

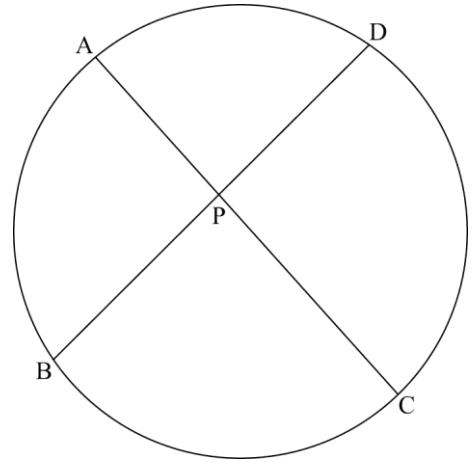
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題 【2018 年度出題】

【問 1】

右の図のように、円周上に 4 点 A, B, C, D をとり、線分 AC と BD との交点を P とします。

このとき、 $PA:PD=PB:PC$ であることを証明しなさい。

(埼玉県 2018 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ において

円周角の定理より

$$\angle BAP = \angle CDP \cdots \textcircled{1}$$

また対頂角は等しいから

$$\angle APB = \angle DPC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PAB \sim \triangle PDC$$

したがって

$$PA:PD = PB:PC$$

解説

点 A と点 B, 点 C と点 D をそれぞれ結ぶと $\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ ができる。

この 2 つの三角形が相似であることを証明し

相似な図形の辺の比は等しいことから

$PA:PD = PB:PC$ であることを示せばよい。

$\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ において

$$\text{円周角の定理より } \angle BAP = \angle CDP \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また対頂角は等しいから } \angle APB = \angle DPC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PAB \sim \triangle PDC$$

したがって相似な図形の対応する辺の比は等しいので

$$PA:PD = PB:PC$$

②のかわりに円周角の定理より $\angle ABP = \angle DCP$ を用いてもよい。

【問 2】

右の図1のように、 $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とします。

図1

このとき、次の各問に答えなさい。

(埼玉県 2018 年度)

問1 $AB:AC=BD:DC$ が成り立つことを証明しなさい。その際、解答用紙の図を用いてもよいものとします。

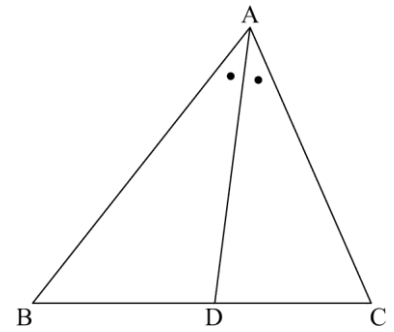
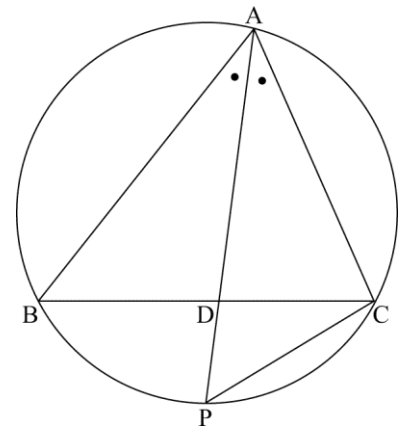


図2

問2 下の図2のように、3 点 A, B, C を通る円をかき、線分 AD を延長した直線との交点を P とします。 $AB=5\text{ cm}$, $AC=4\text{ cm}$, $CP=\sqrt{5}\text{ cm}$ のとき、次の(1), (2)に答えなさい。



(1) 線分 BP の長さを求めなさい。

(2) 線分 AD の長さを、途中の説明も書いて求めなさい。その際、解答用紙の図を用いて説明してもよいものとします。

問1	〔証明〕		
問2	(1)	BP= cm	
	(2)	〔説明〕	
		答え AD= cm	

解答

問1

〔証明〕

図のように点 E をとると $AD \parallel EC$ から

$$\angle BAD = \angle AEC$$

$$\angle DAC = \angle ACE$$

仮定より

$$\angle BAD = \angle DAC \text{ だから}$$

$$\angle AEC = \angle ACE$$

よって $\triangle ACE$ は二等辺三角形となるので

$$AE = AC \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle BEC$ において

$AD \parallel EC$ から

$$BA : AE = BD : DC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

$$AB : AC = BD : DC$$

問2

$$(1) \quad BP = \sqrt{5} \text{ cm}$$

(2)

