:15^2=18:5$

【問 13】

正方形の折り紙があります。この折り紙を図1のように，正方形 ABCD とし，辺 BC 上に点 P をとるとき，次の問1から問3に答えなさい。

（滋賀県　2018 年度）

問1　図2のように，点 A が点 P に重なるように折り紙を折り，∠BPE＝40°　のとき，∠FEP の大きさを求めなさい。

問2　図2の折り紙をもとにもどし，折り目を線分 EF としたものを図3とします。次に，点 D が点 P に重なるように折り紙を折ったものを図4とします。

図4において，線分 GH 上に，∠PQG が∠PHG の 2 倍となるような点 Q を，コンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図に使った線は消さないこと。

問3　図4の折り紙をもとにもどし，折り目を線分 GH としたものを図5とします。図3で示した折り目の線分 EF と線分 GH との交点を R とし，図6のように，直線 DR と辺 AB との交点を S としたとき，△ESR と△FDR が合同であることを証明しなさい。

図1

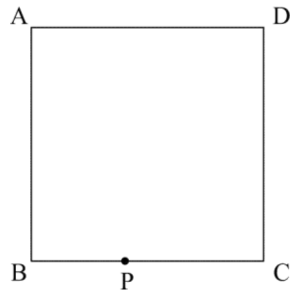



図2

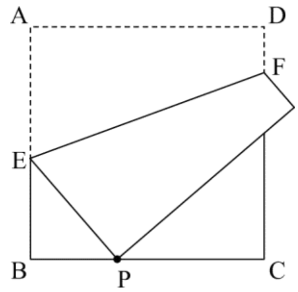



図3

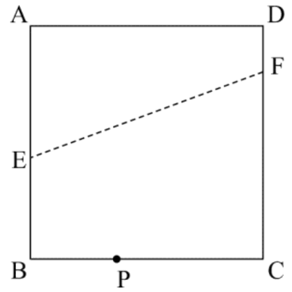



図4

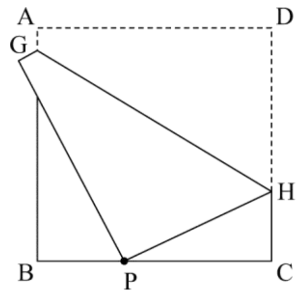



図5

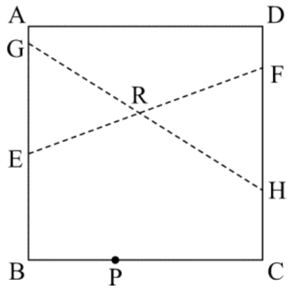
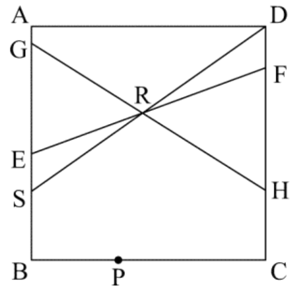
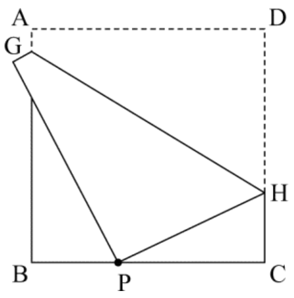
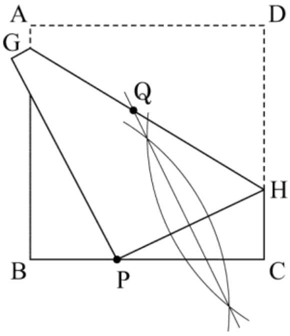



