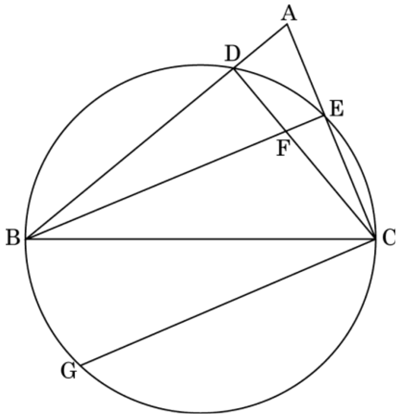
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2003 年度出題】

【問 1】

図のように，3つの内角がすべて鋭角である△ABC があります。辺 BC を直径とする円と辺 AB, AC との交点をそれぞれ D, E とし，線分 CD と BE との交点を F とします。点 C を通り，線分 BE に平行な直線と円との交点を G とします。

次の問いに答えなさい。

（北海道 2003 年度）



問1．∠EGC＝25° のとき∠CEG の大きさを求めなさい。

問2．DB＝DC のとき，BF＝CA を証明しなさい。

解答欄

問1	度
問2	証明

解答

問1　65 度

問2

証明

△DBF と△DCA において

DB＝DC（仮定）…①

∠DBF＝∠DCA（円周角）…②

∠FDB＝90°（円周角）…③

∠ADC＝180°－∠FDB＝90° だから

∠FDB＝∠ADC…④

①, ②, ④から

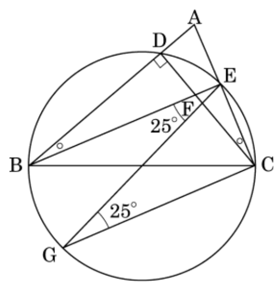
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△DBF≡△DCA…⑤

よって BF＝CA

解説

問1



図のように E と G を結ぶ。

BE∥GC で

錯角は等しいから

∠BEG＝∠EGC＝25°

BC は直径だから

∠BEC＝90°

∠CEG＝∠BEC－∠BEG＝90°－25°＝65°

問2

△DBFと△DCAにおいて

仮定より

DB＝DC…①

弧DEの円周角だから

∠DBF＝∠DCA…②

BCは直径だから

∠FDB＝90°

∠ADC＝180°－∠FDB＝90° だから

∠FDB＝∠ADC…③

①, ②, ③から

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△DBF≡△DCA

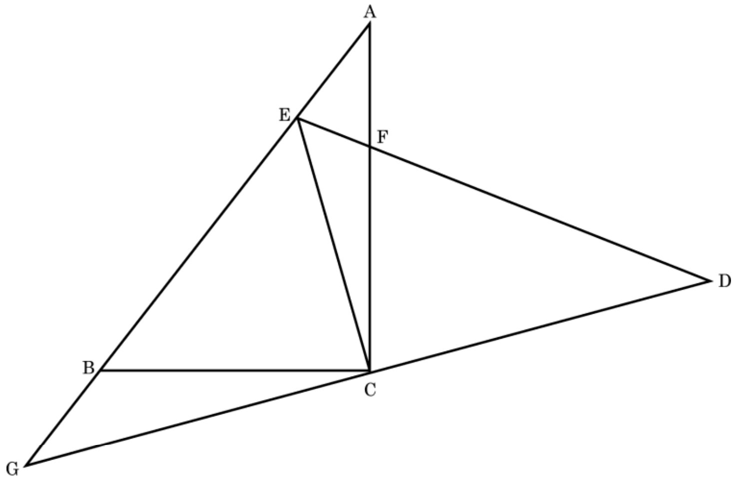
よって BF＝CA

【問 2】

図で，△ABC は∠ACB＝90° の直角三角形である。点 D は線分 AC の右側に，点 E は線分 AB 上にあり，△ABC≡△DEC である。線分 AC と DE の交点を F，線分 AB と DC を延長した直線の交点を G とする。

次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

（秋田県 2003 年度）



⑴ EG＝ED となることを証明しなさい。

⑵ AB：BC＝5：3 のとき，AF：FD を求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	：

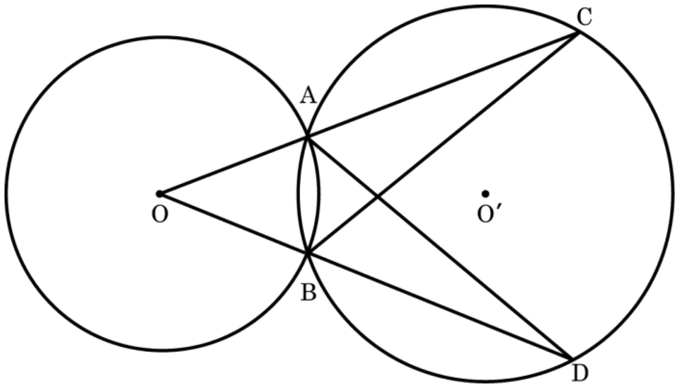
解答
(1)
証明
△ECG と△ECD において
共通な辺だからEC＝EC…①
仮定から∠ECG＝∠ECD＝90°…②
仮定から△CEB はCE＝CB なので∠CEB＝∠CBE
また∠CBE＝∠CED
よって∠CEG＝∠CED…③
①, ②, ③から
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ECG≡△ECD
したがって
合同な三角形の対応する辺の長さは等しいから
EG＝ED
(2) 7：20
解説
⑴
△ECGと△ECDにおいて
共通な辺だから
EC＝EC…①
仮定から
∠ECG＝∠ECD＝90°…②
仮定から
△CEDはCE＝CBなので
∠CEB＝∠CBE
また∠CBE＝∠CED
よって∠CEG＝∠CED…③
①, ②, ③から
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ECG≡△ECD
したがって合同な三角形の対応する辺の長さは等しいから
EG＝ED
⑵
△ABCにおける三平方の定理よりAC＝4
△ABC≡△DEC(仮定)
△ECG≡△ECDより
DE＝5 DG＝8
以上と△ACG∽△DEGから
AG：DG＝AG：8＝AC：DE＝4：5
よってAG＝6.4
AF＝AG－EG＝1.4
以上と△AEF∽△DCF から
AF：FD＝AE：DC＝1.4：4＝7：20

