

6.空間図形 球に関する問題(長さ・面積・体積ほか)

【2002年度出題】

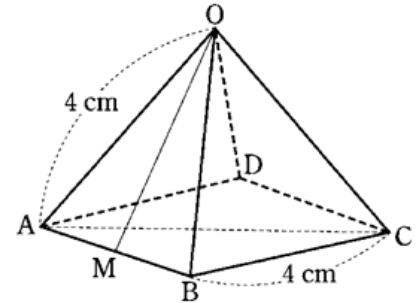
【問 1】

図1～図3のように、5つの点 O, A, B, C, D を頂点とする正四角すい $OABCD$ があり、底面の正方形 $ABCD$ の1辺の長さは 4 cm である。また、 $OA=OB=OC=OD=4\text{ cm}$ で、点 M は辺 AB の中点である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2002 年度)

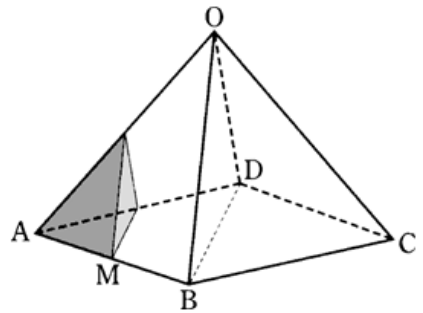
問1. 線分 OM の長さは何 cm か。

図1



問2. 三角形 OAC はどんな形の三角形か。その名称を答えよ。

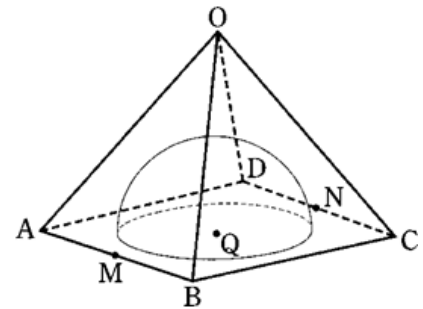
図2



問3. 図2のように、正四角すい $OABCD$ を、点 M を通り三角形 OBD に平行な平面で切ってできる2つの立体のうち、頂点 A を含む立体の体積は何 cm^3 か。

図3

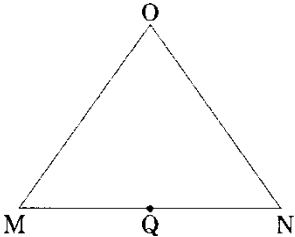
問4. 図3のように、正四角すい $OABCD$ の内部に半球がある。半球の底面(円)は、正四角すい $OABCD$ の面 $ABCD$ 上にあり、底面以外の面(球面)は、正四角すいの4つの面 OAB, OBC, OCD, ODA のすべてと接している。ただし、点 N は辺 CD の中点とし、点 Q は半球の底面の中心である。ここで、半球とは球をその中心を通る平面で2つに分けたときの一方の部分である。このとき、次の(1)、(2)に答えよ。



(1) 解答欄の図は正四角すい $OABCD$ を3点 O, M, N を通る平面で切ったときの切り口の図形の周を示している。この図に半球を同じ平面で切ったときの切り口をかき入れ、その図形を斜線で示せ。ただし、円をかく場合は、コンパスを用いよ。

(2) 半球の半径の長さは何 cm か。

解答欄

問1	cm	
問2	三角形	
問3	cm ³	
問4	(1)	
	(2)	cm

解答

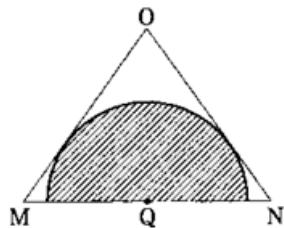
問1 $2\sqrt{3}$ cm

問2 直角二等辺

問3 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ cm³

問4

(1)



(2) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ cm

解説

問1

AM=2, $\angle OMA=90^\circ$ であるから

三平方の定理より $OM=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ cm

問2

OA=OC=4 cm

また△ABC は直角二等辺三角形だから

AC=4 $\sqrt{2}$ cm

AC²=OA²+OC² が成り立つから $\angle AOC=90^\circ$

よって△OAC は直角二等辺三角形

問3

頂点 A を含む立体は三角すい OABD と相似であり
相似比は AM:AB=1:2 である。

よってこれらの図形の体積の比は 1³:2³=1:8

また BD=4 $\sqrt{2}$ で BD の中点を P とすると

△ABP, △OBP が直角二等辺三角形であることより

AP=OP=2 $\sqrt{2}$

よって三角すい OABD の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

よって求める立体の体積は $\frac{1}{8} \times \frac{16}{3}\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \text{ cm}^3$

問4

(1)

半球が面 OAB, OCD と接していることより

半球の切り口は

右の図のように点 Q を中心とし辺 OM, ON と接する半円となる。

(2)

右の図のように辺 OM と半円との接点を R とすると

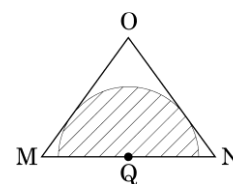
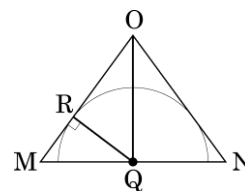
$\angle QRM=90^\circ$

$\angle OQM=\angle QRM$, $\angle OMQ=\angle QMR$ より

△OQM $\sim$ △QRM

よって OQ:QR=OM:QM

$$2\sqrt{2}:QR=2\sqrt{3}:2QR=\frac{2\sqrt{2}\times 2}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6} \text{ cm}$$



【2003年度出題】から【2010年度出題】

出題無し

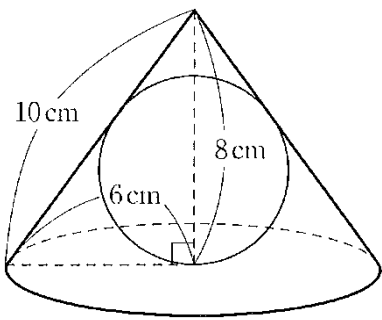
【2011年度出題】

【問 2】

図のように、底面の半径が 6 cm、高さが 8 cm、母線が 10 cm の円すいがあり、円すいの底面と母線に接した球がある。次の(1)、(2)に答えなさい。

(青森県 2011 年度 後期)

(1) この円すいの体積を求めなさい。



(2) この球の半径を求めなさい。

解答欄

(1)	cm ³
(2)	cm

解答

(1) $96\pi \text{ cm}^3$

(2) 3cm

解説

(2)

球の半径を $r \text{ cm}$ とする。

相似の関係を利用して

$$r:6=(8-r):10$$

$$10r=6(8-r)$$

$$10r=48-6r$$

$$16r=48$$

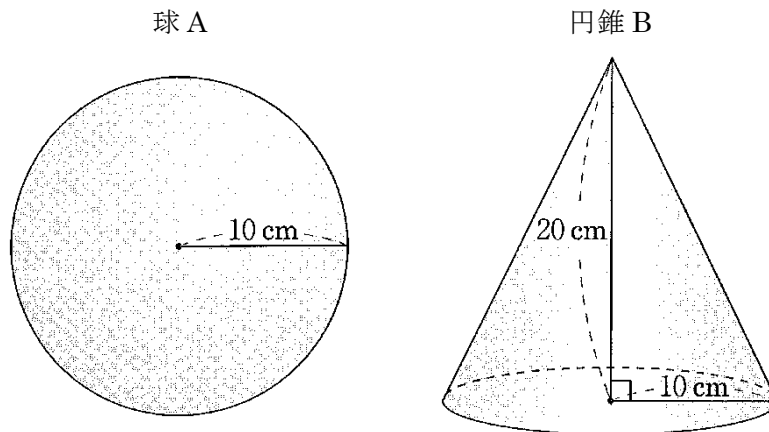
$$r=3 \text{ cm}$$

【2012年度出題】

【問 3】

下の図のように、半径が 10 cm の球 A と、底面の半径が 10 cm、高さが 20 cm の円錐 B があります。球 A の体積と円錐 B の体積にはどのような関係がありますか。正しいものを、ア～エから選びなさい。

(北海道 2012 年度)



- ア 球 A の体積は、円錐 B の体積と等しい。
- イ 球 A の体積は、円錐 B の体積の 2 倍である。
- ウ 球 A の体積は、円錐 B の体積の 3 倍である。
- エ 球 A の体積は、円錐 B の体積の 4 倍である。

解答欄

解答

イ

解説

球 A の体積は

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{4000}{3} \pi \text{ cm}^3$$

円錐 B の体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times 20 = \frac{2000}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\frac{4000}{3} \pi \div \frac{2000}{3} \pi = 2 \text{ より}$$

球 A の体積は円錐 B の体積の 2 倍なので

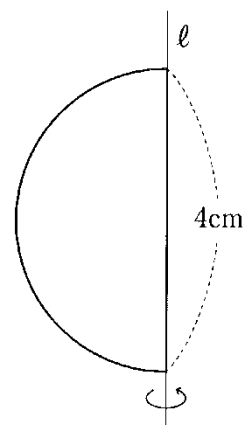
選択肢はイ

【問 4】

次の図のような半円を、直線 ℓ を軸として回転させてできる立体の体積を求めなさい。

ただし、円周率は π とします。

(岩手県 2012 年度)



解答欄

cm^3

解答

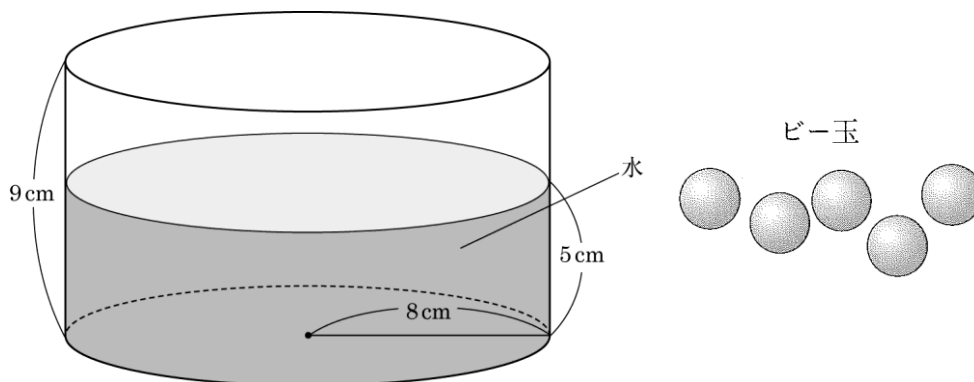
$$\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$$

【問 5】

底面の半径が 8 cm 、高さが 9 cm の円柱の形をした容器を水平な台に置き、下の図のように底から 5 cm の高さまで水を入れた。次の問いに答えなさい。

ただし、円周率は π とし、容器の厚さは考えないものとする。

(山形県 2012 年度)



(1) 容器に入っている水の体積を求めなさい。

(2) この容器に、半径が 1 cm の球の形をしたビー玉を、静かに何個か沈めたところ、水面がちょうど 1 cm 上昇した。沈めたビー玉の個数を求めなさい。

ただし、沈めたビー玉は全体が水中に収まっているものとする。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	個

解答

(1) $320\pi\text{ cm}^3$

(2) 48 個

解説

ビー玉を x 個入れたとすると

ビー玉 x 個分の体積が円柱の中の水位が上昇した分の体積と等しいので

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 \times x = \pi \times 8^2 \times 1$$

これを解いて

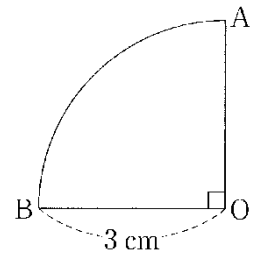
$x = 48$ 個

【問 6】

右の図のような、半径 3 cm で中心角が 90° のおうぎ形 OAB があります。このおうぎ形 OAB を、線分 AO を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

ただし、円周率は π とします。

(埼玉県 2012 年度)



解答欄

cm^3

解答

$$18\pi \text{ cm}^3$$

解説

おうぎ形 OAB を AO を軸として 1 回転させてできる立体は
半径 3 cm の半球となるから

$$\text{その体積は } \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 \div 2 = 18\pi \text{ cm}^3$$

【問 7】

次の文中の に入る最も適当なものを、下のア～エのうちから一つ選び、符号で答えなさい。

(千葉県 2012 年度 後期)

半径 6 cm の球がある。この球の体積は、円周率を π とすると、 cm^3 となる。

ア 48π イ 144π ウ 162π エ 288π

解答欄

解答

エ

解説

半径 r の球の体積は $\frac{4}{3} \pi r^3$ より

半径 6 cm の球の体積は

$$\frac{4}{3} \pi \times 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$$

【問 8】

図2の容器は、底面が半径 6 cm の円である円柱の形をしている。この容器は水平に置かれ、底面から 10 cm の高さまで水が入っている。この容器に図3のように半径 3 cm の鉄球を静かに沈めたところ、水面が上昇した。このときの底面から水面までの水の高さを求めなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(静岡県 2012年度)

図2

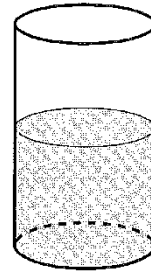
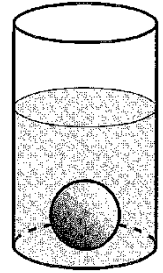


図3



解答欄

cm

解答

11 cm

解説

鉄球を入れた容器の底面から水面までの高さを x cm とする。

上昇した分の体積と鉄球の体積は等しいので

$$\pi \times 6^2 \times (x - 10) = \frac{4}{3} \pi \times 3^3$$

両辺を 36π でわって

$$x - 10 = 1$$

$$x = 11 \text{ cm}$$

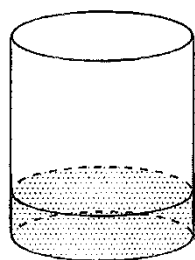
【問 9】

図1で、A は水が入った円柱の容器、B は円すい形の空の容器で、A、B ともに底面が水平になるように置いてある。容器 A の水を容器 B にすべて入れ、その中に球の形をしたおもりを入れたところ、図2のように、ちょうど球が水面にかくれた。

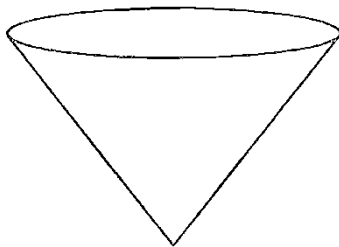
容器 A の底面の半径が 5 cm、容器 B の底面の半径が 9 cm、高さがともに 12 cm、球の半径が 3 cm のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(愛知県 2012 年度 B)

図1

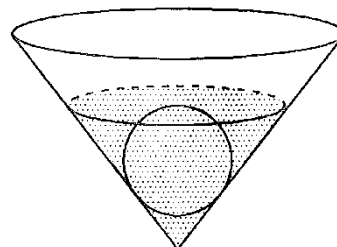


A



B

図2



(1) 球の体積は何 cm^3 か、求めなさい。

(2) 図1の容器 A の水面の高さは何 cm か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1) $36\pi \text{ cm}^3$

(2) $\frac{12}{5} \text{ cm}$

解説

(1)

球の体積は $\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$

(2)

問題の図2において球の中心と円すいの頂点を通る面で切断する。

その切断面において球の中心を O, 円すいの頂点を P, 球と円すいの側面との交点のうち 1 つを Q とする。

$\triangle OPQ$ は容器の底面の半径と高さでできる直角三角形と相似になるから

$PQ:OQ=12:9=4:3$

$OQ=3 \text{ cm}$ より

$PQ:3=4:3$

$PQ=4 \text{ cm}$

$\triangle OPQ$ において

三平方の定理より $OP=\sqrt{3^2+4^2}=5 \text{ cm}$

よって図2に入っている水の高さは $5+3=8 \text{ cm}$

底面の半径: $8=3:4$

底面の半径 $=6 \text{ cm}$

体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi \text{ cm}^3$

容器 A に入っている水の水面までの高さを $x \text{ cm}$ とすると

水の体積の関係より

$\pi \times 5^2 \times x = 96\pi - 36\pi$

$25\pi x = 60\pi$

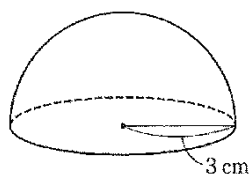
$x = \frac{12}{5} \text{ cm}$

【問 10】

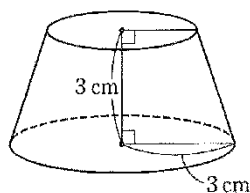
下の図で、立体Aは、半径 3 cm の球を、中心を通る平面で切った半球であり、立体Bは、底面が半径 3 cm の円で、高さが 9 cm の円すいを、底面から高さ 3 cm のところで、底面に平行な平面で切ったときの、下側の立体である。立体Aと立体Bの体積を比べたとき、どちらの立体の方が何 cm^3 大きいか書け。(円周率は π を用いること。)

(愛媛県 2012 年度)

立体A



立体B



解答欄

立体	の方が	cm^3 大きい。
----	-----	--------------------

解答

立体 B の方が $\pi \text{ cm}^3$ 大きい。

解説

立体Aの半球の体積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3$$

立体Bにおいて

切り取った分の円すいの底面の半径を $r \text{ cm}$ とする。

平行線と線分の比の定理より

$$r:3=(9-3):9$$

$$9r=18$$

$$r=2$$

よって立体Bの体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 9 - \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times (9-3) = 19\pi \text{ cm}^3$$

$$19\pi - 18\pi = \pi \text{ より}$$

立体Bの方が $\pi \text{ cm}^3$ 大きい。

【問 11】

半径 6 cm の球の体積を求めよ。ただし、円周率は π を用いること。

(高知県 2012 年度 前期)

解答欄

cm^3

解答

$$288\pi \text{ cm}^3$$

【問 12】

半径 2 cm の球の表面積を求めなさい。

(佐賀県 2012 年度 特色)

