

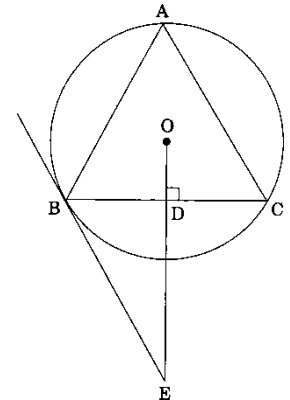
4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2002 年度出題】

【問 1】

図のように、円 O に内接する $\triangle ABC$ があります。円の中心 O から辺 BC に垂線をひき、辺 BC との交点を D とします。 OD の延長と、点 B における円 O の接線との交点を E とします。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2002 年度)



問1. $\angle ACB = 55^\circ$ のとき $\angle AOB$ の大きさを求めなさい。

問2. $\triangle ABC$ を正三角形とします。 $OD = 2 \text{ cm}$ のとき、 $\triangle OCD$ の面積を求めなさい。

問3. $\triangle OCD \sim \triangle BED$ を証明しなさい。

解答欄

問1	度
問2	cm^2
問3	証明

解答

問1 110 度

問2 $2\sqrt{3}\text{ cm}^2$

問3.

証明

$\triangle OCD$ と $\triangle BED$ において

$$\angle ODC = \angle BDE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

接線と弦のつくる角の定理から

$$\angle BAC = \angle EBD \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle OBD \equiv \triangle OCD$ から

$$\angle COD = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BAC \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle COD = \angle EBD \cdots \textcircled{4}$$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OCD \sim \triangle BED$

解説

問1

$\angle ACB$ は弧 AB に対する円周角で

$\angle AOB$ は弧 AB に対する中心角だから

$$\angle AOB = 2\angle ACB = 55^\circ \times 2 = 110^\circ$$

問2

$\triangle ABC$ は正三角形だから $\angle ACB = 60^\circ$

よって $\angle OCB$ は 30° で $\triangle OCD$ は 90° , 60° , 30° の直角三角形だから

$$CD = \sqrt{3} \quad OD = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって}\triangle OCD\text{の面積は}\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

問3.

$\triangle OCD$ と $\triangle BED$ において

$$\angle ODC = \angle BDE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は、その内部にある弧に対する円周角に等しいから

$$\angle BAC = \angle EBD \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle OBD \equiv \triangle OCD$ から

$$\angle COD = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BAC \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle COD = \angle EBD \cdots \textcircled{4}$$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいから

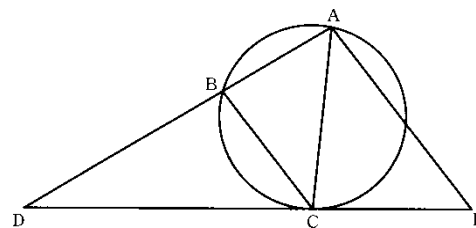
$\triangle OCD \sim \triangle BED$

【問 2】

図で、円周上に3点A, B, Cがあり, ABの延長とCにおける円の接線との交点をDとする。AをってBCに平行な直線を引き, 接線CDとの交点をEとする。

次のア, イに答えなさい。

(青森県 2002 年度)



ア. $\triangle ABC$ と相似な三角形を見つけ, 証明しなさい。

イ. $AE=6\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$ のとき, AC の長さを求めなさい。

解答欄

ア	相似な三角形…$\triangle ABC$ と <u> </u> 証明
イ	cm

解答

ア

相似な三角形… $\triangle ABC$ と $\triangle ECA$

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle ECA$ で

$BC \parallel AE$ より

$\angle ACB = \angle EAC$ (錯角が等しい) …①

接線と弦のつくる角の性質により

$\angle ABC = \angle ECA$ …②

①, ②により

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \sim \triangle ECA$

イ $2\sqrt{6}\text{ cm}$

解説

ア 相似な三角形 $\triangle ECA$

証明 $\triangle ABC$ と $\triangle ECA$ で $BC \parallel AE$ より $\angle ACB = \angle EAC$ (錯角が等しい) …①

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は, その内部にある弧に対する円周角に等しいから $\angle ABC = \angle ECA$ …②

①, ②より, 2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle ABC \sim \triangle ECA$

イ $\triangle ABC \sim \triangle ECA$ より $CB:AC = AC:EA$ $4:AC = AC:6$ から $AC^2 = 4 \times 6$ これを解いて $AC > 0$ より $AC = 2\sqrt{6}\text{ cm}$

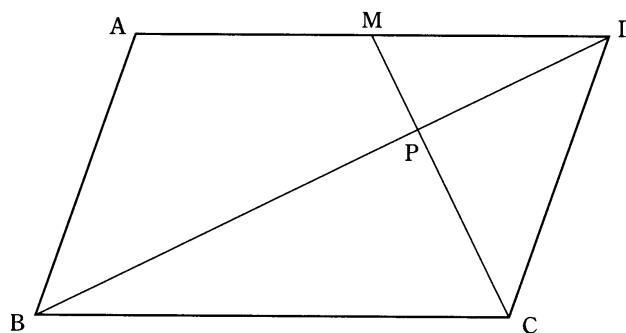
【問 3】

図のように、平行四辺形 $ABCD$ があり、辺 AD の中点を M 、対角線 BD と線分 CM の交点を P とします。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(岩手県 2002 年度)

(1) $\triangle PDM \sim \triangle PBC$ であることを証明しなさい。



(2) $\triangle PDM$ の面積が 3 cm^2 のとき、四角形 $ABCM$ の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	証明	
(2)		cm^2

解答

(1)

証明

$\triangle PDM$ と $\triangle PBC$ において

平行線の錯角は等しいから

$$\angle PMD = \angle PCB$$

対頂角は等しいから

$$\angle MPD = \angle CPB$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PDM \sim \triangle PBC$$

(2) 27cm^2

解説

(1)

証明

$\triangle PDM$ と $\triangle PBC$ において

平行線の錯角は等しいから

$$\angle PMD = \angle PCB \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから

$$\angle MPD = \angle CPB \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PDM \sim \triangle PBC$$

(2)

$\triangle PDM \sim \triangle PBC$ より

相似な三角形の辺の比は等しいから

$$MP:CP = DM:BC = 1:2$$

$MP:MC = 1:3$ だから

$$\triangle MDC = 3 \times 3 = 9$$

$$\text{また, } \triangle MDC = \frac{1}{2} \triangle ADC = \frac{1}{4} \square ABCD$$

(四角形 $ABCM$ の面積)

$$= \square ABCD - \triangle MDC$$

$$= 4\triangle MDC - \triangle MDC$$

$$= 3\triangle MDC$$

$$= 3 \times 9$$

$$= 27\text{cm}^2$$

【問 4】

図 I のように、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があり、点 A と点 C を結び

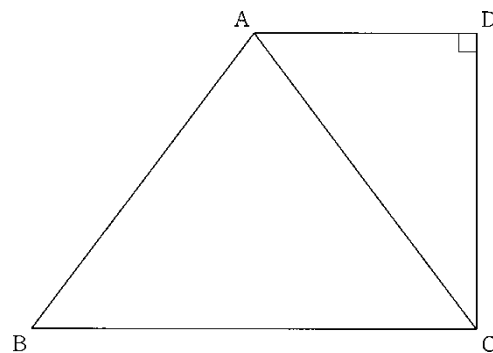
図 I

ます。 $AB=AC=5\text{ cm}$ 、 $AD=3\text{ cm}$ 、 $\angle ADC=90^\circ$ とします。

あとの1, 2の問いに答えなさい。

(宮城県 2002 年度)

1. 辺 DC の長さを求めなさい。

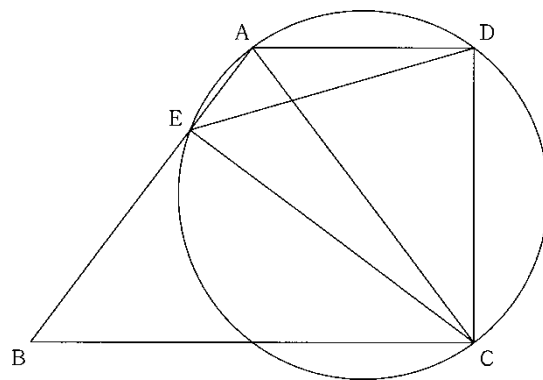


2. 図 II は、図 I において $\triangle DAC$ の外接円をかき辺 AB との 図 II

交点を E として点 E と点 C 、点 E と点 D を結んだもので

す。

- (1) $\triangle DAC \sim \triangle EBC$ であることを証明しなさい。



- (2) 線分 EB の長さを求めなさい。

- (3) $\triangle DEC$ の面積を求めなさい。

1	cm	
2	(1)	証明
	(2)	cm
	(3)	cm ²

解答

1. 4cm

2.

(1)

証明

$\triangle DAC$ と $\triangle EBC$ において

四角形AECDは円に内接することから

$$\angle ADC = \angle BEC \cdots \textcircled{1}$$

また平行線の錯角は等しいから

$$\angle DAC = \angle ACB$$

二等辺三角形ABCの底角は等しいから

$$\angle ABC = \angle ACB$$

$$\text{したがって} \angle DAC = \angle EBC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle DAC \sim \triangle EBC$$

$$(2) \quad \frac{18}{5} \text{ cm}$$

$$(3) \quad \frac{192}{25} \text{ cm}^2$$

解説

1

$$\triangle ACD \text{において三平方の定理より} DC^2 = AC^2 - AD^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$DC > 0 \text{より} DC = 4$$

2

(1)

$\triangle DAC$ と $\triangle EBC$ において

四角形AECDは円に内接しているので

$$\angle ADC = \angle BEC \cdots \textcircled{1}$$

また平行線の錯角は等しいので $\angle DAC = \angle ACB \cdots \text{ア}$

二等辺三角形の底角は等しいので $\angle ABC = \angle ACB \cdots \text{イ}$

ア, イより $\angle DAC = \angle EBC \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle DAC \sim \triangle EBC$

(2)

AからBCに垂線をおろすと $BC = 2AD = 2 \times 3 = 6$ となる。

$$\triangle DAC \sim \triangle EBC \text{より} DA:EB = AC:BC \quad DA \times BC = EB \times AC$$

$$3 \times 6 = EB \times 5 \quad EB = \frac{18}{5} \text{ cm}$$

(3)

EからDCに垂線 EF をひきEFとACとの交点をGとおく。

$\triangle AEG \sim \triangle ABC$ より

$$AE:AB = EG:BC$$

$$AB \times EG = AE \times BC$$

$$5 \times EG = (5 - \frac{18}{5}) \times 6 \quad EG = \frac{42}{25}$$

$$CG = AC - AG = AC - AE = 5 - (5 - \frac{18}{5}) = \frac{18}{5}$$

$$\triangle CFG \sim \triangle CDA \text{より} CG:CA = FG:DA \quad CA \times FG = CG \times DA$$

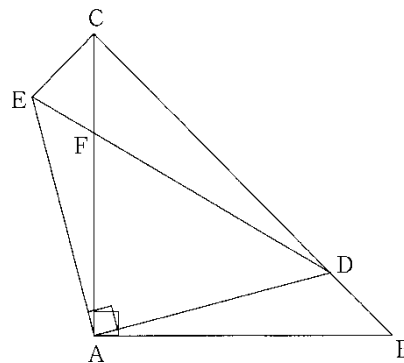
$$5 \times FG = \frac{18}{5} \times 3 \quad FG = \frac{54}{25} \quad EF = EG + GF = \frac{42}{25} + \frac{54}{25} = \frac{96}{25}$$

$$\triangle DEC = \frac{1}{2} \times CD \times EF = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{96}{25} = \frac{192}{25} \text{ cm}^2$$

