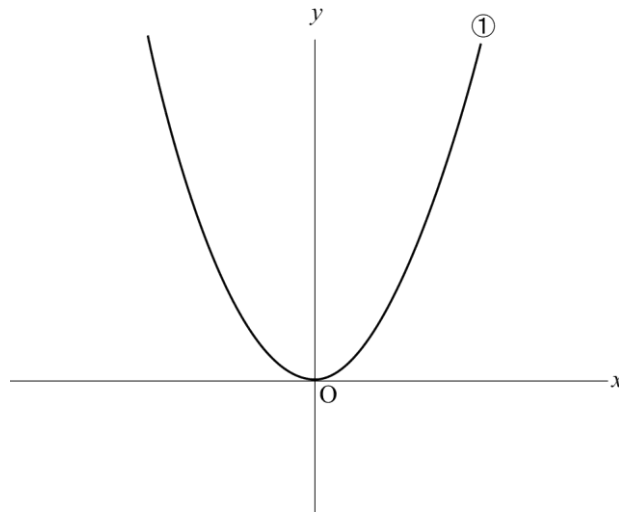


4.二次関数と図形関連の複合問題 2021 年度出題

【問 1】

下の図のように、関数 $y=ax^2$ (a は正の定数) ……① のグラフがあります。点 O は原点とします。



次の問いに答えなさい。

(北海道 2021 年度)

問 1 $a=4$ とします。①のグラフと x 軸について対称なグラフを表す関数の式を求めなさい。

問 2 ①について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域が $0 \leq y \leq 18$ となります。このとき、 a の値を求めなさい。

問 3 $a=1$ とします。①のグラフ上に 2 点 A , B を、点 A の x 座標を 2、点 B の x 座標を 3 となるようにとります。 y 軸上に点 C をとります。線分 AC と線分 BC の長さの和が最も小さくなるとき、点 C の座標を求めなさい。

解答欄

問 1	
問 2	$a =$
問 3	[計算] (答) C (,)

解答

問 1 $y = -4x^2$

問 2 $a = 2$

問 3

〔計算〕

点 B と y 軸について対称な点を D とすると、D $(-3, 9)$ …①

BC と DC の長さは等しいから、線分 AC と線分 BC の長さの和が最も小さくなるのは、3 点 A, C, D が一直線上にあるときである。…②

3 点 A, C, D を通る直線の式を $y = ax + b$ とすると、

連立方程式 $\begin{cases} 4 = 2a + b \\ 9 = -3a + b \end{cases}$ を解いて…③

$a = -1, b = 6$ …④

したがって、点 C の座標は $(0, 6)$

(答) C $(0, 6)$

解説

問 1

関数 $y = ax^2$ のグラフと $y = -ax^2$ のグラフが、 x 軸について対称であることから、 $y = -4x^2$

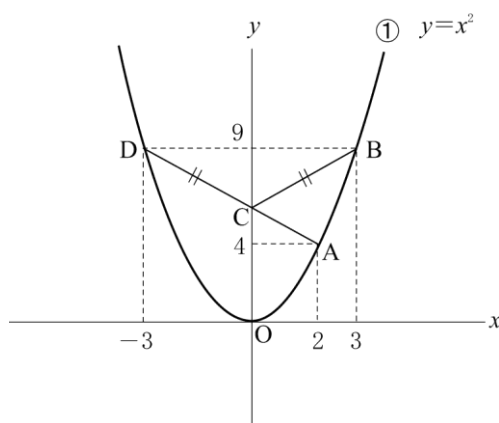
問 2

関数 $y = ax^2 (a > 0)$ のグラフは、 y 軸に関して対称な、上に開いた形の放物線なので、 x の値の絶対値が大きい方が、それに対応する y の値が大きくなる。よって、 $x = 3$ のとき、 $y = 18$ であることがわかるので、 $18 = a \times 3^2 \Rightarrow a = 2$

問 3

線分の長さの和が最も小さくなるという条件から、対称性を利用することを考える。図 1 のように、点 B と y 軸に関して対称な点 D をとると、 $AC + BC = AC + DC$ であることが利用できる。

図 1



【問 2】

図 1 で、①は関数 $y = -\frac{4}{9}x^2$ のグラフであり、点 A の座標は $(2, -4)$ 、点 B は①上の点で x 座標が負の値をとり、 y 座標は -4 である。次の問 1 ～問 4 に答えなさい。ただし、座標軸の単位の長さを 1 cm とする。

(青森県 2021 年度)

問 1 点 B の x 座標を求めなさい。

問 2 ①の関数について、 x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

問 3 点 P を x 軸上にとり、 $AB = AP$ となる二等辺三角形 ABP をつくる。点 P の x 座標が正の値をとるとき、点 P の座標を求めなさい。

問 4 図 2 は、図 1 の①上に x 座標が 6 である点 C をとり、四角形 OBCA をかき加えたものである。点 A を通り、四角形 OBCA の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

図 1

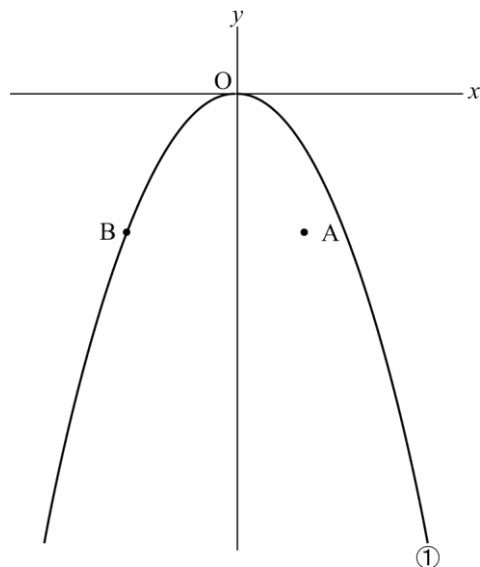
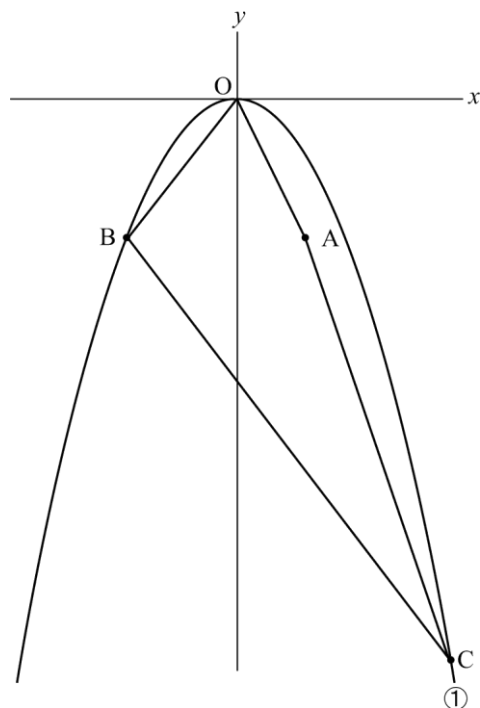
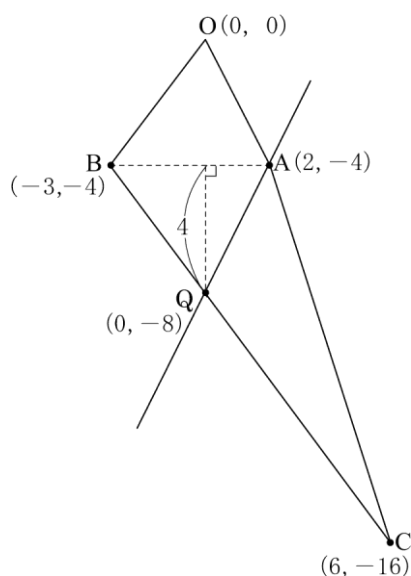


図 2



解答欄

問 1	
問 2	
問 3	
問 4	

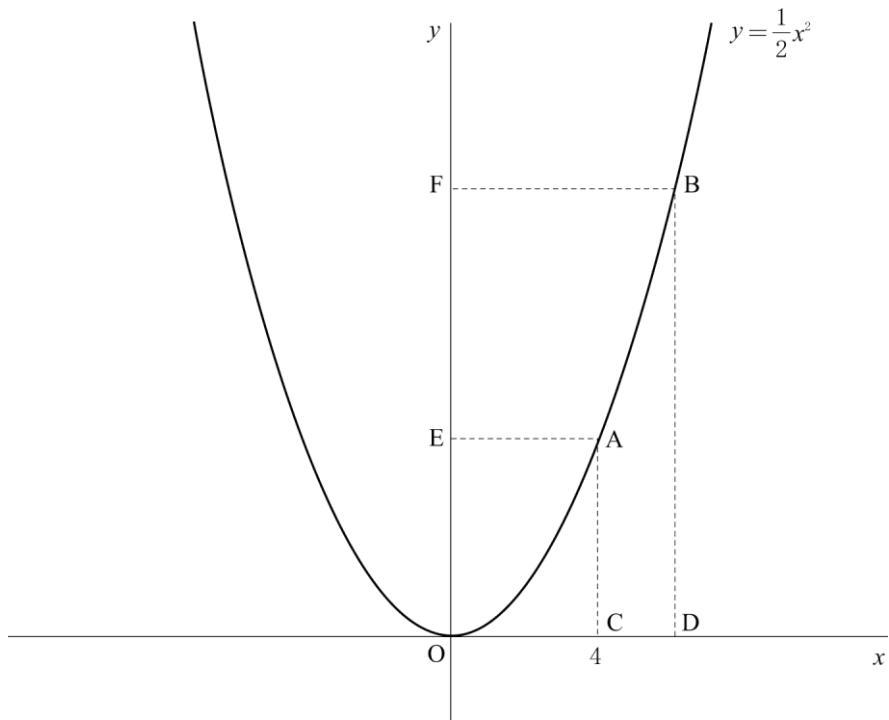


【問 3】

下の図のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、A の x 座標は 4 で、B の y 座標は A の y 座標より大きくなっています。A, B から x 軸に垂線をひいて、 x 軸との交点をそれぞれ C, D とします。また、A, B から y 軸に垂線をひいて、 y 軸との交点をそれぞれ E, F とします。

このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。
ただし、下の図は、B の x 座標が A の x 座標より大きい場合について示しています。

(岩手県 2021 年度)



- 問 1 点 A の y 座標を求めなさい。
- 問 2 点 A, C, D, B, F, E, A の順に、これらの点を結んだ線分でできる図形の周の長さが 35 となるときの、B の x 座標が、A の x 座標より大きい場合と小さい場合について、B の x 座標をそれぞれ求めなさい。

解答欄

問 1		
問 2	A の x 座標より大きい場合	
	A の x 座標より小さい場合	

解答

問 18

問 2

A の x 座標より大きい場合 5

A の x 座標より小さい場合 $1-2\sqrt{7}$

解説

問 1

点 A は、 x 座標が 4 で、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるの

で、その y 座標は、 $y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$

問 2

点 B の x 座標を t とすると、点 B は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ

上にあるので、その y 座標は $y=\frac{1}{2}t^2$ である。

点 B の x 座標が、点 A の x 座標より大きいとき、 $t>4$ で、
図形は図 1 のようになる。

求める図形の周の長さは、長方形 ODBF の周の長さと等しいので、その長さは、 $2t+2\times\frac{1}{2}t^2=t^2+2t$

よって、 $t^2+2t=35 \Rightarrow t^2+2t-35=0$

$\Rightarrow (t+7)(t-5)=0 \Rightarrow t=-7, 5$

$t>4$ より、 $t=5$

点 B の x 座標が、点 A の x 座標より小さいとき、 $t<4$ で、
図形は図 2 のようになる。直線 BF と直線 CA の交点を G と
すると、求める図形の周の長さは、長方形 BDCG の周の長
さと等しいので、

その長さは、 $2(4-t)+2\times\frac{1}{2}t^2=t^2-2t+8$

よって、 $t^2-2t+8=35 \Rightarrow t^2-2t-27=0$

2 次方程式の解の公式より、

$$t=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times(-27)}}{2\times 1}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{112}}{2}=\frac{2\pm 4\sqrt{7}}{2}=1\pm 2\sqrt{7}$$

$t<4$ より、 $t=1-2\sqrt{7}$

図 1

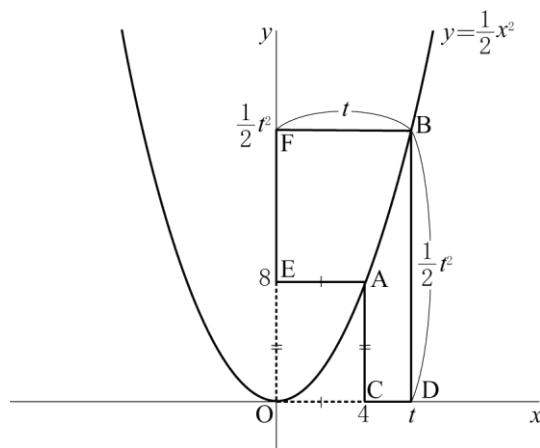
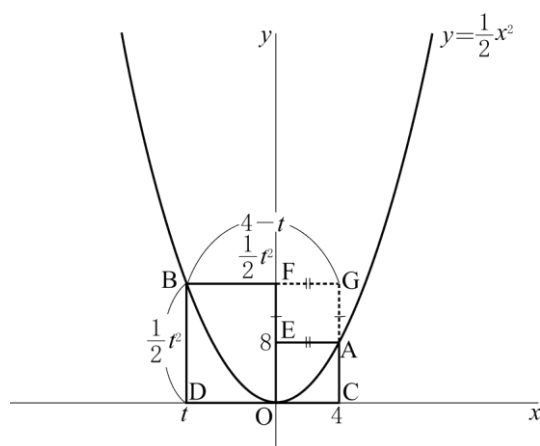


図 2

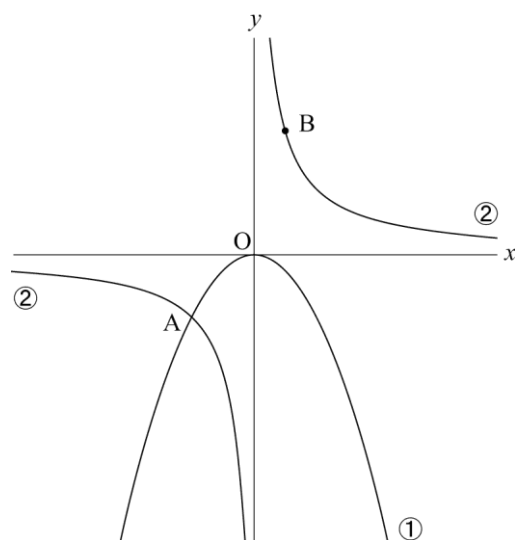


【問 4】

右の図において、①は関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ、②は反比例のグラフである。

①と②は点 A で交わっていて、点 A の x 座標は -2 である。また、②のグラフ上に x 座標が 1 である点 B をとる。このとき、次の問いに答えなさい。

(山形県 2021 年度)



- (1) 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域を求めなさい。

- (2) x 軸上に点 P をとる。線分 AP と線分 BP の長さの和が最も小さくなるとき、点 P の x 座標を求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	

解答

(1) $-8 \leq y \leq 0$

(2) -1

解説

(1)

関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ について、 $x = -2$ のとき、

$$y = -\frac{1}{2} \times (-2)^2 = -2,$$

$x = 4$ のとき、 $y = -\frac{1}{2} \times 4^2 = -8$ であることに注意してグラフをかくと、図 1 のようになる。よって、 y の変域は、 $-8 \leq y \leq 0$

(2)

線分 AP と線分 BP の長さの和が最も小さくなるのは、図 2 のように、3 点 A、P、B が一直線上にあるときである。

点 A は x 座標が -2 で、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にある

ので、 $y = -\frac{1}{2} \times (-2)^2 = -2$ だから、 $A(-2, -2)$

②のグラフの式は、反比例だから、 $y = \frac{a}{x}$ とおける。点 A が

このグラフ上にあるので、 $-2 = \frac{a}{-2}$ 、 $a = 4$

よって、②のグラフの式は、 $y = \frac{4}{x}$ である。

点 B は x 座標が 1 で、関数 $y = \frac{4}{x}$ のグラフ上にあるので、

$$y = \frac{4}{1} = 4, \quad B(1, 4)$$

直線 AB の式を $y = mx + n$ とおき、 $(x, y) = (-2, -2)$ 、 $(1, 4)$ をそれぞれ代入してできる連立方程式を解くと、 $m = 2$ 、 $n = 2$ よって、直線 AB の式は、 $y = 2x + 2$ である。

点 P の y 座標は 0 なので、 $0 = 2x + 2$ 、 $x = -1$

図 1

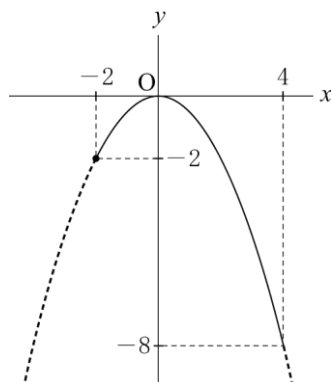
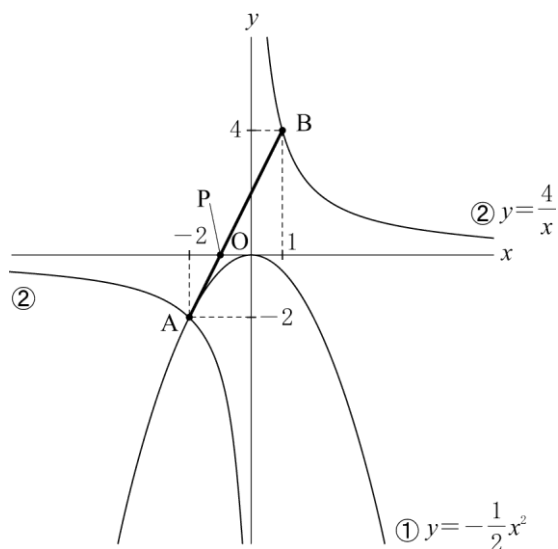


図 2



【問 5】

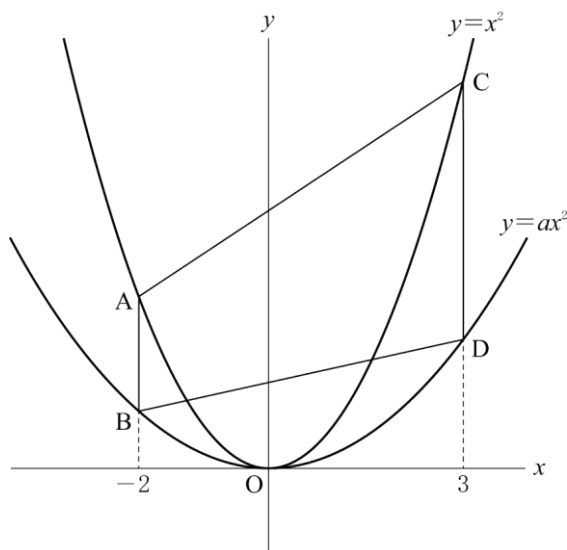
右の図のように、2つの関数 $y=x^2$, $y=ax^2$ ($0 < a < 1$) のグラフがあり、それぞれのグラフ上で、 x 座標が -2 である点を A , B , x 座標が 3 である点を C , D とする。