〔説明〕

$BD = t$ とおくと

$$B : AC = BD : DC \text{ であるから } DC = \frac{4}{5}t$$

$\triangle DAB \sim \triangle DCP$ だから

$$DB : AB = DP : CP$$

$$DA : AB = DC : CP$$

よって

$$DP = \frac{\sqrt{5}}{5}t$$

$$DA = \frac{4\sqrt{5}}{5}t$$

また $\triangle ABP \sim \triangle ADC$ だから

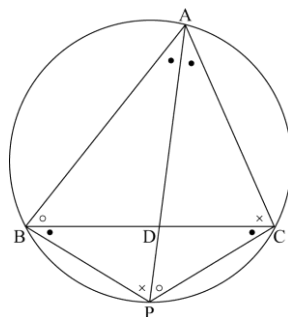
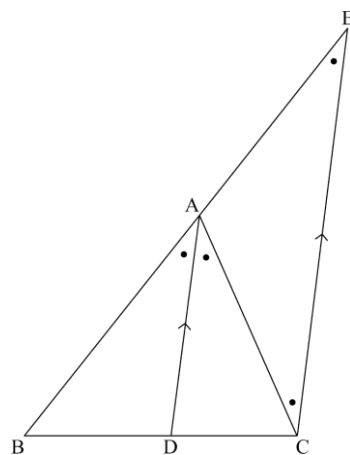
$$AB : AP = AD : AC$$

$$5 : \sqrt{5}t = \frac{4\sqrt{5}}{5}t : 4$$

$$t = \sqrt{5}$$

$$\text{したがって } AD = \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{5} = 4$$

答え $AD = 4 \text{ cm}$



解説

問1

辺 BA を点 A の方向に延ばした直線と点 C を通り線分 AD に平行な直線との交点を E とする。

AD // EC から

平行線の同位角, 錯角はそれぞれ等しいので

$$\angle BAD = \angle AEC, \angle DAC = \angle ACE$$

仮定より

$$\angle BAD = \angle DAC \text{ だから}$$

$$\angle AEC = \angle ACE$$

よって△ACE は二等辺三角形となるので

$$AE = AC \cdots \textcircled{1}$$

△BEC において

AD // EC から

$$\text{三角形と比の定理より } BA : AE = BD : DC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

$$AB : AC = BD : DC$$

問2

(1)

点 B と点 P を結ぶ。

円周角の定理より

$$\angle PAB = \angle PCB, \angle PAC = \angle PBC$$

仮定より

$$\angle BAD = \angle DAC$$

$$\text{よって } \angle PBC = \angle PCB$$

したがって

$$\triangle BPC \text{ は二等辺三角形となるので } PB = PC$$

$$\text{よって } PB = PC = \sqrt{5} \text{ cm}$$

(2)

$$BD = t \text{ cm とおくと問1より } AB : AC = BD : DC \text{ だから } 5 : 4 = t : DC \quad DC = \frac{4}{5} t \text{ cm}$$

△DAB と△DCP において

$$\text{円周角の定理より } \angle DAB = \angle DCP, \angle DBA = \angle DPC \text{ だから}$$

2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle DAB \sim \triangle DCP$$

よって

$$DB : AB = DP : CP \cdots \textcircled{3}$$

$$DA : AB = DC : CP \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ より } t : 5 = DP : \sqrt{5} \quad DP = \frac{\sqrt{5}}{5} t \text{ cm}$$

$$\textcircled{4} \text{ より } DA : 5 = \frac{4}{5} t : \sqrt{5} \quad DA = \frac{4\sqrt{5}}{5} t \text{ cm}$$

$$\text{したがって } AP = DA + DP = \frac{4\sqrt{5}}{5} t + \frac{\sqrt{5}}{5} t = \sqrt{5} t \text{ cm}$$