図6



解答欄

| | |
|---|---|
| 問1 | ° |
| 問2 |  |
| 問3 | |

解答
問1　65°
問2


問3
△APD において
点 A は線分 EF について点 P と対称な点なので
線分 EF は辺 AP の垂直二等分線である。
また点 D は線分 GH について点 P と対称な点なので
線分 GH は辺 DP の垂直二等分線である。
したがって△APD の 2 辺の垂直二等分線の交点 R は△APD の外接円の中心である。
∠SAD＝90°なので
線分 DS は円周角の定理の逆より△APD の外接円である円 R の直径である。
したがって△ESR と△FDR について
外接円 R の半径より RS＝RD…①
対頂角は等しいので∠ERS＝∠FRD…②
平行線の錯角は等しいので∠ESR＝∠FDR…③
①，②，③より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ESR≡△FDR である。
解説
問1
∠BPE＝40°より∠BEP＝180°－90°－∠BPE＝50°だから∠AEP＝180°－∠BEP＝130°
∠AEP＝2∠FEP より∠FEP＝$\frac{1}{2}$∠AEP＝65°
問2
△PHQ で∠PQG＝∠PHG＋∠HPQ
∠PQG＝2∠PHG だから∠PHG＝∠HPQ
よって HQ＝PQ だから線分 PH の垂直二等分線をひき GH との交点を Q とする。
問3
点 R と点 P，点 P と点 H をそれぞれ結ぶ。
△RDH と△RPH において共通な辺は等しいから RH＝RH…①
図4より DH＝PH…②，∠RHD＝∠RHP…③
①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから△RDH≡△RPH…④
点 R と点 A，点 P と点 E をそれぞれ結ぶ。
△RAE と△RPE において同様に△RAE≡△RPE…⑤
④より合同な三角形の対応する辺は等しいから RD＝RP…⑥
また⑤より合同な三角形の対応する辺は等しいから RA＝RP…⑦
よって⑥，⑦より RD＝RA だから△RAD は二等辺三角形となるので
点 R から辺 AD に垂線をひき，辺 AD との交点を J とすると AJ＝DJ となる。
よって JR // AS だから DR＝RS…⑧となることがわかる。
△ESR と△FDR において対頂角は等しいから∠ERS＝∠FRD…⑨
AB // DC より平行線の錯角は等しいから∠ESR＝∠FDR…⑩
⑧，⑨，⑩より 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから△ESR≡△FDR
DR＝RS であることは解答のほかに上のように示すこともできる。

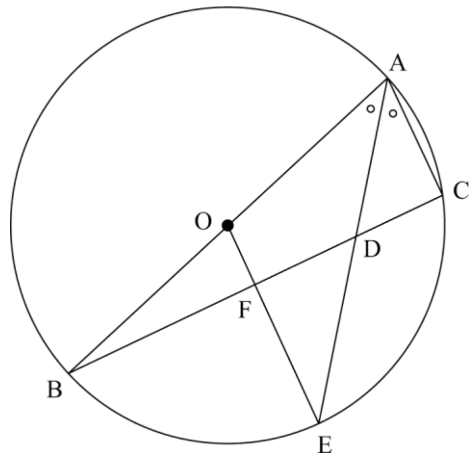
【問 14】

図1のように，線分 AB を直径とする円 O の周上に点 C がある。∠BAC の二等分線と線分 BC の交点を D，円との交点を E とし，線分 OE と BC の交点を F とする。また，OA＝5 cm，AC＝3 cm とする。