下の文は、四角形 $ABDC$ について述べたものである。

文中の①、②に当てはまる式や数をそれぞれ求めなさい。

(栃木県 2021 年度)

線分 AB の長さは a を用いて表すと (①) である。また、四角形 $ABDC$ の面積が 26 のとき、 a の値は (②) となる。



解答欄

①	($AB=$)
②	($a=$)

解答

① ($AB=$) $4-4a$)

② ($a=$) $\frac{1}{5}$)

解説

①

点 A の x 座標は -2 で、関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるので、
 $y=(-2)^2=4 \Rightarrow A(-2, 4)$

点 B の x 座標は -2 で、関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあるので、
 $y=a \times (-2)^2=4a \Rightarrow B(-2, 4a)$

よって、 $AB=4-4a$

②

点 C の x 座標は 3 で、関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるので、
 $y=3^2=9 \Rightarrow C(3, 9)$

点 D の x 座標は 3 で、関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあるので、
 $y=a \times 3^2=9a \Rightarrow D(3, 9a)$

よって、 $CD=9-9a$

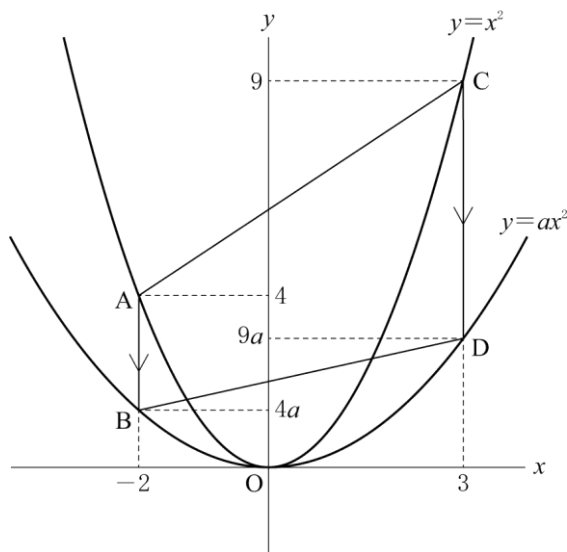
四角形 $ABDC$ は、 $AB \parallel CD$ の台形であり、

その高さは、 $3 - (-2) = 5$

よって、四角形 $ABDC$ の面積は、

$$(4-4a+9-9a) \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} (13-13a) = \frac{65}{2} (1-a) =$$

$$26 \Rightarrow 1-a = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

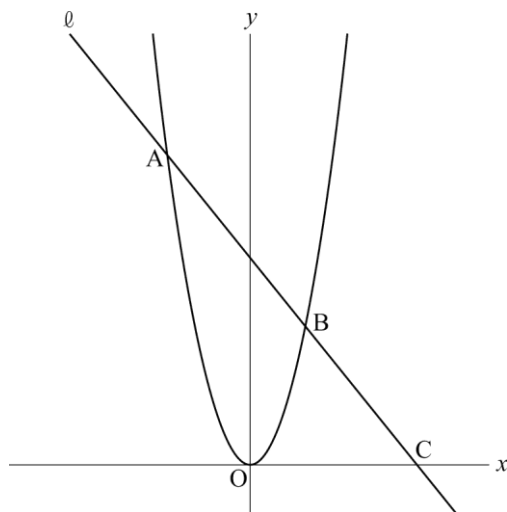


【問 6】

右の図で、曲線は関数 $y=2x^2$ のグラフです。曲線上に x 座標が -3 、 2 である 2 点 A、B をとり、この 2 点を通る直線 ℓ をひきます。直線 ℓ と x 軸との交点を C とするとき、 $\triangle AOC$ の面積を求めなさい。

ただし、座標軸の単位の長さを 1 cm とします。

(埼玉県 2021 年度)



解答欄

cm^2

解答

54 (cm^2)

解説

点 A は、関数 $y=2x^2$ のグラフ上にあるので、 $x=-3$ を代入して、 $y=2 \times (-3)^2=18 \Rightarrow A(-3, 18)$

点 B も同様に、関数 $y=2x^2$ のグラフ上にあるので、 $x=2$ を代入して、 $y=2 \times 2^2=8 \Rightarrow B(2, 8)$

直線 ℓ は、2 点 A、B を通るので、式を $y=ax+b$ とおき、 $(x, y)=(-3, 18)$ 、 $(2, 8)$ をそれぞれ代入してできる連立方程式

$$\begin{cases} 18 = -3a + b \\ 8 = 2a + b \end{cases} \text{ を解くと,}$$

$$a = -2, b = 12$$

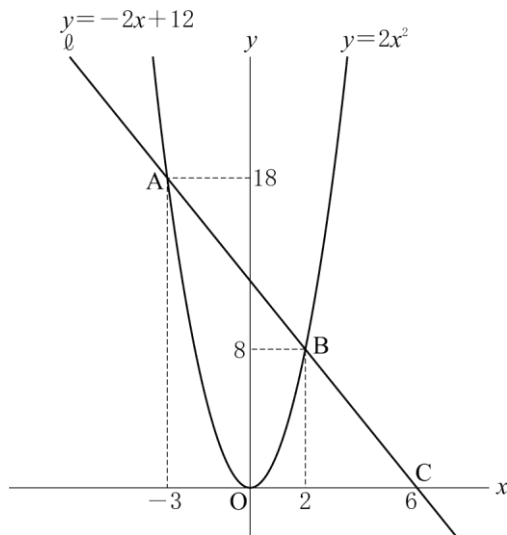
よって、直線 ℓ の式は、 $y = -2x + 12$

点 C は直線 ℓ 上かつ x 軸上の点だから、

$y = -2x + 12$ に $y = 0$ を代入すると、

$$x = 6 \Rightarrow C(6, 0)$$

よって、 $\triangle AOC$ の底辺を OC としたときの高さは、点 A $(-3, 18)$ より、 18 cm なので、 $\triangle AOC = 6 \times 18 \times \frac{1}{2} = 54 (\text{cm}^2)$

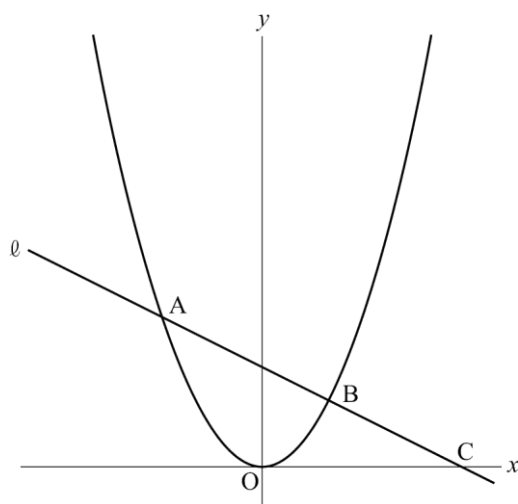


【問 7】

右の図で、曲線は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフです。曲線上に x 座標が -3 , 2 である 2 点 A, B をとり、この 2 点を通る直線 ℓ をひきます。直線 ℓ と x 軸との交点を C とするとき、 $\triangle AOC$ を x 軸を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

ただし、円周率は π とし、座標軸の単位の長さを 1 cm とします。

(埼玉県 2021 年度)



解答欄

cm³

解答

$$\frac{81}{2}\pi \quad (\text{cm}^3)$$

解説

点 A は、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるので、

$x = -3$ を代入して、

$$y = \frac{1}{2} \times (-3)^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow A\left(-3, \frac{9}{2}\right)$$

点 B も同様に、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるので、 $x =$

2 を代入して、

$$y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2 \Rightarrow B(2, 2)$$

直線 ℓ は、2 点 A, B を通るので、式を $y = ax + b$ とおき、

$(x, y) = \left(-3, \frac{9}{2}\right), (2, 2)$ をそれぞれ代入してできる

$$\text{連立方程式} \quad \begin{cases} \frac{9}{2} = -3a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases} \text{ を解くと、}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 3$$

よって、直線 ℓ の式は、 $y = -\frac{1}{2}x + 3$

点 C は直線 ℓ 上かつ x 軸上の点だから、 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ に y

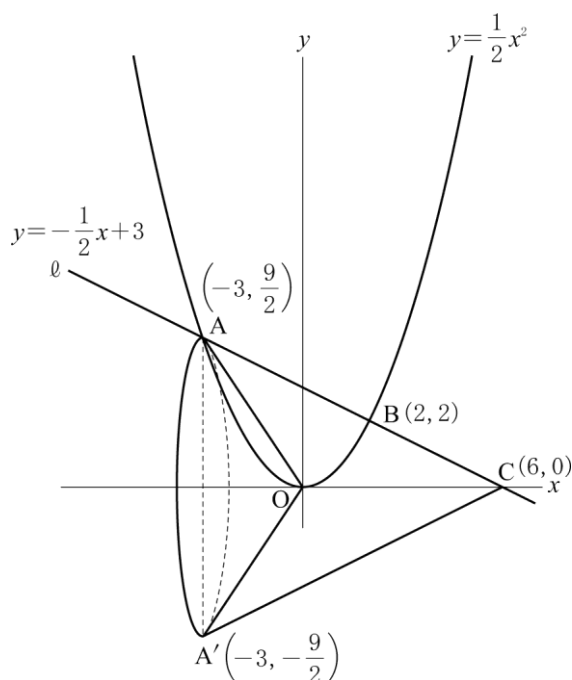
$= 0$ を代入すると、 $x = 6 \Rightarrow C(6, 0)$