また△ABP と△ADC において

$$\text{円周角の定理より } \angle APB = \angle ACD$$

$$\text{仮定より, } \angle BAP = \angle DAC \text{ だから}$$

2 組の角がそれぞれ等しいので

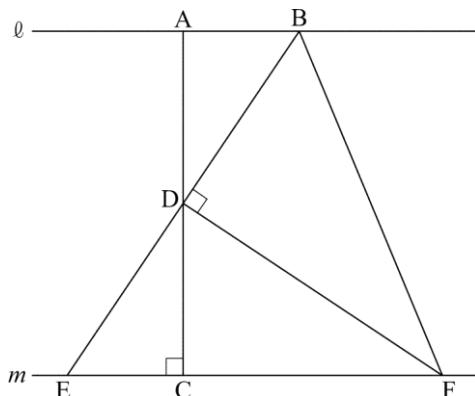
$$\triangle ABP \sim \triangle ADC$$

$$\text{よって } AB : AP = AD : AC \quad 5 : \sqrt{5} t = \frac{4\sqrt{5}}{5} t : 4 \quad t = \sqrt{5}$$

$$\text{したがって } AD = \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{5} = 4 \text{ cm}$$

【問 3】

下の図のように、平行な 2 直線 ℓ , m がある。 ℓ 上に 2 点 A , B をとり、点 A から直線 m に垂線 AC をひき、線分 AC の中点を D とする。2 点 B , D を通る直線と直線 m との交点を E とする。さらに、 $\angle BDF = 90^\circ$ となるように、直線 m 上に点 F をとり、点 B と F を結ぶ。



このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(千葉県 2018 年度 前期)

問1 $\triangle BEF$ が二等辺三角形となることの証明を、次の の中に途中まで示してある。 (a) ,

(b) に入る最も適当なものを、次の選択肢のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び、符号で答えなさい。また、 (c) には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。

ただし、 の中の①～④に示されている関係を使う場合、番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

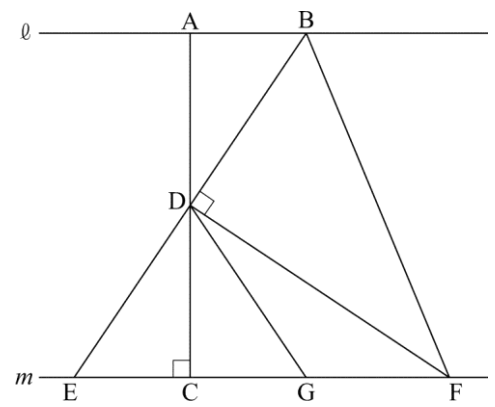
$\triangle ABD$ と $\triangle CED$ において、
 仮定より、
 $AD = CD \cdots \textcircled{1}$
 $\ell \parallel m$ より、
 平行線の (a) は等しいので、
 $\angle BAD = \angle ECD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$
 対頂角は等しいので、
 $\angle ADB = \text{ (b) } \cdots \textcircled{3}$
 ①, ②, ③より、
 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、
 $\triangle ABD \equiv \triangle CED \cdots \textcircled{4}$

(c) 次に、 $\triangle BDF$ と $\triangle EDF$ において、

選択肢

ア 錯角	イ 同位角	ウ 対頂角
エ $\angle ECD$	オ $\angle DEC$	カ $\angle CDE$

問2 $AB=4\text{ cm}$, $AC=12\text{ cm}$, 点 G を, 線分 CF 上に $CE=CG$ となるようにとる。
 このとき, 3 点 B, F, G を通る円の半径を求めなさい。



解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	次に, $\triangle BDF$ と $\triangle EDF$ において,
問2	cm	

解答

問1

(a) ア

(b) カ

(c)

次に、 $\triangle BDF$ と $\triangle EDF$ において、

④より

$$BD = ED \cdots \textcircled{5}$$

共通な辺なので

$$DF = DF \cdots \textcircled{6}$$

仮定より

$$\angle BDF = \angle EDF = 90^\circ \cdots \textcircled{7}$$

⑤, ⑥, ⑦より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BDF \equiv \triangle EDF$$

$$\text{よって } BF = EF$$

$\triangle BEF$ の 2 辺が等しいので

$\triangle BEF$ は二等辺三角形となる。

問2 $\frac{13}{2}\text{cm}$

解説

問1

(a)

$\angle BAD$ と $\angle ECD$ は錯角だからあてはまるのはア

(b)

$\angle ADB$ の対頂角は $\angle CDE$ だからあてはまるのはカ

(c)

$\triangle BDF \equiv \triangle EDF$ を導いて $BF = EF$ を示し $\triangle BEF$ が二等辺三角形であることをいう。