【問 3】

図のように，2つの円 O，O′ が2点 A，B で交わっている。OA，OB の延長と円 O′ との交点をそれぞれ C，D とする。

このとき，AD＝BC であることを証明しなさい。

（栃木県　2003 年度）



解答欄

証明

解答
証明
△OAD と△OBC で
円O の半径は等しいからOA＝OB…①
共通の角だから∠AOD＝∠BOC…②
弧CD に対する円周角の大きさは等しいから
∠CAD＝∠CBD…③
また
∠OAD＝180°－∠CAD…④
∠OBC＝180°－∠CBD…⑤
③，④，⑤より
∠OAD＝∠OBC…⑥
①，②，⑥より
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△OAD≡△OBC
合同な三角形の対応する辺は等しいから
AD＝BC
解説
△OADと△OBCにおいて
円Oの半径は等しいので
OA＝OB…①
共通の角なので
∠AOD＝∠BOC…②
弧CDに対する円周角の大きさは等しいので
∠CAD＝∠CBD…③
また∠OAD＝180°－∠CAD…④
∠OBC＝180°－∠CBD…⑤
③，④，⑤より
∠OAD＝∠OBC…⑥
①，②，⑥より
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△OAD≡△OBC
よって AD＝BC

【問 4】

ある中学校の数学の授業で，生徒がつくった問題を皆で考えた。

次の各問に答えよ。

（東京都　2003 年度）

S さんは，次の問題をつくった。

［S さんの問題］

右の図1で，△ABCは，AC＝BC＝10 cm，

∠ACB＝90° の直角二等辺三角形です。

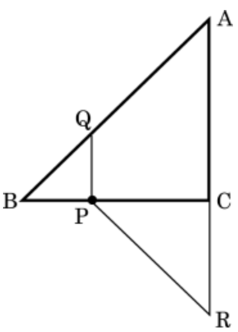
点Pは，△ABCの辺BC上にある点で，点B，Cのいずれにも一致しません。

△QBPは，QP＝BP，∠QPB＝90° の直角二等辺三角形です。

△PRCは，PC＝RC，∠PCR＝90° の直角二等辺三角形です。

BA＋AC＝ℓ cm，BQ＋QP＋PR＋RC＝m cmとするとき，ℓとmの値を比べましょう。

図1



皆は，［S さんの問題］について，いろいろな考え方でℓ と m の値を比べた。

T さんは，BP＝3 cm として，ℓ と m の値をそれぞれ求めて比べた。

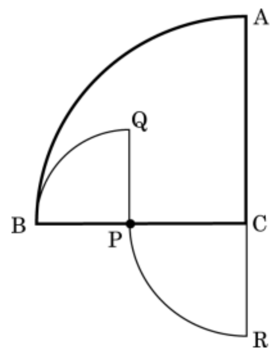
問1．［S さんの問題］で，T さんが決めた BP＝3 cm のとき，ℓ と m の値をそれぞれ求めよ。ただし，答えに根号がふくまれるときは，根号をつけたままで表せ。

U さんは，［S さんの問題］をもとにして，次の問題をつくった。

［U さんの問題］

右の図2で，おうぎ形CABは，半径が10 cm，
中心角が∠ACB＝90° のおうぎ形です。
点Pは，おうぎ形CABの半径BC上にある点で，
点B，Cのいずれにも一致しません。
おうぎ形PQBは，半径がBP，中心角が
∠QPB＝90° のおうぎ形です。
おうぎ形CPRは，半径がPC，中心角が
∠PCR＝90° のおうぎ形です。
$\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{PR}}$が，それぞれ弧BA，弧BQ，
弧PRの長さを表すとき，
$\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$＋AC＝$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}$＋QP＋$\overset{\frown}{\mathrm{PR}}$＋RCであることを確かめましょう。

図2



問2．［U さんの問題］で，$\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$＋AC＝$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}$＋QP＋$\overset{\frown}{\mathrm{PR}}$＋RC であることを証明せよ。