【問 5】

図の $\triangle ABC$ は、 $AB=AC=4\text{ cm}$ の直角二等辺三角形である。辺 BC 上に点 D をとり、図のように $AD=AE$ となる直角二等辺三角形 ADE をつくり、 DE と AC との交点を F とする。あとの問いに答えなさい。

(山形県 2002 年度)



1. $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ が合同であることを証明しなさい。

2. $\triangle ABD$ と $\triangle DCF$ が相似であることを、下のように証明した。 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ には、それぞれあてはまる数字や記号を、 $\boxed{\text{イ}}$ には、あてはまる言葉を書きなさい。

<証明>

$\triangle ABD$ と $\triangle DCF$ において

仮定より

$$\angle ABD = \angle DCF = 45^\circ \quad \cdots \text{①}$$

1の結果より

$$\angle ACE = \boxed{\text{ア}}^\circ \quad \cdots \text{②}$$

①, ②より

$$\angle ECD = \angle DAE = 90^\circ$$

よって、 $\angle ECD + \angle DAE = 180^\circ$ だから

四角形 $ADCE$ は $\boxed{\text{イ}}$ 。 $\cdots \text{③}$

③より

$$\angle EAC = \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots \text{④}$$

1の結果と④より

$$\angle DAB = \angle FDC \quad \cdots \text{⑤}$$

①, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABD \sim \triangle DCF$$

3. 点 D が辺 BC 上を動くと、 $\triangle ABD$ と $\triangle DCF$ が合同になるときがある。このときの $\triangle ADF$ について、次の(1), (2)に答えなさい。

- (1) D から AC に垂線をひき AC との交点を H とするとき、 DH の長さを求めなさい。

- (2) $\triangle ADF$ の面積を求めなさい。

解答欄

1	証明		
2	ア	イ	
		ウ	
3	(1)	cm	
	(2)	cm ²	

解答

1.

証明

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において

仮定より

$$AB=AC\cdots\textcircled{1}$$

$$AD=AE\cdots\textcircled{2}$$

$$\text{次に}\angle BAD=90^\circ-\angle DAC$$

$$\angle CAE=90^\circ-\angle DAC$$

$$\text{よって}\angle BAD=\angle CAE\cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABD\equiv\triangle ACE$$

2.

ア 45 イ 円に内接する ウ $\angle EDC$

3

$$(1) 2\sqrt{2}\text{ cm} \qquad (2) (8\sqrt{2}-8)\text{ cm}^2$$

解説

1

証明

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において

仮定より $AB=AC\cdots\textcircled{1}$

$$AD=AE\cdots\textcircled{2}$$

$$\text{次に}\angle BAD=90^\circ-\angle DAC \quad \angle CAE=90^\circ-\angle DAC$$

$$\text{よって}\angle BAD=\angle CAE\cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABD\equiv\triangle ACE$$

2

ア $\triangle ABD\equiv\triangle ACE$ より対応する角の大きさが等しいから, $\angle ACE=\angle ABD=45^\circ$

イ 円に内接する四角形の向かい合う角の和は 180° であるから, 四角形ADCEは円に内接する四角形である。

ウ 四角形ADCEは, 円に内接しており, $\widehat{CE}$ が共通だから, $\angle EAC=\angle EDC$

3

(1)

$\triangle HDC\sim\triangle ABC$ だから

$$DH:BA=DC:BC$$

$$\triangle ABD\equiv\triangle DCF\text{より}DC=AB=4$$

$$\text{よって}DH:4=4:4\sqrt{2}$$

$$DH=2\sqrt{2}\text{ cm}$$

(2)

$$FC=DB=BC-DC=4\sqrt{2}-4$$

$$AF=AC-FC=8-4\sqrt{2}$$

$$\triangle ADF=\frac{1}{2}\times AF\times DH$$

$$=\frac{1}{2}\times(8-4\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}$$

$$=8\sqrt{2}-8\text{ cm}^2$$

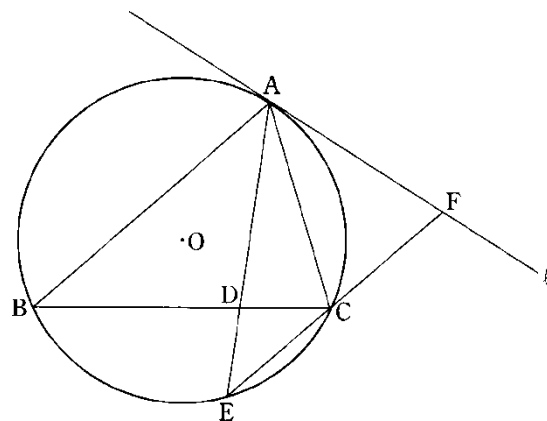
【問 6】

図のように、円 O に内接する $\triangle ABC$ と A における接線 ℓ がある。ただし、 $AC < BC$ とする。

辺 BC 上に $AD = BD$ となるように点 D をとり、 AD の延長と円 O との交点を E 、 EC の延長と ℓ との交点を F とする。

このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle AEF$ が相似であることを証明しなさい。

(福島県 2002 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle AEF$ において

円周角の定理から

$$\angle ABC = \angle AEF \cdots ①$$

また $\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから

$$\angle BAD = \angle ABD \cdots ②$$

接線と弦のつくる角の定理から

$$\angle ABC = \angle CAF \cdots ③$$

②, ③から

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$$

$$= \angle ABD + \angle CAD$$

$$= \angle CAF + \angle CAD$$

$$= \angle EAF$$

$$\text{したがって} \angle BAC = \angle EAF \cdots ④$$

①, ④から

2角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle AEF$$

解説

例1

$\triangle ABC$ と $\triangle AEF$ において

$$\text{円周角の定理から} \angle ABC = \angle AEF \cdots ①$$

また, $\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから

$$\angle BAD = \angle ABD \cdots ②$$

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は

その角の内部にある弧に対する円周角に等しいから

$$\angle ABC = \angle CAF \cdots ③$$

$$\text{②, ③から} \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \angle ABD + \angle CAD = \angle CAF + \angle CAD = \angle EAF$$

$$\text{したがって} \angle BAC = \angle EAF \cdots ④$$

①, ④から

2角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle AEF$$

例2

円周角の定理から

$$\angle ABC = \angle AEC \cdots ①$$

$\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから

$$\angle ABC = \angle BAE \cdots ②$$

①, ②から錯角が等しいから $AB \parallel FE$

したがって ℓ 上にAについてFと反対側に点Gをとれば, 同位角が等しいから

$$\angle BAG = \angle AFE \cdots ③$$

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は

その角の内部にある弧に対する円周角に等しいから

$$\angle BAG = \angle ACB \cdots ④$$

③, ④から

$$\angle ACB = \angle AFE \cdots ⑤$$

①, ⑤から

2角がそれぞれ等しいから

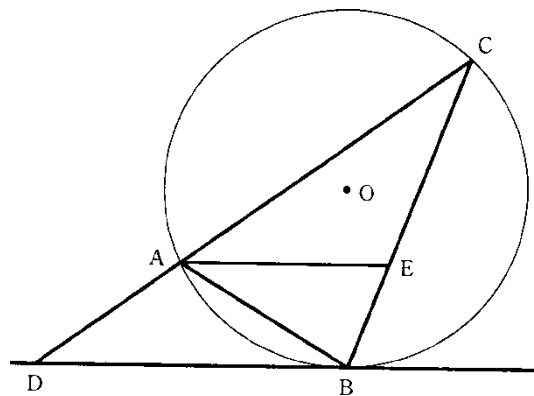
$$\triangle ABC \sim \triangle AEF$$

【問 7】

図において、 $\triangle ABC$ は円 O に内接し、辺 BC は辺 AB よりも長い。いま、点 B における円 O の接線と辺 CA の延長との交点を D とする。また、辺 BC 上に点 E を $AE \parallel DB$ となるようにとる。

このとき、 $\triangle ABC \sim \triangle EBA$ であることを証明しなさい。

(茨城県 2002 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle EBA$ において

共通な角だから

$$\angle ABC = \angle EBA \cdots ①$$

円の接線と弦とがはさむ角の性質から

$$\angle ACB = \angle ABD \cdots ②$$

平行線の錯角だから

$$\angle EAB = \angle ABD \cdots ③$$

②, ③から

$$\angle ACB = \angle EAB \cdots ④$$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle EBA$$

解説

$\triangle ABC$ と $\triangle EBA$ において共通な角だから

$$\angle ABC = \angle EBA \cdots ①$$

円の接線と弦とがはさむ角の性質から

$$\angle ACB = \angle ABD \cdots ②$$

平行線の錯角だから

$$\angle EAB = \angle ABD \cdots ③$$

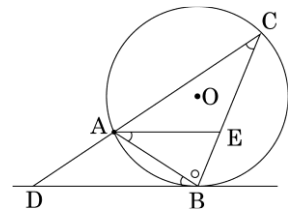
②, ③から

$$\angle ACB = \angle EAB \cdots ④$$

①, ④から

対応する2角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle EBA$$



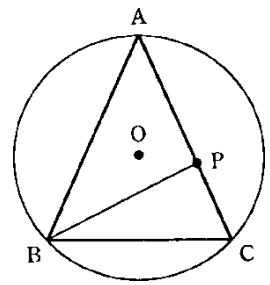
【問 8】

図1で、 $\triangle ABC$ は円 O に内接する $AB=AC$ の二等辺三角形である。点 P は、 $\triangle ABC$ の辺 AC 上にある点で、頂点 A, C のいずれにも一致しない。頂点 B と点 P を結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2002 年度)

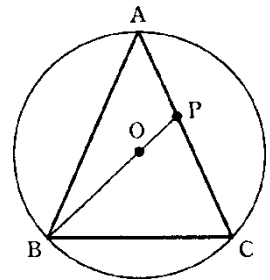
図1



問1. 図2は、図1において、線分 BP が円 O の中心を通る場合を表している。

$\angle ABP = 23^\circ$ のとき、 $\angle ABC$ の大きさは何度か。

図2

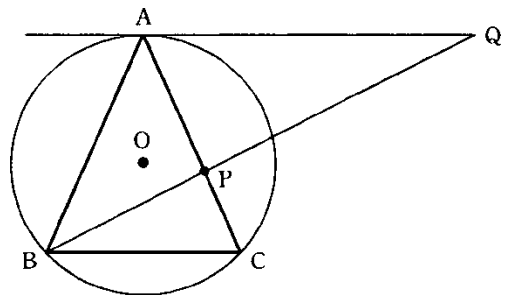


問2. 図3は、図1において、点 A における円 O の接線と線分 BP を P の方向に延ばした直線との交点を Q とした場合を表している。

次の①、②に答えよ。

① $\triangle PAQ \sim \triangle PCB$ であることを証明せよ。

図3



② $AB=5\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$, $AP=3\text{ cm}$ のとき、辺 AQ の長さは何 cm か。

解答欄

問1		度	
問2	①	証明 △PAQと△PCBにおいて,	
	②	cm	

解答

問1 67度

問2

①

証明

$\triangle PAQ$ と $\triangle PCB$ において

対頂角は等しいから

$$\angle APQ = \angle CPB \cdots (1)$$

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は

その角の内部にある弧に対する円周角に等しいから

$$\angle CAQ = \angle ABC$$

$$\angle CAQ = \angle PAQ \text{ だから}$$

$$\angle PAQ = \angle ABC \cdots (2)$$

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから

$$\angle ABC = \angle ACB = \angle PCB \cdots (3)$$

(2), (3)より

$$\angle PAQ = \angle PCB \cdots (4)$$

(1), (4)より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PAQ \sim \triangle PCB$$

② 6cm

解説

問1.