問2

$CG = CE = AB = 4\text{cm}$ だから四角形 $ACGB$ は長方形になる。

よって $\triangle BGF$ は $\angle BGF = 90^\circ$ の直角三角形で

3点 B, F, G を通る円は BF が直径になる。

$BF = x\text{ cm}$ とすると

問1より $EF = BF = x\text{ cm}$ だから $GF = EF - (CE + CG) = x - 8\text{cm}$

また $BG = AC = 12\text{cm}$

よって $\triangle BGF$ において

三平方の定理より

$$BF^2 = BG^2 + GF^2$$

$$x^2 = 12^2 + (x - 8)^2$$

$$x^2 = 144 + x^2 - 16x + 64$$

$$16x = 208$$

$$x = 13$$

したがって 3点 B, F, G を通る円の直径は 13cm だから

半径は $\frac{13}{2}\text{cm}$

【問 4】

図1～図3のように、 $\angle A$ が鋭角で、 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC があり、点 P は辺 BC 上にある。 P から辺 AB , AC に垂線をひき、 AB , AC との交点をそれぞれ D , E とする。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。ただし、 P が頂点 B , C 上にあるときは考えないものとする。

(石川県 2018 年度)

問1 図1のように、 $BP=CP$ となる位置に点 P がある。

$AB=5\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$ であるとき、 AP の長さを求めなさい。

図1

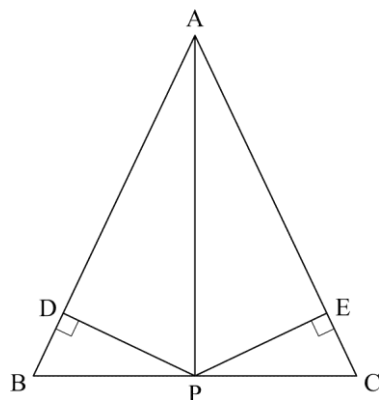


図2

問2 図2のように、 $\angle PAB=16^\circ$ となる位置に点 P がある。

線分 DE と AP の交点を Q とすると、 $\angle AQE$ の大きさが 71° であった。

このとき、 $\angle EAQ$ の大きさを求めなさい。

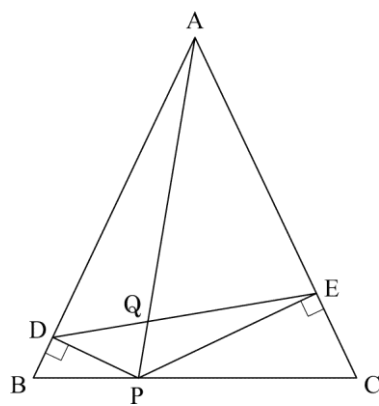


図3

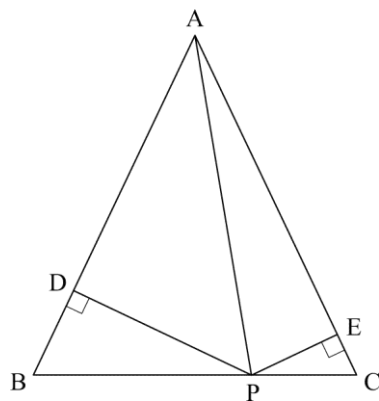
問3 点 P が辺 BC 上のどの位置にあっても、 $PD+PE$ の長さは一定である。このことが成り立つことの証明を完成させなさい。

[証明]

頂点 B から辺 AC に垂線をひき、 AC との交点を F とする。

また、点 P から BF に垂線をひき、 BF との交点を G とする。

[証明の続き]