ここで、点 A を x 軸に関して対称移動させた点を A' とすると、体積を求める立体は、①「線分 AA' を直径、点 C を頂点とする円錐」から、②「線分 AA' を直径、点 O を頂点とする円錐」を取り除いたものである。

$$\text{①の体積は、} \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \times \{6 - (-3)\} \times \frac{1}{3} = \frac{243}{4}\pi \quad (\text{cm}^3)$$

$$\text{②の体積は、} \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \times \{0 - (-3)\} \times \frac{1}{3} = \frac{81}{4}\pi \quad (\text{cm}^3)$$

$$\text{よって、求める体積は、} \frac{243}{4}\pi - \frac{81}{4}\pi = \frac{81}{2}\pi \quad (\text{cm}^3)$$



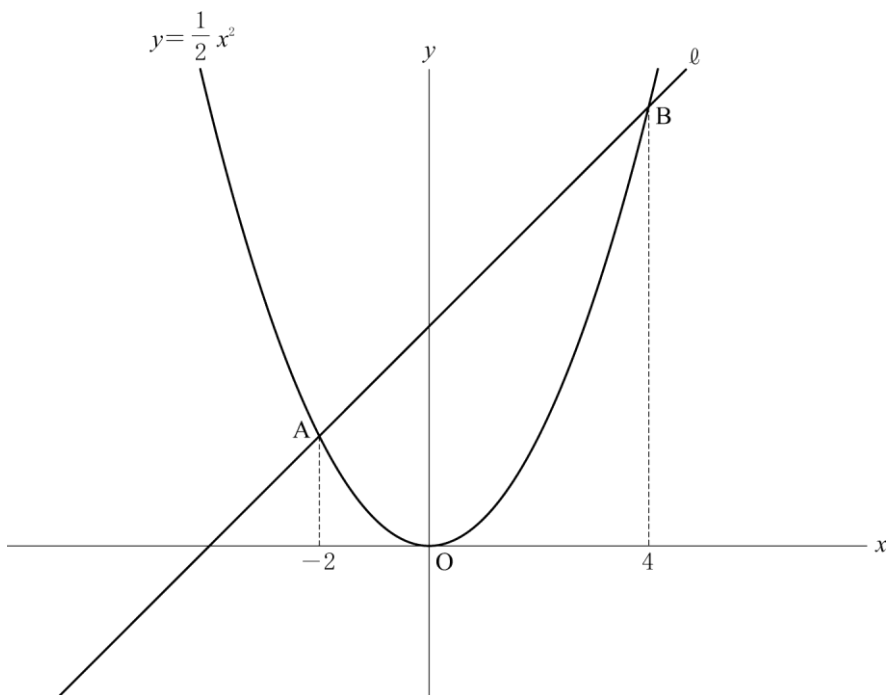
【問 8】

下の図 1 のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと直線 ℓ が 2 点 A, B で交わっている。2 点 A, B の x 座標が、それぞれ -2 , 4 であるとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。

ただし、原点 O から点 $(1, 0)$ までの距離及び原点 O から点 $(0, 1)$ までの距離をそれぞれ 1 cm とする。

(千葉県 2021 年度)

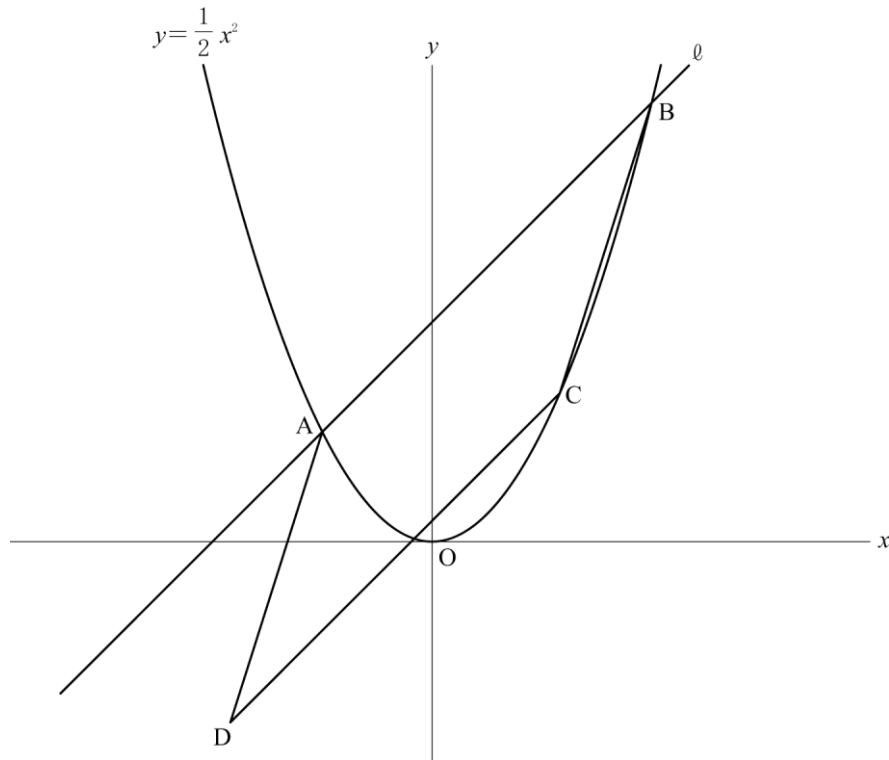
図 1



問 1 直線 ℓ の式を求めなさい。

問 2 下の図 2 のように、図 1 において、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に x 座標が -2 より大きく 4 より小さい点 C をとり、線分 AB 、 BC をとより合う 2 辺とする平行四辺形 $ABCD$ をつくる。
このとき、次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

図 2



- (1) 点 C が原点にあるとき、平行四辺形 $ABCD$ の面積を求めなさい。
- (2) 平行四辺形 $ABCD$ の面積が 15 cm^2 となるときの、点 D の y 座標をすべて求めなさい。

解答欄

問 1		
問 2	(1)	cm^2
	(2)	

解答

問 1 $y=x+4$

問 2

(1) $24 \text{ (cm}^2\text{)}$

(2) $-\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}$

解説

問 1

2 点 A, B は、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にある。

点 A の x 座標が -2 だから、 $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=-2$ を代入すると、 $y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2 \Rightarrow A(-2, 2)$

点 B の x 座標が 4 だから、 $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入すると、 $y=\frac{1}{2}\times 4^2=8 \Rightarrow B(4, 8)$

よって、直線 ℓ は 2 点 A, B を通るので、直線の式を $y=ax+b$ とおき、 $(x, y)=(-2, 2), (4, 8)$ をそれぞれ代入してできる連立方程式 $\begin{cases} 2=-2a+b \\ 8=4a+b \end{cases}$ を解くと、 $a=1, b=4$

ゆえに、直線 ℓ の式は、 $y=x+4$

問 2

図 1

(1)

点 C が原点にあるとき、グラフは図 1 のようになる。

$\square ABCD=2\triangle ACB$ なので、 $\triangle ACB$ ($\triangle AOB$) の面積を求めればよい。

直線 ℓ と y 軸との交点を E とすると、 $E(0, 4)$ だから、

$OE=4 \text{ (cm)}$

$A(-2, 2)$ より、

$\triangle AOE$ において、底辺を OE としたときの高さは、 2 cm

よって、

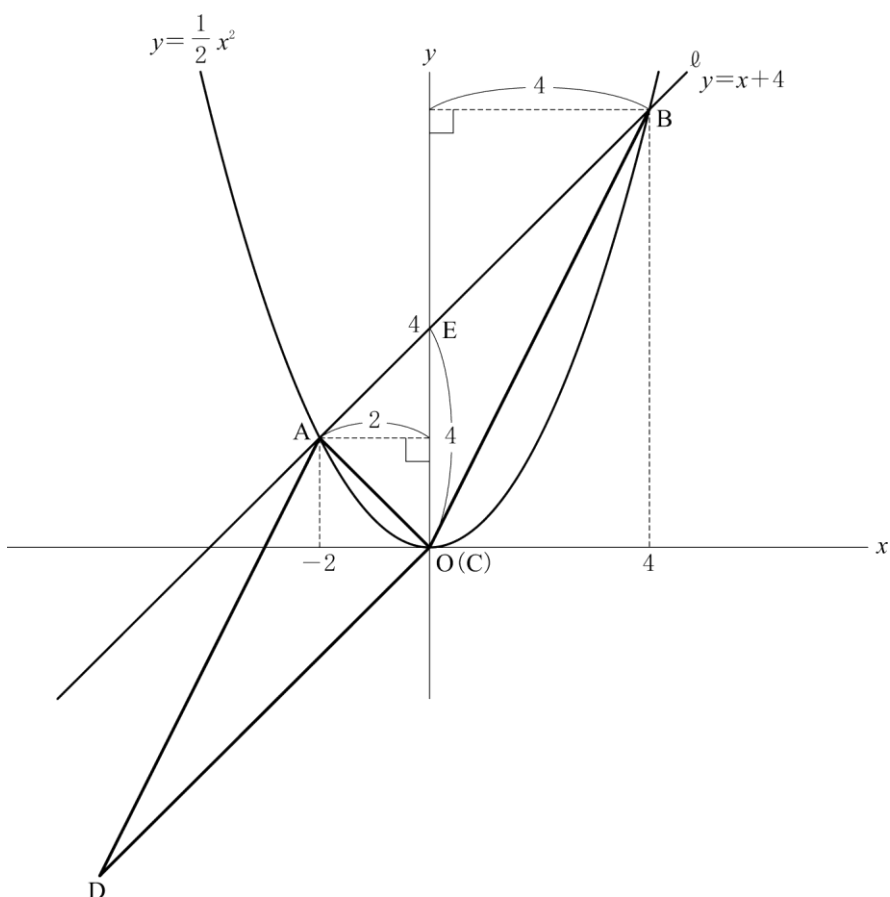
$$\triangle AOE = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