次の問1～問3に答えなさい。

（和歌山県　2018 年度）

図1

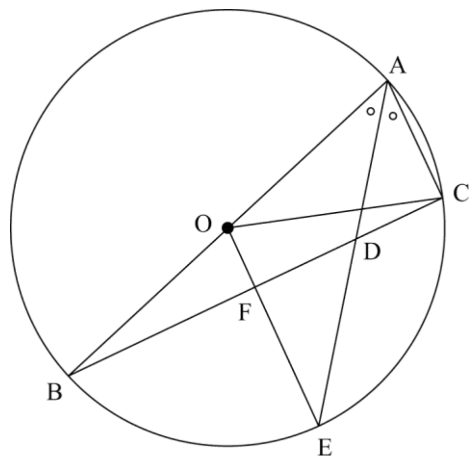



問1　BC の長さを求めなさい。

問2　図2のように，中心 O と点 C を結ぶ。

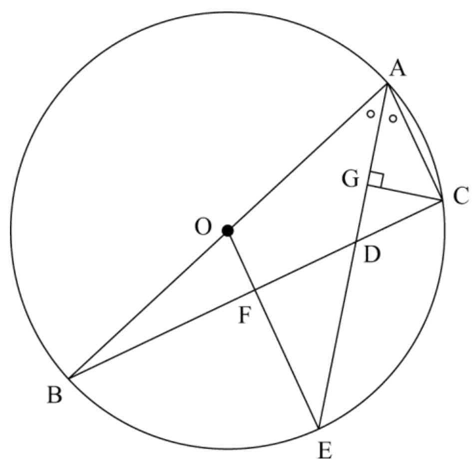
このとき，△OBF≡△OCF を証明しなさい。

図2




問3　図3のように，点 C から AE に垂線をひき，その交点を G とする。このとき，AG：AE を求めなさい。

図3



解答欄

| | |
|---|---|
| 問1 | BC＝　　　　　　　cm |
| 問2 | 〔証明〕 |
| 問3 | AG：AE＝ |

解答
問1　$BC=\sqrt{91}cm$
問2
〔証明〕
△OBFと△OCFで
円の半径より
OB＝OC…①
OFは共通…②
$\overset{\frown}{BE}$に対する円周角の定理より
$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BOF$
よって∠BOF＝2∠BAE…③
また$\overset{\frown}{EC}$に対する円周角の定理より
$\angle CAE=\frac{1}{2}\angle COF$
よって∠COF＝2∠CAE…④
AEは∠BACの二等分線だから
∠BAE＝∠CAE…⑤
③，④，⑤より
∠BOF＝∠COF…⑥
①，②，⑥から
2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので
△OBF≡△OCF
問3　AG:AE＝3:10
解説
問1
半円の弧に対する円周角は90°だから∠ACB＝90°
よって△ACBについて，三平方の定理より$BC=\sqrt{(5\times2)^2-3^2}=\sqrt{91}cm$
問2
△OBFと△OCFについて
共通な辺よりOF＝OF…①
円Oの半径よりOB＝OC…②
弧BEについて
円周角の定理より∠BOE＝2∠BAE…③，∠COE＝2∠CAE…④
仮定より∠BAE＝∠CAEだから
③，④より∠BOF＝∠COF…⑤
よって①，②，⑤より
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△OBF≡△OCF
問3
点Bと点Eを直線で結ぶ。
△ABEと△ACGについて
∠BAE＝∠CAG…①，
半円の弧に対する円周角は90°だから∠AEB＝90°
よって∠AEB＝∠AGC＝90°　…②
①，②より
2組の角がそれぞれ等しいから△ABE∽△ACG
相似な三角形の対応する辺の比は等しいからAG:AE＝AC:AB＝3:10

【問 15】

テレビでビリヤードの球が台の枠に当たって跳ね返る様子を見た太郎さんは，球の跳ね返りについて興味をもち，真上から見た模式図をかいて考えた。問1～問3に答えなさい。ただし，球の大きさ，枠の厚さは考えないものとする。

（岡山県　2018 年度）

ビリヤードの台は長方形とし，枠はその周とする。打ち出された球は，次のように枠内を動くものとする。

〔球の動き方〕

・球は真っすぐに動く。
・球は枠に当たると，図1のように，枠に対して，$\angle a = \angle b$ となるように跳ね返り，再び真っすぐに動く。

図1

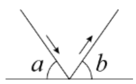
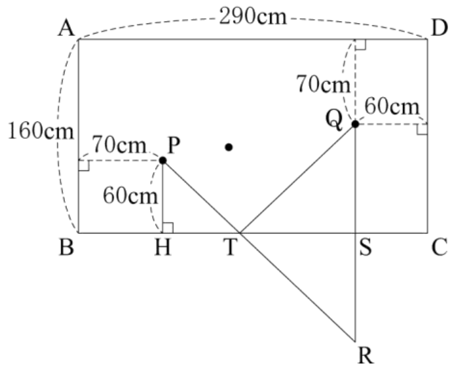



図2




(•は球を表す)

図2のように，長方形 ABCD の内部の 2 点 P，Q と，その間に球がある。点 P にある球を点 Q にある球に直接当てられないとき，枠の一部を表す辺 BC に 1 回跳ね返らせて当てる方法を考える。

(あ)線分 BC について点 Q と対称な点 R をとり，線分 QR と線分 BC との交点を S，線分 PR と線分 BC との交点を T とし，点 Q と点 T を結ぶ。(い)このとき，点 P にある球を点 T で跳ね返らせれば，点 Q にある球に当てることができる。また，点 P から線分 BC に垂線 PH をひくと，△PTH∽△QTS だから，相似比を使うと，(う)点 T の位置がわかる。

問1　下線部(あ)の点 R を，定規とコンパスを使って作図しなさい。作図に使った線は残しておきなさい。

問2　下線部(い)が正しいことは，次のように説明できる。$\boxed{(1)}$ には△QTS≡△RTS の証明の過程を書きなさい。また，$\boxed{(2)}$ には∠PTB＝∠QTS であることを示す説明の続きを書き，＜説明＞を完成させなさい。

＜証明＞

△QTS と△RTS において，

(1)

QTS≡△RTS である。合同な図形では，対応する角の大きさはそれぞれ等しいので，

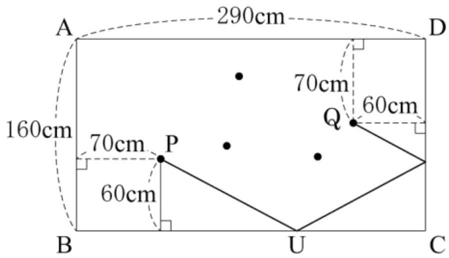
(2)