解答欄

問1	cm
問2	度
問3	〔証明の続き〕

解答

問1 $\sqrt{21}\text{cm}$

問2 35 度

問3

〔証明の続き〕

四角形 P E F G は長方形である。…①

よって $PE = GF$ …②

また $\triangle DPB$ と $\triangle GBP$ において

BP は共通

$\angle PDB = \angle BGP = 90^\circ$

$AB = AC$ より $\angle DBP = \angle ACP$

①より $GP \parallel AC$ なので $\angle ACP = \angle GPB$

よって $\angle DBP = \angle GPB$

直角三角形で斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので

$\triangle DPB \equiv \triangle GBP$

ゆえに $DP = GB$ …③

②, ③より

$PD + PE = BG + GF = BF$ となり

点 P が辺 BC のどの位置にあっても $PD + PE$ の長さは一定である。

解説

問1

$\triangle ABP$ について

三平方の定理より $AP^2 = AB^2 - BP^2 = 25 - 4 = 21$

$AP > 0$ より

$AP = \sqrt{21}\text{cm}$

問2

$\angle ADP = \angle AEP = 90^\circ$ だから

円周角の定理の逆より点 D, E は AP を直径とする円周上にある。

円周角の定理より $\angle PED = \angle PAD = 16^\circ$

よって $\angle AEQ = 180^\circ - 90^\circ - 16^\circ = 74^\circ$ だから $\angle EAQ = 180^\circ - 71^\circ - 74^\circ = 35^\circ$

問3

四角形 P E F G は長方形だから $PE = GF$ …①

$\triangle BPD$ と $\triangle PBG$ において

共通な辺より $BP = PB$ …②

仮定より

$\angle BDP = \angle PGB = 90^\circ$ …③

$GP \parallel AC$ より平行線の同位角は等しいから

$\angle GPB = \angle ACB$ …④

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから

$\angle DBP = \angle ACB$ …⑤

④, ⑤より

$\angle DBP = \angle GPB$ …⑥

よって②, ③, ⑥より

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$\triangle BPD \equiv \triangle PBG$

合同な図形の対応する辺の長さは等しいから

$PD = BG$ …⑦

①, ⑦より

$PD + PE = BG + GF = BF$ となるから

点 P が辺 BC 上のどの位置にあっても $PD + PE$ の長さは一定である。

【問 5】

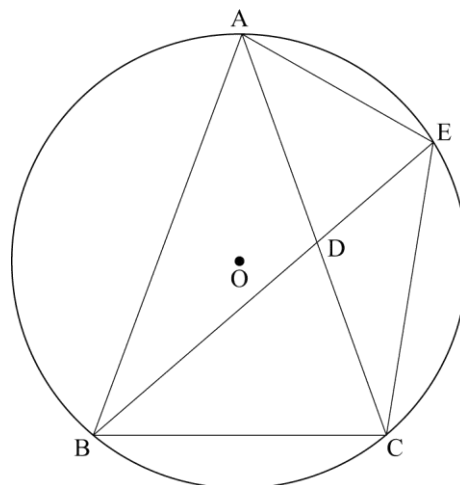
図において、3 点 A , B , C は円 O の円周上の点であり、 $AB=AC$ である。 AC 上に $BC=BD$ となる点 D をとり、 BD の延長と円 O との交点を E とする。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(静岡県 2018 年度)

問1 $CB=CE$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=6\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$ のとき、 DE の長さを求めなさい。



解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle BDC$ で

$AB=AC$ より $\triangle ABC$ は二等辺三角形だから

$$\angle ABC = \angle BCD \cdots \textcircled{1}$$

$BC=BD$ より $\triangle BDC$ は二等辺三角形だから

$$\angle BCD = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle ABC = \angle BDC \cdots \textcircled{3}$$

また $\angle ACB = \angle BCD$ (共通) $\cdots \textcircled{4}$

③, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから,

$$\triangle ABC \sim \triangle BDC$$

相似な三角形の対応する角の大きさは等しいから

$$\angle BAC = \angle DBC \cdots \textcircled{5}$$

$\widehat{BC}$ の円周角は等しいから

$$\angle BAC = \angle BEC \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より $\angle DBC = \angle BEC$ だから

$\triangle BCE$ は二等辺三角形である。

よって $CB=CE$

問2 $\frac{20}{9}\text{cm}$

解説

問1

$\triangle ABC$ と $\triangle BDC$ において

$$\angle ACB = \angle BCD \cdots \textcircled{1}$$

仮定より $AB=AC$, $BC=BD$ だから $\angle ABC = \angle ACB$, $\angle BDC = \angle BCD$

よって $\angle ABC = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \sim \triangle BDC$

相似な三角形の対応する角は等しいから $\angle BAC = \angle DBC \cdots \textcircled{3}$

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから $\angle CEB = \angle BAC \cdots \textcircled{4}$

③, ④より $\angle CEB = \angle CBE$ だから $\triangle CBE$ は二等辺三角形である。

よって $CB=CE$

(別解)