解答欄

cm^2

解答

$$16\pi \text{ cm}^2$$

【問 13】

表面積が $16\pi\text{ cm}^2$ である球の半径は何 cm か。

(長崎県 2012 年度)

解答欄

cm

解答

2 cm

解説

球の表面積は $4\pi r^2$ より

$$4\pi r^2 = 16\pi$$

$$r^2 = 4$$

$r > 0$ より

$$r = 2\text{ cm}$$

【問 14】

半径 3 cm の球の体積は何 cm^3 か。

(長崎県 2012 年度)

解答欄

cm^3

解答

$$36\pi\text{ cm}^3$$

解説

半径 r の球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ より

$$\text{求める体積} = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi\text{ cm}^3$$

【問 15】

表面積が $16\pi\text{ cm}^2$ である球の半径は何 cm か。

(長崎県 2012 年度)

解答欄

cm

解答

2 cm

解説

球の表面積は $4\pi r^2$ より

$$4\pi r^2 = 16\pi$$

$$r^2 = 4$$

$r > 0$ より

$$r = 2\text{ cm}$$

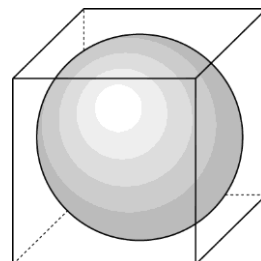
【2013年度出題】

【問 16】

右の図のように、立方体に球がぴったり入っている。

立方体の 1 つの面の面積が 16 cm^2 のとき、この球の体積を求めなさい。

(福島県 2013 年度)



解答欄

cm^3

解答

$$\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$$

解説

立方体の 1 つの面は正方形だから 1 辺の長さは $\sqrt{16} = 4 \text{ cm}$

よってこの球の半径は 2 cm だから

$$\text{求める体積は } \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$$

【問 17】

半径が 3 cm の球と体積の等しい円柱がある。この円柱の底面の半径が 4 cm のとき、円柱の高さを求めなさい。

(千葉県 2013 年度 前期)

解答欄

cm

解答

$$\frac{9}{4} \text{ cm}$$

解説

底面の半径が 4 cm の円柱の高さを $x \text{ cm}$ とすると
その体積が半径 3 cm の球の体積と等しいことより

$$\pi \times 4^2 \times x = \frac{4}{3} \pi \times 3^3 \quad x = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

【問 18】

円周率を π とする。表面積が $100\pi\text{ cm}^2$ の球の半径を求めなさい。

(徳島県 2013 年度)

解答欄

cm

解答

5cm

解説

球の半径を $r\text{ cm}$ とする。

$$4\pi r^2 = 100\pi$$

$$r^2 = 25$$

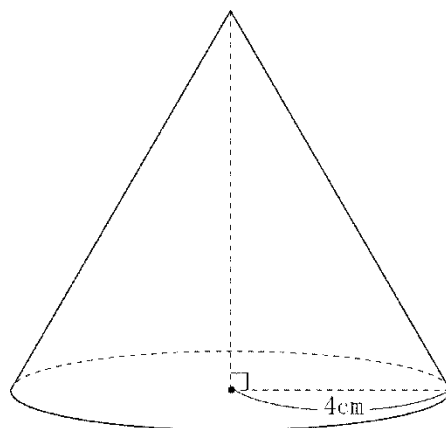
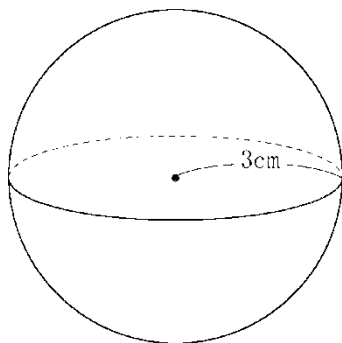
$r > 0$ より

$$r = 5\text{cm}$$

【問 19】

下の図のように、半径 3 cm の球と、底面の半径が 4 cm の円すいがある。これら 2 つの立体の体積が等しいとき、円すいの高さは何 cm になるか、求めなさい。

(佐賀県 2013 年度 特色)



解答欄

cm

解答

$$\frac{27}{4} \text{ cm}$$

解説

円錐の高さを $h\text{ cm}$ とすると
体積が等しいことより

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times h$$

$$h = \frac{27}{4} \text{ cm}$$

【2014年度出題】

【問 20】

たろうさんは、正四角柱と立方体の中に球をそれぞれ 1 つずつ入れ、球が動くようすを観察し、動くことができる部分全体を立体として考え、体積を求めることにしました。

〔観察1〕

右の図1のように、底面の 1 辺が 2、高さが 4 の正四角柱を置き、その中に半径 1 の球を入れます。球は正四角柱の内部を上下に動くことができます。球が動くことができる部分全体を立体として考え、これを立体 A とします。

右の図2は、立体 A の投影図です。

たろうさんは、立体 A の体積の求め方を、次のように考えました。

〔たろうさんの考え〕

立体 A の体積が、次の 2 つの体積の和で求められることに気づきました。

立体 A の体積は、

底面の半径が 1、高さが 2 の円柱 1 個分の体積と、

半径 1 の球 1 個分の体積

の和で求めることができます。

図1

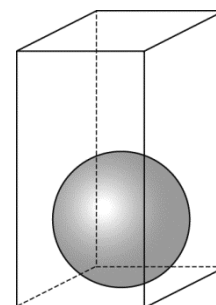
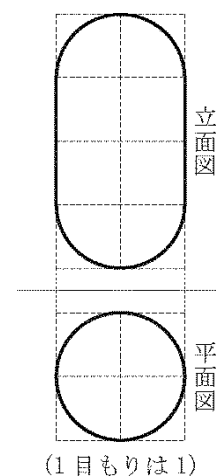


図2



〔観察2〕

次の図3のように、1 辺が 4 の立方体を置き、その中に半径 1 の球を入れます。球は立方体の内部を動くことができます。球が動くことができる部分全体を立体として考え、これを立体 B とします。

図3

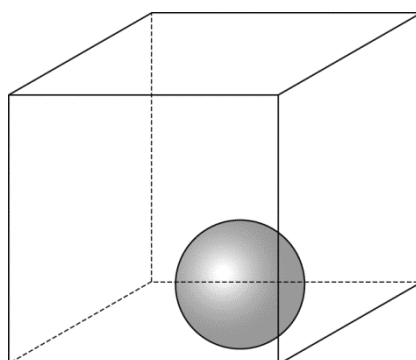
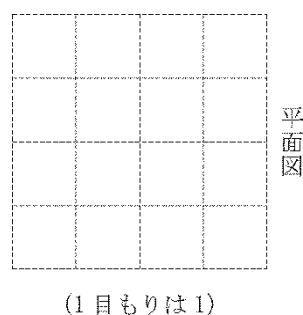


図4



このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(岩手県 2014 年度)

問1 立体 B の平面図を、図4に定規とコンパスを用いて、作図しなさい。

問2 たろうさんは、立体 B の体積の求め方を、次のように考えました。

[たろうさんの考え]

立体 B の体積が、次の 4 つの体積の和で求められることに気づきました。

立体 B の体積は,

1 辺が 2 の立方体 1 個分の体積と,

底面の 1 辺が 2, 高さが 1 の正四角柱	ア	個分の体積と,
-------------------------	---	---------

底面の半径が 1, 高さが 2 の円柱	イ	個分の体積と,
---------------------	---	---------

半径 1 の球	ウ	個分の体積
---------	---	-------

の和で求めることができます。

このとき、

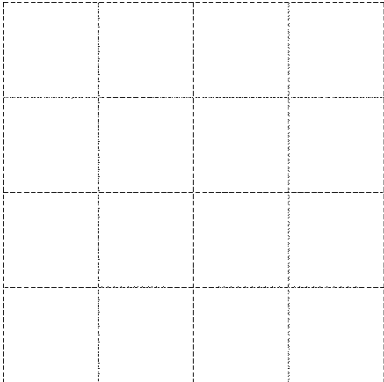
ア

 ～

ウ

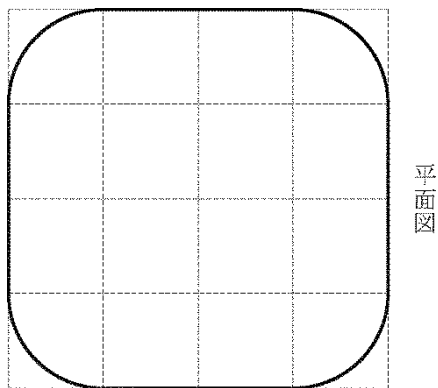
 にあてはまる数を答えなさい。

解答欄

問1			平面図
問2	ア		
	イ		
	ウ		

解答

問1



問2

ア 6

イ 3

ウ 1

解説

問1

真上から見て球が動ける範囲を考える。

問2

立体 B は中心部の 1 辺が 2 の立方体が 1 個。

その立方体の各面にくっついている面を底面とすると

1 辺が 2 の正方形を底面とし高さが 1 の正四角柱が 6 個。

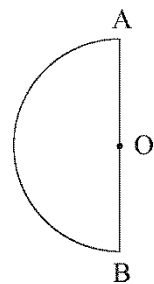
その正四角柱の間にある底面の半径が 1 高さが 2 の円柱の $\frac{1}{4}$ のものが 12 個で円柱 3 個分。

4 隅の半径 1 の球の $\frac{1}{8}$ のものが 8 個で球 1 個分。

【問 21】

右の図のように、長さが 6 cm の線分 AB を直径とする半円 O がある。この半円 O を、線分 AB を軸として 1 回転してできる立体の表面積を求めなさい。ただし、円周率を π とする。

(秋田県 2014 年度)



解答欄

cm^2

解答

$36\pi \text{ cm}^2$

解説

回転してできる球の半径は 3 cm だから

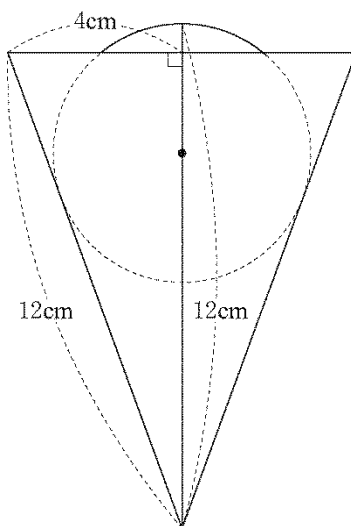
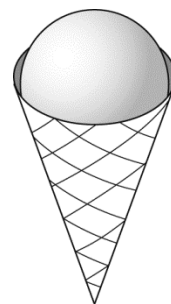
表面積は $4\pi \times 3^2 = 36\pi \text{ cm}^2$

【問 22】

右の図のように、円錐の容器の内側の面にぴったりつくように球を入れました。この円錐の容器の底面の半径は 4 cm 、母線の長さは 12 cm です。このとき、この円錐の容器の頂点から球の最上部までの高さは、母線の長さと等しく 12 cm になりました。

下の図は、そのときの様子を表しています。この球の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とし、円錐の容器の厚さは考えないものとします。

(埼玉県 2014 年度)



解答欄

cm^3

解答

$36\pi\text{ cm}^3$

解説

球の半径を $r\text{ cm}$ とする。

この断面図において球と容器が接する点に半径をひくと

半径と接線は垂直になるので

相似な三角形の関係より

$$r:4=(12-r):12$$

$$4(12-r)=12r$$

$$16r=48$$

$$r=3\text{ cm}$$

$$\text{求める球の体積は } \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi\text{ cm}^3$$

【問 23】

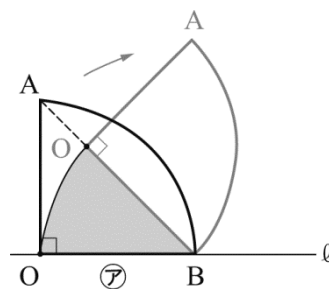
半径が 1 cm で中心角が 90° のおうぎ形 OAB がある。このとき、次の問1、問2に答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(山梨県 2014 年度)

問1 図1、2において、おうぎ形 OAB は最初に直線 ℓ 上に半径 OB がくるような㊦の位置にあるとする。

このとき、次の (1)、(2) に答えなさい。

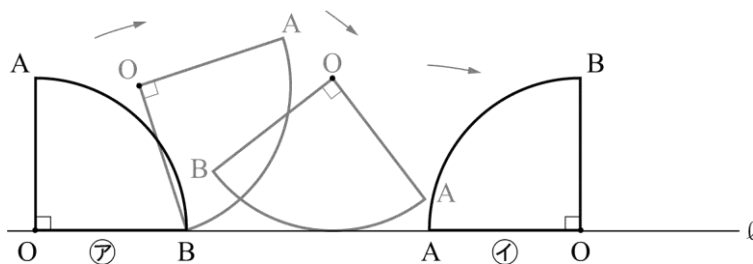
図1



- (1) おうぎ形 OAB を、点 B を中心として時計回りに回転移動させる。点 O が㊦の位置にあったおうぎ形 OAB の弦 AB 上にくるまで回転させたとき、半径 OB の動いたあとは図1の  で示したおうぎ形になる。この  で表されたおうぎ形の面積を求めなさい。

- (2) 図2のように、おうぎ形 OAB を、直線 ℓ 上をすべらないように回転させながら、㊦の位置から㊩の位置まで移動させる。このとき、点 O がえがいた線全体の長さを求めなさい。

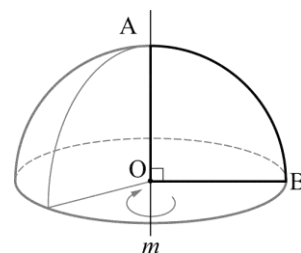
図2



問2 図3のように、おうぎ形 OAB において、半径 OA を通る直線 m を考える。

このとき、次の (1)～(3) に答えなさい。

図3



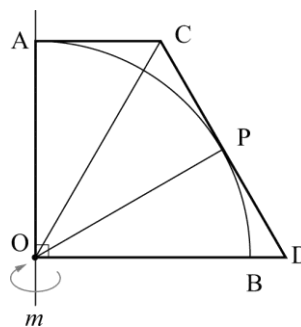
- (1) おうぎ形 OAB を直線 m を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。

- (2) 図4のように、図3のおうぎ形 OAB がちょうど入る台形 $AODC$ を考える。

ただし、辺 CD は $\widehat{AB}$ と点 P で接し、 $AC \parallel OD$ である。

$\triangle OAC \equiv \triangle OPC$ となることを証明して、 $CA = CP$ を示しなさい。

図4



- (3) 図4において、 $\angle ODC = 60^\circ$ のとき、台形 $AODC$ を直線 m を軸として1回転させてできる立体を考える。線分 CD が動いてできる面の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm^2	
	(2)	cm	
問2	(1)	cm^3	
	(2)	〔証明〕	
	(3)	cm^2	

解答

問1

(1) $\frac{1}{8}\pi \text{ cm}^2$

(2) $\frac{3}{2}\pi \text{ cm}$

問2

(1) $\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3$

(2)

〔証明〕

$\triangle OAC$ と $\triangle OPC$ において

$AC \parallel OD$ から

$\angle OAC = 90^\circ \dots (\text{ア})$

CD は $\widehat{AB}$ に点 P で接しているから

$\angle OPC = 90^\circ \dots (\text{イ})$

(ア), (イ)より

$\angle OAC = \angle OPC = 90^\circ \dots \textcircled{1}$

OA と OP はおうぎ形の半径だから

$OA = OP \dots \textcircled{2}$

また OC は共通 $\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ より $\triangle OAC$ と $\triangle OPC$ はともに直角三角形で

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから

$\triangle OAC \equiv \triangle OPC$

合同な三角形の対応する辺は等しいから

$CA = CP$

(3) $2\pi \text{ cm}^2$

解説

問1

(1)

$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形だから $\angle OBA = 45^\circ$

よって求める面積は $\pi \times 1^2 \times \frac{45}{360} = \frac{1}{8} \pi \text{ cm}^2$

(2)

点 O がえがいた線全体の長さは

$$2\pi \times 1 \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 1 \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 1 \times \frac{90}{360} = \frac{3}{2} \pi \text{ cm}$$

問2

(1)

できる立体は半径 1 cm の半球だから

その体積は $\frac{4}{3} \pi \times 1^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \pi \text{ cm}^3$

(2)

$\triangle OAC$ と $\triangle OPC$ において

直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいことから合同を導き $CA = CP$ を示す。

(3)

直線 m と直線 CD の交点を Q とする。

$AC \parallel OD$ より

$\angle QCA = 60^\circ$

よって $\angle OCA = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$

$\triangle OAC$ と $\triangle OPD$ において

$OA = OP$, $\angle OAC = \angle OPD = 90^\circ$, $\angle COA = \angle DOP = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OAC \equiv \triangle OPD$

また $\triangle OAC$ と $\triangle QAC$ についても

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OAC \equiv \triangle QAC$

$OA = 1 \text{ cm}$ より

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, \quad OC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$\triangle QOD$ において

$$QD = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$\triangle QOD$ を直線 m を軸として1回転させてできる立体を展開したときの中心角を x° とすると

$$2\pi \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{x}{360} = 2\pi \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$x = 180^\circ$

$$\text{よって求める面積は } \pi \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 \times \frac{180}{360} - \pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \times \frac{180}{360} = 2\pi \text{ cm}^2$$

【問 24】

図1で、Pは、円柱を体積がちょうど半分になるように斜めに平面で切った立体である。この立体Pの中に、球が入っている。図2は、その投影図である。

図2の四角形 ABCD は、 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ の台形で、立面図の円は台形の4辺に接している。

$AB = 6 \text{ cm}$, $DC = 12 \text{ cm}$ のとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(愛知県 2014 年度 A)