よって，∠PTB＝∠QTS である。したがって，〔球の動き方〕により，点 P にある球を点 T で跳ね返らせれば，点 Q にある球に当てることができる。

問3　図2において，AB＝160 cm，AD＝290 cm であり，点 P と辺 AB，BC との距離はそれぞれ 70 cm，60 cm，点 Q と辺 CD，DA との距離はそれぞれ 60 cm，70 cm である。(1)，(2)に答えなさい。

(1)　下線部(う)について，線分 ST の長さを求めなさい。

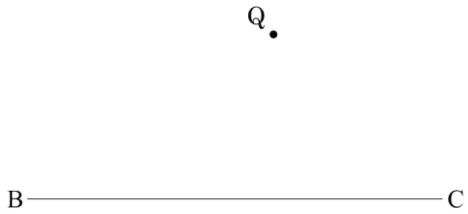
図3



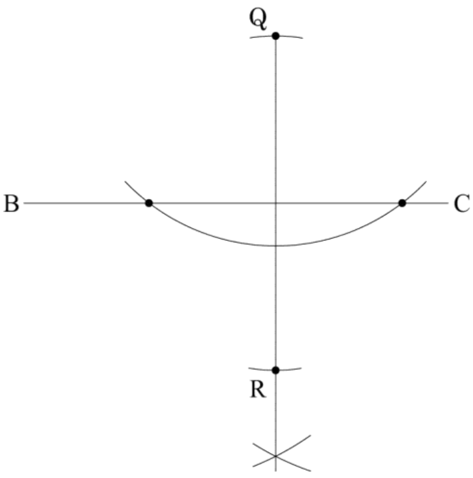

(・は球を表す)

(2)　太郎さんは，図3のように，点 P にある球を，辺 BC に 1 回，続けて辺 CD に 1 回，合計 2 回跳ね返らせて，点 Q にある球に当てる方法を考えた。跳ね返らせる辺 BC 上の点を U とするとき，線分 CU の長さを求めなさい。

解答欄

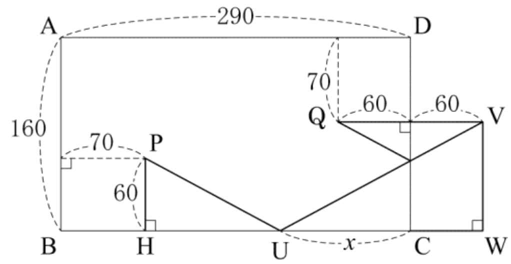
<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
問1




問2
(1)
2 点 Q, R は線分 BC について対称だから
∠QST＝∠RST＝90° …(ⅰ)
QS＝RS …(ⅱ)
また, TS は共通だから
TS＝TS …(ⅲ)
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) から
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
(2)
∠QTS＝∠RTS
また対頂角は等しいから
∠PTB＝∠RTS
問3
(1) 96cm
(2) 108cm

解説
問1
点 R は，点 Q を BC を対称の軸として対称移動させた点になるから
QR⊥BC，QS＝RS
よって Q を通り BC に垂直な直線を作図して BC との交点を S とし
S を中心とする半径 SQ の円をかいて
直線 QS との交点を R とすればよい。
問2
(1)
対称移動の性質を使って証明する。
(2)
対頂角が等しいことを使って説明する。
問3
(1)
△PTH∽△QTS より
HT : ST＝PH : QS＝60 : (160－70)＝60 : 90＝2 : 3
また HS＝BC－BH－SC＝290－70－60＝160cm
よって ST＝HS×$\dfrac{3}{2+3}$＝160×$\dfrac{3}{5}$＝96cm
(2)
右の図のように DC について点 Q と対称な点 V をとり
V から BC の延長に垂線 VW をひく。
UC＝$x$ cm とすると
HU＝290－70－$x$＝220－$x$ cm
WU＝$x$＋60 cm
また PH＝60cm，VW＝160－70＝90cm
△PUH∽△VUW で
相似比は PH : VW＝60 : 90＝2 : 3
よって HU : WU＝2 : 3
(220－$x$) : ($x$＋60)＝2 : 3
3(220－$x$)＝2($x$＋60)
660－3$x$＝2$x$＋120
－5$x$＝－540
$x$＝108
よって UC＝108cm

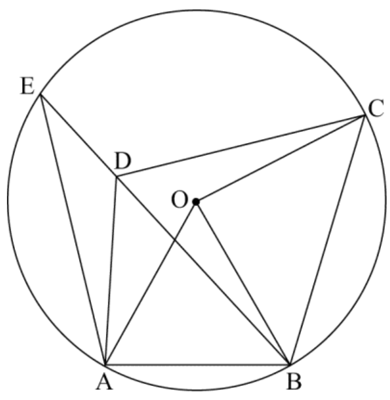


【問 16】

図で，3 点 A, B, C は円 O の周上，点 D は円 O の内部の点であり，△OAB, △BCD は正三角形である。線分 BD の延長と円 O の交点を E とする。