ただし，円周率は π とする。

解答欄

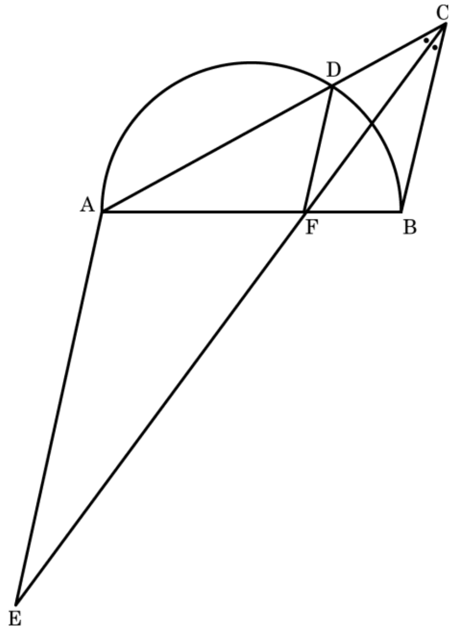
問1	ℓ の値	mの値
問2	証明 $\overset{\frown}{\mathrm{BA}}+\mathrm{AC}=\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}+\mathrm{QP}+\overset{\frown}{\mathrm{PR}}+\mathrm{RC}$	

解答
問1
ℓ の値　$10+10\sqrt{2}$
m の値　$10+10\sqrt{2}$
問2
証明
BP＝r cm とすると$0<r<10$ である。
$\overset{\frown}{BA}+AC=2\pi\times10\times\frac{90}{360}+10$
$=10+5\pi$…①
$\overset{\frown}{BQ}+QP+\overset{\frown}{PR}+RC=2\pi r\times\frac{90}{360}+r+2\pi(10-r)\times\frac{90}{360}+(10-r)$
$=\frac{1}{2}\pi r+r+5\pi-\frac{1}{2}\pi r+10-r$
$=10+5\pi$…②
①, ②より
$\overset{\frown}{BA}+AC=\overset{\frown}{BQ}+QP+\overset{\frown}{PR}+RC$
解説
問1
直角二等辺三角形の辺の比は$1:1:\sqrt{2}$だから
$\ell=BA+AC=10\sqrt{2}+10=10+10\sqrt{2}$
BP＝PQ＝3のときPC＝CR＝7だから
$m=BQ+QP+PR+RC=3\sqrt{2}+3+7\sqrt{2}+7=10+10\sqrt{2}$
問2
BP＝r cmとすると$0<r<10$
$\overset{\frown}{BA}+AC=2\pi\times10\times\frac{90}{360}+10=10+5\pi$…①
$\overset{\frown}{BQ}+QP+\overset{\frown}{PR}+RC$
$=2\pi r\times\frac{90}{360}+r+2\pi(10-r)\times\frac{90}{360}+(10-r)$
$=\frac{1}{2}\pi r+r+5\pi-\frac{1}{2}\pi r+10-r=10+5\pi$…②
①, ②より
$\overset{\frown}{BA}+AC=\overset{\frown}{BQ}+QP+\overset{\frown}{PR}+RC$

【問 5】

図のように，ABを直径とする半円と，半円外の点 C がある。ACと半円の交点を D，A を通り BC に平行な直線と∠ACB の二等分線との交点を E，ECとABの交点を Fとする。AD＝4 cm，DC＝2 cm，BC＝3 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

（長野県 2003 年度）



⑴ AE の長さを求めなさい。

⑵ DF∥AE を証明しなさい。

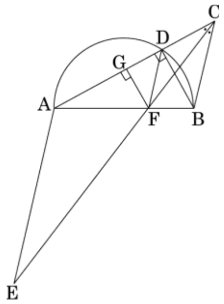
⑶ AF の長さを求めなさい。

⑷ △AEC の面積を求めなさい。

解答欄

⑴	cm
⑵	証明
⑶	cm
⑷	cm^2

解答
(1) 6cm
(2)
証明
△AEF と△BCF において
∠AEF＝∠BCF（平行線の錯角）…①
∠AFE＝∠BFC（対頂角）…②
①②から, 2組の角がそれぞれ等しいので
△AEF∽△BCF
よってEF:CF＝AE:BC＝2:1
またAD:DC＝4:2＝2:1
よってEF:FC＝AD:DC
したがって DF∥AE
(3) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ cm
(4) $6\sqrt{5}$ cm²
解説
(1)
AE∥BCで平行線の錯角は等しいから∠AEC＝∠BCF
仮定より∠BCF＝∠ACF　よって∠AEC＝∠ACF
△AECは二等辺三角形だからAE＝AC＝4＋2＝6cm
(2)
△AEFと△BCFにおいて
平行線の錯角だから∠AEF＝∠BCF…①
対頂角だから∠AFE＝∠BFC…②
①, ②から
2組の角がそれぞれ等しいので
△AEF∽△BCF
よってEF:CF＝AE:BC＝2:1
またAD:DC＝4:2＝2:1
よってEF:FC＝AD:DC
したがってDF∥AE
(3)
DとBを結ぶとABは直径だから∠ADB＝90°
三平方の定理により
$DB^2＝3^2－2^2＝9－4＝5$
$AB^2＝4^2＋5＝16＋5＝21$
ここでAF:FB＝AD:DC＝2:1
よってAF＝$\frac{2}{3}$×AB＝$\frac{2}{3}$×$\sqrt{21}$＝$\frac{2\sqrt{21}}{3}$
(4)
Fから辺ACに垂線FGをひくと
GF:DB＝AF:AB
GF:$\sqrt{5}$＝2:3よりGF＝$\frac{2\sqrt{5}}{3}$