同様に、 $B(4, 8)$ より、 $\triangle BOE$ において、底辺を OE としたときの高さは、 4 cm

$$\text{よって、} \triangle BOE = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} =$$

$$8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

ゆえに、 $\triangle ACB = \triangle AOE + \triangle BOE = 4 + 8 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$ より、 $\square ABCD = 2 \triangle ACB = 2 \times 12 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$



(2)

図 2

$\square ABCD = 2\triangle ACB$ より, $2\triangle ACB = 15$ であることを利用する。(1)と同様に,
 $\triangle ACB$ の面積を求める。

図 2 のように, 点 C の x 座標を t , 点 C を通り y 軸と平行な直線と線分 AB との交点を F とする。

点 C は, 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるので, 点 C の y 座標は,
 $y = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow C\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$

点 F は, 点 C と x 座標が等しく t であり, 直線 $\ell: y = x + 4$ 上にあるので, 点 F の y 座標は,
 $y = t + 4 \Rightarrow F(t, t + 4)$

$C\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$, $F(t, t + 4)$ より, $\triangle ACF$ において, 底辺 CF の長さは,
 $t + 4 - \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{2}t^2 + t + 4$ (cm)

$A(-2, 2)$, $C\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ より, $\triangle ACF$ において, 底辺を CF としたときの高さは, $t - (-2) = t + 2$ (cm)

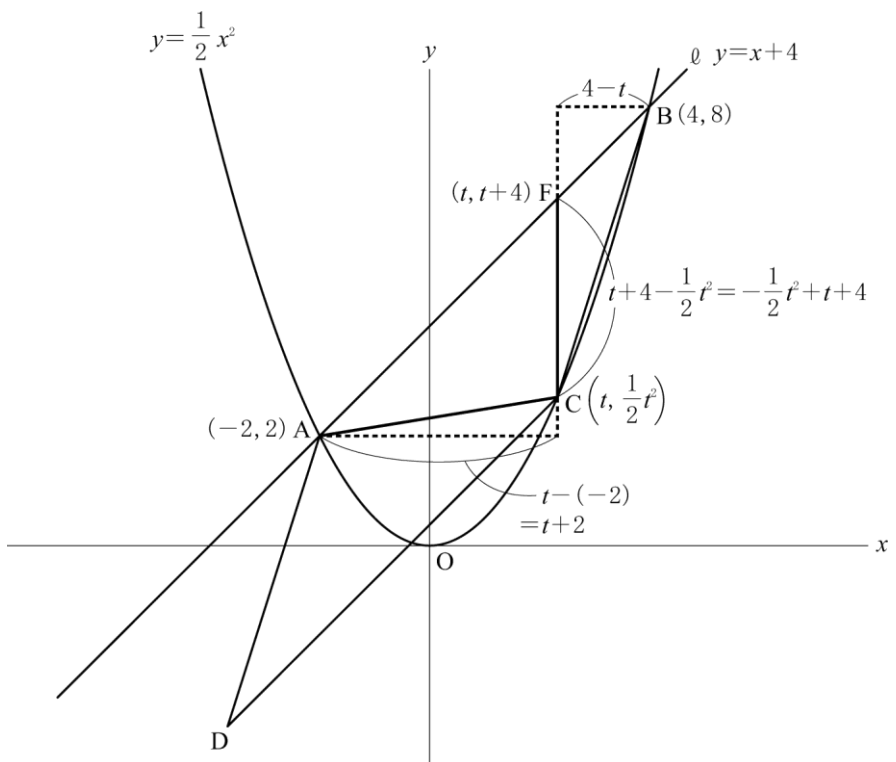
よって, $\triangle ACF = \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + 4\right) \times (t + 2) \times \frac{1}{2}$

また, $B(4, 8)$, $C\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ より, $\triangle BCF$ において, 底辺を CF としたときの高さは, $4 - t$ (cm)

よって, $\triangle BCF = \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + 4\right) \times (4 - t) \times \frac{1}{2}$

ゆえに, $\triangle ACB = \triangle ACF + \triangle BCF = \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + 4\right) \times (t + 2) \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + 4\right) \times (4 - t) \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + 4\right) \times \{(t + 2) + (4 - t)\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + 4\right) \times 6 = -\frac{3}{2}t^2 + 3t + 12$ (cm²)

$2\triangle ACB = 2 \left(-\frac{3}{2}t^2 + 3t + 12\right) = -3t^2 + 6t + 24 = 15 \Rightarrow t^2 \Rightarrow t = -1, 3 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t + 1)(t - 3) = 0$



$t=-1$ のとき,

$C\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ である(図3)。

四角形 ABCD が平行四辺形であることから, $AB \parallel DC$,

$AB=DC$ より, 2 点 A, B の y 座標の差と, 2 点 C, D の y 座標の差は等しいので, 2 点 A, B の y 座標の差は $8-2=6$ だから, 点 D の y 座標は,

$$\frac{1}{2}-6=-\frac{11}{2}$$

同様にして, $t=3$ のとき,

$C\left(3, \frac{9}{2}\right)$ だから(図4), 点 D

の y 座標は, $\frac{9}{2}-6=-\frac{3}{2}$

図3

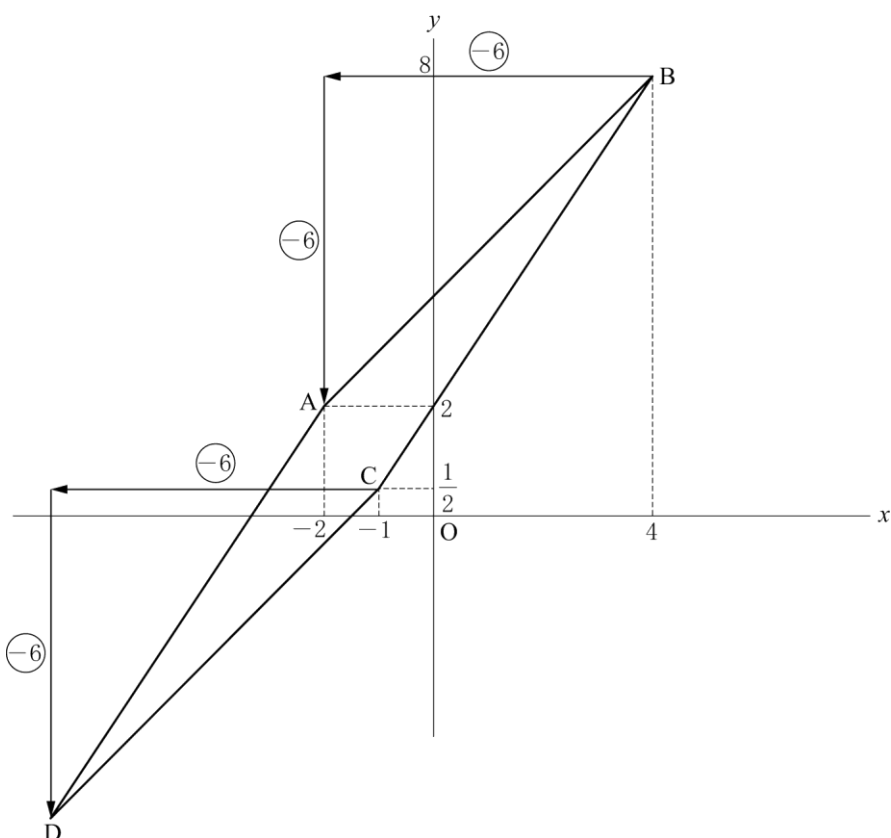
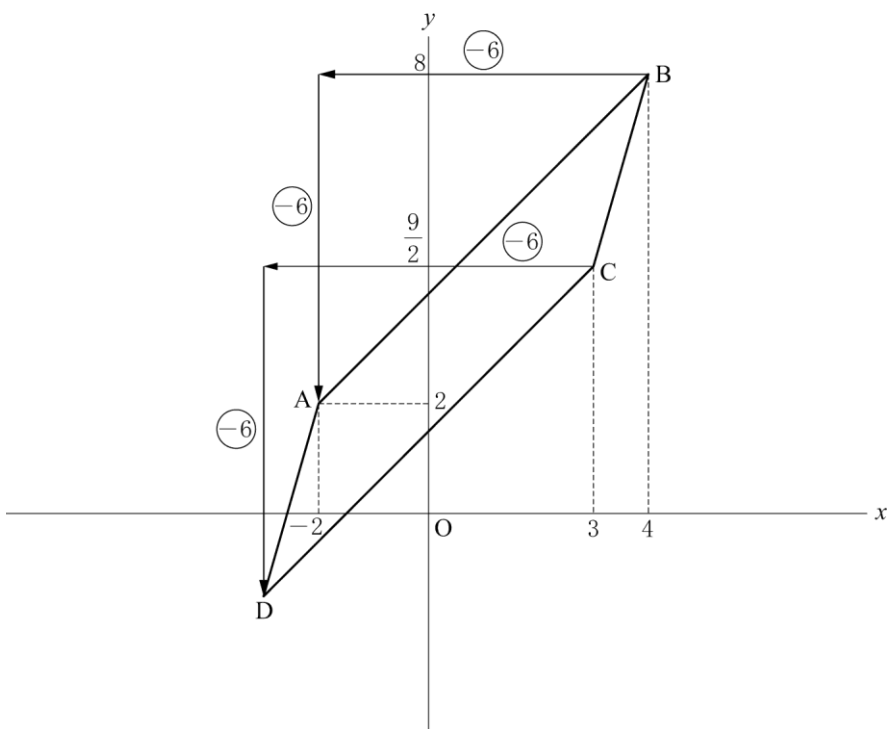