3辺がそれぞれ等しいことから

$\triangle OAB \equiv \triangle OAC$ となり $\angle BAO = \angle CAO$ だから

AO は二等辺三角形 ABC の頂角の二等分線である。

よって AO の延長と BC との交点を D とすると $AD \perp BC$

$OA=OB$ より

$$\angle OAB = \angle OBA = 23^\circ$$

$$\triangle ABD \text{ の内角の和から } \angle ABD = 180^\circ - 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$$

問2

①

証明

$\triangle PAQ$ と $\triangle PCB$ で

$$\text{対頂角は等しいから } \angle APQ = \angle CPB \cdots (1)$$

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は

その角の内部にある弧に対する円周角に等しいから

$$\angle CAQ = \angle ABC$$

$$\angle CAQ = \angle PAQ \text{ だから } \angle PAQ = \angle ABC \cdots (2)$$

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから

$$\angle ABC = \angle ACB = \angle PCB \cdots (3)$$

(2), (3)より

$$\angle PAQ = \angle PCB \cdots (4)$$

(1), (4)より

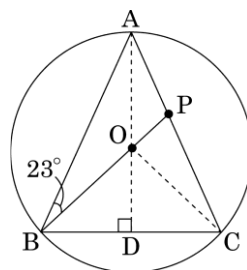
2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle PAQ \sim \triangle PCB$

②

$$\text{①より, } AP: AQ = CP: CB$$

$$AC = AB = 5\text{cm, } CP = AC - AP = 5 - 3 = 2\text{cm} \text{ だから}$$

$$3: AQ = 2: 4 \quad 2AQ = 12 \quad AQ = 6\text{cm}$$

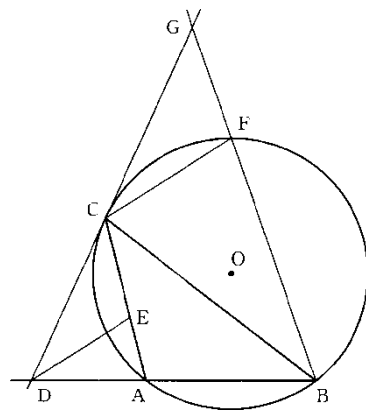


【問 9】

図のように、 $\angle A$ が鈍角の三角形 ABC が円 O に内接している。いま、点 C における円 O の接線と線分 BA の延長との交点を D とし、 $\angle ADC$ の二等分線と線分 AC との交点を E とする。また、点 F を円 O の周上に、 $DE \parallel CF$ となるようにとり、直線 CD と線分 BF の延長との交点を G とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2002 年度)



(ア) 三角形 ADE と三角形 FBC が相似であることを次のように証明した。空欄にあてはまることがらとして最も適するものを、 $\boxed{\text{(あ)}}$ ～ $\boxed{\text{(う)}}$ には【A群】から、 $\boxed{\text{(a)}}$ ～ $\boxed{\text{(c)}}$ には【B群】から、それぞれ1つずつ選び、その番号を書きなさい。

証明

$\triangle ADE$ と $\triangle FBC$ において、

まず、線分 DE は $\angle ADC$ の二等分線であるから、

$\boxed{a}$ …①

また、平行線の同位角は等しいから、

$\boxed{b}$ …②

①, ②より、 $\angle ADE = \angle GCF$ …③

さらに、 $\boxed{\text{あ}}$ から、

$\boxed{c}$ …④

③, ④より、 $\angle ADE = \angle FBC$ …⑤

次に、 $\boxed{\text{い}}$ から、

$\angle DAE = \angle BFC$ …⑥

⑤, ⑥より、 $\boxed{\text{う}}$ から、

$\triangle ADE \sim \triangle FBC$

【A群】	【B群】
1. 四角形 $ABFC$ は円 O に内接している	1. $\angle ABC = \angle ACD$
2. 平行線の錯角は等しい	2. $\angle ADE = \angle CDE$
3. 直線 CG は円 O の接線である	3. $\angle AED = \angle FCB$
4. 3組の辺の比が等しい	4. $\angle BAC = \angle CFG$
5. 2組の辺の比が等しく、その間の角が等しい	5. $\angle CDE = \angle GCF$
6. 2組の角がそれぞれ等しい	6. $\angle GCF = \angle FBC$

(イ) $\angle ABC = 38^\circ$, $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ のとき、 $\angle CGF$ の大きさを求めなさい。

解答欄

(ア)	(a)	(b)	(c)
	(あ)	(い)	(う)
(イ)	$\angle CGF = \quad \circ$		

解答

(ア)

$a \ 2 \quad b \ 5 \quad c \ 6$

あ 3 い 1 う 6

(イ) $\angle CGF = 43^\circ$

解説

(ア)

$\triangle ADE$ と $\triangle FBC$ において

まず, 線分 DE は $\angle ADC$ の二等分線であるから

$$\angle ADE = \angle CDE \cdots \text{①}$$

また, 平行線の同位角は等しいから

$$\angle CDE = \angle GCF \cdots \text{②}$$

①, ②より

$$\angle ADE = \angle GCF \cdots \text{③}$$

さらに, 直線 CG は円 O の接線であるから

$$\angle GCF = \angle FBC \cdots \text{④}$$

③, ④より

$$\angle ADE = \angle FBC \cdots \text{⑤}$$

次に, 四角形 $ABFC$ は円 O に内接しているから

$$\angle DAE = \angle BFC \cdots \text{⑥}$$

⑤, ⑥より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADE \sim \triangle FBC$$

(イ)

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} \text{より } \angle ACB = \angle ABC = 38^\circ$$

$$\text{よって } \angle BFC = \angle DAE = \angle ACB + \angle ABC = 76^\circ$$

いま $\angle ADE = \angle CDE = \angle GCF = \angle FBC = x$ とおくと

$$\triangle CGF \text{で } \angle CGF = \angle BFC - \angle GCF = 76^\circ - x$$

$\triangle GDB$ の内角の和は 180° だから

$$(76^\circ - x) + (x + 38^\circ) + 2x = 180^\circ$$

$$2x = 66^\circ$$

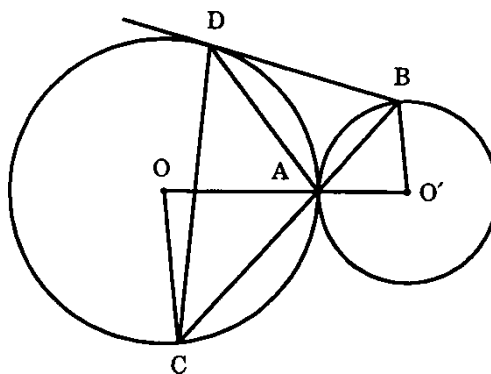
$$x = 33^\circ$$

$$\text{よって } \angle CGF = 76^\circ - 33^\circ = 43^\circ$$

【問 10】

図のように、半径 5 cm の円 O 上の点 A において、半径 3 cm の円 O' が接している。円 O' 上に $AB=4$ cm となる点 B をとり、線分 BA の延長と円 O の交点を C 、点 B から円 O に接線を引いたとき、その接点を D とする。このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(新潟県 2002 年度)



(1) $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ であることを証明しなさい。

(2) 線分 BD の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

証明

$\triangle ABD$ と $\triangle DBC$ において

$\angle ABD = \angle DBC \cdots \text{ア}$

接線とその接点を通る弦のつくる角は

その角の内部にある弧に対する円周角に等しいので

$\angle BDA = \angle BCD \cdots \text{イ}$

ア, イより

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABD \sim \triangle DBC$

(2) $\frac{8\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$

解説

(1)

$\triangle ABD$ と $\triangle DBC$ において

$\angle ABD = \angle DBC \cdots \text{ア}$

接線とその接点を通る弦のつくる角は, その角の内部にある弧に対する円周角に等しいので

$\angle BDA = \angle BCD \cdots \text{イ}$

ア, イより

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABD \sim \triangle DBC$

(2)

$\triangle OCA$ と $\triangle O'BA$ はともに二等辺三角形で

$\angle OAC = \angle O'AB$ より

$\triangle OCA \sim \triangle O'BA$

よって $CA:BA = OC:O'B$

$CA:4 = 5:3$

したがって $CA = \frac{20}{3}$

(1)より $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ だから

$BD = x \text{ cm}$ とすると

$BD:BC = AB:DB$ より

$x:(4 + \frac{20}{3}) = 4:x$

$x^2 = \frac{128}{3}$

これを解くと

$x > 0$ より

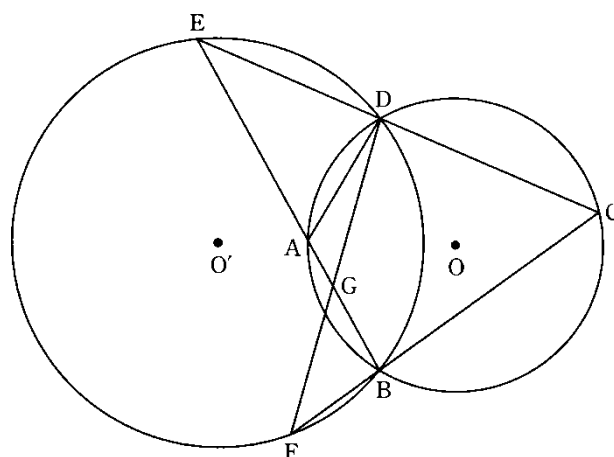
$x = \frac{8\sqrt{6}}{3}$

【問 11】

図は、円 O に内接する四角形 $ABCD$ の辺 BA の延長と辺 CD の延長の交点を E とし、3点 B, D, E を通る円 O' をかき、辺 CB の延長と円 O' の交点を F 、弦 DF と弦 AB の交点を G としたものである。

この図で、 $\triangle EBC$ と相似な三角形を2つ見つけなさい。
そして、その見つけた2つの三角形が相似であることを証明しなさい。

(山梨県 2002 年度)



解答欄

$\triangle EBC$ と相似な三角形 … $\triangle$ _____ と $\triangle$ _____

証明

解答

$\triangle EDA$ と $\triangle FDC$

証明

$\triangle EDA$ と $\triangle FDC$ において

1つの弧に対する円周角は等しいから

$$\angle AED = \angle CFD \cdots \textcircled{1}$$

仮定より

四角形 $ABCD$ は円 O に内接しているから

$$\angle EAD = \angle FCD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle EDA \sim \triangle FDC$

解説

$\triangle EBC$ と $\triangle EDA$ において

共通な角だから $\angle BEC = \angle DEA \cdots \textcircled{1}$

仮定より

四角形 $ABCD$ は円 O に内接しているから

$$\angle BCE = \angle DAE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle EBC \sim \triangle EDA$

$\triangle EBC$ と $\triangle FDC$ において

共通な角だから

$$\angle BCE = \angle DCF \cdots \textcircled{1}$$

1つの弧に対する円周角は等しいから $\widehat{BD}$ に対する円周角であることより

$$\angle BEC = \angle DFC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle EBC \sim \triangle FDC$