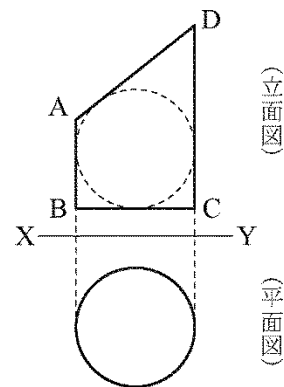
(1) 図2の辺 AD の長さは何 cm か、求めなさい。

(2) 立体Pの体積は球の体積の何倍か、求めなさい。

図1



図2



解答欄

(1)	cm
(2)	倍

解答

(1) 10 cm

(2) $\frac{27}{16}$ 倍

解説

(1)

立面図において

円の中心を O とし円 O と AB , BC , CD , DA との接点をそれぞれ E , F , G , H とする。

球の半径を r cm とすると

$DH=DG=12-r$ cm, $AH=AE=6-r$ cm と表せる。

A から CD に垂線をひき交点を K とすると

$\triangle ADK$ において

$DK=12-6=6$ cm, $AK=2r$ cm, $AD=12-r+6-r=18-2r$ cm と表せる。

三平方の定理より $(18-2r)^2=(2r)^2+6^2$

これを解いて

$r=4$ cm

よって $AD=18-2\times 4=10$ cm

(2)

球の体積は $\frac{4}{3}\pi\times 4^3=\frac{256}{3}\pi$ cm³

立体 P の体積は $\pi\times 4^2\times (6+12)\times \frac{1}{2}=144\pi$ cm³

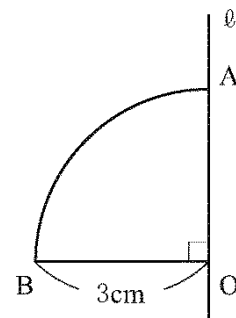
よって $144\pi\div \frac{256}{3}\pi=\frac{27}{16}$ 倍

【問 25】

右の図のおうぎ形 OAB は、半径 3 cm、中心角 90° である。このおうぎ形 OAB を、AO を通る直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体の体積と表面積を求めなさい。

ただし、円周率は π とする。

(和歌山県 2014 年度)



解答欄

体 積	cm^3
表 面 積	cm^2

解答

体積 $18\pi \text{ cm}^3$

表面積 $27\pi \text{ cm}^2$

解説

できる立体は半径 3 cm の半球になる。

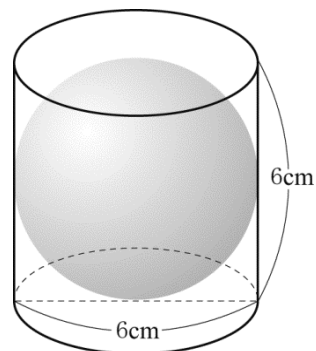
その体積は $\frac{4}{3}\pi \times 3^3 \times \frac{1}{2} = 18\pi \text{ cm}^3$

表面積は $4\pi \times 3^2 \times \frac{1}{2} + \pi \times 3^2 = 18\pi + 9\pi = 27\pi \text{ cm}^2$

【問 26】

右の図のように、底面の直径と高さがともに 6 cm の円柱の中にちょうどはいる球がある。このとき、この球の体積を求めなさい。

(鳥取県 2014 年度)



解答欄

cm^3

解答

$$36\pi\text{ cm}^3$$

解説

球の半径は $6 \div 2 = 3\text{ cm}$

$$\text{よって球の体積は } \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi\text{ cm}^3$$

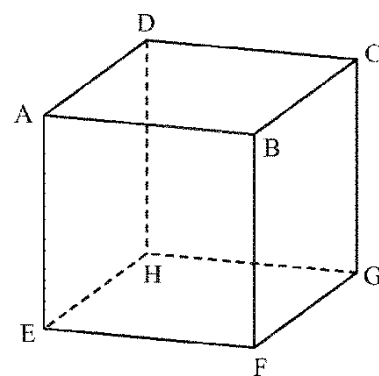
【問 27】

右の図1のように1辺の長さが6 cm の立方体がある。
このとき、次の各問いに答えなさい。

(鳥取県 2014 年度)

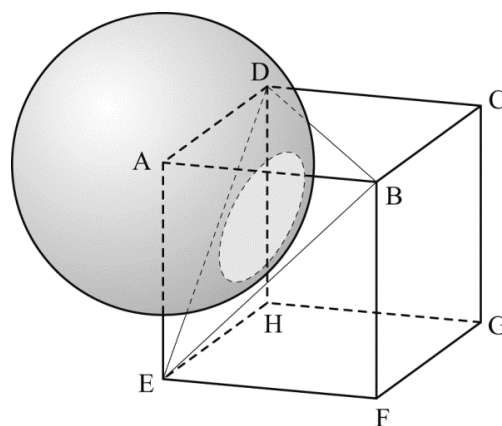
問1 線分 BD の長さを求めなさい。

図1



問2 三角錐 ABDE の体積を求めなさい。

図2



問3 右の図2のように、この立方体の頂点 A を中心とする半径 4 cm の球がある。この球を、3 点 B, D, E を通る平面で切ったとき、切り口の図形は円になる。この円の半径を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm ³
問3	cm

解答

問1 $6\sqrt{2}$ cm

問2 36 cm^3

問3 2 cm

解説

問1

BD は正方形 ABCD の対角線だから $BD=AB\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ cm

問2

三角錐 ABDE の体積は $\frac{1}{3}\times\triangle ABD\times AE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times6=36\text{ cm}^3$

問3

切り口の円の中心を O, 円周上の点を P とする。

AO は三角錐 ABDE において $\triangle BDE$ を底面としたときの高さでもある。

$\triangle BDE$ は 1 辺が $6\sqrt{2}$ cm の正三角形だから高さは $3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$ cm

その面積は $\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{6}=18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

よって $\frac{1}{3}\times18\sqrt{3}\times AO=36$

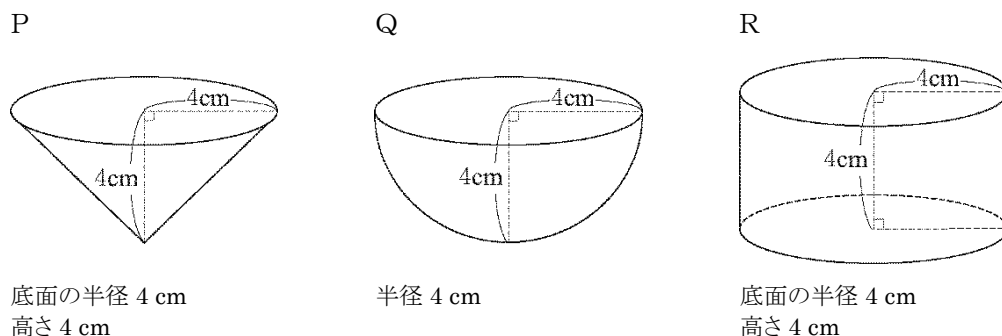
$AO=2\sqrt{3}$ cm

$\triangle APO$ において $PO=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$ cm

【問 28】

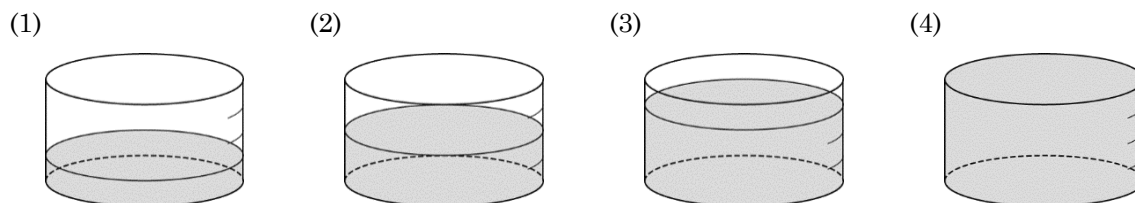
次の図のような、円錐の容器P、半球の容器Q、円柱の容器Rがある。問1～問4に答えなさい。ただし、容器は傾けないこととし、容器の厚さは考えないものとする。

(岡山県 2014 年度 一般)



問1 Pの容器いっぱいに入れた水の体積を求めなさい。

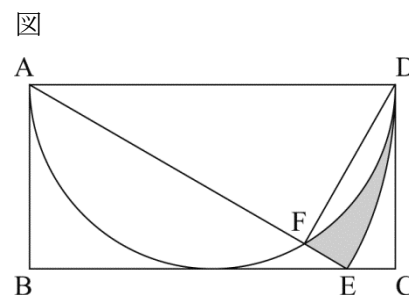
問2 PとQそれぞれの容器いっぱいに入れた水を、Rにすべて移したときの水の量を表した図として最も適当なのは、(1)～(4)のうちではどれですか。一つ答えなさい。ただし、図の目盛りは、Rの高さを4等分したものである。



問3 PとQそれぞれの容器の深さの半分まで水を入れた。それぞれの容器を真上から見た水面は円になる。このとき、PとQの水面の面積の比は、1: であり、Pに入っている水の体積は、Pの容器いっぱいに入れた水の体積の 倍である。

, に適当な数を書き入れなさい。

問4 右の図は、QをRに入れて正面から見た模式図である。四角形 ABCD は、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$ の長方形であり、点 A を中心とし、線分 AD を半径とする円と線分 BC との交点を E とし、点 A と点 E を結ぶ。線分 AD を直径とする円と線分 AE との交点のうち、点 A と異なる点を F とし、点 D と点 F を結ぶ。このとき、(I) は指示に従って答え、(II) は , に適当な数を書き入れなさい。



(I) $\triangle ABE \equiv \triangle DFA$ を証明しなさい。

(II) $\angle DAE =$ $^{\circ}$ であり、弧 DE, 弧 DF, 線分 EF で囲まれた色のついた部分の面積は cm^2 である。

解答欄

問1	cm ³		
問2			
問3	(ア)		
	(イ)	倍	
問4	(I)	〔証明〕	
	(II)	(ウ)	。
		(エ)	cm ²

解答

問1 $\frac{64}{3}\pi\text{ cm}^3$

問2 4

問3

(ア) 3

(イ) $\frac{1}{8}$ 倍

問4

(I)

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle DFA$ において

AD と AE は点 A を中心とする円の半径だから

$$AE=DA\cdots (1)$$

四角形 $ABCD$ は長方形だから

$$\angle ABE=90^\circ$$

点 F は AD を直径とする円周上にあるから

$$\angle DFA=90^\circ$$

$$\text{よって } \angle ABE=\angle DFA=90^\circ \cdots (2)$$

$AD \parallel BC$ なので錯角は等しいから

$$\angle AEB=\angle DAF\cdots(3)$$

(1), (2), (3)から

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABE \equiv \triangle DFA$$

(II)

(ウ) 30°

$$(エ) \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

解説

問1

$$P \text{ の体積は } \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 4 = \frac{64}{3} \pi \text{ cm}^3$$

問2

$$Q \text{ の体積は } \frac{4}{3} \pi \times 4^3 \times \frac{1}{2} = \frac{128}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{よって } P+Q \text{ の体積は } \frac{64}{3} \pi + \frac{128}{3} \pi = 64 \pi \text{ cm}^3$$

よって容器 R に入れたときの水面の高さは $64 \pi \div (16 \pi) = 4 \text{ cm}$

したがって選択肢は(4)

問3

P の水面の半径を $r \text{ cm}$ とすると平行線と線分の比の定理より

$$r:4=1:2$$

$$r=2 \text{ cm}$$

Q の水面の半径を $t \text{ cm}$ とすると水面の半径は 1 辺を 4 cm とする正三角形の高さになるから

$$t:4=\sqrt{3}:2$$

$$t=2\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって求める水面の面積の比は

$$\pi \times 2^2 : \pi \times (2\sqrt{3})^2 = 4\pi : 12\pi = 1:3$$

また P において P にはいつている水がつくる円すいと容器 P は相似で相似比は 1:2 より

$$\text{体積比は } 1:2^3=1:8$$

$$\text{よって水の体積は容器 P の体積の } \frac{1}{8}$$

問4

(1)

$\triangle ABE$ と $\triangle DFA$ において

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいことを示し合同を導く。

(2)

$\triangle ABE$ において

$$\angle ABE=90^\circ$$

$$AB:AE=4:8=1:2 \text{ より}$$

$$\angle EAB=60^\circ$$

$$\text{よって } \angle DAE=90^\circ-60^\circ=30^\circ$$

AD の中点を O とすると

$$\angle DOF=2\angle DAF=2\times 30^\circ=60^\circ$$

$$FD=4 \text{ cm}$$

$$AF=\sqrt{3} DF=4\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって色のついた部分の面積は

$$\text{おうぎ形 ADE}-\text{おうぎ形 ODF}-\triangle OAF$$

$$=\pi \times 8^2 \times \frac{30}{360} - \pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3}$$

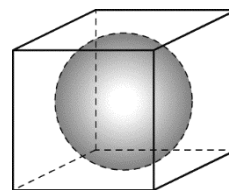
$$=\frac{16}{3} \pi - \frac{8}{3} \pi - 4\sqrt{3}$$

$$=\frac{8}{3} \pi - 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 29】

右の図のように、球がきっちりはいる1辺の長さが3 cm の立方体の箱がある。この球の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

(徳島県 2014 年度)



解答欄

cm^3

解答

$$\frac{9}{2}\pi \text{ cm}^3$$

解説

$$\text{球の体積は } \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2} \pi \text{ cm}^3$$

【問 30】

半径 3 cm の球の表面積は何 cm^2 か。

(長崎県 2014 年度)

解答欄

cm^2

解答

$$36\pi \text{ cm}^2$$

解説

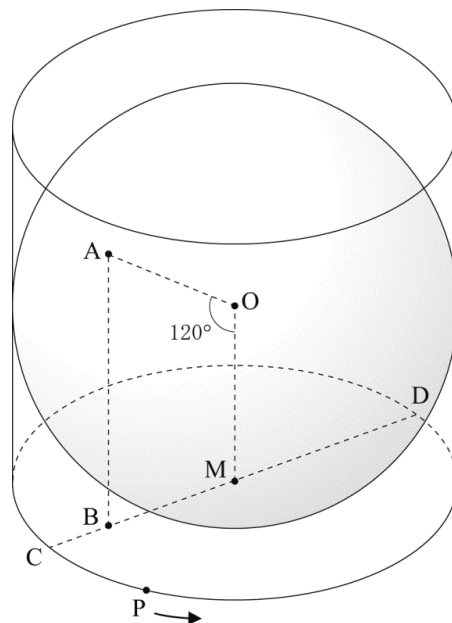
$$\text{半径 3 cm の球の表面積は } 4\pi \times 3^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

【問 31】

図のように、底面の直径が 12 cm 、高さが 12 cm の円柱と、この円柱の中にぴったり入った球があり、球の中心を O とし、円柱の 1 つの底面の円の中心を M とする。球の表面上に点 A を、 $\angle AOM = 120^\circ$ となるようにとり、 A を通り底面に垂直な直線と M を含む底面の円周との交点を B とする。直線 BM と M を含む底面の円周との交点のうち、 B に近い方を C 、 B から遠い方を D とする。また、点 P は、 M を含む底面の円周上を C から D まで、矢印の向きに動く点である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2014 年度)



(1) 線分 AB の長さを求めなさい。

(2) 三角すい $ABPM$ の体積が最も大きくなるとき、

① 三角すい $ABPM$ の体積を求めなさい。

② 線分 BP の中点を Q とする。点 Q と $\triangle APM$ を含む平面との距離を求めなさい。

解答欄

(1)	cm	
(2)	①	cm^3
	②	cm

解答

(1) 9 cm

(2)

① $27\sqrt{3} \text{ cm}^3$

② $\frac{9}{4} \text{ cm}$

解説

(1)

O から AB に垂線をひき交点を H とすると

△OAH において $\angle AOH = 30^\circ$, $\angle AHO = 90^\circ$ より

$$AH = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$$

$$HB = OM = 6 \text{ cm} \text{ より } AB = 3 + 6 = 9 \text{ cm}$$

(2)

①

△OAH において

$$OH = \sqrt{3} AH = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BM = OH = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

底面を△ABM と考えると P から CD にひいた垂線の長さが三角すいの高さとなるから

三角すい ABPM の体積が最も大きくなるのは $PM \perp CD$ のときで高さが 6 cm になるとき。

$$\text{よって求める体積は } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{3} \times 6 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

②

△ABM において

$$AM = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

点 B から△APM にひいた垂線の長さを h cm とすると

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6 \times h = 27\sqrt{3}$$

$$6\sqrt{3}h = 27\sqrt{3}$$

$$h = \frac{9}{2}$$

Q は BP の中点より Q から△APM にひいた垂線の長さを k とすると

$$h:k = 2:1$$

$$\frac{9}{2} : k = 2:1$$

$$k = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

【問 32】

次のア～ウの立体で、体積がもっとも小さいものは である。

(沖縄県 2014 年度)

ア 底面の半径が 3 cm, 高さが 10 cm の円錐

イ 底面の半径が 3 cm, 高さが 4 cm の円柱

ウ 半径 3 cm の球

解答欄

解答

ア

解説

体積はそれぞれ

$$\text{ア } \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{イ } \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi \text{ cm}^3$$

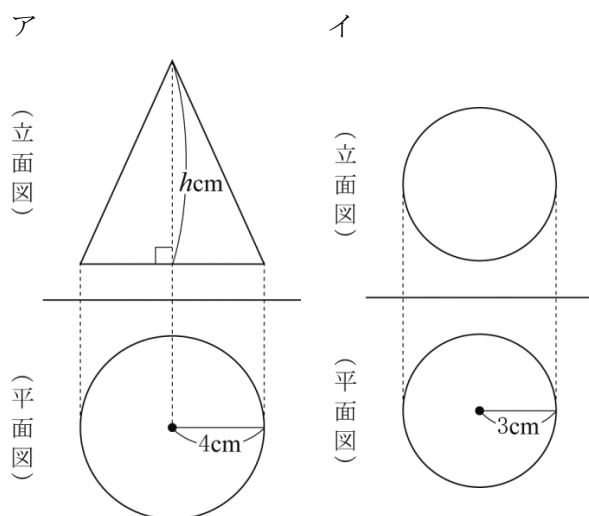
$$\text{ウ } \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$$