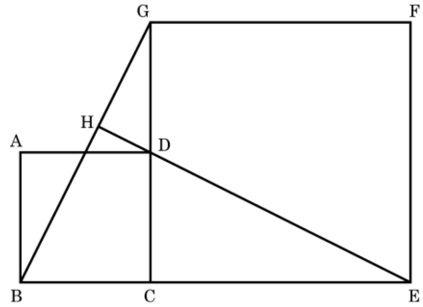
△DFCにおいて辺DCを底辺とみたときの高さは$\frac{2\sqrt{5}}{3}$cmである。
ここで△DFC∽△AECで
相似比はDC:AC＝2:6＝1:3
よって△AECにおいて辺ACを底辺とみたときの高さは$\frac{2\sqrt{5}}{3}$×3＝2$\sqrt{5}$である。
したがって△AECの面積は$\frac{1}{2}$×6×2$\sqrt{5}$＝6$\sqrt{5}$ cm²

【問 6】

図のように，四角形 ABCD と四角形 GCEF はともに正方形で，線分 BG と線分 ED の延長との交点を H とする。このとき，BG⊥EH であることを，次のように証明した。

下の(1), (2)に答えなさい。

（石川県 2003 年度）



証明

△GBC と△EDC において

四角形 ABCD と四角形 GCEF は正方形だから

BC＝DC

GC＝EC

∠BCG＝∠DCE＝90°

よって，[ア] から

△GBC≡△EDC

[イ]

(1) [ア] にあてはまる三角形の合同条件を書きなさい。

(2) [イ] の部分には証明の続きが入ります。それを書きなさい。

解答欄

(1)	
(2)	

解答
(1)
2辺とその間の角がそれぞれ等しい
(2)
△GDH と△EDC において
△GBC≡△EDC より∠DGH＝∠DEC
対頂角は等しいから∠GDH＝∠EDC
2組の角がそれぞれ等しいから△GDH∽△EDC
よって∠GHD＝∠ECD
仮定より∠ECD＝90° だから∠GDH＝90°
したがって BG⊥EH
解説
⑵
△GDHと△EDCにおいて
△GBC≡△EDCだから
∠DGH＝∠DEC
対頂角は等しいから
∠GDH＝∠EDC
2組の角がそれぞれ等しいから
△GDH∽△EDC
よって∠GHD＝∠ECD
仮定から
∠ECD＝90° だから∠GHD＝90°
したがって BG⊥EH

【問 7】

四角形 ABCD で，△ABD＝△ACD＝△BCD となっているとき，この四角形は平行四辺形であることを次のように証明した。空欄に最も適した式を書け。

（愛知県 2003 年度 A）

(証明)	△ABD＝△ACDだから，AD∥BC また，△ACD＝△BC Dだから，$\boxed{}$ したがって，2組の向かいあう辺が，それぞれ平行であるので，四角形ABCDは平行四辺形である。

解答欄

$\boxed{}$

解答
AB∥DC
解説
四角形 ABCD において
△ACD，△BCD の底辺を CD と考えると
△ACD＝△BCD より
△ACD，△BCD の高さが等しくなる。
よって AB∥DC となる。

【問 8】

△ABC で，∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，D から CA に平行な直線をひき，AB との交点を E とする。このとき，AE＝DE となることを次のように証明した。空欄に最も適した式を書け。

（愛知県B 2003 年度）

(証明)　仮定より，∠BAD＝∠CAD　…①

DE∥CAだから，$\boxed{}$ …②

①，②から，△EDAで，∠EAD＝∠EDA

したがって，AE＝DE

解答欄

解答
∠EDA＝∠CAD
解説
AE＝DEを証明するのだから
△EDAが二等辺三角形であればよい。
AE＝DEの二等辺三角形では
∠EAD＝∠EDAになる。
平行線の錯角が等しいことと
ADが∠BACの二等分線であることを利用して
∠EAD＝∠EDA を説明すればよい。

【問 9】

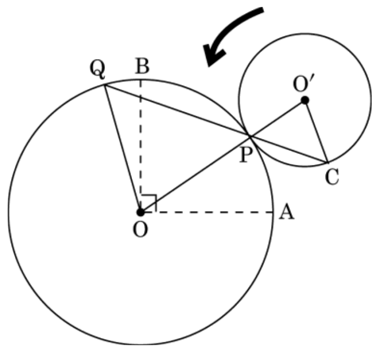
図1のように，半径 2 cm の円 O の周上に，∠AOB＝90° となる2点 A，B をとり，半径 1 cm の円 O′ が，$\overset{\frown}{AB}$ 上を，すべることなく反時計回りに回転していく。このとき，2つの円の接点を P とし，点 P は点 A から点 B まで移動するものとする。