図4



【問 9】

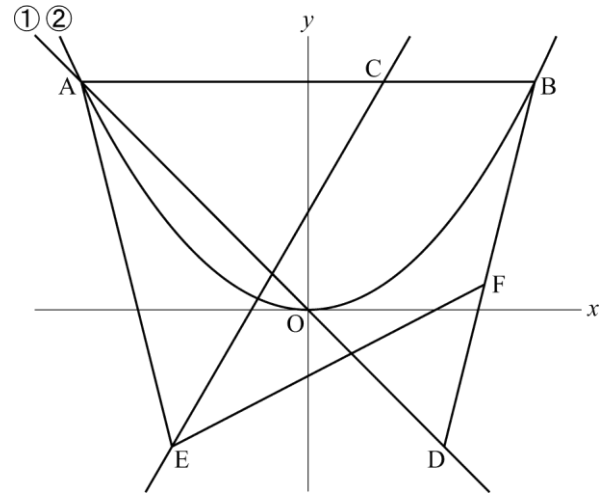
右の図において、直線①は関数 $y = -x$ のグラフであり、曲線②は関数 $y = ax^2$ のグラフである。

点 A は直線①と曲線②との交点で、その x 座標は -5 である。点 B は曲線②上の点で、線分 AB は x 軸に平行である。点 C は線分 AB 上の点で、 $AC : CB = 2 : 1$ である。

また、原点を O とするとき、点 D は直線①上の点で $AO : OD = 5 : 3$ であり、その x 座標は正である。

さらに、点 E は点 D と y 軸について対称な点である。

このとき、次の問いに答えなさい。



(神奈川県 2021 年度)

問 1 曲線②の式 $y = ax^2$ の a の値として正しいものを次の 1～6 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | | | |
|---|--------------------|---|--------------------|---|--------------------|
| 1 | $a = -\frac{1}{2}$ | 2 | $a = -\frac{2}{5}$ | 3 | $a = -\frac{1}{5}$ |
| 4 | $a = \frac{1}{5}$ | 5 | $a = \frac{2}{5}$ | 6 | $a = \frac{1}{2}$ |

問 2 直線 CE の式を $y = mx + n$ とするときの (1) m の値と、(2) n の値として正しいものを、それぞれ次の 1～6 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

(1) m の値

- | | | | | | |
|---|--------------------|---|---------------------|---|---------------------|
| 1 | $m = \frac{7}{5}$ | 2 | $m = \frac{3}{2}$ | 3 | $m = \frac{8}{5}$ |
| 4 | $m = \frac{12}{7}$ | 5 | $m = \frac{24}{13}$ | 6 | $m = \frac{27}{14}$ |

(2) n の値

- | | | | | | |
|---|---------------------|---|-------------------|---|--------------------|
| 1 | $n = \frac{6}{5}$ | 2 | $n = \frac{9}{7}$ | 3 | $n = \frac{3}{2}$ |
| 4 | $n = \frac{23}{14}$ | 5 | $n = \frac{9}{5}$ | 6 | $n = \frac{15}{7}$ |

問 3 点 F は線分 BD 上の点である。三角形 AEC と四角形 BCEF の面積が等しくなるとき、点 F の座標を求めなさい。

解答欄

問 1		
問 2	(1)	
	(2)	
問 3	$F\left(\quad,\quad\right)$	

解答

問 1 4

問 2

(1) 4

(2) 6

問 3 F $\left(\frac{35}{9}, \frac{5}{9}\right)$

解説

問 1

点 A は直線① $y=-x$ 上にあるから、 $x=-5$ を代入すると、 $y=5$ よって、 $A(-5, 5)$

点 A は曲線② $y=ax^2$ 上にあるから、 $(x, y)=(-5, 5)$ を代入すると、 $5=a \times (-5)^2 \Rightarrow a=\frac{1}{5}$

問 2

線分 AB は x 軸に平行であり、点 B は放物線上の点なので、 $B(5, 5) \Rightarrow AB=5-(-5)=10$

$AC:CB=2:1$ より、 $AC=\frac{2}{3}AB=\frac{20}{3}$

よって、(点 C の x 座標) = (点 A の x 座標) + $\frac{20}{3} = -5 + \frac{20}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}, 5\right)$

$AO:OD=5:3$ より、点 A、O の x 座標の差は $0-(-5)=5$ なので、点 O、D の x 座標の差は 3 である。
よって、点 D の x 座標は 3 である。

点 D は直線① $y=-x$ 上にあるから、 $x=3$ を代入すると、 $y=-3$ よって、 $D(3, -3)$

点 E は点 D と y 軸について対称な点なので、 $E(-3, -3)$

よって、直線 CE の式 $y=mx+n$ に、 $(x, y)=\left(\frac{5}{3}, 5\right)$ 、 $(-3, -3)$ をそれぞれ代入してできる

連立方程式 $\begin{cases} 5=\frac{5}{3}m+n \\ -3=-3m+n \end{cases}$ を解くと、 $(m, n)=\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$

問 3

右図のように、四角形 BCEF を線分 BE で $\triangle BCE$ と $\triangle BEF$ に分割する。そして、点 F を通り、線分 BE と平行な直線と直線 AB の交点を F' とすると、 $\triangle BEF = \triangle BEF'$ となることがわかる。

よって、

(四角形 BCEF) = $\triangle BCE + \triangle BEF$

= $\triangle BCE + \triangle BEF' = \triangle CEF'$ なので、

$\triangle AEC$ と $\triangle CEF'$ の面積が等しくなれば題意を満たすことがわかる。

$\triangle AEC = \triangle CEF'$ となるには、 $AC = CF'$ となればよい。

$AC = \frac{20}{3}$ より、(点 F' の x 座標) = (点 C の x 座標) + $\frac{20}{3} = \frac{5}{3} + \frac{20}{3} = \frac{25}{3} \Rightarrow F'\left(\frac{25}{3}, 5\right)$

標) + $\frac{20}{3} = \frac{5}{3} + \frac{20}{3} = \frac{25}{3} \Rightarrow F'\left(\frac{25}{3}, 5\right)$

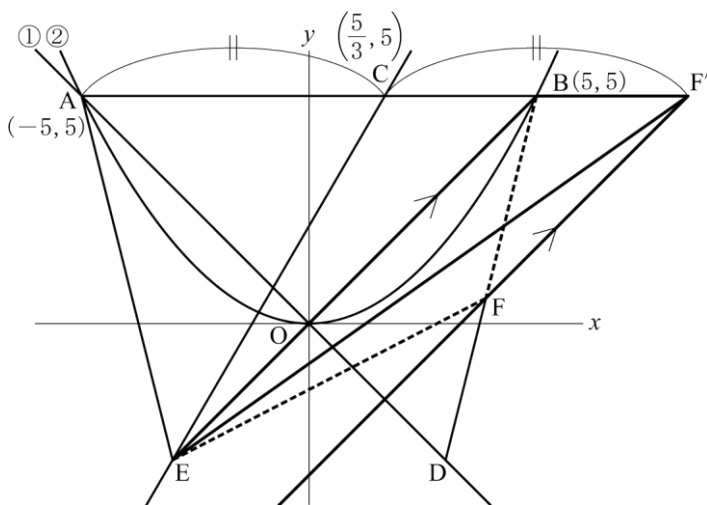
線分 BE の傾きは、 $\frac{5-(-3)}{5-(-3)}=1$ なので、点 F' を通り、線分 BE と平行な直線の式は、 $y=x+b$ に

$(x, y)=\left(\frac{25}{3}, 5\right)$ を代入して、 $5=\frac{25}{3}+b \Rightarrow b=-\frac{10}{3} \Rightarrow y=x-\frac{10}{3} \cdots \textcircled{3}$ と求められる。

次に、直線 BD の式は、 $y=cx+d$ に、 $(x, y)=(5, 5)$ 、 $(3, -3)$ をそれぞれ代入してできる

連立方程式 $\begin{cases} 5=5c+d \\ -3=3c+d \end{cases}$ を解くことで、 $y=4x-15 \cdots \textcircled{4}$ と求められる。