よって最も小さいのはア

【問 33】

下のア、イは、体積が等しい立体のそれぞれの投影図である。アの立体の h の値を求めなさい。ただし、平面図は半径がそれぞれ 4 cm 、 3 cm の円である。

(青森県 2015 年度)



解答欄

$h =$

解答

$$h = \frac{27}{4}$$

解説

立体アの体積は

$$\frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times h = \frac{16}{3} \pi h \text{ cm}^3$$

立体イの体積は

$$\frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 36 \pi \text{ cm}^3$$

立体アと立体イの体積が等しいので

$$\frac{16}{3} \pi h = 36 \pi$$

$$h = \frac{27}{4}$$

【問 34】

半径が 2 cm である球の体積を $P \text{ cm}^3$, 半径が 3 cm である球の体積を $Q \text{ cm}^3$ とするとき, P と Q の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。ただし, 円周率は π とする。

(神奈川県 2015 年度)

解答欄

$P:Q=$:

解答

$P:Q=8:27$

解説

球は相似な立体でその

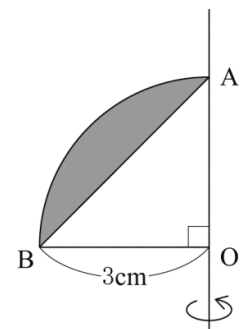
相似比は $2:3$ だから

体積比 $P:Q=2^3:3^3=8:27$

【問 35】

図のように, 半径 3 cm, 中心角 90° のおうぎ形 OAB がある。このとき, $\widehat{AB}$ と弦 AB で囲まれた部分を直線 OA を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(福井県 2015 年度)



解答欄

cm^3

解答

$9\pi \text{ cm}^3$

解説

求める体積は

おうぎ形 OAB を OA を軸として 1 回転させてできる半径 3 cm の半球の体積から

$\triangle OAB$ を OA を軸として 1 回転させてできる底面の半径 3 cm, 高さ 3 cm の円錐の体積をひいたものである。

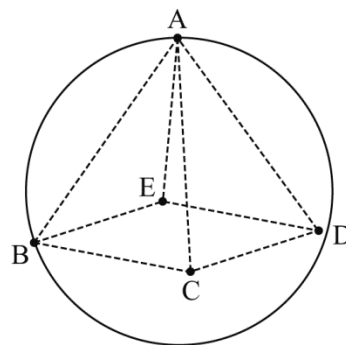
よって求める体積は $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 3^3 - \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3 = 18\pi - 9\pi = 9\pi \text{ cm}^3$

【問 36】

図で、A、B、C、D、E は球の表面上の点であり、立体 ABCDE は正四角すいである。

球の半径が 6 cm、BC=8 cm のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。ただし、球の中心は正四角すいの中にあるものとする。

(愛知県 2015 年度 A)



(1) 球の表面積は何 cm^2 か、求めなさい。

(2) 正四角すい ABCDE の体積は何 cm^3 か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm^2
(2)	cm^3

解答

(1) $144\pi \text{ cm}^2$

(2) $\frac{512}{3} \text{ cm}^3$

解説

(1)

半径 6 cm の球の表面積は $4\pi \times 6^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

(2)

底面の正方形 BCDE の対角線の交点を H とすると BC=8 cm より

$$BD = 8 \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$BH = 8\sqrt{2} \div 2 = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

円の中心を O とすると

$$OA = OB = 6 \text{ cm}$$

$$OH = x \text{ cm} \text{ とおく。}$$

$\triangle OBH$ で

$$\text{三平方の定理より } OB^2 = OH^2 + BH^2$$

$$6^2 = x^2 + (4\sqrt{2})^2$$

$$36 = x^2 + 32$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$x > 0 \text{ より}$$

$$x = 2$$

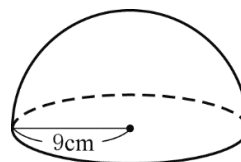
$$\text{よって } AH = 6 + 2 = 8 \text{ cm}$$

$$\text{正四角すい ABCDE の体積は } \frac{1}{3} \times 8^2 \times 8 = \frac{512}{3} \text{ cm}^3$$

【問 37】

図のような半径 9 cm の半球があります。この半球と等しい体積の円錐について考えます。円錐の底面の半径が 9 cm であるとき、円錐の高さは何 cm か求めなさい。

(滋賀県 2015 年度)



解答欄

cm

解答

18 cm

解説

半径 9 cm の半球の体積は

$$\frac{4}{3} \pi \times 9^3 \times \frac{1}{2} = 486 \pi \text{ cm}^3$$

底面の半径が 9 cm, 高さが h cm の円錐の体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times h = 27 \pi h \text{ cm}^3$$

この 2 つの体積が等しいので

$$27 \pi h = 486 \pi$$

$$h = 18 \text{ cm}$$

【問 38】

半径 4 cm の球を、中心 O を通る平面で切ってできる半球の形をした容器があり、右の図1のように、切り口を水平に保って満水にしてある。また、右の図2のように、頂点を A 、底面の円の中心を B とする円錐の形をした鉄のおもりがあり、 $AB = 3\sqrt{7}\text{ cm}$ である。

このおもりを右の図3のように、底面を水平に保ったまま、線分 AB が点 O を通るように、おもりが容器に触れるまで静かに沈めたところ、水があふれ、 $AO = 2\sqrt{7}\text{ cm}$ となった。

このとき、次の問1～問3に答えよ。ただし、容器の厚さは考えないものとし、円周率は π とする。

(京都府 2015 年度 前期)

問1 図1の容器に入っている水の体積を求めよ。

問2 おもりの底面の円の半径を求めよ。

問3 容器に触れるまでおもりを沈めたとき、あふれた水の体積を求めよ。

図1

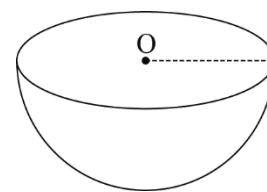


図2

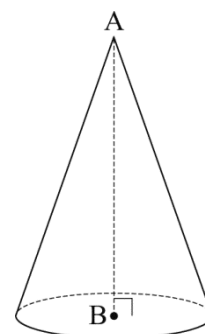
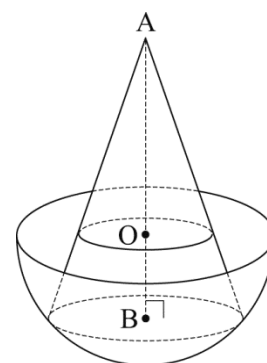


図3



解答欄

問1	cm^3
問2	cm
問3	cm^3

解答

問1 $\frac{128}{3} \pi \text{ cm}^3$

問2 3 cm

問3 $\frac{19\sqrt{7}}{3} \pi \text{ cm}^3$

解説

問1

水の体積は $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = \frac{128}{3} \pi \text{ cm}^3$

問2

$OB = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = \sqrt{7} \text{ cm}$

おもりの底面の円周上の点を P とすると $OP = 4 \text{ cm}$

$\triangle OBP$ において

三平方の定理より $BP = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$

よって求める半径は 3 cm

問3

おもりの体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{7} = 9\sqrt{7} \pi \text{ cm}^3$

おもりの水面から出ている分とおもり全体は相似であり

相似比は $2:3$ だから

体積比は $8:27$

よってあふれた水の体積はおもりの水面に沈んでいる部分の体積と一致し

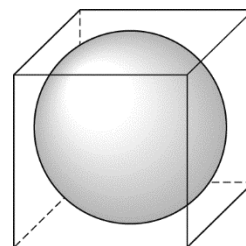
おもり全体の体積の $\frac{19}{27}$ 倍である。

よって $9\sqrt{7} \pi \times \frac{19}{27} = \frac{19\sqrt{7}}{3} \pi \text{ cm}^3$

【問 39】

図のように、立方体の中に、直径が立方体の 1 辺の長さと等しい球が入っている。このとき、球の体積は立方体の体積の何倍か。ただし、円周率は π とする。

(奈良県 2015 年度)



解答欄

倍

解答

$$\frac{\pi}{6} \text{ 倍}$$

解説

球の半径を r とすると

立方体の 1 辺は $2r$ と表せる。

$$\text{球の体積は } \frac{4}{3} \pi r^3$$

立方体の体積は

$$(2r)^3 = 8r^3$$

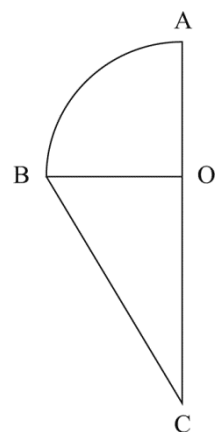
$$\frac{4}{3} \pi r^3 \div 8r^3 = \frac{\pi}{6} \text{ より}$$

球の体積は立方体の体積の $\frac{\pi}{6}$ 倍

【問 40】

右の図のように、 $\angle AOB=90^\circ$ のおうぎ形 OAB と $\angle BOC=90^\circ$ の直角三角形 BCO があります。おうぎ形 OAB を線分 AO を軸として 1 回転させてできる立体の体積と直角三角形 BCO を辺 CO を軸として 1 回転させてできる立体の体積が等しいとき、線分 AO と辺 CO の長さの比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

(広島県 2015 年度)



解答欄

AO:CO= :

解答

$$AO:CO=1:2$$

解説

$AO=r$, $CO=h$ とする。

おうぎ形 OAB を線分 AO を軸に 1 回転してできる半球の体積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$\triangle OCB$ を辺 CO を軸として 1 回転してできる円すいの体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

この 2 つの回転体の体積が等しいので

$$\frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$h=2r$$

よって $AO:CO=1:2$

【問 41】

半径 2 cm の球の体積は何 cm^3 か。

(長崎県 2015 年度)

解答欄

cm^3

解答

$$\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$$

解説

$$\text{半径 2 cm の球の体積は } \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$$

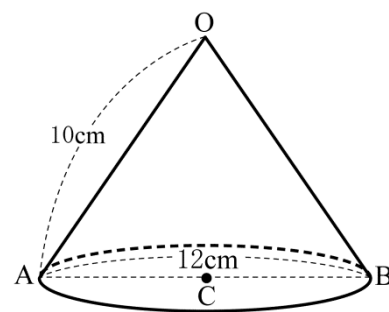
【問 42】

図1, 図2のように, O を頂点とし, 線分 AB を底面の直径, 点 C を底面の中心とする円すいがある。 $OA=10\text{ cm}$, $AB=12\text{ cm}$ とするとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2015 年度)

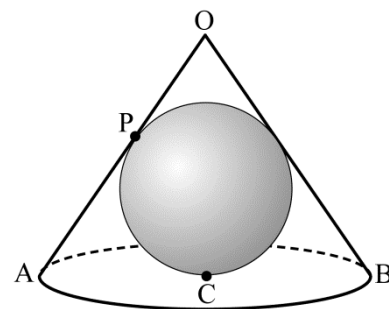
問1 図1において, 底面の円周の長さは何 cm か。

図1



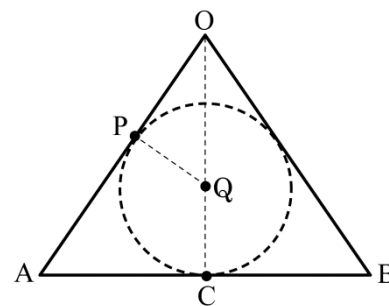
問2 図1において, 円すいの体積は何 cm^3 か。

図2



問3 図2のように, 円すいにちょうど入る球が母線 OA とふれている点を P とする。また, この球は底面の中心 C にもふれている。図3は, 図2を正面から見た図であり, 円の中心を Q とする。このとき, 次の(1)~(3)に答えよ。

図3



(1) 図3において, 線分 PQ の長さは何 cm か。

(2) 図3において, $\triangle OPQ$ と $\triangle OAC$ の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

(3) 図2において, 点 P を通り, 底面に平行な平面で円すいを 2 つに切り分ける。このとき, 頂点 O をふくむほうの円すいになる。この円すいの側面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	cm	
問2	cm ³	
問3	(1)	cm
	(2)	△OPQ:△OAC= :
	(3)	cm ²

解答

- 問1 12 π cm
- 問2 96 π cm³
- 問3
- (1) 3 cm
- (2) △OPQ:△OAC=1:4
- (3) $\frac{48}{5}$ π cm²

解説

問1

底面の円周の長さは $12 \times \pi = 12\pi$ cm

問2

OAC において

三平方の定理より $OC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

よって求める体積は $\frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$ cm³

問3

(1)

$PQ = r$ cm とすると

$CQ = PQ = r$ cm

$OQ = 8 - r$ cm

$PQ \perp OA$ だから

2組の角がそれぞれ等しくなるので

$\triangle OQP \sim \triangle OAC$

よって $r : 6 = (8 - r) : 10$

$10r = 6(8 - r)$

これを解いて

$r = 3$ cm

(2)

$\triangle OPQ$ と $\triangle OAC$ の相似比は $PQ : CA = 3 : 6 = 1 : 2$

よって面積比は $1 : 4$

(3)

$\triangle OPQ$ と $\triangle OAC$ の相似比は $1 : 2$ より

$OP : 8 = 1 : 2$

$OP = 4$ cm

点 P から線分 OC に垂線をひき交点を R とする。

$\triangle OPR \sim \triangle OAC$ で

相似比は $OP : OA = 4 : 10 = 2 : 5$

面積比は $4 : 25$

もとの円すいの側面積は $\pi \times 10^2 \times \frac{2\pi \times 6}{2\pi \times 10} = 60\pi$ cm² より

求める円すいの側面積を S とすると

$S : 60\pi = 4 : 25$

$25S = 240\pi$

$S = \frac{48}{5} \pi$ cm²

【問 43】

半径 2 cm の球について正しく述べたものを、次のア～エのうちから 1 つ選び、符号で答えなさい。ただし、円周率は π を用いることとする。

(千葉県 2016 年度 前期)

ア この球の体積は、 $\frac{16}{3} \pi \text{ cm}^3$ である。

イ この球の体積は、 $32 \pi \text{ cm}^3$ である。

ウ この球の表面積は、 $16 \pi \text{ cm}^2$ である。

エ この球の表面積は、 $4 \pi \text{ cm}^2$ である。

解答欄

解答

ウ

解説

半径 2 cm の球の体積は $\frac{4}{3} \pi \times 2^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$ で

表面積は $4 \pi \times 2^2 = 16 \pi \text{ cm}^2$

だから正しいものはウ

【問 44】

半径が 9 cm の球の表面積を求めよ。ただし、円周率は π とする。

(京都府 2016 年度 前期)

解答欄

cm²

解答

$324 \pi \text{ cm}^2$

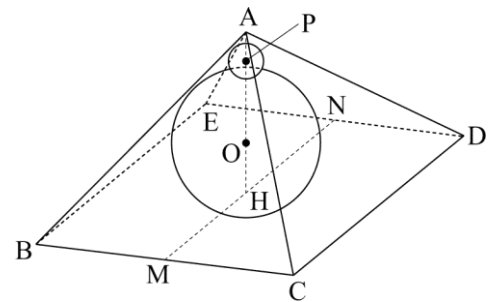
解説

半径 9 cm の球の表面積は $4 \pi \times 9^2 = 324 \pi \text{ cm}^2$

【問 45】

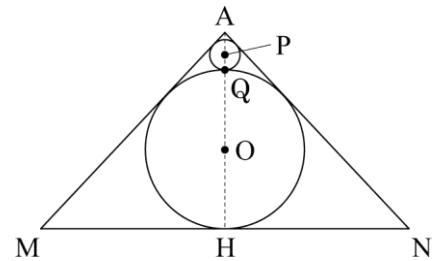
右の図1のように、底面の1辺が6 cm、高さが $\sqrt{7}$ cmの正四角錐A-BCDEがあり、2辺BC, DEの中点をそれぞれM, Nとし、線分MNの中点をHとする。また、線分AH上に2点O, Pがあり、正四角錐の内部に、点Oを中心とする球と点Pを中心とする球がある。

図1



右の図2は、この立体を3点A, M, Nを通る平面で切った切り口を表している。図2中の円Oは△AMNの各辺と接している、円Pは2辺AM, ANと接している。また、2円O, Pは線分AH上の点Qを通り、点Qにおける円Oの接線と円Pの接線は同じ直線である。

図2



このとき、次の問1～問3に答えよ。

(京都府 2016 年度 中期)

問1 辺ABの長さを求めよ。また、正四角錐の表面積を求めよ。

問2 点Oを中心とする球の半径を求めよ。

問3 点Oを中心とする球の体積と点Pを中心とする球の体積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

解答欄

問1	AB=	cm
	表面積	cm ²
問2		cm
問3	点Oを中心とする球の体積 : 点Pを中心とする球の体積 = :	

解答

問1

$$AB=5\text{ cm}$$

$$\text{表面積 } 84\text{ cm}^2$$

$$\text{問2 } \frac{3\sqrt{7}}{7}\text{ cm}$$

$$\text{問3 } 343:1$$

解説

問1

$$BH=3\sqrt{2}$$

△ABH において

$$\text{三平方の定理より } AB^2=(\sqrt{7})^2+(3\sqrt{2})^2=25$$

$$AB=5\text{ cm}$$

△ABM は

辺の比が 3:4:5 の直角三角形なので $AM=4$

$$\text{よって正四角錐の表面積は } \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 4 + 6^2 = 48 + 36 = 84\text{cm}^2$$

問2

$$\triangle AMN \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

円 O の半径を r とおくと△AMN の面積から

$$\frac{1}{2} (4+4+6)r = 3\sqrt{7}$$

$$r = \frac{3\sqrt{7}}{7}\text{ cm}$$

問3

$$QH = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{したがって } AQ = \sqrt{7} - \frac{6\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$AH:AQ = \sqrt{7} : \frac{\sqrt{7}}{7} = 7:1 \text{ なので}$$