また，円 O′ の周上で，回転する前に点 A と重なっていた点を C とし，回転を始めてからできる線分 CP の延長と円 O との交点を Q とする。

ただし，円 O′ が回転する前は点 Q も点 A に重なっていたものとする。

後の⑴～⑷の問いに答えなさい。

図1



（滋賀県 2003 年度）

⑴ 次の(ア)，(イ)の $\boxed{}$ 内にあてはまる記号や数を書きなさい。

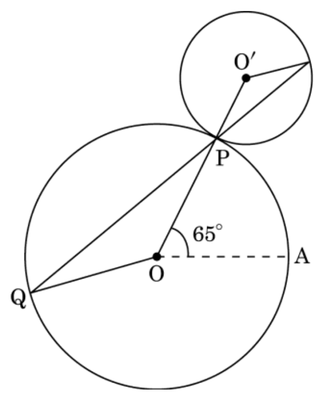
(ア) $\overset{\frown}{AP}$ と $\boxed{①}$ の長さは等しい。

(イ) 点 Q は円 O の周上を $\boxed{②}$ ° 回転する。

⑵ O′ C // OQ であることを証明しなさい。

⑶ 図2のように，∠AOP＝65° のとき，∠OQP の大きさを求めなさい。

図2



⑷ △OQP の面積が最大になるとき，線分 CQ の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	(ア)	①
	(イ)	②
(2)	証明	
(3)		
(4)	cm	

解答

⑴

(ア) $\overset{\frown}{\mathrm{CP}}$

(イ) 270

(2)

証明

△O′ PCと△OPQはともに二等辺三角形となるから

∠O′ CP＝∠O′ PC…①

∠OQP＝∠OPQ…②

また対頂角の性質から

∠O′ PC＝∠OPQ…③

①, ②, ③より

∠O′ CP＝∠OQP

錯角が等しいから

O′ C∥OQ

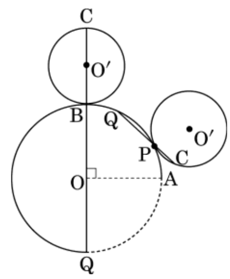
(3) 25°

(4) $3\sqrt{2}$ cm

解説

⑴

(ア)



最初点Aと点Cは重なっていたので$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ と$\overset{\frown}{\mathrm{CP}}$の長さは等しい。

(イ)

右の図のように点Pが点Bに移動したときCは円O′ の直径O′ P上にある。

したがってCPの延長は円Oの中心である点Oを通るのでPQは円Oの直径となる。

∠AOB＝90° だから∠AOQ＝90° なので

点Qは点Aを出発して円周上を270° 回転した点になる。

(別解)

点Pが点Bと重なった場合を考える。

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=2\times2\times\pi\times\dfrac{90}{360}=\pi$, ∠CO′ P＝$x$とおくと$\overset{\frown}{\mathrm{CP}}=2\times1\times\pi\times\dfrac{x}{360}=\pi$, $x=180$

よってC, P, O, Qは一直線上になりQは点Aを出発して円周上を270° 回転した点になる。

⑵

△O′ PCと△OPQはともに二等辺三角形となるから

∠O′ CP＝∠O′ PC…①

∠OQP＝∠OPQ…②

また対頂角の性質から∠O′ PC＝∠OPQ…③

①, ②, ③より

∠O′ CP＝∠OQP

錯角が等しいからO′ C∥OQ

⑶

∠PO′ Cの大きさを求める。$\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=2\times2\pi\times\dfrac{65}{360}=\dfrac{13}{18}\pi$

$\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=\overset{\frown}{\mathrm{PC}}$ なので∠PO′ C＝xとおくと$2\times1\pi\times\dfrac{x}{360}=\dfrac{13}{18}\pi$, $x=130$

また⑵より∠OQP＝∠O′ CP＝$\dfrac{180°-130°}{2}=25°$

⑷

△OQPの底辺をOPとしOPの垂線と$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$との交点をG, OPとの交点をHとすると

GHが最も長くなるのはHとOが重なるときでGH＝2cmのときである。

したがって∠QOP＝90° であり△OQPの高さが2cmのとき面積が最大になる。

∠QOP＝90° でないときは高さは2cmより小さくなる。

このとき△OPQ, △O′ PCは直角二等辺三角形になり

QP＝$2\sqrt{2}$ cm, PC＝$\sqrt{2}$ cm なので

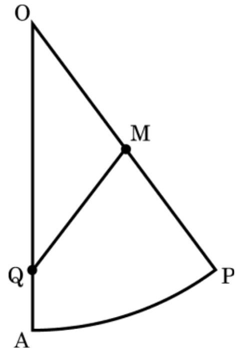
CQ＝$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ cm

【問 10】

図において，図形 OAP は半径が 10 cm で中心角∠AOP が鋭角のおうぎ形である。M は線分 OP の中点である。Q は，線分 OA 上にあって MQ＝MO となる点のうち O と異なる点である。

円周率を π として，次の問いに答えなさい。

（大阪府 2003 年度 後期）



(1) 中心角∠AOP の大きさが 60° であるときの線分 QA の長さを求めなさい。

(2) 下の □ の【証明】は，次の □ の中のことがらを中心角∠AOP の大きさを a° として証明したものである。証明中の ㋐ ～ ㋒ のそれぞれに入れるのに適している角の大きさを a を用いて表しなさい。