次の問1～問3に答えなさい。

（山口県 2018 年度）




問1 ∠EAD＝18° のとき，∠ADE の大きさを求めなさい。

問2 △ABD≡△OBC であることを証明しなさい。

問3 AB＝$\sqrt{21}$cm，BC＝6 cm のとき，2 点 A, C を結ぶ線分 AC の長さを求めなさい。

解答欄

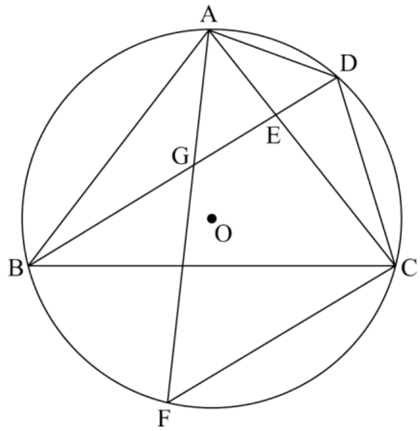
| | |
|---|---|
| 問1 | 度 |
| 問2 | 〔証明〕 |
| 問3 | cm |

解答
問1　132度
問2
〔証明〕
△ABDと△OBCで
△OABは正三角形なので
AB＝OB…①
△BCDも正三角形なので
BD＝BC…②
また
∠ABD＝∠ABO－∠DBO
＝60°－∠DBO…③
∠OBC＝∠DBC－∠DBO
＝60°－∠DBO…④
③, ④から
∠ABD＝∠OBC…⑤
①, ②, ⑤から
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABD≡△OBC
問3　$5\sqrt{3}$cm
解説
問1
円周角の定理より∠AED＝$\frac{1}{2}$∠AOB＝30°
よって∠ADE＝180°－(∠EAD＋∠AED)＝180°－(18°＋30°)＝132°
問2
△ABDと△OBCにおいて
△OAB, △BCDは正三角形だから
AB＝OB…①
BD＝BC…②
また∠ABD＝60°－∠OBD…③
∠OBC＝60°－∠OBD…④
③, ④より
∠ABD＝∠OBC…⑤
よって①, ②, ⑤より
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABD≡△OBC
問3
点Bから線分ACに垂線をひきその垂線と線分ACの交点をHとする。
円周角の定理より∠ACB＝∠AEB＝30°
よって△BCHは3つの角が30°, 60°, 90°の直角三角形だから
CH:CB＝$\sqrt{3}$:2より
CH:6＝$\sqrt{3}$:2
CH＝$3\sqrt{3}$cm
またBH:BC＝1:2より
BH＝3cm
△ABHにおいて
三平方の定理より
$AH^2＝AB^2－BH^2＝21－9＝12$
AH＞0より
AH＝$2\sqrt{3}$cm
よってAC＝AH＋CH＝$5\sqrt{3}$cm

【問 17】

図のように，円 O の周上に AB＝AC となるように 3 点 A，B，C をとり，二等辺三角形 ABC をつくる。弧 AC 上に点 D をとり，点 A と点 D，点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。線分 BD と辺 AC の交点を E とする。点 C を通り，線分 BD に平行な直線と円との交点を F とし，線分 AF と線分 BD の交点を G とする。このとき，次の問1・問2に答えなさい。

（高知県 2018 年度 A）




問1 △ABG≡△ACD を証明せよ。

問2 AB＝8 cm，AD＝3 cm，GF＝7 cm のとき，線分 CE の長さを求めよ。

解答欄

| | |
|---|---|
| 問1 | 〔証明〕<br>△ABG と△ACD において<br><br><br>したがって △ABG≡△ACD |
| 問2 | cm |

解答
問1
〔証明〕
△ABG と△ACD において
仮定から
AB＝AC…①
$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角は等しいから
∠ABG＝∠ACD…②
$\overset{\frown}{\mathrm{BF}}$に対する円周角は等しいから
∠BAG＝∠BCF…③
$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角は等しいから
∠CAD＝∠CBD…④
BD // FC より，錯角は等しいから
∠BCF＝∠CBD…⑤
③，④，⑤より
∠BAG＝∠CAD…⑥
①，②，⑥より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。
したがって△ABG≡△ACD
問2　$\frac{28}{5}$cm
解説
問1
△ABG と△ACD において
弧 AD に対する円周角は等しいから
∠ABG＝∠ACD…①
点 D と点 F を直線で結ぶ。
弧 BF に対する円周角は等しいから
∠BAG＝∠BDF…②
BD // FC より
平行線の錯角は等しいから
∠BDF＝∠CFD…③
弧 CD に対する円周角は等しいから
∠CFD＝∠CAD…④
②，③，④より
∠BAG＝∠CAD…⑤
仮定より
AB＝AC…⑥
よって①，⑤，⑥より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABG≡△ACD
問2
△ABG≡△ACD より
合同な図形の対応する辺は等しいから
AG＝AD＝3cm
仮定より
AC＝AB＝8cm
GE // FC より
AE : EC＝AG : GF＝3 : 7
よって CE＝$\frac{7}{10}$×8＝$\frac{28}{5}$cm