点 F は 2 直線③、④の交点なので、2 式を連立して解くと、 $F\left(\frac{35}{9}, \frac{5}{9}\right)$



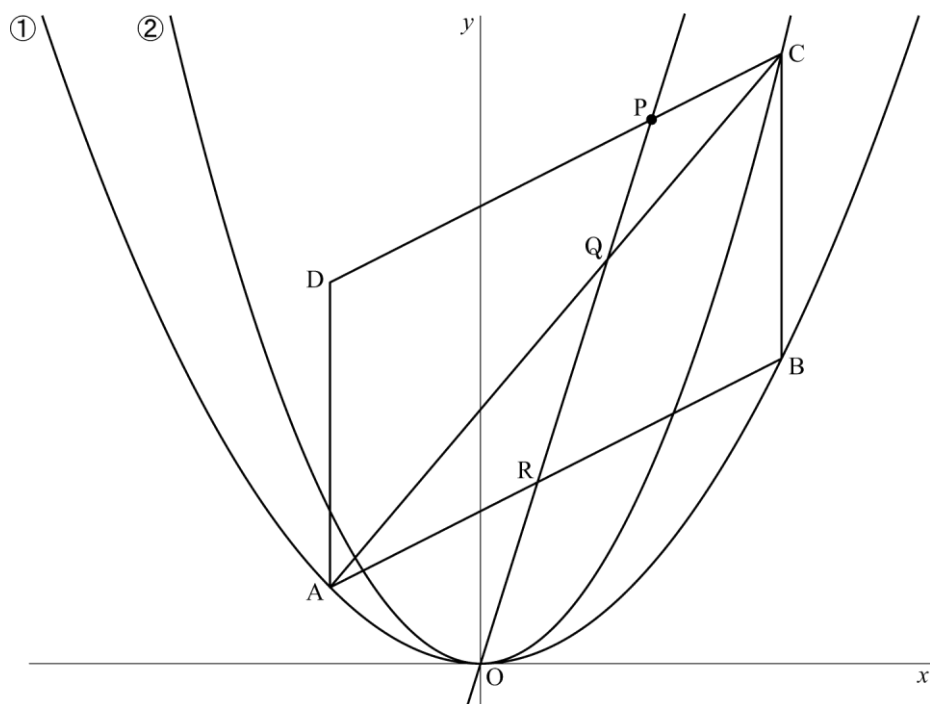
【問 10】

下の図の①, ②は, それぞれ関数 $y = \frac{1}{8}x^2$, 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフである。点 A, B は①上の点であり, 点 C は②上の点である。点 A の x 座標は -4 , 点 B, C の x 座標はどちらも 8 である。

また, 図のように, 点 D を四角形 ABCD が平行四辺形になるようにとる。さらに, 辺 DC 上 (点 C を除く) に点 P をとり, 直線 OP と対角線 AC, 辺 AB との交点をそれぞれ Q, R とする。

このとき, 次の問 1 ～問 4 に答えなさい。

(山梨県 2021 年度)



問 1 点 A の y 座標を求めなさい。

問 2 $\triangle ARQ \sim \triangle CPQ$ となることを証明しなさい。

問 3 直線 DC の式を求めなさい。

問 4 直線 OP が平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分するとき, $DP : PC$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問 1	$y=$	
問 2	〔証明〕	
問 3	$y=$	
問 4	DP : PC= :	

解答

問 1 $y=2$

問 2

〔証明〕

$\triangle ARQ$ と $\triangle CPQ$ において

対頂角は等しいから

$\angle AQR = \angle CQP$ ……①

平行線の錯角は等しいから

$\angle QAR = \angle QCP$ ……②

①, ②より, 2組の角の大きさがそれぞれ等しいから

$\triangle ARQ \sim \triangle CPQ$

問 3 $y = \frac{1}{2}x + 12$

問 4 $DP : PC = 7 : 5$

解説

問 3

点 B, C は x 座標がどちらも 8 だから, 辺 BC は y 軸に平行である。また, $AD \parallel BC$ より, 辺 AD も y 軸に平行である。

よって, 点 D の x 座標は, 点 A の x 座標と等しく, -4

点 B は $y = \frac{1}{8}x^2$ 上の点だから, $\frac{1}{8} \times 8^2$ より, $B(8, 8)$

点 C は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点だから, $\frac{1}{4} \times 8^2 = 16$ より, $C(8, 16)$

問 1 より $A(-4, 2)$ だから, 点 D の座標を $D(-4, d)$ とすると, $AD = BC$ より,

$d - 2 = 16 - 8 \quad d = 10$

よって, $D(-4, 10)$

直線 DC の式を $y = ax + b$ とおくと, $a = \frac{16 - 10}{8 - (-4)} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + b$ に $C(8, 16)$ を代入して, $16 = \frac{1}{2} \times 8 + b$ より, $b = 12$

よって, 直線 DC の式は, $y = \frac{1}{2}x + 12$

問 4

2つの四角形 ARPD, CPRB は高さが等しい台形だから, 面積が等しいとき, $AR = CP$ が成り立つ。

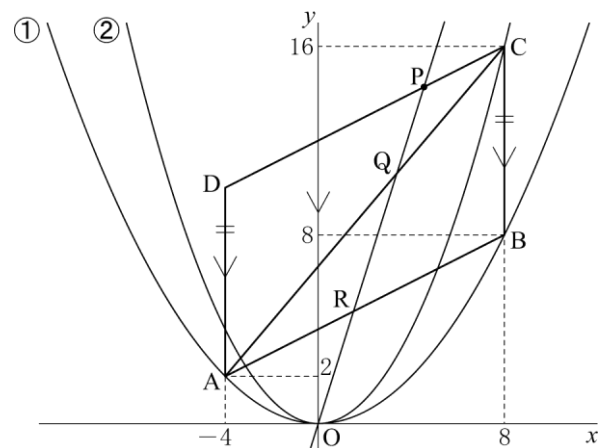
問 2 より $\triangle ARQ \sim \triangle CPQ$ だから, $AR = CP$ のとき, $AQ = QC$ Q の x 座標を s , y 座標を t とすると, $(C \text{ の } x \text{ 座標}) - (Q \text{ の } x \text{ 座標}) = (Q \text{ の } x \text{ 座標}) - (A \text{ の } x \text{ 座標})$ より, $8 - s = s - (-4)$ より, $s = 2$

$(C \text{ の } y \text{ 座標}) - (Q \text{ の } y \text{ 座標}) = (Q \text{ の } y \text{ 座標}) - (A \text{ の } y \text{ 座標})$ より, $16 - t = t - 2$ より, $t = 9$

したがって, $Q(2, 9)$ となる。直線 OP は, 原点と点 Q を通る直線だから, $y = \frac{9}{2}x$

これと直線 DC の式 $y = \frac{1}{2}x + 12$ を連立して解くと, $x = 3$, $y = \frac{27}{2}$ より, $P\left(3, \frac{27}{2}\right)$

よって, $DP : PC = \{3 - (-4)\} : (8 - 3) = 7 : 5$



【問 11】

図 6 において、①は関数 $y=ax^2$ ($a>0$) のグラフであり、②は関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。2 点 A, B は、放物線①上の点であり、その x 座標は、それぞれ $-3, 4$ である。点 B を通り y 軸に平行な直線と、 x 軸、放物線②との交点をそれぞれ C, D とする。

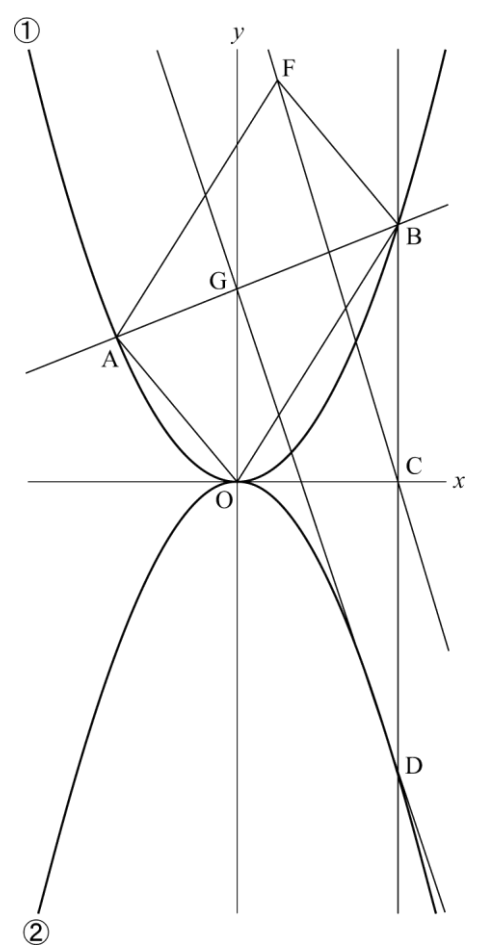
このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(静岡県 2021 年度)

問1 x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ であるとき、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ の y の変域を求めなさい。

問2 点Dからy軸に引いた垂線の延長と放物線②との交点をEとする。点Eの座標を求めなさい。

問3 点Fは四角形AOBFが平行四辺形となるようにとった点である。直線ABとy軸との交点をGとする。直線CFと直線DGが平行となるときの、 a の値を求めなさい。求める過程も書きなさい。



解答欄

[illegible]

解答

問 1 $-2 \leq y \leq 0$

問 2 E (-4 , -8)