球の半径も同じ比になる。

$$\text{よって体積比は } 7^3:1^3=343:1$$

【問 46】

4 種類の球 A, B, C, D がある。A, B, C, D の直径はそれぞれ 12 cm, 6 cm, 4 cm, 3 cm であり、どれも水に沈むものとする。

次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(兵庫県 2016 年度)

問1 A の体積は何 cm^3 か、求めなさい。

問2 ある中学生が、次のようなレポートを書いた。レポートの内容が正しくなるように ①, ③ にあてはまる値と ② にあてはまる式を書き、(i) にあてはまるものを【 I 】のア, イから、(ii) にあてはまるものを【 II 】のウ～オからそれぞれ 1 つ選んで、その符号を書きなさい。

「立方体の容器にちょうどはいる球を小さくしていくと、すき間の体積はどうなるか？」

1 辺が 12 cm の立方体の容器と球のすき間の体積を調べるために、この容器に水をいっぱいまで入れることを考える。

図1のように、容器に A を 1 個入れるとき、この容器にはいる水の体積を計算すると ① cm^3 である。

図 1

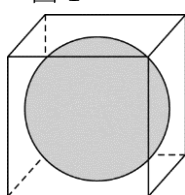
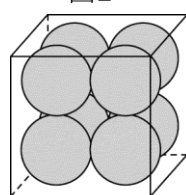
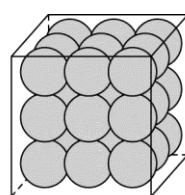


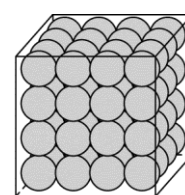
図2



B を 8 個
入れるとき



C を 27 個
入れるとき



D を 64 個
入れるとき

次に、容器に、8 個の B, 27 個の C, 64 個の D を、図2のように、底面に並べる縦、横の個数と、積み重ねる段数をすべて同じにして、ちょうどはいるように入れる。同様の入れ方で、球の直径を小さくしていくとき、容器にはいる水の体積について予想を立てた。

《予想》球の直径が小さいほど、容器にはいる水の体積は小さい。

この予想が正しいかどうかを確かめるために次のような計算をした。

直径が容器の 1 辺を x 等分したときの 1 つの長さと同じ球を x^3 個、図2と同様の入れ方で容器に入れるとき、球の直径は ② cm なので、この容器にはいる水の体積は ③ cm^3 である。

《結論》1 辺が 12 cm の立方体の容器にちょうどはいるように、直径が等しい球を入れるとき《予想》は (i), この容器と球のすき間の体積は (ii) 。

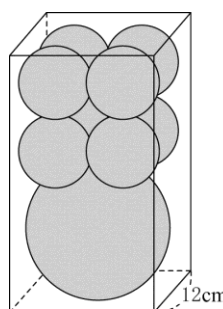
【 I 】 ア 正しく
イ 間違っており

【 II 】 ウ 球の直径が小さいほど大きい
エ 球の直径が小さくなくても変わらない
オ 球の直径が小さいほど小さい

問3 図3のような、1 個の A と 8 個の B がちょうどはいる 1 図3

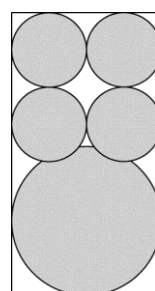
辺が 12 cm の正方形を底面とする正四角柱の容器を正面から見ると、図4のように見える。

この容器の高さは何 cm か、求めなさい。



正面

図4



解答欄

問1	cm^3	
問2	①	
	②	
	③	
	(i)	
	(ii)	
問3	cm	

解答

問1 $288\pi \text{ cm}^3$

問2

① $1728 - 288\pi$

② $\frac{12}{x}$

③ $1728 - 288\pi$

(i) イ

(ii) エ

問3 $15 + 3\sqrt{7} \text{ cm}$

解説

問1

A の半径は 6cm なので $\frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$

問2

(1)には $12^3 - 288\pi = 1728 - 288\pi \text{ cm}^3$

(2)には 12cm を x 等分するので $\frac{12}{x} \text{ cm}$

(3)には 球の半径は $\frac{6}{x}$ なので容器に入る水の量は $12^3 - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{6}{x} \right)^3 \times x^3 = 1728 - 288\pi \text{ cm}^3$

また(i)にはイ, (ii)には上の(1), (3)よりエが入る。

問3

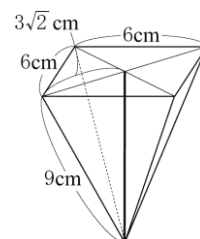
容器の高さは B の直径 + 半径と A の半径と次の四角錐の高さの合計となる。

四角錐は中段の 4 個の中心を結んだ正方形を底面とし

A の中心からこの底面までが高さとなる。

高さは $\sqrt{9^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{63}$

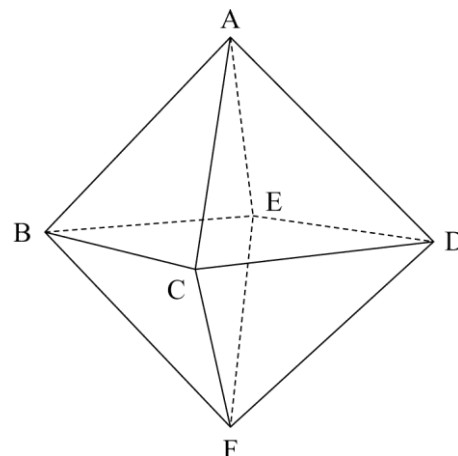
よって $9 + 6 + \sqrt{63} = 15 + 3\sqrt{7} \text{ cm}$



【問 47】

右の図1は、一辺の長さが 4 の正八面体である。このとき、次の各問に答えなさい。

図1



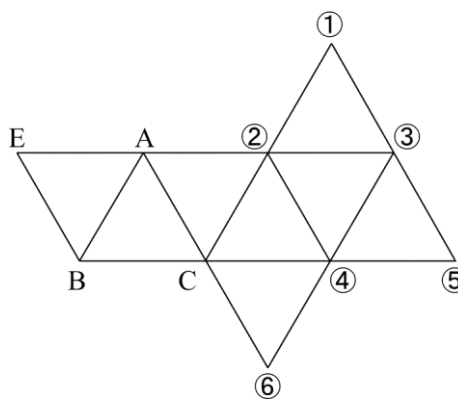
(鳥取県 2016 年度)

問1 線分 BD の長さを求めなさい。

問2 この正八面体の体積を求めなさい。

問3 右の図2は、この正八面体の展開図である。図2の①～⑥の中で、頂点 B にあたる点をすべて選び、番号で答えなさい。

図2

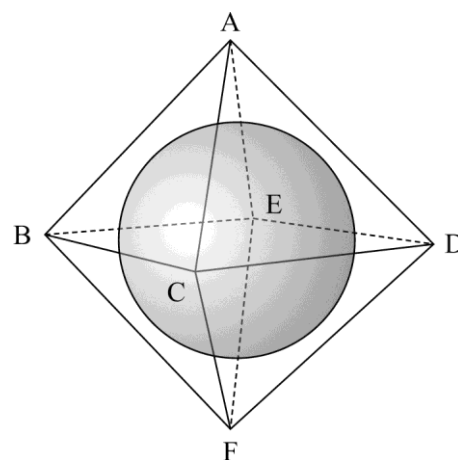


問4 辺 BC の中点を M, 辺 ED の中点を N とする。この正八面体を 3 点 A, M, N を通る平面で切り、2 つの立体に分けたとき、切り口はどんな形になるか。次のア～エから正しいものをひとつ選び、記号で答えなさい。

ア 二等辺三角形 イ 正方形 ウ ひし形 エ 五角形

問5 右の図3のように、この正八面体の 8 つの側面にぴったりと接している球がある。この球の半径を求めなさい。

図3



解答欄

問1	BD＝
問2	
問3	
問4	
問5	

解答

問1 $BD = 4\sqrt{2}$

問2 $\frac{64}{3}\sqrt{2}$

問3 ⑤, ⑥

問4 ウ

問5 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

解説

問1

$$BD^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

よって $BD = 4\sqrt{2}$

問2

頂点 A から平面 BCDE へ垂線 AO を下ろすと O は各頂点から同じ距離にあるので $AO = 2\sqrt{2}$

よって正八面体の体積は $\frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{2} \times 2 = \frac{64}{3}\sqrt{2}$

問3

図2の展開図と図1の正八面体の頂点を対応させると

①が A

②が D

③が E

④が F

⑤, ⑥が B となる。

よって⑤, ⑥

問4

$$AM = AN = MF = NF = 2\sqrt{3}, MN = 4, AF = 4\sqrt{2}$$

よってウのひし形となる。

問5

球の中心は問2の O と同じ点で三角錐 OABC が 8 個で正八面体の体積となる。

球の半径を R とおくと

$\triangle ABC$ の面積が $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ なので

$$8 \times \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times R = \frac{64}{3}\sqrt{2}$$

$$R = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

【問 48】

半径 2 cm の球の体積を求めなさい。

(佐賀県 2016 年度 特色)

解答欄

cm³

解答

$$\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$$

解説

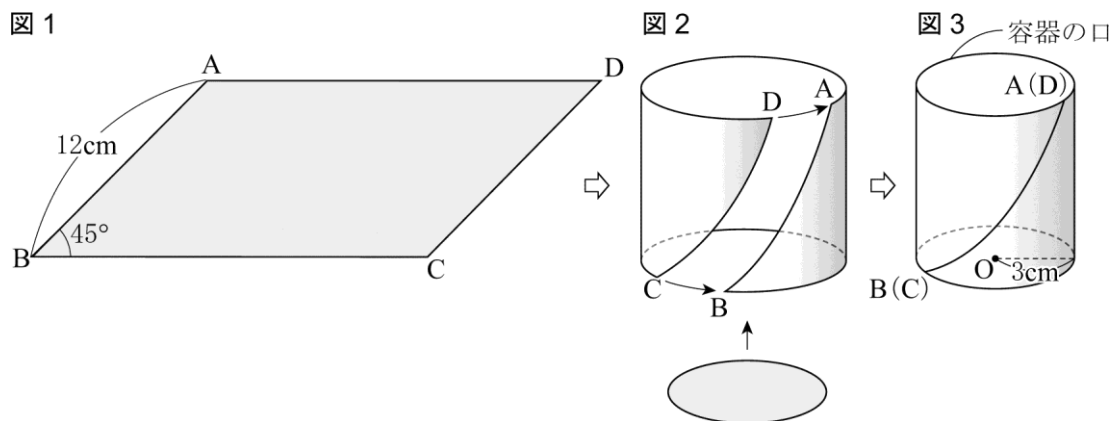
$$\frac{4}{3} \pi \times 2^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$$

【問 49】

図1のような、 $AB=12\text{ cm}$ 、 $\angle ABC=45^\circ$ の平行四辺形 $ABCD$ の紙がある。この紙を図2のように、辺 AB と辺 DC が重なるようにまるめ、円の形の紙を底面になるようにはりつけて、図3のような円柱の形の容器をつくる。

この容器において、底面の円 O の半径が 3 cm のとき、下の問1～問4に答えなさい。ただし、円周率は π とし、紙の厚さは考えないものとする。

(宮崎県 2016 年度)



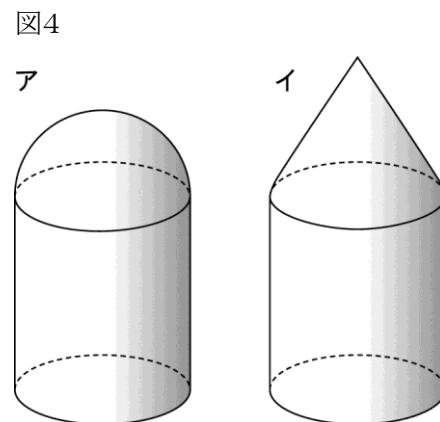
問1 図1の平行四辺形 $ABCD$ において、 A から辺 BC に垂線をひき、辺 BC との交点を E とする。線分 AE の長さを求めなさい。

問2 図3の容器の側面積を求めなさい。

問3 図4は図3の容器を2つ用意し、容器の口の部分にぴったりと重なる半球と円錐を、それぞれの容器にはりつけて、2つの立体ア、イをつくったものである。

アの体積がイの体積より、 $6\pi\text{ cm}^3$ 大きいとき、アとイの表面積は、どちらがどれだけ大きいか、次の の(①)にはア、イのどちらかを、(②)には当てはまる値を入れなさい。

(①)の表面積の方が、(②) cm^2 大きい。



問4 図5のような、底面が長方形 $QRST$ で、 $PQ=PR=PS=PT$ の四角錐がある。図6は、この四角錐を、図3の容器に入れたものである。このとき、四角錐の頂点 Q, R は底面の円周上に、頂点 S, T は容器の口の円周上にそれぞれあり、頂点 P は容器の側面の内側に、ぴったりとくっついた。
 $\angle QOR = 120^\circ$ のとき、この四角錐の体積を求めなさい。

図5

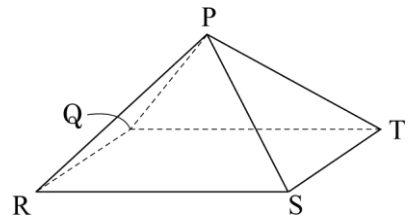
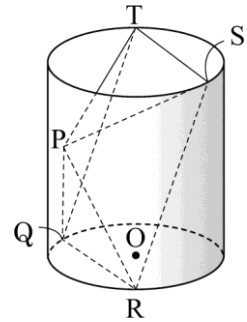
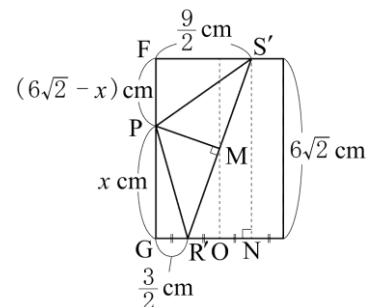


図6



解答欄

問1	cm	
問2	cm ²	
問3	①	
	②	
問4	cm ³	

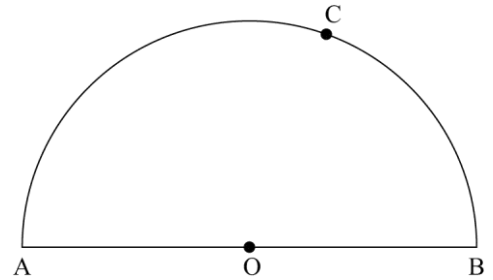


【問 50】

図のように、線分 AB を直径とする半円の弧 AB 上に点 C があります。線分 AB の中点を点 O とします。

次の(1)～(3)に答えなさい。

(北海道 2017 年度)



- (1) $AC=BC$ とします。 $\triangle ABC$ を、線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体を P 、半円を、線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体を Q とします。立体 P の体積は、立体 Q の体積の何倍ですか、求めなさい。

- (2) 線分 AC が線分 AB より 1 cm 短く、線分 BC が線分 AB より 2 cm 短いとき、線分 AB の長さは何 cm になりますか。線分 AB の長さを x cm として方程式をつくり、求めなさい。

- (3) 線分 AB を 4 cm とします。点 C は、弧 AB 上を、点 A から点 B まで移動するものとします。 $\angle ABC$ の二等分線と $\angle BAC$ の二等分線との交点を D とするとき、点 D がえがいてできる線の長さを求めなさい。ただし、点 C が点 A の位置にあるとき、点 D は点 A の位置にあり、点 C が点 B の位置にあるとき、点 D は点 B の位置にあるものとします。また、円周率は π を用いなさい。

解答欄

(1)	倍	
(2)	〔方程式〕	
	〔計算〕	
	答 cm	
(3)	cm	

解答

(1) $\frac{1}{2}$ 倍

(2)

〔方程式〕

$$x^2=(x-1)^2+(x-2)^2$$

〔計算〕

$$x^2-6x+5=0$$

$$(x-1)(x-5)=0$$

$$x=1, 5$$

$$x>2 \text{ より}$$

$$x=5$$

答 5 cm

(3) $\sqrt{2} \pi$ cm

解説

(1)

半円の弧に対する円周角は直角であるから $\angle ACB = 90^\circ$

$AC = BC$ より $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形だから $CO \perp AB$ となる。

半円 O の半径を r とすると

立体 P の体積は底面の半径が r で高さが r の円錐の体積の 2 倍だから円周率を π として

$$\left(\frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r \right) \times 2 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

また立体 Q の体積は半径 r の球の体積と等しいから

$$\frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{よって } \frac{2}{3} \pi r^3 \div \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} \text{ 倍}$$

(2)

条件より $AB = x \text{ cm}$, $AC = x - 1 \text{ cm}$, $BC = x - 2 \text{ cm}$ と表される。

$\triangle ABC$ において

$$\text{三平方の定理より } (x-1)^2 + (x-2)^2 = x^2$$

これを整理すると

$$(x-1)(x-5) = 0$$

よって $x = 1, 5$

$x = 1$ のとき

$AB = 1 \text{ cm}$, $AC = 0 \text{ cm}$, $BC = -1 \text{ cm}$ となり問題にあわない。

$x = 5$ のとき

$AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$ となり問題にあっている。

(3)

$\angle ABC = \angle y$, $\angle BAC = \angle z$ とする。

$\triangle ABC$ において $\angle ACB = 90^\circ$ だから $\angle y + \angle z + 90^\circ = 180^\circ$ より

$$\angle y + \angle z = 90^\circ$$

$\triangle ABD$ において $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle y$, $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle z$ と表されるから

$$\angle ADB + \frac{1}{2} \angle y + \frac{1}{2} \angle z = 180^\circ \text{ より}$$

$$\angle ADB = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle y + \frac{1}{2} \angle z \right) = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle y + \angle z) = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 90^\circ = 135^\circ$$