$\triangle EDA$ と $\triangle FDC$ において

1つの弧に対する円周角は等しいから

$\widehat{BD}$ に対する円周角であることより

$$\angle AED = \angle CFD \cdots \textcircled{1}$$

仮定より

四角形 $ABCD$ は円 O に内接しているから

$$\angle EAD = \angle FCD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

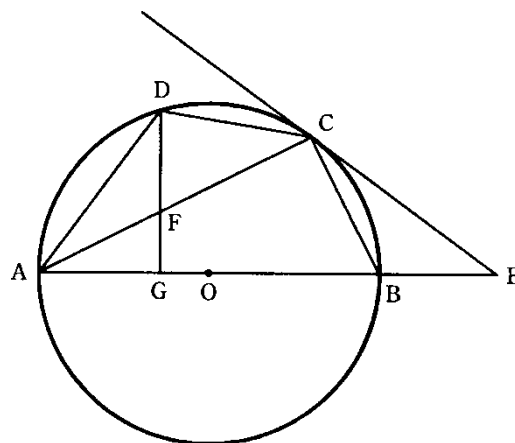
$\triangle EDA \sim \triangle FDC$

【問 12】

図において、四角形 $ABCD$ は円 O に内接する四角形であり、
 辺 AB は円 O の直径である。また、 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ である。点 C を接点
 とする円 O の接線と AB の延長との交点を E 、点 D から AB にひ
 いた垂線と AC 、 AB との交点をそれぞれ F 、 G とする。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(静岡県 2002 年度)



(1) $\triangle CBE \sim \triangle AFD$ であることを証明しなさい。

(2) $OA = 9 \text{ cm}$ 、 $\angle CEB = 34^\circ$ のとき、 $\widehat{BC}$ の長さを求めなさい。ただし、円周率は π とする。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1) 略

(2) $\frac{14}{5} \pi \text{ cm}$

解説

(2)

(1)より

$$\angle ADF = \angle CEB = 34^\circ$$

$\triangle AGD$ は $\angle G = 90^\circ$ の直角三角形だから

$$\angle DAG = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$$

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle DAG = \frac{1}{2} \times 56^\circ = 28^\circ$$

$$\text{したがって } \angle COB = 2 \angle CAB = 2 \times 28^\circ = 56^\circ$$

$\widehat{BC}$ に対する中心角は 56° ,

半径 9 cm より

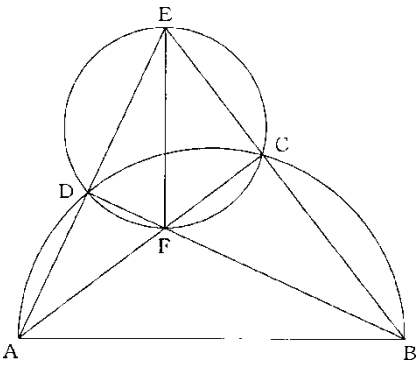
$\widehat{BC}$ の長さは

$$2\pi \times 9 \times \frac{56}{360} = \frac{14}{5} \pi \text{ cm}$$

【問 13】

図のように、 AB を直径とする半円がある。その周上に異なる2点 C, D をとり、直線 AD と直線 BC の交点を E 、直線 AC と直線 BD の交点を F とする。このとき4点 C, E, D, F は同じ円周上にある。次の問いに答えよ。

(福井県 2002 年度)



(1) $\triangle ABD \sim \triangle FED$ であることを証明せよ。

(2) $AB = BE = 5 \text{ cm}$, $AE = 4 \text{ cm}$ とする。

ア EF の長さを求めよ。

イ $\triangle ABF$ の面積を求めよ。

解答欄

(1)	(証明)	
(2)	ア	cm
	イ	cm ²

解答

(1)

$\triangle ABD$ と $\triangle FED$ において

ABは直径より

$$\angle ADB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle FDE = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{より } \angle ADB = \angle FDE \cdots \textcircled{3}$$

CとDを結ぶ。

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ABD = \angle ACD \cdots \textcircled{4}$$

$\widehat{FD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle FCD = \angle FED \cdots \textcircled{5}$$

$$\angle ACD = \angle FCD \text{と} \textcircled{4} \textcircled{5} \text{より}$$

$$\angle ABD = \angle FED \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{3} \textcircled{6}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABD \sim \triangle FED$$

$$(2) \text{ ア } \frac{10\sqrt{21}}{21} \text{ cm} \quad \text{イ } \frac{17\sqrt{21}}{21} \text{ cm}^2$$

解説

(1)

$\triangle ABD$ と $\triangle FED$ において

ABは直径より $\angle ADB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$$\angle FDE = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

$$\angle ADB = \angle FDE \cdots \textcircled{3}$$

今CとDを結ぶ。

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ABD = \angle ACD \cdots \textcircled{4}$$

$\widehat{FD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle FCD = \angle FED \cdots \textcircled{5}$$

$$\angle ACD = \angle FCD \text{と} \textcircled{4}, \textcircled{5} \text{より}$$

$$\angle ABD = \angle FED \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{6}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABD \sim \triangle FED$$

(2)

ア

$\triangle ABE$ は $BA = BE$ の二等辺三角形だから $\angle ADB = 90^\circ$ より $AD = ED = \frac{1}{2} AE = 2 \text{ cm}$

$$\triangle ADB \text{に三平方の定理を用いて } BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ cm}$$

(1)より $\triangle ABD \sim \triangle FED$ だから

$$BA : EF = BD : ED$$

$$5 : EF = \sqrt{21} : 2$$

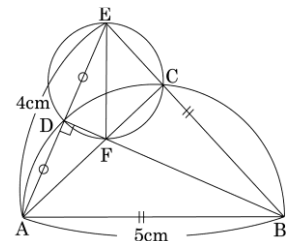
$$\text{よって } EF = \frac{10}{\sqrt{21}} = \frac{10\sqrt{21}}{21} \text{ cm}$$

イ

$$\triangle ABF = \triangle ADB - \triangle ADF$$

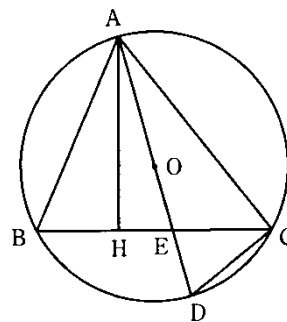
$$\triangle ABD \sim \triangle FED \text{ だから, } AD : FD = BD : ED \quad 2 : FD = \sqrt{21} : 2 \quad FD = \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ABF = \frac{1}{2} \times AD \times BD - \frac{1}{2} \times AD \times FD = \frac{1}{2} \times AD \times (BD - FD) = \frac{1}{2} \times 2 \times \left\{ \sqrt{21} - \frac{4\sqrt{21}}{21} \right\} = \frac{17\sqrt{21}}{21} \text{ cm}^2$$



【問 14】

図のように、 $AB = \sqrt{5}$ cm、 $BC = 3$ cm、 $CA = 2\sqrt{2}$ cm の $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とし、直線 AO と外接円との交点のうち、 A と異なるものを D とする。また、 A から辺 BC へひいた垂線と BC との交点を H とし、 AD と BC の交点を E とする。



(長野県 2002 年度)

- (1) $\triangle ABH \sim \triangle ADC$ を証明しなさい。
- (2) 2つの直角三角形 $\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ に目をつけて、 BH の長さを求めなさい。
- (3) 外接円の半径を求めなさい。
- (4) $BE:EC$ を求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm
(3)	cm
(4)	:

解答

(1)

証明

$\triangle ABH$ と $\triangle ADC$ で

仮定から $\angle AHB = 90^\circ$

AD は直径であり、 $\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$$\angle ACD = 90^\circ$$

$$\text{よって } \angle AHB = \angle ACD \cdots \textcircled{1}$$

ともに $\widehat{AC}$ に対する円周角だから

$$\angle ABH = \angle ADC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

対応する2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABH \sim \triangle ADC$$

(2) 1 cm

$$(3) \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$$

(4) 5:4

解説

(1)

$\triangle ABH$ と $\triangle ADC$ で

仮定から $\angle AHB = 90^\circ$

$\widehat{AD}$ は直径であり、 $\widehat{AD}$ に対する円周角だから $\angle ACD = 90^\circ$

$$\text{よって } \angle AHB = \angle ACD \cdots \textcircled{1}$$

ともに $\widehat{AC}$ に対する円周角だから $\angle ABH = \angle ADC \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

対応する2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABH \sim \triangle ADC$$

(2)

$BH = x \text{ cm}$ とすると三平方の定理より $AH^2 = AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$ だから

$$(\sqrt{5})^2 - x^2 = (2\sqrt{2})^2 - (3-x)^2 \quad \text{これを解くと } x = 1$$

(3)

$\triangle ABH$ で三平方の定理より $AH^2 = AB^2 - BH^2 = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4$

$$\text{よって } AH = \sqrt{4} = 2$$

$\triangle ABH \sim \triangle ADC$ だから

$$AB:AD = AH:AC \text{ より } \sqrt{5}:AD = 2:2\sqrt{2}$$

$$2AD = 2\sqrt{10} \text{ だから } AD = \sqrt{10}$$

$$\text{したがって外接円の半径は } \frac{1}{2} AD = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$$

(4)

$\triangle ABH \sim \triangle ADC$ だから

$$AB:AD = BH:DC \text{ より } \sqrt{5}:\sqrt{10} = 1:DC \quad DC = \sqrt{2}$$

$\triangle AHC$ で $\angle AHC = 90^\circ$, $AC:AH = 2\sqrt{2}:2 = \sqrt{2}:1$ より $AH = HC = 2 \text{ cm}$ である。

$$\text{よって } \angle ACH = \angle DCH = 45^\circ$$

直線 BC は $\angle ACD$ の二等分線だから

$$AE:ED = AC:CD = 2\sqrt{2}:\sqrt{2} = 2:1$$

$$\text{よって } AE = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$\triangle ABE \sim \triangle CDE$ で、相似比は $\sqrt{5}:\sqrt{2}$ だから

$$EC = \frac{2\sqrt{10}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{3}$$

$$BE:EC = \left(3 - \frac{4}{3}\right) : \frac{4}{3} = \frac{5}{3} : \frac{4}{3} = 5:4$$

【問 15】

図のように、 $AB > AD$ である平行四辺形 $ABCD$ があり、 $\angle DAB$ の二等分線と辺 DC の交点を E とし、直線 BC との交点を F 、 $\angle ADC$ の二等分線と辺 AB の交点を G とし、直線 BC との交点を H とする。

また、線分 AF と線分 DH の交点を I とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2002 年度)

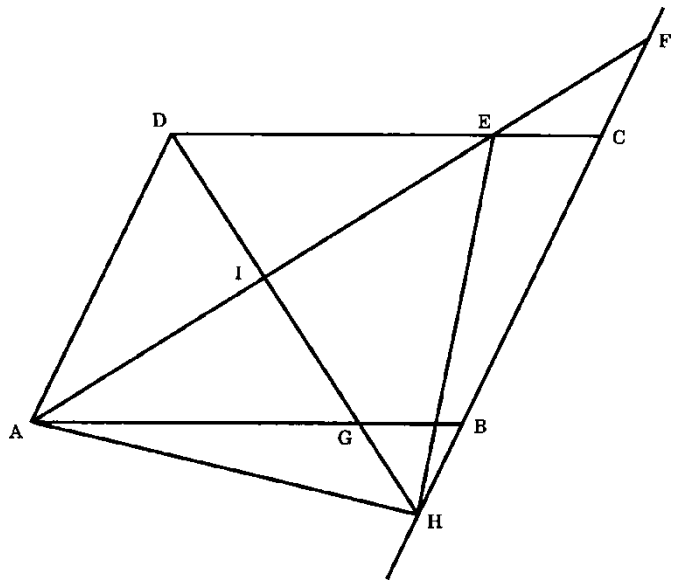
- (1) 下のア～エに示した三角形の関係のうち、正しいものはどれか、ア～エからすべて選び、その記号を書きなさい。