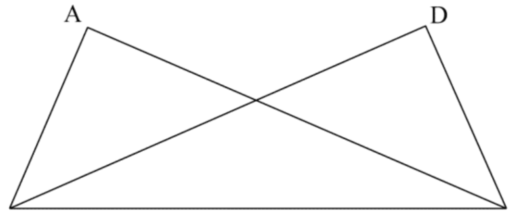
【問 18】

BC＝6 cm の△ABC がある。図1のように，点 A と異なる点 D を，AC＝DB，∠ACB＝∠DBC となるようにとり，点 B と点 D，点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。

次の問いに答えよ。

（福岡県 2018 年度）

図1




問い　図1において，次のように，∠BAC＝∠CDB であることを証明した。

証明

△ABC と△DCB において
共通な辺だから
BC＝CB…①
仮定から
AC＝DB…②
∠ACB＝∠DBC…③
①，②，③より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABC≡△DCB
合同な図形の対応する角は等しいから
∠BAC＝∠CDB

証明の中で示した△ABC≡△DCB であることから，∠BAC＝∠CDB のほかに，△ABC と△DCB の辺や角の関係について新たにわかることが 2 組ある。新たにわかる辺や角の関係を，記号＝を使って答えよ。

解答欄

| |
|---|
| |

解答
AB＝DC
∠ABC＝∠DCB
解説
「新たにわかる辺や角の関係」とあるので
証明で根拠となる事がらとして使われている関係や，すでに示されている∠BAC＝∠CDB を除いて考える。
△ABC≡△DCB で合同な図形の対応する辺は等しいから AB＝DC であることと
合同な図形の対応する角は等しいから∠ABC＝∠DCB であることがいえる。

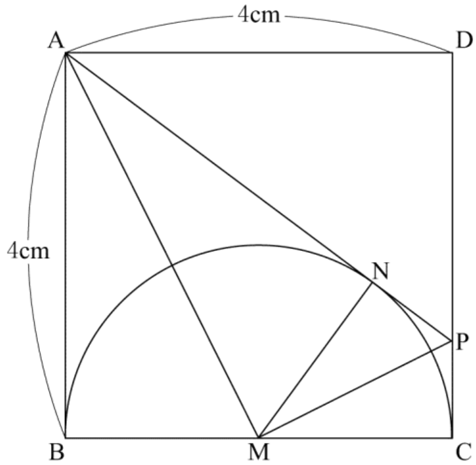
【問 19】

図1のように，1 辺の長さが 4 cm の正方形 ABCD と辺 BC を直径とする半円がある。辺 BC の中点を M とし，点 P を，直線 AP が半円に接するように辺 CD 上にとり，その接点を N とする。

このとき，次の問1～問6に答えなさい。

（佐賀県 2018 年度 一般）

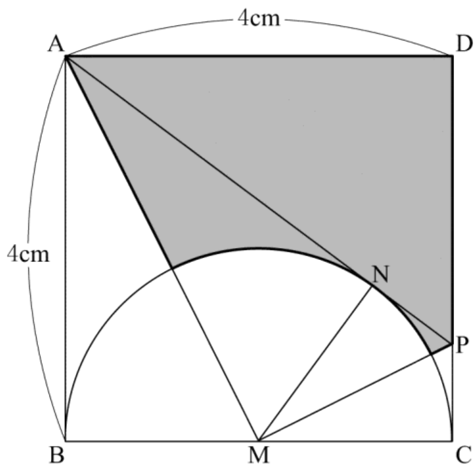
図1




問1 線分 AM の長さを求めなさい。

問2 △ABM≡△ANM であることを証明しなさい。

図2




問3 CP＝$x$ cm とする。線分 DP，線分 AP の長さをそれぞれ $x$ を用いて表した式の組み合わせとして正しいものを，次の①～④の中から 1 つ選び，番号を書きなさい。