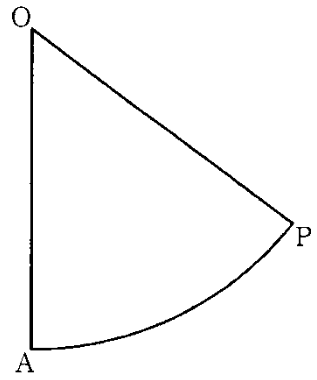
> 中心角∠AOPの大きさが何度であっても，PとQとを結んでできる△OQPの内角∠OQPの大きさは90° である。

> 【証明】
> 中心角∠AOPの大きさをa° とする。
> △MOQはMQ＝MOの二等辺三角形だから ∠MQO＝∠MOQ
> ∠AOP＝a° だから ∠MQO＝a° …①
> よって ∠QMP＝ ㋐ °
> 三角形の内角の和は180° だから ∠MQP＋∠MPQ＝ ㋑ °
> Mは線分OPの中点であり，また，MQ＝MOだから，△MQPはMQ＝MPの二等辺三角形となり
> ∠MQP＝∠MPQ
> よって ∠MQP＝ ㋒ ° …②
> ①，②より ∠OQP＝∠MQO＋∠MQP＝90°

(3) おうぎ形 OAP が解答欄に示した図形であるとき，点 Q を定規とコンパスを使って解答欄の図中に作図しなさい。作図の方法がわかるように，作図に用いた線は残しておくこと。

(4) 2点 P，Q 間の距離が 6 cm のとき，P と Q とを結んでできる△OQP を OA を軸として1回転させてできる円すいの側面積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="3">cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>㋐</td><td></td><td>㋑</td><td></td><td>㋒</td><td></td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="3">cm²</td></tr>
</table>

解答

(1)　5cm

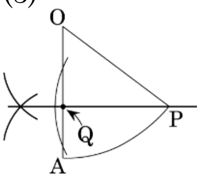
(2)

㋐　$2a$

㋑　$180-2a$

㋒　$90-a$

(3)



(4)　60π　cm^2

解説

⑴

MO＝MQで∠MOQ＝60°だから

△MOQは正三角形になる。

QA＝OA－OQ＝10－5＝5cm

⑵

㋐

三角形の内角と外角の関係より

△MOQにおいて

$\angle QMP=\angle MOQ+\angle MQO=a^\circ+a^\circ=2a^\circ$

㋑

$\angle MQP+\angle MPQ=180^\circ-\angle OMP=180^\circ-2a^\circ$

㋒

$\angle MQP=\angle MPQ=180^\circ-\angle OQP-\angle QOP=180^\circ-90^\circ-a^\circ=90^\circ-a^\circ$

⑶

点 P を通る線分 OA の垂線の作図をして点 Q を求めればよい。

⑷

底面の半径がr，母線の長さがRである円すいの側面積はπRrの式で求められる。

よって$\pi\times10\times6=60\pi$　cm^2

または半径が r，弧の長さがℓ　であるおうぎ形の面積は$\frac{1}{2}r\ell$で求められることを利用してもよい。

このとき$\frac{1}{2}\times2\pi\times6\times10=60\pi$　cm^2

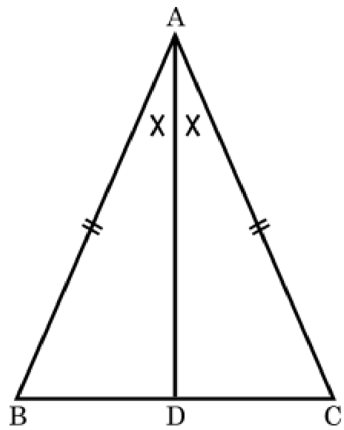
【問 11】

次の①では指示に従って答え，②では $\boxed{}$ に適当な数を書き入れなさい。

（岡山県 2003 年度）

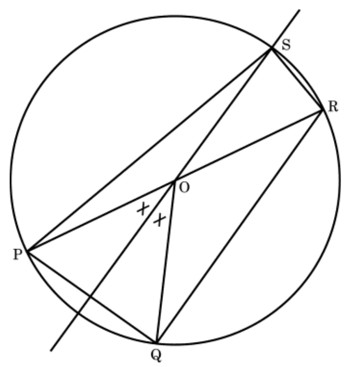
① 図1のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC があり，∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき，AD は辺 BC を垂直に2等分することを証明しなさい。

図1



② 図2のように，半径 2 cm の円 O の円周上にある3点 P，Q，R を頂点とする△PQR がある。ここで，PQ＝2 cm であり，PR は円 O の直径である。点 O と点 Q を結び，∠POQ の二等分線と円 O との交点のうち，点 R に近い方の点を S とし，点 S と点 P，点 S と点 R をそれぞれ結ぶ。このとき，

図2



QR＝ $\boxed{(ア)}$ cm，∠RPS＝ $\boxed{(イ)}$ °であり，円周の長さの $\frac{1}{2}$ より短い弧 $\overset{\frown}{RS}$ の長さは $\boxed{(ウ)}$ cm である。

また，四角形 PQRS の面積は $\boxed{(エ)}$ cm² である。

解答欄

①	証明	
②	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
	(エ)	