点 C が点 A, B を除く $\widehat{AB}$ 上のどこにあっても $\angle ADB$ の大きさは 135° で一定だから

点 D がえがいてできる線は円周角の大きさが 135° になるような $\widehat{AB}$ である。

右の図のように点 D がえがいてできる $\widehat{AB}$ を含む円の中心を O' とすると

小さい方の $\angle A'O'B$ の大きさは $360^\circ - 135^\circ \times 2 = 90^\circ$ だから $\triangle O'AB$ は直角二等辺三角形になる。

$O'A = a \text{ cm}$ とすると

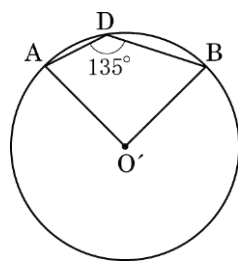
$$O'A : AB = 1 : \sqrt{2}$$

$$a : 4 = 1 : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} a = 4$$

$$a = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって求める長さは } 2\pi \times 2\sqrt{2} \times \frac{90}{360} = \sqrt{2} \pi \text{ cm}$$



【問 51】

半径 5 cm の球の表面積を求めなさい。

(青森県 2017 年度)

解答欄

cm^2

解答

$$100\pi \text{ cm}^2$$

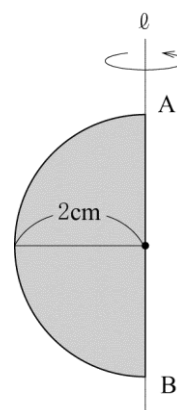
解説

$$4\pi \times 5^2 = 100\pi \text{ cm}^2$$

【問 52】

右の図のような半径 2 cm の半円を、直径 AB を含む直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

(栃木県 2017 年度)



解答欄

cm^3

解答

$$\frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$$

解説

半径 2 cm の球ができるから

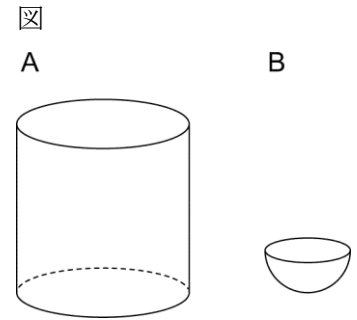
$$\text{求める体積は } \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$$

【問 53】

図のように、円柱の形をした容器Aと半球の形をした容器Bがある。Aは、底面の直径と高さが等しい。また、Aの底面の半径は、Bの半径の2倍である。

Bに水をいっぱいに入れて、Aに移しかえる。何杯でAをいっぱいにすることができるか、求めなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(長野県 2017 年度)



解答欄

杯

解答

24 杯

解説

容器Bの半径を r とすると

容器Aの底面の半径は $r \times 2 = 2r$

高さは $2r \times 2 = 4r$ と表される。

円周率を π とすると

容器Aの体積は $\pi \times (2r)^2 \times 4r = 16\pi r^3$

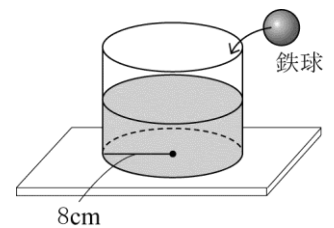
容器Bの体積は $\frac{4}{3}\pi r^3 \div 2 = \frac{2}{3}\pi r^3$

よって $16\pi r^3 \div \frac{2}{3}\pi r^3 = 16 \times \frac{3}{2} = 24$ 杯

【問 54】

右の図のように、底面の半径が 8 cm の円柱の形をした容器に水が入れられ、水平な台の上に置かれている。この容器に、半径が 2 cm の鉄球を何個か静かに沈めたところ、水がこぼれることなく、水面がちょうど 1 cm 上昇した。

このとき、沈めた鉄球の個数を求めなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとし、沈めた鉄球はすべて水中にあるものとする。



(和歌山県 2017 年度)

解答欄

個

解答

6 個

解説

沈めた鉄球の体積の合計は沈めた鉄球が押しのけた水の体積に等しいことを利用する。

沈めた鉄球の個数を x 個とすると

$$\text{沈めた鉄球の体積の合計は} \left(\frac{4}{3} \pi \times 2^3 \right) \times x = \frac{32}{3} \pi x \text{ cm}^3$$

沈めた鉄球が押しのけた水の体積は

$$\text{水面が } 1\text{ cm} \text{ 上昇したことから } \pi \times 8^2 \times 1 = 64 \pi \text{ cm}^3$$

よって $\frac{32}{3} \pi x = 64 \pi$ が成り立つ。

$$\frac{32}{3} x = 64$$

$$32x = 192$$

$$x = 6$$

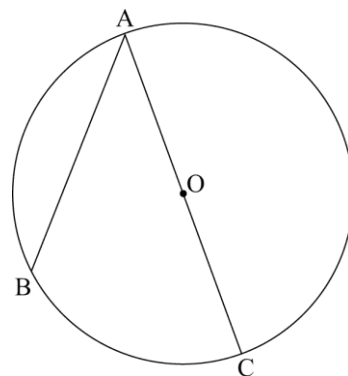
したがって沈めた鉄球の個数は 6 個

【問 55】

右の図のように、半径 6 cm の円 O の周上に 3 点 A, B, C があり、 AC は円 O の直径である。また、 $AB=9\text{ cm}$ である。

このとき、次の問1～問3に答えよ。

(京都府 2017 年度 中期)



問1 線分 BC の長さを求めよ。

問2 直線 AC を対称の軸として、点 B と線対称な点を D とするとき、線分 BD の長さを求めよ。

問3 $\triangle ABC$ を、直線 AC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積は、半径 6 cm の球の体積の何倍か求めよ。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	倍

解答

問1 $3\sqrt{7}$ cm

問2 $\frac{9\sqrt{7}}{2}$ cm

問3 $\frac{63}{128}$ 倍

解説

問1

半円の弧に対する円周角は直角であるから $\angle ABC = 90^\circ$

$\triangle ABC$ において

三平方の定理より

$$9^2 + BC^2 = (6+6)^2$$

$$BC^2 = 12^2 - 9^2$$

$$BC^2 = 63$$

$BC > 0$ だから

$$BC = 3\sqrt{7} \text{ cm}$$

問2

条件より $BD \perp AC$ である。また線分 BD と直線 AC との交点を E とすると、 $BE = DE$ となる。

$\triangle ABC$ と $\triangle AEB$ において

$\angle ABC = \angle AEB = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle EAB$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \sim \triangle AEB$

このことから

$$AC : AB = BC : EB$$

$$12 : 9 = 3\sqrt{7} : EB$$

$$12EB = 27\sqrt{7}$$

$$EB = \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

よって $DE = BE = \frac{9\sqrt{7}}{4}$ cm だから

$$BD = BE + DE = \frac{9\sqrt{7}}{4} + \frac{9\sqrt{7}}{4} = \frac{9\sqrt{7}}{2} \text{ cm}$$

問3

$\triangle ABC = \triangle ABE + \triangle CBE$ より

$\triangle ABC$ を、直線 AC を回転の軸として1回転させてできる立体の体積は

$\triangle ABE$ を、直線 AC を回転の軸として1回転させてできる立体の体積と

$\triangle CBE$ を、直線 AC を回転の軸として1回転させてできる立体の体積の和になる。

よって $AE = x$ cm とすると

$$\frac{1}{3} \times \left\{ \pi \times \left(\frac{9\sqrt{7}}{4} \right)^2 \right\} \times x + \frac{1}{3} \times \left\{ \pi \times \left(\frac{9\sqrt{7}}{4} \right)^2 \right\} \times (12 - x)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left\{ \pi \times \left(\frac{9\sqrt{7}}{4} \right)^2 \right\} \times \{x + (12 - x)\}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left\{ \pi \times \left(\frac{9\sqrt{7}}{4} \right)^2 \right\} \times 12$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{567}{16} \pi \times 12$$

$$= \frac{567}{4} \pi \text{ cm}^3$$

半径 6 cm の球の体積は $\frac{4}{3} \pi \times 6^3 = 288 \pi \text{ cm}^3$

したがって $\frac{567}{4} \pi \div 288 \pi = \frac{63}{128}$ 倍

【問 56】

半径 7 cm の球の表面積を求めよ。ただし、円周率は π を用いること。

(高知県 2017 年度)

解答欄

cm^2

解答

$$196\pi \text{ cm}^2$$

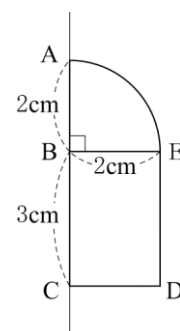
解説

$$4\pi \times 7^2 = 196\pi \text{ cm}^2$$

【問 57】

図のようなおうぎ形 ABE と長方形 BCDE をくっつけた図形を、直線 AC を軸として 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 か。ただし、 $AB=BE=2 \text{ cm}$ 、 $BC=3 \text{ cm}$ とする。

(長崎県 2017 年度)



解答欄

cm^3

解答

$$\frac{52}{3}\pi \text{ cm}^3$$

解説

半径 2 cm の球の体積の半分と底面の半径が 2 cm で高さが 3 cm の円柱の体積の和になる。

$$\text{よって求める体積は } \frac{4}{3}\pi \times 2^3 \div 2 + (\pi \times 2^2) \times 3 = \frac{52}{3}\pi \text{ cm}^3$$

【問 58】

図1は、半径が 2 cm の球 7 個がちょうど入っている円柱である。図2は、直径が図1の円柱の底面の直径と等しい球であり、図3は、底面の直径が図1の円柱の底面の直径と等しく、図2の球 1 個と、半径が 2 cm の球 6 個がちょうど入っている円柱である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。また、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2017 年度)

図1

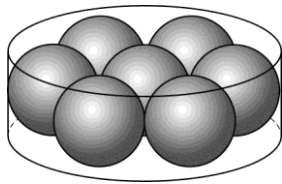


図2

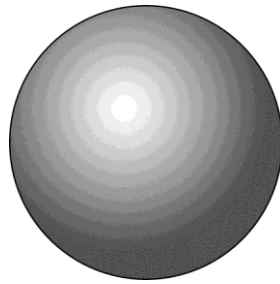
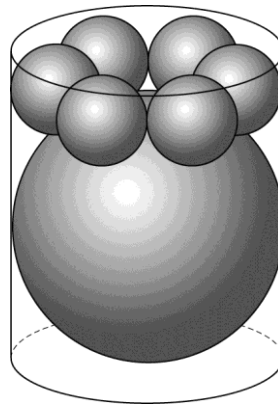
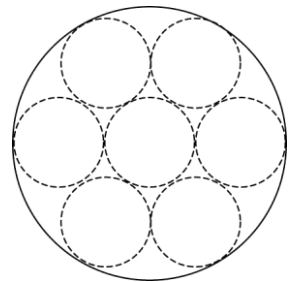


図3



問1 図4は、図1の平面図である。図1の円柱の底面の直径を求めなさい。

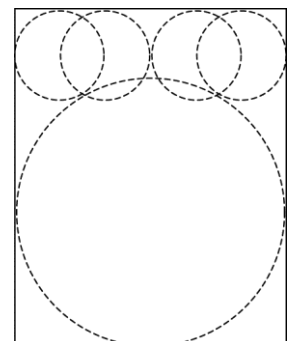
図4



問2 図2の球の体積を求めなさい。

問3 図5は、図3の立面図である。図3の円柱の高さを求めなさい。

図5



問4 図3において、円柱の中にある 7 個の球の中心を結び、底面が正六角形の角すいをつくる。この角すいの体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm ³
問3	cm
問4	cm ³

解答

問1 12 cm

問2 288π cm³

問3 $8 + 4\sqrt{3}$ cm

問4 96 cm³

解説

問1

図4より直径のところに半径 2cm の球が 3 個並んでいるので $2 \times 2 \times 3 = 12$ cm

問2

半径 6 cm の球だから $\frac{4}{3} \pi \times 6^3 = 288\pi$ cm³

問3

右の図は

図5に半径 6 cm の球の中心を通り底面に平行な直線①と垂直な直線②

半径 2 cm の中心を通り底面に平行な直線③

左から 2 番目の球に接し底面に垂直な直線④を引いたものである。

このとき直線①と直線②の交点を O

直線②と直線③の交点を A

直線③と直線④の交点を B とする。

点 O は半径 6 cm の球の中心、点 B は半径 2 cm の球の中心になるから

$OB = 6 + 2 = 8$ cm

線分 AB は半径 2 cm の球の直径になるから $AB = 4$ cm

ここで $\angle OAB = 90^\circ$ だから

三平方の定理より

$$OA^2 = OB^2 - AB^2 = 8^2 - 4^2 = 48$$

$OA > 0$ より

$$OA = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって円柱の高さは $2 + 4\sqrt{3} + 6 = 8 + 4\sqrt{3}$ cm

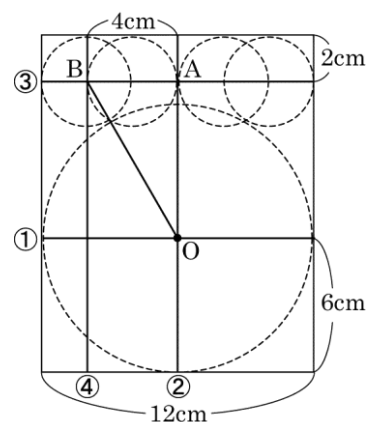
問4

底面の正六角形の対角線を結ぶと 1 辺 4cm の正三角形が 6 個できる。

この正三角形 1 個の面積は $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm² だから

底面積は $4\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}$ cm²

よってこの角すいの体積は高さが $OA = 4\sqrt{3}$ cm だから $\frac{1}{3} \times 24\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 96$ cm³



【問 59】

半径が 2 cm の球を P, 半径が 3 cm の球を Q とするとき, P と Q の体積の比は : である。

(沖縄県 2017 年度)

解答欄

:

解答

8:27

解説

2 つの球 P, Q は相似であり

相似比は半径の比に等しい。

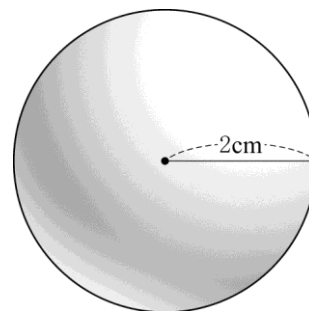
相似比は 2:3 だから

体積の比は $2^3:3^3=8:27$

【問 60】

図のように、半径が 2 cm の球があります。この球の表面積を求めなさい。
ただし、円周率は π を用いなさい。

(北海道 2018 年度)



解答欄

cm^2

解答

$$16\pi\text{ cm}^2$$

解説

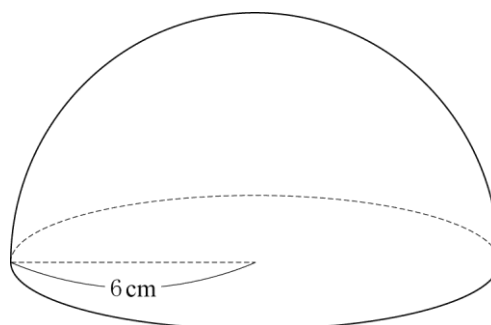
半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ で求められるから $4\pi \times 2^2 = 16\pi\text{ cm}^2$

【問 61】

図のように、半径 6 cm の半球がある。この半球の体積を求めなさい。

ただし、円周率は π を用いることとする。

(千葉県 2018 年度 後期)



解答欄

cm^3

解答

$$144\pi\text{ cm}^3$$

解説

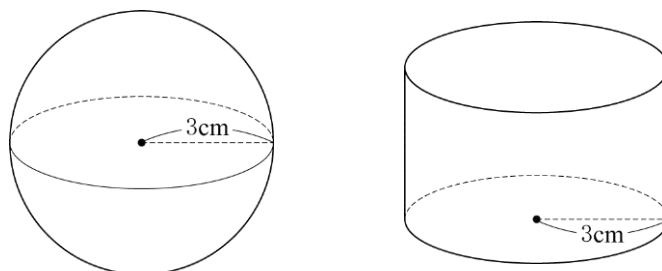
半径 6 cm の球の体積は $\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi\text{ cm}^3$

半球の体積はその半分だから $288\pi \div 2 = 144\pi\text{ cm}^3$

【問 62】

下の図のように、半径が 3 cm の球と、底面の半径が 3 cm の円柱がある。これらの体積が等しいとき、円柱の高さを求めなさい。

(佐賀県 一般 2018 年度)



解答欄

cm

解答

4cm

解説

半径 3 cm の球の体積は $\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$

また底面の半径が 3 cm の円柱の高さを $x\text{ cm}$ とすると

体積は $\pi \times 3^2 \times x = 9\pi x \text{ cm}^3$

$9\pi x = 36\pi$

$x = 4$

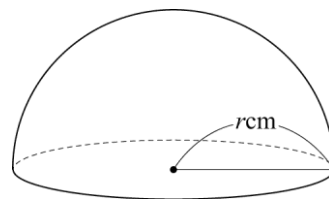
よって高さは 4 cm

【問 63】

右の図は半径 r cm の球を切断してできた半球で、切断面の円周の長さは 4π cm であった。このとき、 r の値を求めよ。また、この半球の体積は何 cm^3 か。

ただし、 π は円周率とする。

(鹿児島県 2018 年度)



解答欄

$r=$
体積 cm^3

解答

$$r=2$$

$$\text{体積 } \frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3$$

解説

切断面は半径 r cm の円であり

円周の長さが 4π cm だから

$$2\pi r = 4\pi$$

$$r=2$$

$$\text{よって半球の体積は } \frac{4}{3}\pi \times 2^3 \div 2 = \frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3$$

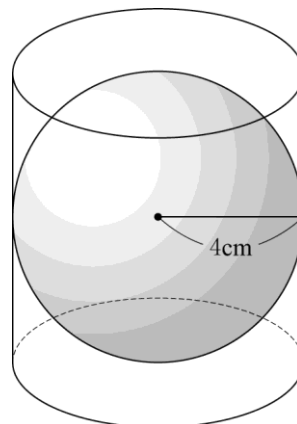
【問 64】

次の(1)，(2)の間に答えなさい。

(栃木県 2019 年度)