ア. $\triangle DAI \sim \triangle HFI$

イ. $\triangle DAH \sim \triangle HCD$

ウ. $\triangle AGD \sim \triangle EDH$

エ. $\triangle HBG \sim \triangle HCD$



- (2) $\triangle ABH \equiv \triangle HCE$ であることを証明しなさい。

- (3) $AB = 10 \text{ cm}$, $AD = 8 \text{ cm}$ のとき、三角形 IHF の面積と平行四辺形 $ABCD$ の面積の比を求めなさい。ただし、最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

(1)	
(2)	証明
(3)	三角形 IHF : 平行四辺形 ABCD = :

解答

(1) ア, エ

(2)

証明

$\triangle ABH$ と $\triangle HCE$ において

$AB \parallel DC$ より

$\angle ABH = \angle DCH \cdots \textcircled{1}$

$\triangle CDH$ において

線分 DH が $\angle ADC$ の二等分線, $AD \parallel BC$ より $\angle CDH = \angle CHD$ だから $\triangle CDH$ は二等辺三角形

よって $CD = CH$

このことと $AB = DC$ より

$AB = HC \cdots \textcircled{2}$

同様にして

$\triangle BAF$ は, $\angle BAF = \angle BFA$ の二等辺三角形

よって $AB = BF \cdots \textcircled{3}$

また $AB \parallel DC$ より

$\triangle FAB \sim \triangle FEC$ だから

$\textcircled{3}$ より $CF = CE \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より

$BH = CE \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{5}$ から

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABH \equiv \triangle HCE$

(3)

三角形 IHF : 平行四辺形 $ABCD = 9:20$

解説

(1)

ア $\angle AID = \angle FIH$, $\angle IDA = \angle IHF$ より $\triangle DAI \sim \triangle HFI$

エ $\angle HBG = \angle HCD$, $\angle GHB = \angle DHC$ より $\triangle HBG \sim \triangle HCD$

(2) 例

$\triangle ABH$ と $\triangle HCE$ において

$AB \parallel DC$ より $\angle ABH = \angle DCH \cdots \textcircled{1}$

$\triangle CDH$ において線分 DH が $\angle ADC$ の二等分線, $AD \parallel BC$ より $\angle CDH = \angle CHD$ だから $\triangle CDH$ は二等辺三角形

よって $CD = CH$ このことと $AB = DC$ より $AB = HC \cdots \textcircled{2}$

同様にして $\triangle BAF$ は $\angle BAF = \angle BFA$ の二等辺三角形

よって $AB = BF \cdots \textcircled{3}$

また $AB \parallel DC$ より $\triangle FAB \sim \triangle FEC$ だから

$\textcircled{3}$ より $CF = CE \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より $BH = CE \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{5}$ から 2辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABH \equiv \triangle HCE$

(3)

$\triangle FEC$ の面積を S とおくと, 右の図より $\triangle DAE$ は $16S$

よって $\triangle IAG = \triangle DAI = \triangle DEI = 8S$

また $\triangle EHC$ は $5S$

ここで $\triangle ABH \equiv \triangle HCE$ より

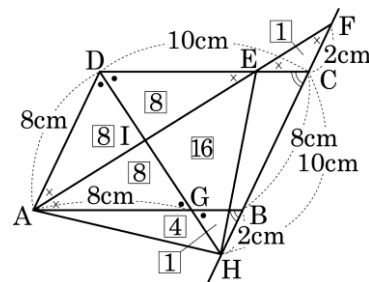
$\triangle AHG = 4S$, $\triangle BGH = S$ となる。

また $\triangle FAB = 25S$ だから五角形 $EIGBC$ は $25S - S - 8S = 16S$

したがって三角形 IHF は $S + 16S + S = 18S$

平行四辺形 $ABCD$ は $8S \times 3 + 16S = 40S$

このことより三角形 IHF : 平行四辺形 $ABCD = 18S:40S = 9:20$

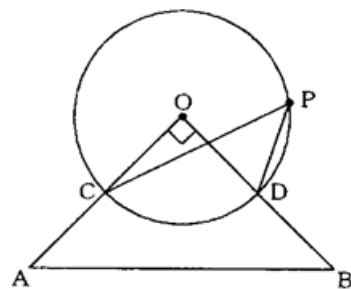


【問 16】

図1のように、 $OA=OB=8\text{ cm}$ 、 $\angle AOB=90^\circ$ の直角二等辺三角形 OAB があり、頂点 O を中心とする半径 4 cm の円 O をかく。直角二等辺三角形 OAB と円 O との交点をそれぞれ C 、 D とする。また、円 O の周上を動く点 P があり、 P と C 、 P と D をそれぞれ結ぶ。

ただし、点 P は直角二等辺三角形 OAB の外部にあるものとする。このとき、後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

図1



(滋賀県 2002 年度)

- (1) 点 P が AO の延長上にあるとき、3点 P 、 A 、 D を通る円を、定規とコンパスを使って作図しなさい。

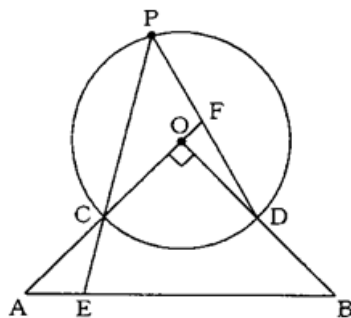
ただし、作図に使った線は消さないこと。

- (2) 図2のように、点 P と C を結んだ延長が AB と交わる時、その交点を E と

し、 AO の延長と PD との交点を F とする。

このとき $\triangle ACE \sim \triangle PCF$ であることを証明しなさい。

図2



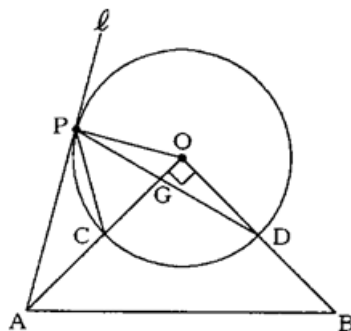
- (3) 図3のように、頂点 A から円 O に接線 ℓ をひく。点 P が接点にあるとき、次の①、②の問いに答えなさい。

の①、②の問いに答えなさい。

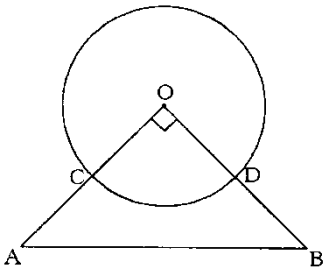
- ① 点 P と中心 O を結ぶとき、 $\triangle AOP$ の面積を求めなさい。

- ② AO と PD の交点を G とするとき、 PG と GD の長さの比を求めなさい。

図3



(1)

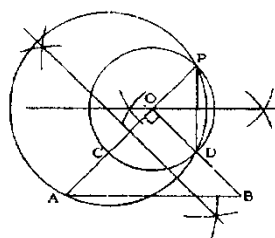


(2)

(3)	①	cm ²
	②	:

解答

(1)



(2)

$\triangle ACE$ と $\triangle PCF$ で

$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形であるから

$$\angle CAE = 45^\circ \cdots \textcircled{1}$$

円周角の定理から

$$\angle CPD = \frac{1}{2} \angle COD = 45^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

$$\angle CAE = \angle CPD = \angle CPF \cdots \textcircled{3}$$

対頂角だから

$$\angle ACE = \angle PCF \cdots \textcircled{4}$$

③, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACE \sim \triangle PCF$$

(3)

$$\textcircled{1} \quad 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{3} : 2$$

解説

(1)

3点 P, A, D から等しい距離にある点が作図する円の中心である。

図のように線分 AP の垂直二等分線と、線分 PD の垂直二等分線との交点を中心とし、その点から3点への距離を半径とする円をかく。

(2)

円周角の定理と対頂角が等しいことを用いて2組の角が等しいことを証明する。

証明

$$\triangle ACE \text{と} \triangle PCF \text{で} \triangle OAB \text{は直角二等辺三角形であるから} \angle CAE = 45^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{円周角の定理から} \angle CPD = \frac{1}{2} \angle COD = 45^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{から} \angle CAE = \angle CPD = \angle CPF \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{対頂角だから} \angle ACE = \angle PCF \cdots \textcircled{4}$$

③, ④から, 2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACE \sim \triangle PCF$$

(3)

$$\textcircled{1} \quad \text{円の接線はその接点を通る半径と垂直に交わることにより} \angle APO = 90^\circ$$

$$\text{また} OP = 4, OA = 8 \text{だから, 三平方の定理より} PA = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle AOP = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

② 右の図のように点PからAOへ垂線PHをひく。

$$PO : AO = 1 : 2 \text{より} \angle PAO = 30^\circ$$

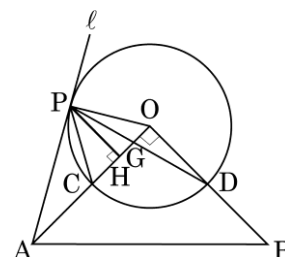
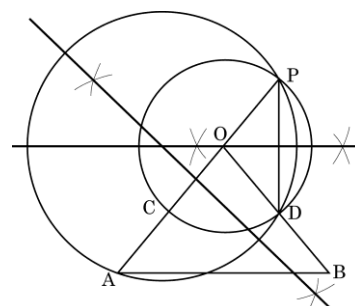
$$\text{また} \triangle PAH \text{においても} PH : PA = 1 : 2 \text{が成り立つから} PH = \frac{1}{2} PA = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle PGH \text{と} \triangle DGO \text{において, 対頂角だから} \angle PGH = \angle DGO$$

$$\text{仮定より} \angle PHG = \angle DOG$$

$$2 \text{組の角がそれぞれ等しいので} \triangle PGH \sim \triangle DGO$$

$$\text{よって} PG : DG = PH : DO = 2\sqrt{3} : 4 = \sqrt{3} : 2$$

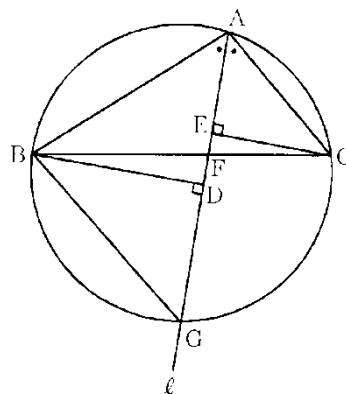


【問 17】

図のように $AB=3\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$, $CA=2\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ と $\angle BAC$ の二等分線 ℓ がある。点 B , C から直線 ℓ に垂線をひきそれぞれの交点を D , E とする。また直線 ℓ が BC および $\triangle ABC$ の外接円と交わる点をそれぞれ F , G とする。

次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2002 年度)



(1) BD と CE の長さの比を求めなさい。

(2) BF の長さを求めなさい。

(3) $\triangle ABG$ と $\triangle AFC$ が相似であることを証明しなさい。

(4) AF の長さを求めなさい。ただし、答えが無理数になるときは、根号を含んだ数で答えなさい。

解答欄

(1)	$BD : CE = \quad : \quad$
(2)	$\quad \text{cm}$
(3)	
(4)	$\quad \text{cm}$

解答

(1) $BD:CE=3:2$

(2) $\frac{12}{5}$ cm

(3)