① DP＝2－$x$ cm，AP＝2＋$x$ cm

② DP＝2－$x$ cm，AP＝4＋$x$ cm

③ DP＝4－$x$ cm，AP＝2＋$x$ cm

④ DP＝4－$x$ cm，AP＝4＋$x$ cm

問4 線分 CP の長さを求めなさい。

問5 △NBC の面積を求めなさい。

問6 図2は，図1の一部に色をつけたものである。色をつけた部分の周の長さを求めなさい。

解答欄

| | |
|---|---|
| 問1 | AM＝ cm |
| 問2 | |
| 問3 | |
| 問4 | CP＝ cm |
| 問5 | $cm^2$ |
| 問6 | cm |

解答
問1　AM＝$2\sqrt{5}$　cm
問2
△ABMと△ANMにおいて
仮定より
∠ABM＝∠ANM＝90°…①
AMは共通だから
AM＝AM…②
BM, NMは半円の半径だから
BM＝NM…③
①, ②, ③から
直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので
△ABM≡△ANM
問3　④
問4　CP＝1cm
問5　$\frac{16}{5}$cm$^2$
問6　$\pi+3+3\sqrt{5}$cm

解説

問1

△ABMで∠ABM＝90°だから

三平方の定理より$AB^2+BM^2=AM^2$

AM＝$y$cmとすると

$4^2+2^2=y^2$　$y^2=20$　$y>0$より　$y=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

問2

円の接線は接点を通る半径に垂直だから∠ANM＝90°となる。

問3

DP＝DC－CP＝4－$x$ cm

また問2より△ABM≡△ANMだからAB＝ANが成り立つ。

同様に△PCM≡△PNMだからPC＝PNも成り立つ。

よってAP＝AN＋PN＝AB＋PC＝4＋$x$ cm

問4

△ADPで∠ADP＝90°だから

三平方の定理より$AD^2+DP^2=AP^2$

これに問3の式をあてはめると

$4^2+(4-x)^2=(4+x)^2$

$16+16-8x+x^2=16+8x+x^2$

$-16x=-16$

$x=1$

よってCP＝1cm

点Nを通り辺ABに平行な直線と辺AD，BCとの交点をそれぞれH，Iとする。

問5

△ADPでHN//DPよりAN:AP＝HN:DP　HN＝$z$ cmとすると$4:5=z:3$　$z=\frac{12}{5}$

よってNI＝HI－HN＝$4-\frac{12}{5}=\frac{8}{5}$cm　△NBC＝$\frac{1}{2}$×BC×NI＝$\frac{1}{2}\times4\times\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$cm²

別解

MPとNCの交点をKとすると△CPK≡△NPKとなるからCK＝KN

またCM＝MBだから中点連結定理よりMP // BN

よって∠CMP＝∠NBC

また∠MCP＝∠BNC＝90°

2組の角がそれぞれ等しいから△CMP∽△NBC

△CMPと△NBCの相似比は

MP:BC　MP＝$\sqrt{2^2+12}$ ＝$\sqrt{5}$cmだから

MP:BC＝$\sqrt{5}:4$

よって面積比は$(\sqrt{5})^2:4^2=5:16$

△CMPの面積は$\frac{1}{2}$ ×2×1＝1cm²だから

△NBCの面積は 1×$\frac{16}{5}$ ＝$\frac{16}{5}$ cm²

問6

線分AMと半円の交点をQ，線分PMと半円の交点をRとする。

∠AMB＝∠AMN，∠PMC＝∠PMNだから∠AMP＝90°

よっておうぎ形MQRで$\overset{\frown}{QR}=2\pi\times2\times\frac{90}{360}=\pi$ cm

またAQ＝AM－MQ＝$2\sqrt{5}-2$cm

さらに△MCPで，MP＝$\sqrt{MC^2+CP^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$cm

RP＝MP－MR＝$\sqrt{5}-2$cm

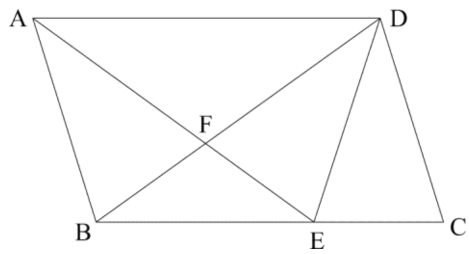
求める周の長さはAD＋DP＋AQ＋$\overset{\frown}{QR}$＋RP＝$4+3+(2\sqrt{5}-2)+\pi+(\sqrt{5}-2)=\pi+3+3\sqrt{5}$cm