- (1) 図 1 のような，半径 4 cm の球がちょうど入る大きさの円柱があり，その高さは球の直径と等しい。この円柱の体積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

図 1



- (2) 図 2 のような，半径 4 cm の球 O と半径 2 cm の球 O' がちょうど入っている円柱がある。その円柱の底面の中心と 2 つの球の中心 O，O' とを含む平面で切断したときの切り口を表すと，図 3 のようになる。この円柱の高さを求めなさい。

図 2

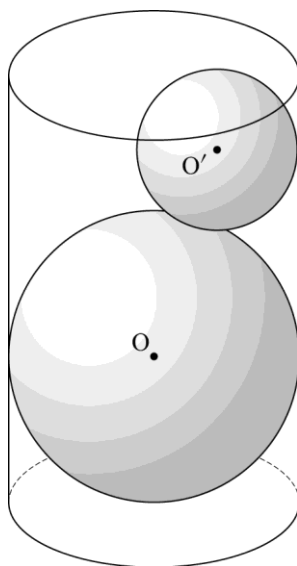
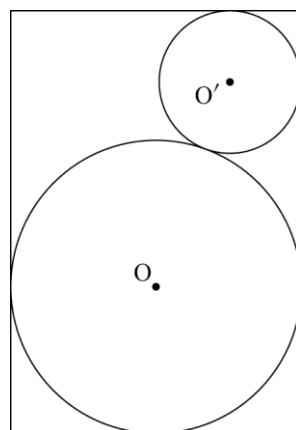


図 3



解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1) $128\pi \text{ cm}^3$

(2) $6+4\sqrt{2} \text{ cm}$

解説

(1)

円柱の底面は半径 4cm の円で高さは球の直径 8cm と等しいから，その体積は $\pi \times 4^2 \times 8 = 128\pi (\text{cm}^3)$

(2)

点 O を通り底面と平行な直線と点 O' を通り底面と垂直な直線の交点を H とする。このとき， $\triangle OHO'$ は $\angle OHO' = 90^\circ$ の直角三角形である。 $OO' = 4 + 2 = 6(\text{cm})$ ， $OH = 4 - 2 = 2(\text{cm})$ だから，

$$\triangle OHO' \text{ において，三平方の定理より } O'H = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$$

よって，この円柱の高さは $2 + 4\sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2}(\text{cm})$

【問 65】

球 A の表面積が球 B の表面積の 9 倍であり、球 B の半径が 4 cm であるとき、球 A の半径を求めよ。

(京都府 2019 年度 前期)

解答欄

cm

解答

12 cm

解説

すべての球は相似である。

相似比が $m : n$ である立体の表面積の比は $m^2 : n^2$ だから

球 A と球 B の表面積の比が 9 : 1 のとき

相似比は $\sqrt{9} : \sqrt{1} = 3 : 1$

よって、球 A の半径は $4 \times 3 = 12(\text{cm})$

【問 66】

半径 $\frac{1}{3}\text{cm}$ の球の表面積は何 cm^2 ですか。ただし、円周率は π とします。

(広島県 2019 年度)

解答欄

cm^2

解答

$\frac{4}{9}\pi$

解説

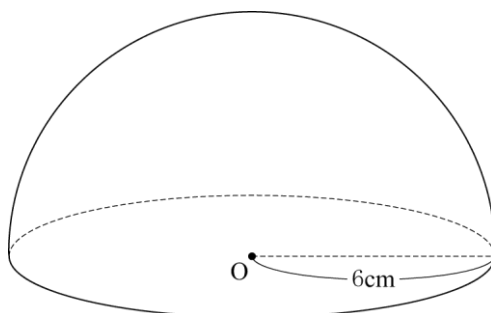
半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ だから

半径 $\frac{1}{3}\text{cm}$ の球の表面積は $4\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\pi (\text{cm}^2)$

【問 67】

下の図の立体は、半径 6 cm の球を中心 O を通る平面で切った半球である。この半球の表面積を求めなさい。

(青森県 2020 年度)



解答欄

cm^2

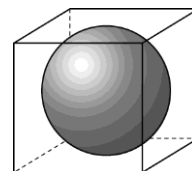
解答

$108\pi\text{ cm}^2$

【問 68】

右の図のように、1 辺の長さが 12 cm の立方体のすべての面に接している球がある。この球の体積を求めよ。ただし、円周率は π を用いること。

(高知県 A 2020 年度)



解答欄

cm^3

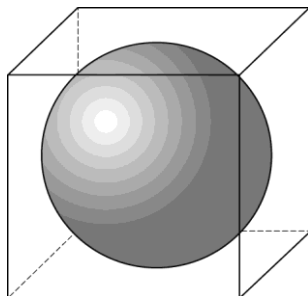
解答

$288\pi\text{ cm}^3$

【問 69】

下の図のように、1 辺の長さが 4 cm の立方体にちょうど入る大きさの球がある。この球の体積を求めなさい。

(佐賀県 2020 年度 一般)



解答欄

cm^3

解答

$$\frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$$

【問 70】

右の図 1 のように、頂点を A とし、底面の直径 BC が 4 cm 、母線 AB が 6 cm の円すいと、この円すいの中にぴったり入った球がある。円すいの底面の中心を M とすると、底面と線分 AM は垂直に交わっている。

この円すいに、糸を、母線 AB と球との接点 P から、側面を一回りして点 B まで、糸の長さが最も短くなるように巻きつける。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。また、糸の伸び縮みおよび太さは考えないものとする。

(熊本県 2020 年度)

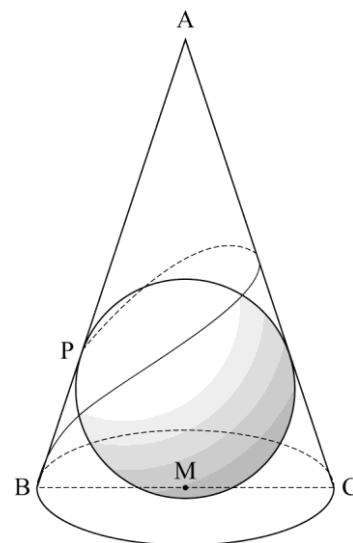


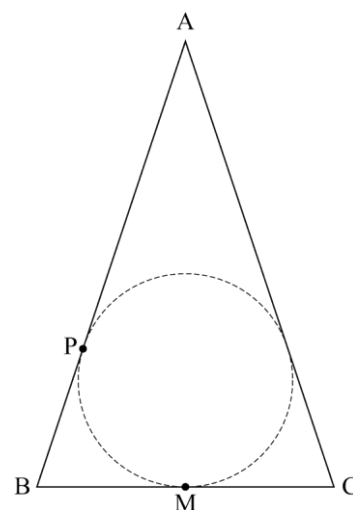
図 2

問 2 右の図 2 は、図 1 の立面図である。線分 AP の長さを求めなさい。

問 3 図 1 の円すいの側面の展開図はおうぎ形である。

(1) おうぎ形の面積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

(2) 点 P から点 B までの糸の長さを求めなさい。



解答欄

問 1	cm	
問 2	cm	
問 3	(1)	cm^2
	(2)	cm

解答

問1 $4\sqrt{2}$ cm

問2 4 cm

問3

(1) 12π cm²

(2) $2\sqrt{19}$ cm

解説

問1

$$AM = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

問2

AP=x とおくと、右の図のようになるので

$$(6-x) + (6-x) = 4$$

$$x = 4$$

問3

(1)

円周に注目すると、

$$(\text{おうぎ形の半径}) \times 2\pi \times \frac{(\text{おうぎ形の中心角})}{360}$$

= (底面の円の半径) $\times 2\pi$ より、

$$(\text{おうぎ形の半径}) \times (\text{おうぎ形の中心角}) = (\text{円の半径}) \times 360$$

$$6 \times (\text{おうぎ形の中心角}) = 2 \times 360$$

$$(\text{おうぎ形の中心角}) = 120^\circ$$

$$\text{ゆえに、(おうぎ形の面積)} = 6^2 \pi \times \frac{120}{360} = 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

(2)

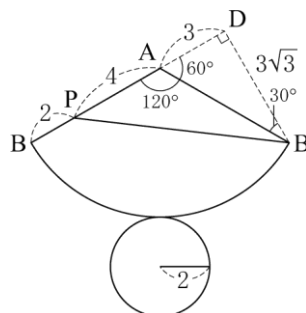
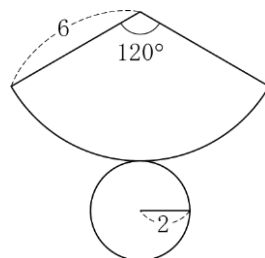
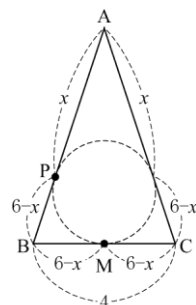
右の図の展開図における PB の長さが求める値である。

右の図のように直角三角形 ABD をかき加えると、

AD=3, BD=3 $\sqrt{3}$ であり、 $\triangle PBD$ において、三平方の定理より、

$$PB = \sqrt{7^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{19} \text{ (cm)}$$

図2



【問 71】

図 1 のように、底面の半径が $\sqrt{3}\text{cm}$ の円錐の内部で、半径が 1cm の球が円錐の側面と底面の中心 O にぴったりとくっついている。円錐の頂点を A 、底面の周上のある 1 点を B とし、母線 AB 上で球と接している点を P とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

ただし、円周率は π とする。

(沖縄県 2020 年度)

問 1 図 1 の円錐について、側面の展開図であるおうぎ形の弧の長さを求めなさい。

問 2 線分 BP の長さを求めなさい。

問 3 図 2 のように、図 1 の円錐を、点 P を通り底面と平行な平面で切り、2 つの立体に分ける。このとき、点 B を含む立体の体積を求めなさい。

図 1

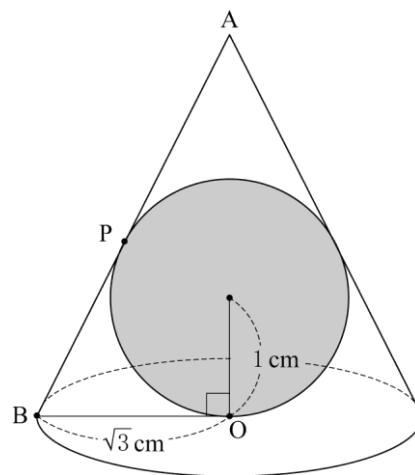
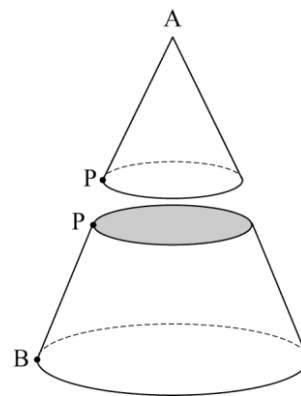
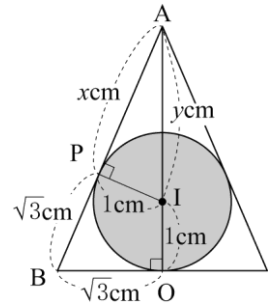


図 2



解答欄

問 1	cm
問 2	cm
問 3	cm ³



【問 72】

半径が 2 cm の球の体積と表面積を求めなさい。ただし、円周率は π とします。

(埼玉県 2021 年度)

解答欄

体積	cm^3
表面積	cm^2

解答

(体積) $\frac{32}{3}\pi$ (cm^3)

(表面積) 16π (cm^2)

【問 73】

右の図 1 のように、頂点が A、高さが 12 cm の円すいの形をした容器がある。この容器の中に半径 r cm の小さい球を入れると、容器の側面に接し、A から小さい球の最下部までの長さが 3 cm のところで止まった。

次に、半径 $2r$ cm の大きい球を容器に入れると、小さい球と容器の側面に接して止まり、大きい球の最上部は底面の中心 B にも接した。

また、図 2 は、図 1 を正面から見た図である。

このとき、次の問いに答えなさい。

ただし、円周率は π とし、容器の厚さは考えないものとする。

(富山県 2021 年度)

問 1 r の値を求めなさい。

問 2 容器の底面の半径を求めなさい。

問 3 大きい球が容器の側面に接している部分の長さを求めなさい。

図 1

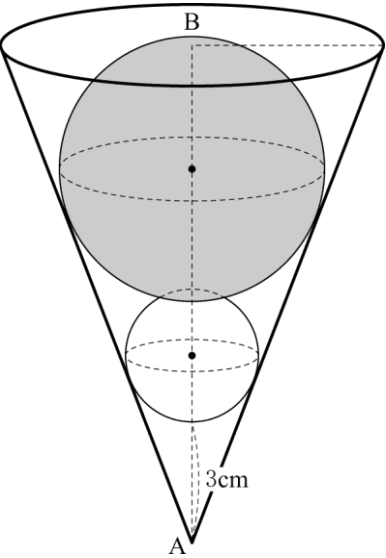
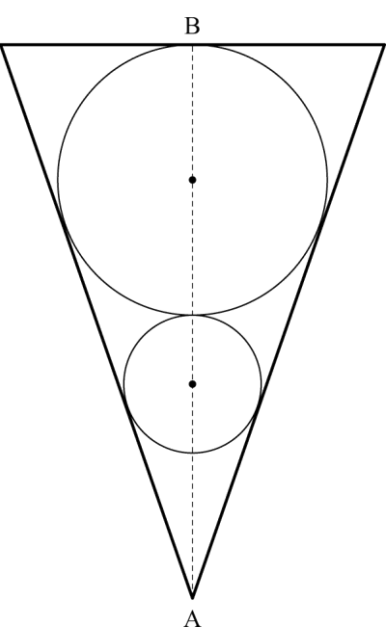


図 2



解答欄

問 1	$r =$
問 2	cm
問 3	cm

解答

問 1 $r = \frac{3}{2}$

問 2 $3\sqrt{2}$ cm

問 3 $4\sqrt{2}\pi$ cm

解説

問 1

AB=12cm だから

$$3 + 2 \times r + 2 \times 2r = 12 \text{ より}$$

$$6r = 9$$

$$r = \frac{3}{2}$$

問 2

大きい球の中心を O とする。

また、右の図のように、点 C をとり

線分 AC と円 O の接点を H とする。

線分 AB は円すいの高さだから、 $\angle ABC = 90^\circ$

円の接線と接点を通る半径は垂直に交わるから

$$\angle AHO = 90^\circ$$

$\angle A$ は共通より

$\triangle ABC \sim \triangle AHO$ なので

$$AB : AH = BC : HO$$

問 1 より $r = \frac{3}{2}$ だから

$$AO = 3 + 4r = 3 + 4 \times \frac{3}{2} = 9(\text{cm})$$

$$HO = 2r = 2 \times \frac{3}{2} = 3(\text{cm})$$

$\triangle AHO$ で三平方の定理より

$$AH^2 = AO^2 - HO^2 = 9^2 - 3^2 = 72$$

$AH > 0$ より

$$AH = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$$

以上より、 $12 : 6\sqrt{2} = BC : 3$ だから

$$BC = 12 \times 3 \div 6\sqrt{2} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$$

問 3

右上の図で、H から線分 AB に垂線 HI をひくと

大きい球が容器の側面に接している部分の長さは、半径 IH の円の円周の長さであり

$HI \parallel CB$ となるから、 $IH : BC = AH : AC$ が成り立つ。

問 2 より、 $BC = 3\sqrt{2}\text{cm}$ 、 $AH = 6\sqrt{2}\text{cm}$ 。

また、 $AO = 9\text{cm}$ で

$\triangle ABC \sim \triangle AHO$ より

$$AC : AO = AB : AH = 12 : 6\sqrt{2} \text{ だから}$$

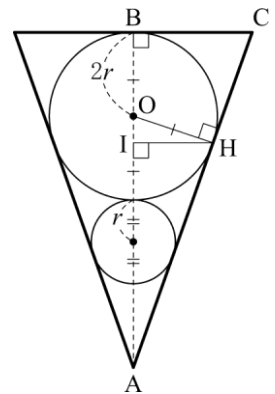
$$AC = 9 \times 12 \div 6\sqrt{2} = \frac{18}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}(\text{cm})$$

よって、 $IH : 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} : 9\sqrt{2}$ だから

$$IH = 3\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \div 9\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$\text{半径 IH の円の円周の長さは } 2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi(\text{cm})$$

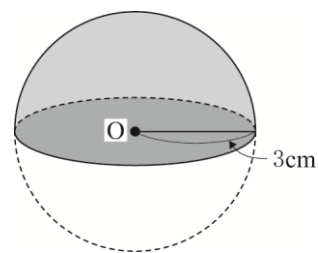
図



【問 74】

右の図のように、半径 3 cm の球を、中心 O を通る平面で切ってできた立体の表面積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

(石川県 2021 年度)



解答欄

cm^2

解答

$27\pi\text{ cm}^2$

解説

半径 3 cm の半球の表面積は

半径 3 cm の球の表面積の半分と、半径 3 cm の円の面積をあわせたものである。

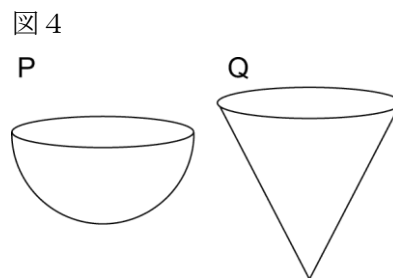
よって、 $4\pi \times 3^2 \times \frac{1}{2} + \pi \times 3^2 = 27\pi\text{ (cm}^2\text{)}$

【問 75】

春さんの学校では、生徒会企画の運動会の準備を進めている。

(長野県 2021 年度)

- (1) 水を運ぶ競技で使うために、図 4 のような、水を入れる容器 P と Q を準備した。P は半径 4 cm の半球、Q は底面の半径が 4 cm、高さが 8 cm の円錐である。ただし、容器の厚さは考えないものとする。