$\triangle ABG$ と $\triangle AFC$ において

直線 ℓ は $\angle BAC$ の二等分線なので

$$\angle BAG = \angle FAC \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいので

$$\angle AGB = \angle ACF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABG \sim \triangle AFC$$

(4) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ cm

解説

(1)

$\triangle BDF \sim \triangle CEF$ より

$$BD:CE=BF:CF=AB:AC=3:2$$

(2)

$$BF=4 \times \frac{3}{3+2} = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

(3)

$\triangle ABG$ と $\triangle AFC$ で

直線 ℓ は $\angle BAC$ の二等分線なので

$$\angle BAG = \angle FAC \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいので

$$\angle AGB = \angle ACF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABG \sim \triangle AFC$$

(4)

(3)より $AB:AF=AG:AC$

$$3:AF=AG:2 \text{ から } AF \times AG=6 \cdots \textcircled{3}$$

$\triangle AFC \sim \triangle BFG$ より

$$AF:BF=CF:GF$$

$$AF:\frac{12}{5}=\frac{8}{5}:FG \text{ から}$$

$$AF \times FG = \frac{96}{25} \cdots \textcircled{4}$$

③-④より

$$AF \times (AG - FG) = 6 - \frac{96}{25}$$

$$AF^2 = \frac{54}{25}$$

$AF > 0$ だから,

$$AF = \frac{3\sqrt{6}}{5}$$

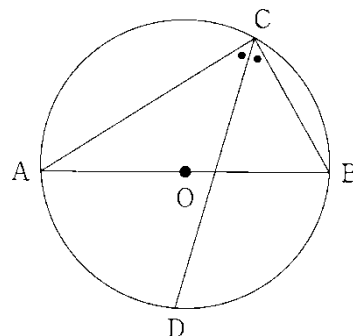
【問 18】

図1のように、線分 AB を直径、中心を O とする円周上に点 C をとり、 $\angle ACB$ の二等分線と円周との交点を D とする。

図1

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(島根県 2002 年度)



問1. 次の1～3に答えなさい。

1. $\angle ACB$ の大きさを求めなさい。

2. $\triangle ADB$ はどんな形の三角形か。次のア～エから最も適当なものを1つ選んで記号で答えなさい。

ア 正三角形

イ 直角三角形

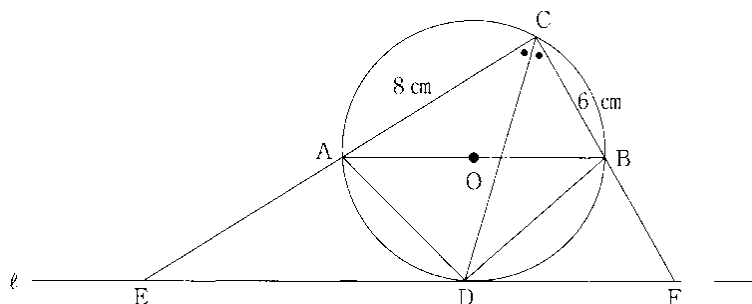
ウ 二等辺三角形

エ 直角二等辺三角形

3. 解答用紙の図において、 $\angle ACB$ の二等分線を作図しなさい。ただし、作図で用いた線を消さないこと。

問2. 図2のように、点 D を通る円 O の接線 図2

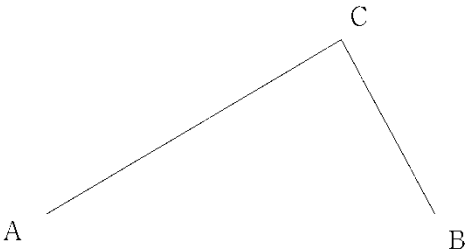
を ℓ とし、辺 CA , CB を延長した直線と接線 ℓ との交点を、それぞれ E , F とする。線分 AC の長さが 8 cm 、線分 BC の長さが 6 cm のとき、次の1～3に答えなさい。



1. 線分 AB の長さを求めなさい。

2. $\triangle ADE \sim \triangle BCD$ であることを証明しなさい。

3. $\triangle ADE$ の面積は、 $\triangle BCD$ の面積の何倍となるか、求めなさい。

問1	1	○	
	2		
	3	作図 	
	1	cm	
	2	証明	
	3	倍	

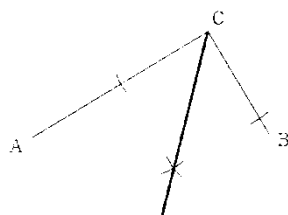
解答

問1

1 90°

2 エ

3



問2.

1 10cm

2

証明

$\triangle ADE$ と $\triangle BCD$ で

DEは接線だから $\angle ADE = \angle ACD$

また $\angle ACD = \angle BCD$ なので

$\angle ADE = \angle BCD \cdots \textcircled{1}$

四角形ACBDは円に内接しているから

$\angle DAE = \angle CBD \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle BCD$

3 $\frac{25}{18}$ 倍

解説

問1.

1 $\angle ACB$ に対する中心角は, ABが直径だから 180° によって $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

2 $\angle ACD = \angle BCD$ より $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ となるから $AD = BD$

また $\angle ADB = 90^\circ$

よって $\triangle ADB$ は直角二等辺三角形になる。

3.

① 点Cを中心にして円を描きAC, BCとの交点をそれぞれP, Qとする。

② P, Qを中心にして等しい半径の円を描きその交点をRとする。

③ CとRを結ぶとCRが $\angle ACB$ の2等分線になる。

問2.

1 直角三角形ABCに三平方の定理を用いて

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\text{cm}$$

2 $\triangle ADE$ と $\triangle BCD$ で

DEは接線だから $\angle ADE = \angle ACD$

また $\angle ACD = \angle BCD$ なので $\angle ADE = \angle BCD \cdots \textcircled{1}$

四角形ACBDは円に内接しているから $\angle DAE = \angle CBD \cdots \textcircled{2}$

①, ②より2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle ADE \sim \triangle BCD$

3 問1の2より $\triangle ADB$ は直角二等辺三角形だから $AD:AB = 1:\sqrt{2}$

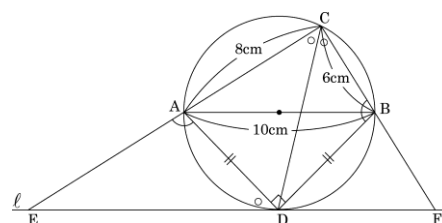
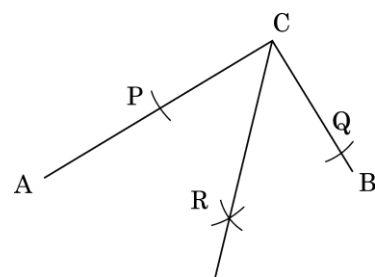
$$AB = 10\text{ cm} \text{ だから } AD = \frac{1}{\sqrt{2}} AB = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10 = 5\sqrt{2}\text{ cm}$$

よって, $AD:BC = 5\sqrt{2}:6$

$\triangle ADE \sim \triangle BCD$ で相似な図形の面積比は相似比の2乗に等しいから

$$\triangle ADE:\triangle BCD = (5\sqrt{2})^2:6^2 = 25:18$$

したがって $\triangle ADE$ の面積は $\triangle BCD$ の面積の $\frac{25}{18}$ 倍になる。



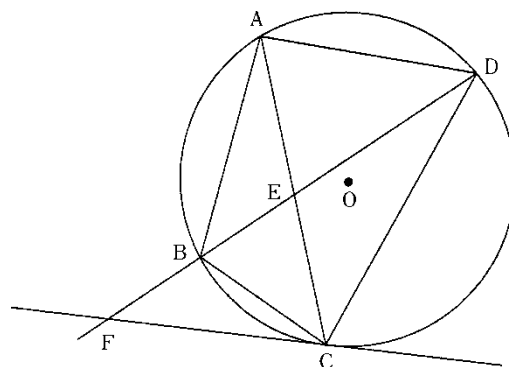
【問 19】

図のように、円 O に内接する四角形 $ABCD$ があります。対角線 AC , BD の交点を E とし、 $DA=DE$ とします。また、 DB の延長と点 C における円 O の接線との交点を F とします。

これについて、次の(1)・(2)に答えなさい。

(広島県 2002 年度)

(1) $\triangle ACD \sim \triangle EFC$ であることを証明しなさい。



(2) 円 O の半径が 7 cm , $\angle ABD = 45^\circ$ のとき、線分 DE の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔仮 定〕 図において、四角形 $ABCD$ は円 O に内接, $DA=DE$, CF は円 O の接線 〔結 論〕 $\triangle ACD \sim \triangle EFC$ 〔証 明〕	
	(2)	cm

解答

(1)

証明

$\triangle ACD$ と $\triangle EFC$ において

CF は円 O の接線であるから

$$\angle ADC = \angle ECF \cdots ①$$

$DA = DE$ であるから

$$\angle DAC = \angle AED \cdots ②$$

また対頂角であるから

$$\angle AED = \angle CEF \cdots ③$$

②, ③より

$$\angle DAC = \angle DEF \cdots ④$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACD \sim \triangle EFC$$

$$(2) \ 7\sqrt{2} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle ACD$ と $\triangle EFC$ において

CF は円 O の接線で

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は

その角の内部にある弧に対する円周角に等しいから

$$\angle ADC = \angle ECF \cdots ①$$

また, $\triangle ADE$ は $DA = DE$ の二等辺三角形だから

$$\angle DAC = \angle AED \cdots ②$$

対頂角は等しいから

$$\angle AED = \angle CEF \cdots ③$$

②, ③より

$$\angle DAC = \angle CEF \cdots ④$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACD \sim \triangle EFC$$

(2)

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$$\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$$

(1)より $\triangle ACD \sim \triangle EFC$ だから

$$\angle ACD = \angle EFC = 45^\circ$$

円の接線と半径は接点で垂直に交わるから

$\triangle OFC$ は直角二等辺三角形とわかる。

よって右図のように OB は円 O の中心を通り DB は円 O の直径となる。

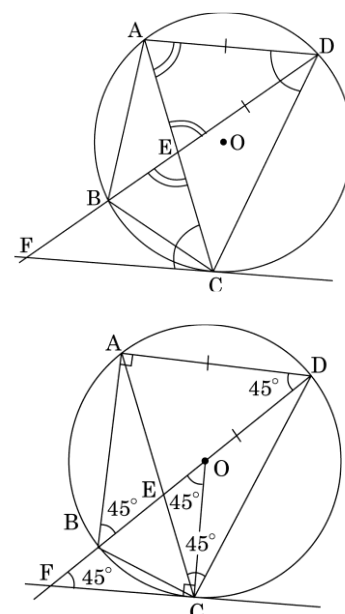
このとき $\triangle ABD$ も直角二等辺三角形となるから

$$AD = \frac{1}{\sqrt{2}} \times BD$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 14$$

$$= 7\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } DE = AD = 7\sqrt{2} \text{ cm}$$

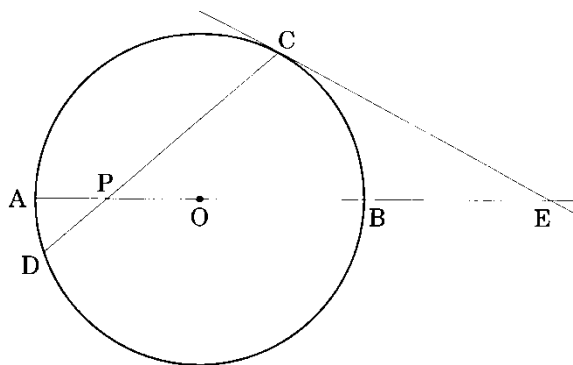


【問 20】

図のように、線分 AB を直径とする円 O がある。線分 AO 上の点 P で交わる弦 CD をひき、点 C における接線と線分 AB を延長した直線との交点を E とする。

このとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

(徳島県 2002 年度)



- (1) $\angle BOC = 50^\circ$ のとき、 $\angle CEO$ および $\angle ACE$ の大きさを、それぞれ求めなさい。
- (2) 7点 A, B, C, D, E, O, P のうちの3点を頂点とする三角形の中から、相似である2つの三角形を見つけ、答えの欄の()に書きなさい。また、その2つの三角形が相似であることを証明しなさい。ただし、2つの三角形は合同でないものとする。
- (3) $PD = PO$, $\widehat{AD} = a$ cm のとき、 $\widehat{BC}$ の長さは何 cm か、 a を用いて表しなさい。ただし、 $\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$ の長さは、いずれも円 O の円周の長さの $\frac{1}{2}$ より短いものとする。

解答欄

(1)	$\angle CEO$	度
	$\angle ACE$	度
(2)	(△)と(△)は相似である。	
	証明	
(3)	cm	

解答

(1) $\angle CEO$ 40 度, $\angle ACE$ 115 度

(2)

$\triangle ACP$ と $\triangle DBP$ は相似である。

証明

$\triangle ACP$ と $\triangle DBP$ で

対頂角だから

$$\angle APC = \angle DPB \cdots \textcircled{1}$$

また, 円周角の定理より

$$\angle ACD = \angle DBA \text{ だから}$$

$$\angle ACP = \angle DBP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角が, それぞれ等しいので

$$\triangle ACP \sim \triangle DBP$$

(3) $3a$ cm

解説

(1)

CEは接線だから

$$\angle OCE = 90^\circ$$

$\triangle OCE$ の内角の和から

$$\angle CEO = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

また $OA = OC$, $\angle OAC + \angle OCA = \angle BOC$ より, $\angle OCA = 50^\circ \div 2 = 25^\circ$

$$\text{よって } \angle ACE = 25^\circ + 90^\circ = 115^\circ$$

(2)

$\triangle ACP$ と $\triangle DBP$ は相似である。

(証明)

$\triangle ACP$ と $\triangle DBP$ で

対頂角だから

$$\angle APC = \angle DPB \cdots \textcircled{1}$$

また円周角の定理より $\angle ACD = \angle DBA$ だから

$$\angle ACP = \angle DBP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角が, それぞれ等しいので

$$\triangle ACP \sim \triangle DBP$$

(同様に $\triangle APD \sim \triangle CPB$ を証明することもできる。また, 接線と弦のつくる角の定理を使って $\triangle ACE \sim \triangle CBE$ を証明してもよい。)

(3)

$PD = PO$ より

$\angle PDO = \angle POD = x$ とおくと三角形の内角と外角の関係から

$$\angle CPO = \angle PDO + \angle POD = 2x$$

$$\angle OCD = \angle ODC = x \text{ より}$$

$$\angle BOC = \angle OCP + \angle OPC = 3x$$

$$\text{よって } \widehat{AD} : \widehat{BC} = \angle AOD : \angle BOC$$

$$= x : 3x = 1 : 3 \text{ より}$$

$$\widehat{BC} = 3a \text{ cm}$$

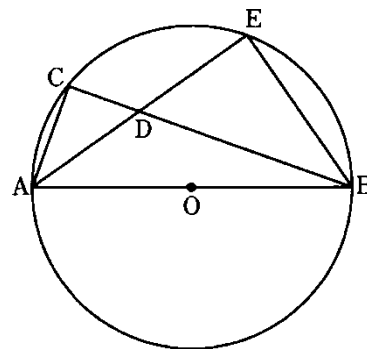
【問 21】

線分 AB を直径とする円 O があり、 $AB=4\text{ cm}$ である。図1のように、円 O の周上に点 A, B と異なる位置に点 C をとり、 $\angle BAC$ の二等分線が、線分 BC 、弧 $\widehat{BC}$ と交わる点をそれぞれ点 D, E とする。

このとき、次の問いに答えなさい。(円周率は π を用いること。)

(愛媛県 2002 年度)

図1



1. $\triangle ABE \sim \triangle BDE$ であることを証明せよ。

2. $BD=3\text{ cm}$ とするとき、

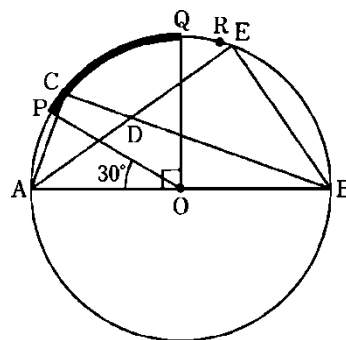
(1) $AE:BE$ を最も簡単な整数の比で表せ。

(2) $\triangle ABE$ の面積を求めよ。

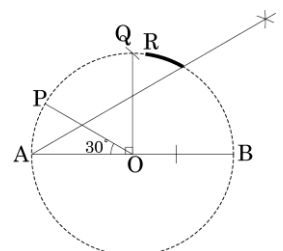
3. 図2のように、円 O の周上に、 $\angle AOP=30^\circ$, $\angle AOQ=90^\circ$ となる点 P, Q

図2

をとる。点 C が太線で表した弧 $\widehat{PQ}$ 上を点 P から点 Q まで動くとき、点 E が動いてできる線を解答用紙の図にかき入れよ。また、その線の長さを求めよ。ただし、点 C が点 P の位置にあるとき、点 E は点 R の位置にあるものとする。

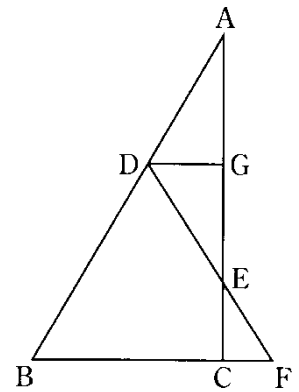


1	証明	
2	(1)	AE:BE=(): ()
	(2)	cm ²
3		
	cm	



【問 22】

$AB=10\text{ cm}$, $BC=5\text{ cm}$, $\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。図のように、辺 AB 上に $AD:DB=2:3$ となる点 D , 辺 AC 上に $AE:EC=3:1$ となる点 E をとり、点 D と点 E を通る直線と辺 BC を延長した直線との交点を F とする。また、点 D を通り、辺 BC に平行な直線をひき、辺 AC との交点を G とする。



(1)は指示にしたがって答え(2), (3)は の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

(福岡県 2002 年度)

(1) 上の図において、相似な三角形を1組選び、その2つの三角形が相似であることを右の の中に証明せよ。

証明

(2) 線分 DG の長さは cm である。

(3) $BC:CF =$ $:$ である。

解答欄

(1)	証明
(2)	
(3)	

解答

(1)

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle ADG$ において

$\angle A$ は共通だから

$$\angle BAC = \angle DAG \cdots \textcircled{1}$$

平行線の同位角は等しいから

$$\angle ABC = \angle ADG \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle ADG$$

(2) 2

(3) 7, 2

解説

(1)

($\triangle ABC \sim \triangle ADG$ の場合の例)

$\triangle ABC$ と $\triangle ADG$ において

$\angle A$ は共通だから

$$\angle BAC = \angle DAG \cdots \textcircled{1}$$

平行線の同位角は等しいから

$$\angle ABC = \angle ADG \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle ADG$$

($\triangle ECF \sim \triangle EGD$ の場合の例)

$\triangle ECF$ と $\triangle EGD$ において

対頂角は等しいから

$$\angle CEF = \angle GED \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ECF = \angle EGD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ECF \sim \triangle EGD$$

(2)

$\triangle ABC \sim \triangle ADG$ より対応する辺の比は等しいから

$$BC:DG = AB:AD$$

$$5:DG = 10:4$$

$$DG = 2\text{cm}$$

(3)

$$AG = \frac{2}{5}AC, EC = \frac{1}{4}AC \text{ だから}$$

$$EG = (1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{4})AC = \frac{7}{20}AC$$

$\triangle ECF \sim \triangle EGD$ より

$$CF:GD = EC:EG \text{ だから}$$

$$CF:GD = \frac{1}{4}AC : \frac{7}{20}AC = 5:7$$

また, $BC:GD = 5:2$ だから

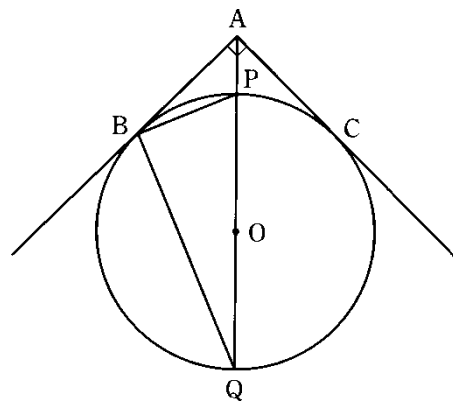
$$BC:CF:GD = 35:10:14$$

よって $BC:CF = 7:2$

【問 23】

図のように、半径 2 cm の円 O に点 A から2本の接線をひき、接点を B, C とする。また、直線 AO と円 O との交点を点 A に近い方から P, Q とする。 $\angle BAC = 90^\circ$ のとき、次の(1)～(4)の各問いに答えなさい。

(佐賀県 2002 年度)



(1) $\triangle ABP \sim \triangle AQB$ であることを証明しなさい。

(2) 点 P をふくむ $\widehat{BC}$ の長さを求めなさい。

(3) $\angle ABP$ の大きさを求めなさい。

(4) $\triangle ABP$ の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm
(3)	度
(4)	cm ²

解答

(1)

$\triangle ABP$ と $\triangle AQB$ において

$$\angle PAB = \angle BAQ \text{ (共通)} \cdots \textcircled{1}$$

直線ABは円Oの接線だから

$$\angle ABP = \angle AQB \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABP \sim \triangle AQB$$

$$(2) \quad \pi \text{ cm}$$

$$(3) \quad 22.5^\circ$$

$$(4) \quad 2 - \sqrt{2} \text{ cm}^2$$

解説

(1)

$\triangle ABP$ と $\triangle AQB$ において

$$\angle PAB = \angle BAQ \text{ (共通)} \cdots \textcircled{1}$$

直線ABは円Oの接線だから

$$\angle ABP = \angle AQB \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABP \sim \triangle AQB$$

(2)

$$\angle BAC = \angle OBA = \angle OCA = 90^\circ \text{ より } \angle BOC = 90^\circ \quad \widehat{BC} = 2\pi \times 2 \times \frac{90}{360} = \pi \text{ cm}$$

(3)

$$\angle BOP = 45^\circ \quad \angle BQP = \frac{1}{2} \angle BOP = 22.5^\circ \quad \angle ABP = \angle BQP = 22.5^\circ$$

(4)

円外の1点からその円にひいた2本の接線の長さは等しいから $AB = AC$

よって四角形ABOCは正方形であり $AO = \sqrt{2}$ $OB = 2\sqrt{2}$ cm

$$AP = AO - PO = 2\sqrt{2} - 2 \text{ cm}$$

APを底辺としたときの $\triangle ABP$ の高さは

$$\frac{1}{2} BC = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ABP = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} - 2) \times \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \text{ cm}^2$$