【問 20】

右の図のように，平行四辺形 ABCD がある。辺 BC 上に CD＝DE となる点 E をとり，線分 AE と線分 BD との交点を F とする。

次の問1，問2に答えなさい。

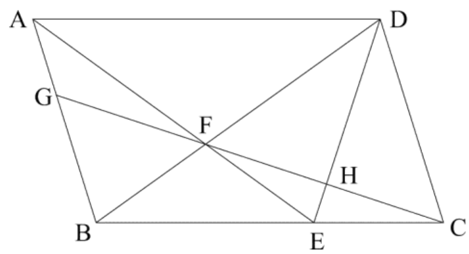
（大分県 2018 年度）




問1 △ADE≡△BCD であることを証明しなさい。

問2 直線 CF と辺 AB，線分 DE との交点をそれぞれ G，H とする。

AD：DE＝2：1，∠DAE＝∠CDE のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。




(1) BE：EC をもっとも簡単な整数の比で表しなさい。

(2) △AGF の面積を 1 $cm^2$ としたとき，△CHE の面積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$cm^2$</td></tr>
</table>

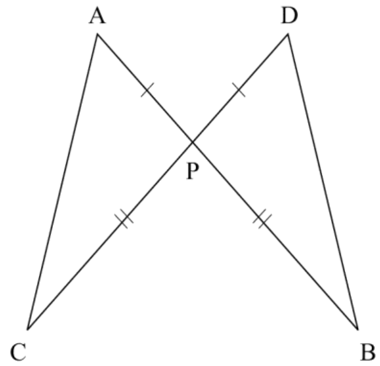
解答
問1
〔証明〕
△ADEと△BCDにおいて
仮定から
DE＝CD…①
四角形ABCDは平行四辺形であるから
AD＝BC…②
△DECは二等辺三角形だから
∠BCD＝∠CED
またAD // BCだから錯角が等しいから
∠ADE＝∠CED
したがって
∠ADE＝∠BCD…③
①, ②, ③より
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ADE≡△BCD
問2
(1)　3:1
(2)　$\frac{7}{19}$ $\mathrm{cm}^2$
解説
問1
△ADEと△BCDについて平行四辺形の向かいあう辺は等しいからAD＝BC…①
仮定より, DE＝CD…②　△DECは二等辺三角形だから∠DCE＝∠DEC…③
平行線の錯角は等しいから∠ADE＝∠DEC…④
③, ④より∠ADE＝∠BCD…⑤
①, ②, ⑤より2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから△ADE≡△BCD
問2
(1)
仮定より∠DAE＝∠CDE　また∠ADE＝∠DECだから△ADE∽△DEC
相似な三角形の対応する辺の比は等しいからDE:EC＝AD:DE＝2:1
BC＝AD＝2DE, EC＝$\frac{1}{2}$DEだからBC:EC＝2:$\frac{1}{2}$＝4:1　よってBE:EC＝3:1
(2)
直線DAと直線CGの交点をIとする。
AD // BCより△AFD∽△EFB
相似な三角形の対応する辺の比は等しいからFD:FB＝AD:EB＝4:3…①
AB // DCより△IGA∽△ICD, △GBF∽△CDF
①よりGB:CD＝BF:DF＝3:4だからIA:ID＝AG:DC＝1:4
DA＝4CE, DA＝3IAより4CE＝3IAでIA＝$\frac{4}{3}$CEだからDI＝$\frac{16}{3}$CE
ID // BCより△DIH∽△ECH
相似な三角形の対応する辺の比は等しいからDH:EH＝DI:EC＝$\frac{16}{3}$CE:EC＝$\frac{16}{3}$:1
よって, DH:EH＝16:3だから△CHE＝$\frac{3}{19}$△DEC…②
△ABE＝3△DECで△ABF＝$\frac{4}{7}$△ABE, △AGF＝$\frac{1}{4}$△ABFだから
△AGF＝$\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}$△ABE＝$\frac{1}{7}\times 3$△DEC＝$\frac{3}{7}$△DEC
よって△DEC＝$\frac{7}{3}$△AGF＝$\frac{7}{3}$ $\mathrm{cm}^2$
したがって②より△CHE＝$\frac{3}{19}\times\frac{7}{3}$＝$\frac{7}{19}\mathrm{cm}^2$

【問 21】

図で，線分 AB と CD が，AP＝DP，CP＝BP となるように，点 P で交わっている。

このとき，△APC≡△DPB であることを証明しなさい。

（沖縄県 2018 年度）




解答欄

△APC と△DPB において

△APC≡△DPB

解答
△APC と△DPB において
仮定より
AP＝DP，CP＝BP…①
また対頂角は等しいので
∠APC＝∠DPB…②
①，②より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△APC≡△DPB
解説
△APC と△DPB において
仮定より，AP＝DP……①，CP＝BP……②
また，対頂角は等しいから∠APC＝∠DPB……③
①，②，③より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから△APC≡△DPB