三角形で 2組の角が等しければ残りの角も等しいから三角形の相似を言わないで

$\angle BAC = \angle DBC$ を導いてもよい。

問2

$\triangle ABC \sim \triangle BDC$ より

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$$BC:DC=AB:BD=6:4=3:2 \quad 3DC=2BC \quad DC=\frac{2}{3}BC=\frac{8}{3}\text{cm}$$

$$\text{よって } AD=AC-CD=6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}\text{cm}$$

$\triangle AED$ と $\triangle BCD$ において

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから $\angle AEB = \angle ACB \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいから $\angle ADE = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$

①, ②より $\triangle AED \sim \triangle BCD$

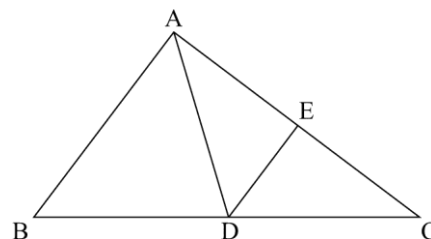
$$\text{よって } DE:DC=AD:BD=\frac{10}{3}:4 \quad 4DE=\frac{10}{3}DC$$

$$DE=\frac{5}{6}DC=\frac{5}{6}\times\frac{8}{3}=\frac{20}{9}\text{cm}$$

【問 6】

$AB=3\text{ cm}$, $BC=5\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ がある。辺 BC の中点を D , $\angle ADC$ の二等分線と辺 AC との交点を E とする。 $\angle ADB=2\angle ACD$ のとき, 次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2018 年度)



問1 ある生徒が, $\angle BAC=90^\circ$ であることを次のように証明した。 $\boxed{(i)}$ ～ $\boxed{(iii)}$ にあてはまるものを, あとのア～ケからそれぞれ 1 つ選んでその符号を書き, この証明を完成させなさい。

<証明>

点 D が辺 BC の中点だから, $BD=DC$ ……①

仮定から, $\angle ADB=2\angle ACD$ ……②

$\triangle CAD$ において, 内角と外角の性質から, $\angle ADB=\angle ACD+\angle \boxed{(i)}$ ……③

②, ③より, $\angle ACD=\angle \boxed{(i)}$

よって, $\triangle \boxed{(i)}$ は二等辺三角形である。

二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に 2 等分するから,

$\angle DEC=90^\circ$ ……④, $AE=EC$ ……⑤

①, ⑤より, $\triangle ABC$ において, 点 D, E が, それぞれ辺 BC, AC の中点であるから,

$\boxed{(ii)}$ により, $AB \parallel ED$

平行線の $\boxed{(iii)}$ は等しいので,

$\angle BAC=\angle DEC$ ……⑥

したがって, ④, ⑥より, $\angle BAC=90^\circ$

ア $\angle BAD$

イ $\angle CAD$

ウ $\angle CDE$

エ 中点連結定理

オ 三平方の定理

カ 円周角の定理

キ 対頂角

ク 錯角

ケ 同位角

問2 辺 AC の長さは何 cm か, 求めなさい。

問3 点 B から線分 AD に垂線 BF をひき, 直線 BF 上に $BF=FG$ となるように点 B とは異なる点 G をとる。

(1) 線分 BG の長さは何 cm か, 求めなさい。

(2) $\triangle CDG$ の面積は何 cm^2 か, 求めなさい。

解答欄

問1	(i)	
	(ii)	
	(iii)	
問2	cm	
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

(i) イ

(ii) エ

(iii) ケ

問2 4cm

問3

(1) $\frac{24}{5}$ cm

(2) $\frac{42}{25}$ cm²

解説

問1

点 D が辺 BC の中点だから $BD=DC$ …①

仮定から $\angle ADB=2\angle ACD$ …②

$\triangle CAD$ において内角と外角の性質から $\angle ADB=\angle ACD+\angle CAD$ …③

②, ③より $2\angle ACD=\angle ACD+\angle CAD$ $\angle ACD=\angle CAD$

よって 2 つの角が等しいので $\triangle CAD$ は $DA=DC$, $\angle ADC$ が頂角の二等辺三角形である。

二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に 2 等分するから

$\angle DEC=90^\circ$ …④

$AE=EC$ …⑤

①, ⑤より $\triangle ABC$ において点 D, E がそれぞれ辺 BC, AC の中点であるから

中点連結定理により $AB\parallel ED$

平行線の同位角は等しいので $\angle BAC=\angle DEC$ …⑥

したがって, ④, ⑥より $\angle BAC=90^\circ$

問2

$\triangle ABC$ は, $AB=3$ cm, $BC=5$ cm, $\angle BAC=90^\circ$ の直角三角形だから

三平方の定理より $AC=\sqrt{5^2-3^2}=4$ cm

問3

(1)