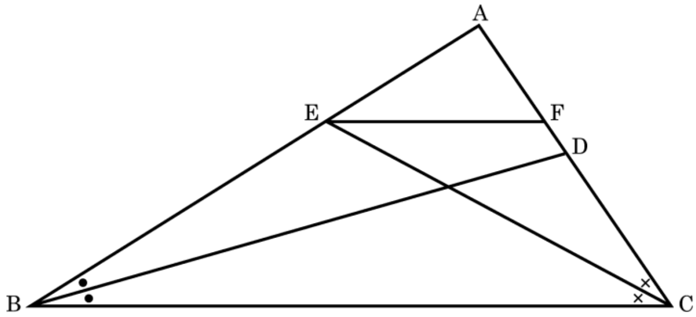
解答
①
証明
△ABD と△ACD において
AB＝AC…(1)
∠BAD＝∠CAD…(2)
ADは共通…(3)
(1), (2), (3)から
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABD≡△ACD
したがってBD＝CD…(4)
また∠ADB＝∠ADC
そして∠ADB＋∠ADC＝180°
だから∠ADB＝90°
すなわちAD⊥BC…(5)
(4), (5)から
AD は辺 BC を垂直に2等分する。
②
(ア)　$2\sqrt{3}$
(イ)　15
(ウ)　$\frac{\pi}{3}$
(エ)　$2+2\sqrt{3}$
解説
①
△ABDと△ACDにおいて
AB＝AC…(1) ∠BAD＝∠CAD…(2) ADは共通…(3)
(1), (2), (3)から
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABD≡△ACD
したがってBD＝CD…(4)
また∠ADB＝∠ADC
そして∠ADB＋∠ADC＝180°　だから∠ADB＝90°
すなわちAD⊥BC…(5)
(4), (5)からADは辺BCを垂直に2等分する。
②
PRは直径だから∠PQR＝90°
△PQRに三平方の定理を用いて
$QR=\sqrt{PR^2-PQ^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ cm
∠POQの二等分線とPQとの交点をHとする。
OP＝OQ＝PQより△OPQは正三角形だから∠POQ＝60°，$\angle ROS=\angle POH=\frac{1}{2}\angle POQ=30°$
円周角と中心角の関係より$\angle RPS=\frac{1}{2}\angle ROS=15°$　$\overset{\frown}{RS}=2\pi\times2\times\frac{30}{360}=\frac{\pi}{3}$ cm
またSからORにひいた垂線をSIとすると△SOIは内角が30°，60°，90° の直角三角形だから
$SI=\frac{1}{2}OS=1$
よって四角形PQRS＝△SPR＋△PQR
$=\frac{1}{2}\times PR\times SI+\frac{1}{2}\times PQ\times QR$
$=\frac{1}{2}\times4\times1+\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}$
$=2+2\sqrt{3}$ cm²

【問 12】

図のように，△ABC において，∠B，∠C の二等分線と辺 AC，AB の交点をそれぞれ D，E，また，点 E を通り，辺 BC に平行な直線と辺 AC との交点を F とする。ただし，AB＞AC とする。

次の⑴～⑶の問いに答えなさい。

（大分県 2003 年度）



⑴ △FEC が二等辺三角形であることを証明しなさい。

⑵ AF＝4 cm，BC＝15 cm のとき，線分 EF の長さを求めなさい。

⑶ AF＝5 cm，FD：DC＝1：5 であり，また，線分 EB が FC より 6 cm 長いとき，線分 AE の長さを求めなさい。

解答欄

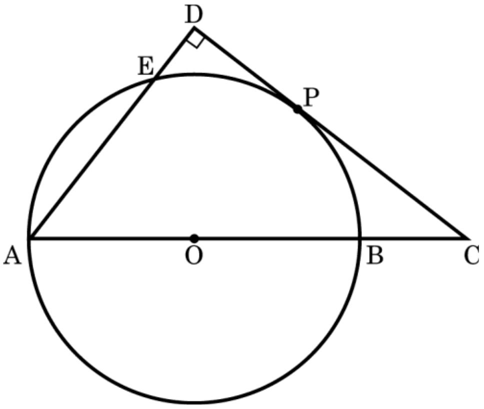
(1)	証明
(2)	cm
(3)	cm

解答
(1)
証明
△FEC において
仮定から
∠FCE＝∠BCE…①
平行線の錯角は等しいから
∠FEC＝∠BCE…②
①，②より
∠FCE＝∠FEC
2つの角がそれぞれ等しいから
△FEC は二等辺三角形である。
(2)　6cm
(3)　8cm
解説
⑴
CEは∠Cの二等分線だから
∠FCE＝∠BCE…①
EF∥BCだから
∠FEC＝∠BCE…②
①，②から
∠FCE＝∠FEC
△FECは2角が等しいから二等辺三角形
⑵
EF∥BCだから
AF：AC＝EF：BC
また⑴からFC＝EFだからEF＝x cmとすると
$4:(4+x)=x:15$
これから$4x+x^2=60$
$x^2+4x-60=0$
$(x+10)(x-6)=0$
$x>0$だから
$x=6$
⑶
直線EFと直線BDの交点をGとすると
⑴と同様にEG＝EBだから
EB＝EG＝EF＋FG＝FC＋FG＝FC＋6
よってFG＝6 cm
またEF∥BCだから
DF：DC＝GF：BC＝6：BC＝1：5からBC＝30 cm
AF：AC＝EF：BCで
EF＝y cmとすると
$5:(5+y)=y:30$
これから$5y+y^2=150$
$y^2+5y-150=0$
$(y+15)(y-10)=0$
$y>0$だから
$y=10$