【問 24】

図1～図3のように、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があり、 $AB=AD$ で、点 E は辺 BC の中点である。また、 $\angle ABE = \angle BED = 90^\circ$ のとき、次の問いに答えなさい。

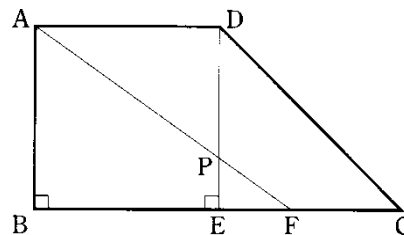
(長崎県 2002 年度)

問1. 図1において、線分 EC 上の点を F とし、2つの線分 AF と DE の交点を P とするとき、次の(1), (2)に答えよ。

(1) $\triangle APD \sim \triangle FPE$ であることを証明せよ。

(2) $\angle DAP = 36^\circ$ であるとき $\angle DPF$ の大きさは何度か。

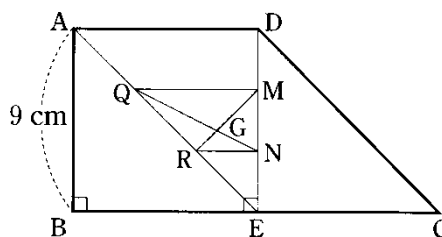
図1



問2. 図2, 図3において、 $AB=9\text{ cm}$ とする。図2のように線分 DE 上に $DM=MN=NE$ となる2点 M, N をとる。また、辺 AD と平行で、点 M, N を通る直線をそれぞれひき、線分 AE との交点を Q, R とする。さらに、2つの線分 QN と MR の交点を G とするとき、次の(1)～(3)に答えよ。

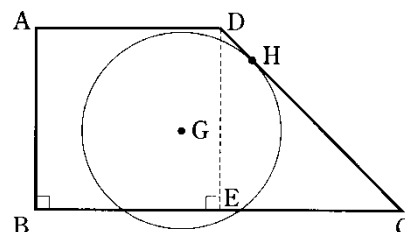
(1) 線分 QM の長さは何 cm か。

図2



(2) 線分 MG の長さは何 cm か。

図3



(3) 図3のように、点 G を中心とし、辺 CD に点 H で接する円がある。このとき、円の面積は何 cm^2 か。

問1	(1)	証明	
	(2)	。	
問2	(1)	cm	
	(2)	cm	
	(3)	cm ²	

解答

問1

(1)

$\triangle APD$ と $\triangle FPE$ において

$\angle APD = \angle FPE$ (対頂角) …①

$\angle ADP = \angle FEP$ (平行線の錯角)

または (90°) …②

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle APD \sim \triangle FPE$

(2) 126°

問2

(1) 6 cm

(2) $2\sqrt{2}$ cm

(3) $\frac{49}{2} \pi \text{ cm}^2$

解説

問1

(1)

$\triangle APD$ と $\triangle FPE$ において

$\angle APD = \angle FPE$ (対頂角) …①

$\angle ADP = \angle FEP$ (平行線の錯角) または (90°) …②

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle APD \sim \triangle FPE$

(2)

$\triangle APD$ の外角だから $\angle DPF = \angle DAP + \angle ADP = 36^\circ + 90^\circ = 126^\circ$

問2

(1)

$\triangle ADE$ と $\triangle QME$ において

共通な角だから $\angle DEA = \angle MEQ$ …①

平行線の同位角は等しいから $\angle ADE = \angle QME$ …②

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle QME$

よって $AD:QM = ED:EM$ $9:QM = 3:2$ $QM = 6 \text{ cm}$

(2)

$\triangle QME$ において $MN = EN$, $QR = ER$ だから点 G は $\triangle QME$ の重心である。

よって $MG = \frac{2}{3} MR$

また $\triangle QME$ は, $QM = ME = 6 \text{ cm}$ の直角二等辺三角形であるから $QR = 3\sqrt{2}$, $MR = 3\sqrt{2}$

ゆえに $MG = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

(3)

右の図のように点 G と H を結び, 線分 ED との交点を I とすると
 $\angle DHI = 90^\circ$, $\angle HID = \angle HDI = 45^\circ$ であるから $\angle GIE = 45^\circ$

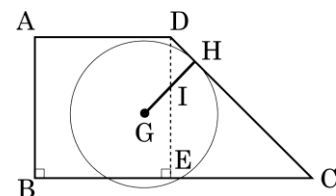
よって点 I は点 M と重なる。

ゆえに $DI = 3$, $HI = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

(2)より $IG = MG = 2\sqrt{2}$ だから

$GH = HI + IG = \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$

よって GH を半径とする円の面積は $\pi \times \left(\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{49}{2} \pi \text{ cm}^2$

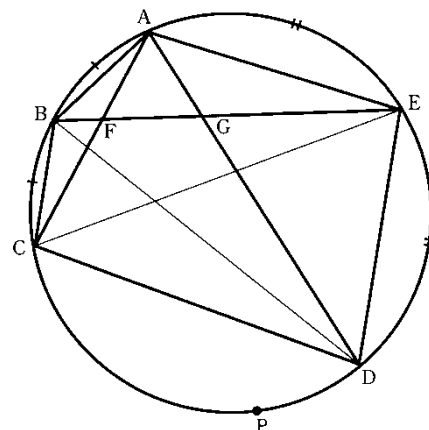


【問 25】

図のように、円に内接する五角形 $ABCDE$ において、線分 BE と線分 AC , AD との交点をそれぞれ F , G ,

円周上で $\widehat{CAD}$ 上にない点を P とする。 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$, $\widehat{AE} = \widehat{ED}$, $BC \parallel ED$ であるとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(大分県 2002 年度)



(1) $\triangle ABF \sim \triangle EAG$ であることを証明しなさい。

(2) $\angle CAD$ の大きさを求めなさい。

(3) $AF = 2 \text{ cm}$, $BF = 1 \text{ cm}$ であり、点 P が点 C と点 D の間を動くとき、 $\triangle CPD$ の面積の最大値を求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	度
(3)	cm^2

解答

(1)

証明

$\triangle ABF$ と $\triangle EAG$ において

等しい弧に対する円周角は等しいから

$\widehat{AB} = \widehat{BC}$ より

$\angle BAF = \angle AEG \cdots ①$

$\widehat{AE} = \widehat{ED}$ より

$\angle ABF = \angle EAG \cdots ②$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF \sim \triangle EAG$

(2) 60 度

(3) $\frac{49}{12}\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

(1)

$\triangle ABF$ と $\triangle EAG$ において

等しい弧に対する円周角は等しいから

$\widehat{AB} = \widehat{BC}$ より $\angle BAF = \angle AEG \cdots ①$

$\widehat{AE} = \widehat{ED}$ より $\angle ABF = \angle EAG \cdots ②$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF \sim \triangle EAG$

(2)

$\angle CAD = \angle CED = x$

$\angle ACE = \angle ADE = \angle ECD = a$

$\angle ADB = \angle BDC = \angle BEC = b$ とおくと

$\triangle ACD$ において

$x + 2a + 2b = 180^\circ \cdots ①$

また $BC \parallel ED$ より四角形 $BCDE$ は等脚台形なので

$\angle BED = \angle CDE$ より $b + x = 2b + a \cdots ②$

①②より $x = 60^\circ$

(3)

$\triangle CPD$ の面積が最大となるのは

$\triangle CPD$ が二等辺三角形となるときであり

図形の対称性より点 P を弧 BE 上にとって

$\triangle PBE$ が二等辺三角形となると考えてもよい。

いま②より $\angle CAD = 60^\circ \cdots ①$

また $\angle AFG = 180^\circ - \angle AFB \cdots ②$

$\angle AGF = 180^\circ - \angle AGE \cdots ③$

②, ③より $\angle AFG = \angle AGF \cdots ④$

よって①, ④より $\triangle AFG$ は正三角形

$FG = AF = 2 \text{ cm}$, $BF = 1 \text{ cm}$

$GE:AG = AF:BF$ より $GE:2 = 2:1$ から $GE = 4 \text{ cm}$

よって $BE = 7 \text{ cm}$,

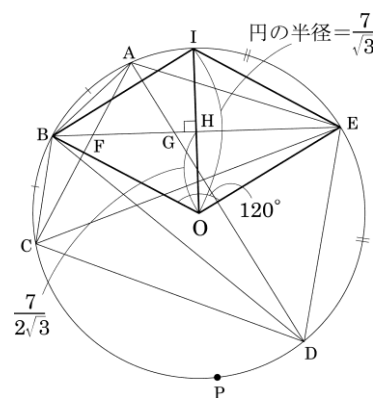
また円の中心を O とすると $\angle COD = 2\angle CAD = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

$\angle BOE = \angle COD$ から $\angle BOH = \angle EOH = 60^\circ$

よって $\triangle IEO$ は正三角形であるから求める面積の三角形の高さは $IH = OH = \frac{1}{2} OI$

$$\frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{よって求める面積は } \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{49}{12} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

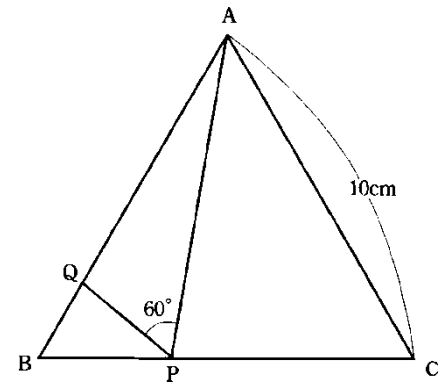


【問 26】

図のように、1辺の長さが 10 cm の正三角形 ABC がある。2点 P, Q をそれぞれ、辺 BC, 辺 AB 上に $\angle APQ = 60^\circ$ になるようにとるとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2002 年度)

問1. $\triangle ACP \sim \triangle PBQ$ であることを次のように証明した。□ をうめて証明を完成させなさい。



証明

$\triangle ABC$ は正三角形であるから

$$\angle B = \angle C = 60^\circ \cdots \text{①}$$

また,

$$\angle CPA + \angle CAP = \square \text{ ア } ^\circ$$

$$\angle CPA + \angle BPQ = \square \text{ ア } ^\circ$$

であるから,

$$\angle CAP = \angle BPQ \cdots \text{②}$$

①, ②より, $\triangle ACP$ と $\triangle PBQ$ において,

三角形の相似条件の「□ イ 」が成り立つ。

したがって, $\triangle ACP \sim \triangle PBQ$

問2. $BP = 4 \text{ cm}$ のとき, BQ の長さを求めなさい。

解答欄

問1	ア	°
	イ	
問2	cm	

解答

問1

ア 120°

イ 2組の角がそれぞれ等しい

問2 2.4cm

解説

問1

ア

上のアは $\triangle APC$ の内角の和から $\angle ACP = 60^\circ$ を引いたもの。

下のアは $\angle BPC = 180^\circ$ から $\angle APQ = 60^\circ$ を引いたものでどちらも 120° 。

イ

$\triangle ACP$ と $\triangle PBQ$ において

①から $\angle ACP = \angle PBQ = 60^\circ$

②から $\angle CAP = \angle BPQ$

よって「2組の角がそれぞれ等しい」

問2

BQの長さを x cmとする。

$\triangle ABC$ は正三角形であることから

$$PC = 10 - 4 = 6\text{cm}$$

$\triangle ACP \sim \triangle PBQ$ から

$$CP : BQ = AC : PB$$

$$6 : x = 10 : 4$$

$$10x = 24$$

$$x = 2.4\text{cm}$$