$\triangle ABF$ と $\triangle DCE$ において

仮定より $\angle AFB=\angle DEC$ …⑦

$\angle DAC=\angle DCA$, $\angle BAF=90^\circ-\angle DAC$, $\angle CDE=90^\circ-\angle DCA$ より $\angle BAF=\angle CDE$ …⑧

⑦, ⑧より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF\sim\triangle DCE$

よって $AB:DC=BF:CE$ $3:\frac{5}{2}=BF:2$ $BF=\frac{12}{5}$ cm

したがって $BG=2BF=\frac{24}{5}$ cm

(2)

$\triangle BCG$ で, $BD=DC$, $BF=FG$ だから

中点連結定理より $FD\parallel GC$, $GC=2FD$ $\angle BGC=\angle BFD=90^\circ$

(1)より $\triangle ABF\sim\triangle DCE$ だから $AF:DE=AB:DC$

$$AF:\frac{3}{2}=3:\frac{5}{2} \quad AF=\frac{3}{2}\times 3\div\frac{5}{2}=\frac{9}{5}\text{cm}$$

$$AD=\frac{5}{2}\text{cm} \text{ だから } FD=AD-AF=\frac{5}{2}-\frac{9}{5}=\frac{7}{10}\text{cm}$$

$$\text{よって } GC=2\times\frac{7}{10}=\frac{7}{5}\text{cm}$$

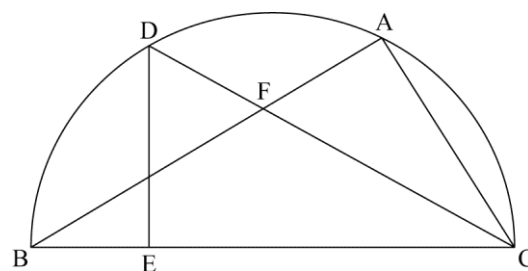
$$\text{したがって } \triangle BCG=\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}\times\frac{24}{5}=\frac{84}{25}\text{ cm}^2 \text{ だから}$$

$$BD=DC \text{ より } \triangle CDG=\frac{1}{2}\triangle BCG=\frac{1}{2}\times\frac{84}{25}=\frac{42}{25}\text{ cm}^2$$

【問 7】

図のように、 $\triangle ABC$ があり、点 A は BC を直径とする半円の $\widehat{BC}$ 上の点です。 $\widehat{AB}$ 上に $\widehat{AD} = \widehat{DB}$ となるような点 D をとり、点 D から直径 BC に垂線 DE を引きます。また、辺 AB と線分 CD との交点を F とします。このとき、 $\angle AFC = \angle CDE$ であることを証明しなさい。

(広島県 2018 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

等しい弧に対する円周角は等しいから

$$\angle ACD = \angle BCD \cdots \text{①}$$

半円の弧に対する円周角は直角であるから

$$\angle BAC = 90^\circ \cdots \text{②}$$

$$\text{②より } \angle AFC = 90^\circ - \angle ACD \cdots \text{③}$$

$\angle CED = 90^\circ$ であるから

$$\angle CDE = 90^\circ - \angle BCD \cdots \text{④}$$

①, ③, ④より

$$\angle AFC = \angle CDE$$

解説

等しい弧に対する円周角が等しいことや、半円の弧に対する円周角が直角であることなどを利用する。

$\triangle AFC$ と $\triangle EDC$ が相似であることから導いてもよい。

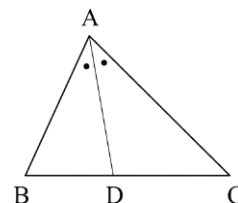
【問 8】

さくらさんたちは、次の【問題】について考えている。問1・問2に答えなさい。

(徳島県 2018 年度)