- ① Q に水をいっぱいに入れたときの水の体積 V を求める次の式について、あ に当てはまる数を書きなさい。

$$V = \pi \times 4^2 \times 8 \times \text{あ}$$

- ② P と Q それぞれに水をいっぱいに入れたときの水の体積を比較したとき、どのようなことがいえるか、最も適切なものを次のア～ウから 1 つ選び、記号を書きなさい。また、そのようにいえる理由を説明しなさい。

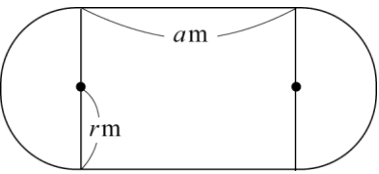
ア P と Q の水の体積は等しい。

イ P の水の体積の方が大きい。

ウ P の水の体積の方が小さい。

(2) 長方形と 2 つの合同な半円を組み合わせた形で陸上競技用のトラックをつくる。

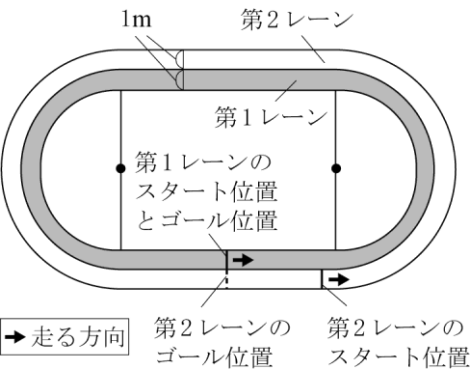
図 5



① 図 5 は、半円の半径を $r\text{ m}$ 、長方形の横の長さを $a\text{ m}$ とするときのトラックを表したものである。トラックの周の長さを表す式を書きなさい。

② 図 6 は、図 5 のトラックの外側に、2 つのレーンをつくり、各レーンの幅を 1 m としたものである。ゴール位置を同じにして 1 周するとき、各レーンを走る距離が同じになるようにする。このとき、第 2 レーンのスタート位置は、第 1 レーンのスタート位置より何 m 前方にずらせばよいか、求めなさい。ただし、各レーンを走る距離は、それぞれのレーンの内側の線の長さで考えるものとする。

図 6



③ ②で求めた長さについて、さらにわかることとして最も適切なものを、次のア～ウから 1 つ選び、記号を書きなさい。

第 2 レーンのスタート位置は、

- ア 図 5 の半円の半径によって決まる。
- イ 図 5 の長方形の横の長さによって決まる。
- ウ 図 5 の半円の半径や長方形の横の長さに関係なく決まる。

解答欄

(1)	①	
	②	記号
	②	理由
(2)	①	m
	②	m
	③	

解答

(1)

① $\frac{1}{3}$

②

記号ア

理由

P と Q に入れた水の体積の比は,

$$\left(\frac{4}{3}\pi \times 4^3 \times \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 8\right) = 1 : 1$$

となるから, 水の体積は等しい。

(2)

① $2\pi r + 2a$ (m)

② 2π (m)

③ ウ

解説

(2)

①

トラックのカーブしている部分 (図 1 の太線部) をあわせると
カーブしている部分の合計は

半径 r m の円の周の長さと同じことがわかる。

よって, $2\pi r + 2a$ (m)

②

第 2 レーンの内側の線の長さは

①と同様に考えると

図 2 から, $2\pi(r+1) + 2a = 2\pi r + 2a + 2\pi$ (m)

よって, 第 1 レーンの内側の線の長さとの差は

$(2\pi r + 2a + 2\pi) - (2\pi r + 2a) = 2\pi$ (m)

③

②より

第 2 レーンのスタート位置は r の値にかかわらず

2π m だけ前方にずらすことになる。

図 1

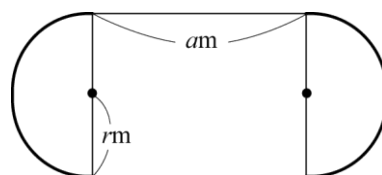
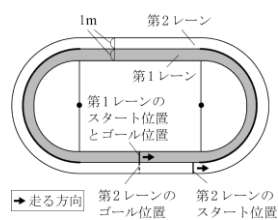


図 2



【問 76】

点 O を中心とする球を、点 O を通る平面で切ってできる半球の形をした容器 X があり、右の図 1 のように、切り口を水平に保って満水にしてある。この切り口を円 O とすると、円 O の周の長さは $12\pi\text{ cm}$ であった。また、右の図 2 のように、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があり、 $AD : BC = 3 : 1$ 、 $CD = 12\text{ cm}$ 、 $\angle ADC = 90^\circ$ である。

台形 $ABCD$ を、直線 CD を回転の軸として 1 回転させてできる立体の形をした容器 Y があり、空の容器 Y を、 BC を半径とする円 C が底になるように水平な台の上に置く。右の図 3 のように、容器 Y に、容器 X に入っている水を残らず注ぐと、容器の底から水面までの高さは 9 cm になった。図 3 において、水面と線分 AB 、線分 CD との交点をそれぞれ E 、 F とする。

このとき、次の問 1～問 3 に答えよ。ただし、容器 X と容器 Y の厚さは考えないものとする。

(京都府 2021 年度 前期)

問 1 円 O の半径を求めよ。また、図 1 において、容器 X に入っている水の体積を求めよ。

問 2 $AD : EF$ を最も簡単な整数の比で表せ。

問 3 容器 Y の容積を求めよ。

図 1

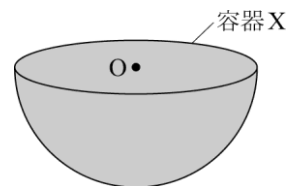


図 2

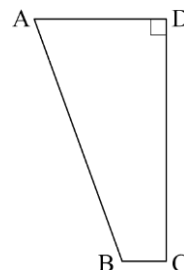
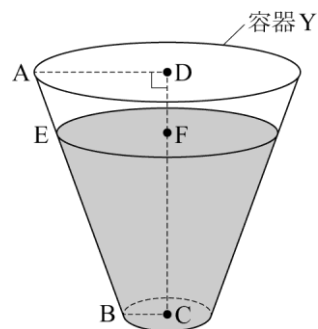


図 3



解答欄

問 1	半径	cm
	体積	cm^3
問 2	$AD : EF =$	:
問 3		cm^3

解答

問 1

(半径)6 (cm)

(体積) 144π (cm³)

問 2 (AD : EF =) 6 : 5

問 3 256π (cm³)

解説

問 1

円 O の半径を r とすると

その円周は

$$2\pi r = 12\pi$$

$$r = 6(\text{cm})$$

半球の容器 X の半径が 6cm なので

その体積は

$$\frac{4}{3}\pi \times 6^3 \times \frac{1}{2} = 144\pi (\text{cm}^3)$$

問 2

台形 ABCD において、2 直線 AB, DC の交点を G とすると

AD // BC より

$$GC : GD = BC : AD = 1 : 3$$

$$GC : CD = 1 : 2$$

$$GC = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 12 = 6(\text{cm})$$

AD // EF より

$$AD : EF = GD : GF = 18 : 15 = 6 : 5$$

問 3

容器 X, 容器 Y の体積をそれぞれ x, y とし、円 C を底面、点 G を頂点とする円すいの体積を z とする。

円 C を底面、点 G を頂点とする円すいと

円 F を底面、点 G を頂点とする円すいは

相似でありその相似比は $GC : GF = 6 : 15 = 2 : 5$ なので

$$\text{体積比は } 2^3 : 5^3 = 8 : 125$$

そして、その体積の差が容器 X に入っていた水の体積に等しいので

$$z : x = 8 : (125 - 8) = 8 : 117$$

円 C を底面、点 G を頂点とする円すいと

円 D を底面、点 G を頂点とする円すいは

相似でありその相似比は $BC : AD = 1 : 3$ なので

$$\text{体積比は } 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

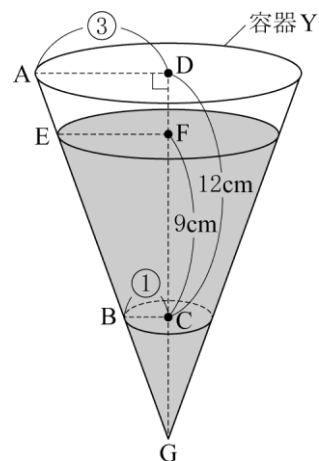
そして、その体積の差が容器 Y の体積に等しいので

$$z : y = 1 : (27 - 1) = 1 : 26 = 8 : 208$$

よって、 $x : y = 117 : 208$ だから

問 1 より $144\pi : y = 117 : 208$

$$y = \frac{208}{117} \times 144\pi, y = 256\pi (\text{cm}^3)$$



【問 77】

半径 2 cm の球の表面積は何 cm^2 か，求めなさい。ただし，円周率は π とする。

(兵庫県 2021 年度)

解答欄

cm^2

解答

16π (cm^2)

解説

(球の表面積) $= 4 \times \pi \times (\text{半径})^2$ の公式に当てはめる。

【問 78】

図 1 のように、ある球をその中心 O を通る平面で切ると半球が 2 つでき、その一方を半球 X とする。このとき、切り口は中心が O の円となる。この円 O の周上に、図 2 のように、3 点 A, B, C を $\angle BAC = 120^\circ$ となるようにとり、 $\angle BAC$ の二等分線と線分 BC 、円周との交点をそれぞれ D, E とすると、 $AE = 8 \text{ cm}$ 、 $BE = 7 \text{ cm}$ となった。

次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2021 年度)

問 1 $\triangle ABE \sim \triangle BDE$ を次のように証明した。

と にあてはまるものを、あとのア～カからそれぞれ 1 つ選んでその符号を書き、この証明を完成させなさい。

<証明>

$\triangle ABE$ と $\triangle BDE$ において、

共通な角だから、

$$\angle AEB = \angle BED \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 AE は $\angle BAC$ の二等分線だから、

$$\angle BAE = \angle \text{ } \quad \cdots \textcircled{2}$$

弧 CE に対する円周角は等しいから、

$$\angle DBE = \angle \text{ } \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } \angle BAE = \angle DBE \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より, } \text{ } \text{ から,}$$

$\triangle ABE \sim \triangle BDE$

ア ABC

イ CDE

ウ CAE

エ 3 組の辺の比がすべて等しい

オ 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

カ 2 組の角がそれぞれ等しい

問 2 線分 DE の長さは何 cm か、求めなさい。

問 3 $\triangle BCE$ の面積は何 cm^2 か、求めなさい。

問 4 図 3 のように、半球 X の球面上に、点 P を直線 PO が平面 $ABEC$ に垂直となるようにとる。このとき、頂点が P 、底面が四角形 $ABEC$ である四角すいの体積は何 cm^3 か、求めなさい。

図 1

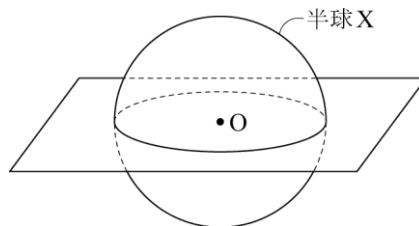


図 2

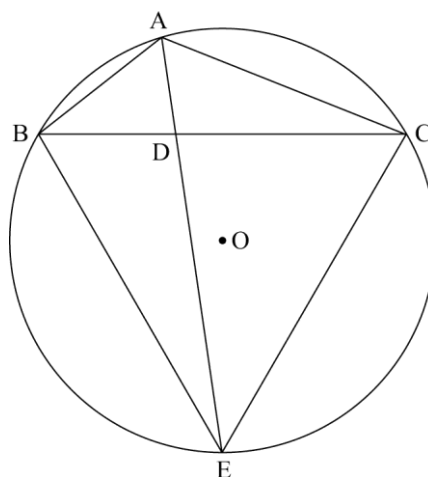
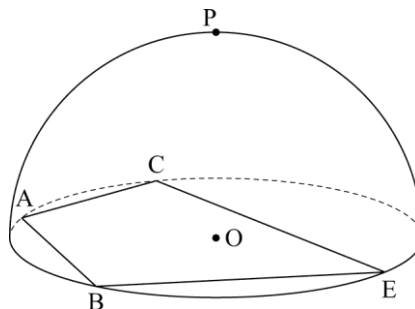


図 3



解答欄

問 1	i	
	ii	
問 2	cm	
問 3	cm ²	
問 4	cm ³	

解答

問 1

i ウ

ii カ

問 2 $\frac{49}{8}$ (cm)

問 3 $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ (cm²)

問 4 $\frac{112}{3}$ (cm³)

解説

問 2

△ABE∽△BDE より、AE : BE = BE : DE 8 : 7 = 7 : DE DE = $\frac{49}{8}$ cm

問 3

AE は∠BAC (=120°) の二等分線なので、∠BAE = ∠CAE = 60°
同じ弧 $\widehat{BE}$ に対する円周角は等しく、∠BCE = ∠BAE = 60° 同じ弧 $\widehat{CE}$ に対する円周角は等しく、∠CBE = ∠CAE = 60° ここで△BEC の内角の和に注目すると、∠BEC = 180° - (∠BCE + ∠CBE) = 60°
よって、△BEC は 3 つの内角がすべて 60° なので正三角形であり、1 辺の長さは 7cm である。E から BC に垂線 EH をおろす (図 1)。△EBH は内角が 30°, 60°, 90° で辺の比が決まった直角三角形なので、BE : EH = 2 : $\sqrt{3}$

$$7 : EH = 2 : \sqrt{3} \quad EH = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって、} \triangle BEC = \frac{1}{2} \times BC \times EH = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$$

問 4

まずは底面積となる四角形 ABEC の面積を求める。(四角形 ABEC) = △ABC + △BEC と考えると、

問 3 で△BEC の面積を求めたので、残りの△ABC の面積を求めればよい。問 2 より DE = $\frac{49}{8}$ cm なので、

$$AD = AE - DE = 8 - \frac{49}{8} = \frac{15}{8} (\text{cm})$$

よって、AD : DE = 15 : 49 となる。これは BC を共通の底辺とみたときの、△ABC と△BEC の高さの比となるので、△ABC : △BEC = 15 : 49

$$\text{問 3 より、} \triangle ABC : \frac{49\sqrt{3}}{4} = 15 : 49 \quad \triangle ABC = \frac{15\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$$

$$\text{よって、(四角形 ABEC)} = \triangle ABC + \triangle BEC = \frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

次に、四角すいの高さ PO を求める。

PO は球 O の半径であり、円 O の半径の長さと等しい。

よって、円 O の半径の長さを求める。

円 O は△BEC の外接円でもあるので、外接円の中心が各辺の垂直二等分線の交点であることから BC の垂直二等分線上に点 O がある (図 1)。

さらに、正三角形において、1 辺の垂直二等分線は、向かいの角の二等分線でもあるので、OC は∠BCE の二等分線である。

よって、∠OCH = ∠OCE = 30° となる。

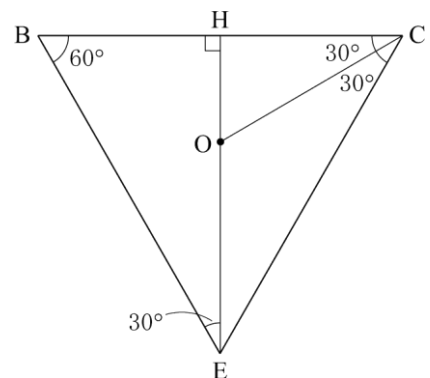
ここで△OCH は、内角が 30°, 60°, 90° の辺の比が決まった直角三角形であり、

$$OC : CH = 2 : \sqrt{3} \quad OC : \frac{7}{2} = 2 : \sqrt{3} \quad OC = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

これは円 O の半径であり球の半径 PO の長さである。これが四角すいの高さとなるので、

$$(\text{四角すいの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{四角形 ABEC}) \times PO = \frac{1}{3} \times 16\sqrt{3} \times \frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{112}{3} (\text{cm}^3)$$

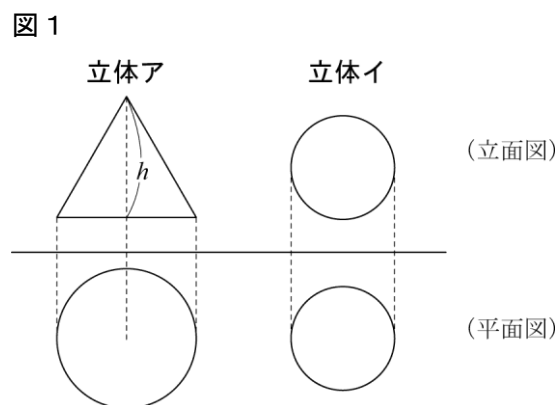
図 1



【問 79】

右の図 1 は 2 つの立体の投影図である。立体アと立体イは、立方体、円柱、三角柱、円錐、三角錐、球のいずれかであり、2 つの立体の体積は等しい。

平面図の円の半径が、立体アが 4 cm、立体イが 3 cm のとき、立体アの高さ h の値を求めなさい。
(鳥取県 2021 年度)



解答欄

cm

解答

$$\frac{27}{4} \text{ cm}$$

解説

立体アは円錐でその体積は、 $\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times h = \frac{16}{3} \pi h$

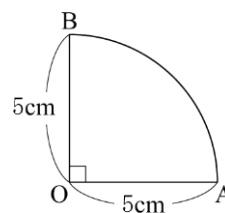
立体イは球でその体積は、 $\frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 36 \pi$

この 2 つの立体の体積は等しいので、 $\frac{16}{3} \pi h = 36 \pi \quad h = \frac{27}{4} \text{ (cm)}$

【問 80】

右の図のような、半径 5 cm、中心角 90° のおうぎ形 OAB があります。このおうぎ形を、直線 OA を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

(岡山県 2021 年度 特別)



解答欄

cm^3

解答

$$\frac{250}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$