AE：AB＝AE：(AE＋EB)＝AE：(AE＋16)＝EF：BC＝10：30 から AE＝8 cm

【問 13】

図は，AB を直径とする円 O の周上に点 P を，∠BOP が鋭角になるようにとり，点 P における円 O の接線と AB の延長との交点を C とし，点 A から直線 CP に垂線をひき，直線 CP との交点を D，直線 AD と円 O との交点を E としたものである。このとき，次の1～3の問いに答えなさい。



（鹿児島県 2003 年度）

1．点 D 以外の6つの点 O，A，B，C，E，P のうち，3つの点を適当にとり三角形をつくるとき直角三角形となるものを1つあげよ。

2．∠OAP＝∠EAP であることを証明せよ。

3．円 O の半径を 2 cm，BC の長さを 1 cm とするとき
次の⑴，⑵の問いに答えよ。

⑴ 線分 AD の長さは何 cm か。

⑵ 四角形 DEOP の面積は何 cm^2 か。

解答欄

1		
2	証明	
3	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答

1　△ABP

2

証明

△OAP はOA＝OP の二等辺三角形であるから

∠OAP＝∠OPA…①

円の接線は接点を通る半径に垂直であるから∠CPO＝90°

また∠ADC＝90° であるからOP ∥AD

平行線の錯角は等しいから

∠OPA＝∠EAP…②

①，②より∠OAP＝∠EAP

3

⑴ $\frac{10}{3}$ cm

⑵ $\frac{8}{9}\sqrt{5}$ cm^2

解説

1

DCは円Oの接線だから∠OPC＝90° で△OPCは直角三角形

またABは円Oの直径だから∠AEB＝∠APB＝90° で△AEB，△APBも直角三角形である。

2

△OAPはOA＝OPの二等辺三角形だから∠OAP＝∠OPA…①

円の接線は接点を通る半径に垂直だから

∠CPO＝90° で∠ADC＝90° だからOP ∥AD

平行線の錯角は等しいから∠OPA＝∠EAP…②

①，②から

∠OAP＝∠EAP

3

⑴

OP ∥ADだから

OP：OC＝AD：AC

よって2：(2＋1)＝AD：(2＋2＋1)

3AD＝10，AD＝$\frac{10}{3}$ cm

⑵

$DC^2=AC^2-AD^2=5^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{125}{9}$

DC＞0だから

$DC=\frac{\sqrt{125}}{3}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$ cm

$DP=\frac{2}{5}$

$DC=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ cm

点OからAEに垂線OHをひくと

$AE^2=(2AH)^2=4OA^2-4OH^2=4\left\{2^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2\right\}=4\left(4-\frac{20}{9}\right)=\frac{64}{9}$

AE＞0だから

$AE=\frac{8}{3}$ cm

よって求める面積は

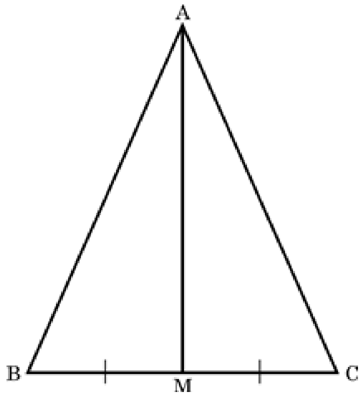
$(DE+OP)\times DP\div 2=\left(\frac{10}{3}-\frac{8}{3}+2\right)\times\frac{2\sqrt{5}}{3}\div 2=\frac{8}{9}\sqrt{5}$ cm^2

【問 14】

図Ⅰのように，AB＝ACの二等辺三角形ABCにおいて，辺BCの中点をMとする。このとき，AM⊥BC であることを△ABM と△ACM が合同であることを用いて，次のように証明した。$\boxed{}$ をうめて証明を完成させなさい。

（沖縄県 2003年度）

図Ⅰ



[証明]

△ABMと△ACMにおいて

$\boxed{}$

△ABM≡△ACM

よって，∠AMB＝∠AMC

また，∠AMB＋∠AMC＝180° だから

∠AMB＝90°

ゆえに，AM⊥BCである。

解答欄

△ABMと△ACMにおいて

$\boxed{}$

△ABM≡△ACM

解答
証明
△ABM と△ACM において
AB＝AC （仮定）…①
BM＝CM （仮定）…②
AM＝AM （共通）…③
①，②，③より
3辺の長さがそれぞれ等しいので
△ABM≡△ACM
証明
△ABM と△ACM において
AB＝AC…①
BM＝CM…②
∠ABM＝∠ACM…③
①，②，③より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABM≡△ACM
解説
例1
AB＝AC(仮定)…①
BM＝CM(仮定)…②
AM＝AM(共通)…③
①，②，③より
3辺の長さがそれぞれ等しいので
△ABM≡△ACM
例2
AB＝AC…①
BM＝CM…②
∠ABM＝∠ACM…③
①，②，③より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABM≡△ACM