【問題】

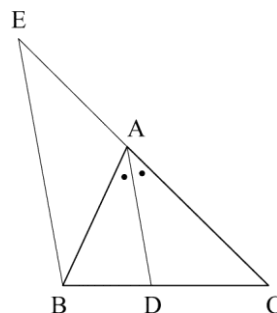
右の図のように、 $\triangle ABC$ において、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 $AB:AC=BD:DC$ が成り立つことを証明しなさい。



問1 さくらさんは、点 B を通り、 DA に平行な直線と、 CA を延長した直線との交点を E とし、 AE と AB の長さの關係に着目して、次のように証明した。【さくらさんの証明】の (ア)・(イ) にあてはまる角を、 ウ エ にはあてはまる言葉を、それぞれ書きなさい。ただし、 エ には三角形の名称を、 ウ にはその三角形となる根拠を書くこと。

【さくらさんの証明】

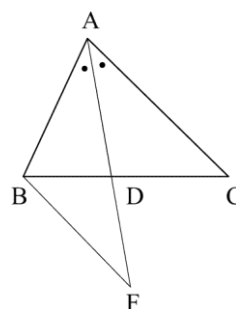
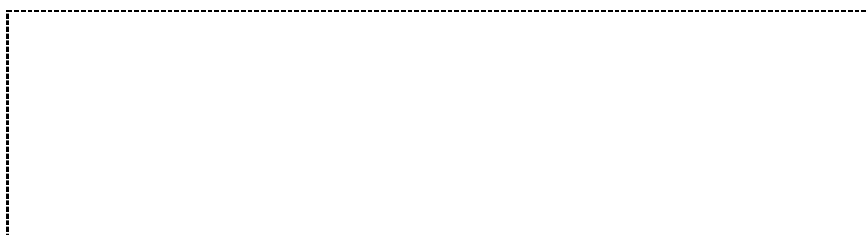
点 B を通り、 DA に平行な直線と、 CA を延長した直線との交点を E とする。
 $AD \parallel EB$ から、平行線の同位角は等しいので、
 $\angle CAD =$ (ア)
 また、平行線の錯角は等しいので、
 (イ) $= \angle ABE$
 仮定より、 $\angle CAD =$ (イ)
 したがって、(ア) $= \angle ABE$
 ウ から、 $\triangle ABE$ は エ となり、
 $AE = AB \cdots \textcircled{1}$
 $\triangle BCE$ で、 $AD \parallel EB$ から、 $EA:AC = BD:DC \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ から、 $AB:AC = BD:DC$



問2 さやかさんは、点 B を通り、 AC に平行な直線と、 AD を延長した直線との交点を F とし、相似な三角形の辺の比と AB と BF の長さの關係に着目して、 $AB:AC=BD:DC$ が成り立つことを証明した。 に証明の続きを書き、【さやかさんの証明】を完成させなさい。

【さやかさんの証明】

点 B を通り、 AC に平行な直線と、 AD を延長した直線との交点を F とする。
 $\triangle FBD$ と $\triangle ACD$ で、



解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
問2	点 B を通り, AC に平行な直線と, AD を延長した直線との交点を F とする。 $\triangle FBD$ と $\triangle ACD$ で,	

解答

問1

ア $\angle AEB$

イ $\angle DAB$

ウ 2つの角が等しい

エ 二等辺三角形

問2

点 B を通り, AC に平行な直線と, AD を延長した直線との交点を F とする。

$\triangle FBD$ と $\triangle ACD$ で,

対頂角は等しいので

$$\angle FDB = \angle ADC \cdots \textcircled{1}$$

$BF \parallel AC$ から

平行線の錯角は等しいので

$$\angle BFD = \angle CAD \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle FBD \sim \triangle ACD$$

相似な図形の対応する辺の比は等しいので

$$FB : AC = BD : CD \cdots \textcircled{3}$$

仮定より

$$\angle BAD = \angle CAD \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{4}$ から

$$\angle BFD = \angle BAD$$

2つの角が等しいから $\triangle BFA$ は二等辺三角形となり

$$BF = BA \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{5}$ から

$$AB : AC = BD : DC$$

解説

問1

平行線と角の関係や平行線と比の関係を使って証明する。

問2

相似な図形の対応する辺の比は等しいことを使って証明する。