問 3

〔求める過程〕

A $(-3, 9a)$, B $(4, 16a)$ より, F $(1, 25a)$

点 G は直線 AB と y 軸との交点より, $(0, 12a)$

直線 CF と直線 DG の傾きが等しいので,

$$\frac{0-25a}{4-1} = \frac{-8-12a}{4-0}$$

これを解いて, $a = \frac{3}{8}$

(答) $(a) = \frac{3}{8}$

解説

問 2

放物線の性質より, 点 D, E は, y 軸に関して対称なので, D $(4, -8)$ より, E $(-4, -8)$

問 3

点 B, C, D はすべて x 座標が 4 なので, それぞれの座標は, B $(4, 16a)$,

C $(4, 0)$, D $(4, -8)$

点 A の x 座標は -3 なので, その座標は, A $(-3, 9a)$

図 1 において, 平行四辺形 AOB'F より, AF // OB, AF = OB だから, 2 点 A, F の x 座標の差と, 2 点 O, B の x 座標の差は等しいので, 2 点 O, B の x 座標の差は, $4 - 0 = 4$ より, 点 F の x 座標は, $-3 + 4 = 1$

y 座標についても同様に, 2 点 O, B の y 座標の差は,

$16a - 0 = 16a$ より, 点 F の y 座標は, $9a + 16a = 25a$

よって, F $(1, 25a)$

図 2 において, 点 A から直線 BC におろした垂線 AI と, y 軸との交点を H とする。

GH // BI より, GH : BI = AH : AI

GH : $(16a - 9a) = \{0 - (-3)\} : \{4 - (-3)\}$

GH : $7a = 3 : 7$, GH = $3a$

だから, 点 G の y 座標は, $9a + 3a = 12a$ より, G $(0, 12a)$

図 1

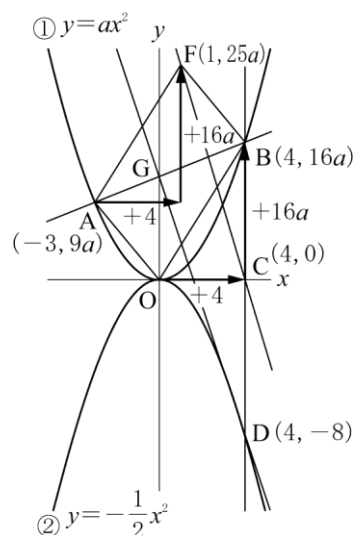


図 3 において, CF // DG より, 直線 CF と直線 DG の傾きが等しい。

直線 CF の傾きは,

$$\frac{0-25a}{4-1} = -\frac{25a}{3},$$

直線 DG の傾きは,

$$\frac{-8-12a}{4-0} = -2-3a \text{ だから,}$$

$$-\frac{25a}{3} = -2-3a, \quad a = \frac{3}{8}$$

図 2

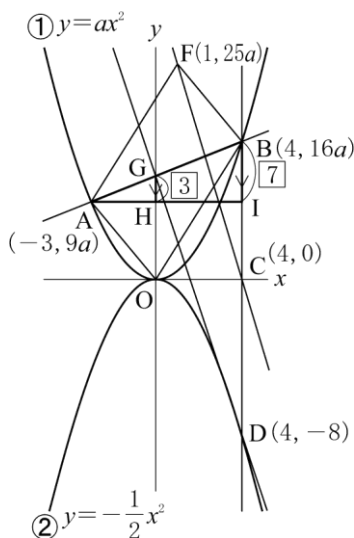
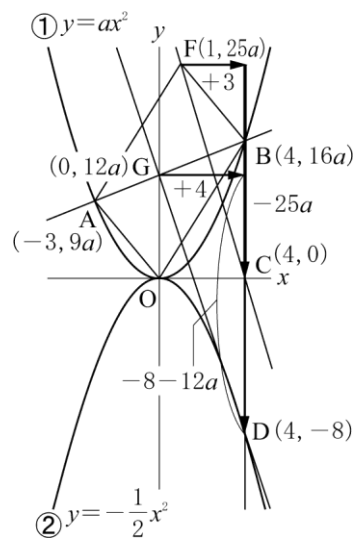


図 3

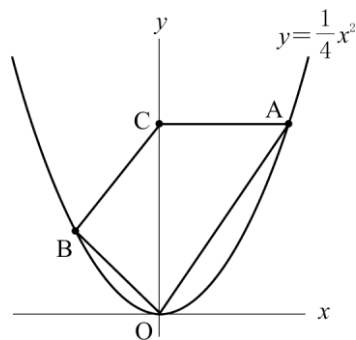


【問 12】

図で、 O は原点、 A 、 B は関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上の点で、点 A の x 座標は正、 y 座標は 9、点 B の x 座標は -4 である。また、 C は y 軸上の点で、直線 CA は x 軸と平行である。

点 C を通り、四角形 $CBOA$ の面積を二等分する直線の式を求めなさい。

(愛知県 A 2021 年度)



解答欄

$y =$

解答

$$y = -\frac{15}{2}x + 9$$

解説

点 A の y 座標は 9 で、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあるので、

$$9 = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x > 0 \text{ より, } x = 6 \Rightarrow A(6, 9)$$

点 B の x 座標は -4 で、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあるので、

$$y = \frac{1}{4} \times (-4)^2 = 4 \Rightarrow B(-4, 4)$$

直線 CA は x 軸と平行なので、点 C の y 座標は 9 である。

よって、 $C(0, 9)$

$BE \parallel CO$ となるような直線 AO 上の点 E をとる。また、線分 AE の中点を M とする。

(四角形 $CBOM$) $= \triangle CBO + \triangle COM = \triangle CEO + \triangle COM = \triangle CEM = \triangle CAM$ より、直線 CM は、四角形 $CBOA$ の面積を二等分することがわかる。

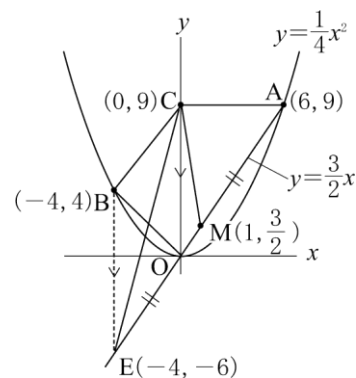
直線 OA の式は、傾きが $\frac{9-0}{6-0} = \frac{3}{2}$ 、切片が 0 だから、 $y = \frac{3}{2}x$

点 E の x 座標は -4 で、直線 $OA : y = \frac{3}{2}x$ 上にあるので、 $y = \frac{3}{2} \times (-4) = -6 \Rightarrow E(-4, -6)$

点 M の座標は、 $\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-6+9}{2}\right)$ すなわち、 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$

よって、直線 CM の式を $y = ax + b$ とおき、切片 $b = 9$ 、点 M の座標 $(x, y) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ を代入すると、

$$\frac{3}{2} = a + 9 \Rightarrow a = -\frac{15}{2} \text{ より、直線 } CM \text{ の式は、} y = -\frac{15}{2}x + 9$$

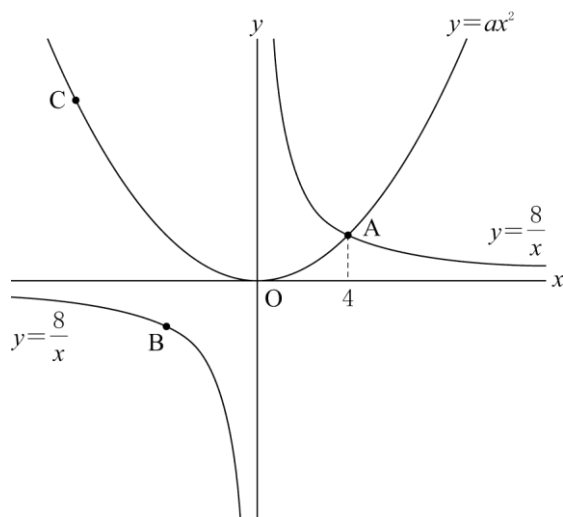


【問 13】

図のように、関数 $y = \frac{8}{x}$ のグラフ上に 2 点 A, B があ
り、点 A の x 座標は 4、線分 AB の中点は原点 O であ
る。また、点 A を通る関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点 C があ
り、直線 CA の傾きは負の数である。

次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2021 年度)



問 1 点 B の座標を求めなさい。

問 2 a の値を求めなさい。

問 3 点 B を通り、直線 CA に平行な直線と、 y 軸との交点を D とすると、 $\triangle OAC$ と $\triangle OBD$ の面積比は $3 : 1$ である。

(1) 次の ア ～ ウ にあてはまる数をそれぞれ求めなさい。

点 C の x 座標は、ア である。また、関数 $y = ax^2$ について、 x の変域が ア $\leq x \leq 4$ のときの y の変域は イ $\leq y \leq$ ウ である。

(2) x 軸上に点 E をとり、 $\triangle ACE$ をつくる。 $\triangle ACE$ の 3 辺の長さの和が最小となるとき、点 E の x 座標を求めなさい。

解答欄

問 1	(,)		
問 2	$a =$		
問 3	(1)	ア	
		イ	
		ウ	
	(2)	$x =$	

解答

問1 $(-4, -2)$

問2 $(a=) \frac{1}{8}$

問3

(1)

ア -8 イ 0 ウ 8

(2) $(x=) \frac{8}{5}$

解説

問1

点Aの座標について、 $x=4$ を $y=\frac{8}{x}$ に代入して、 $y=2$ よって、点Aの座標は $(4, 2)$ である。点Oが線分ABの中点になるので、点BはOに関して点Aと点対称な位置にある。よって点 $B(-4, -2)$

問2 $x=4, y=2$ を $y=ax^2$ に代入して、 $2=16a$ $a=\frac{1}{8}$

問3

(1)

ア：直線CAとy軸の交点をPとする（図1）。

$\triangle OAP$ と $\triangle OBD$ について、 $OA=OB$ 、対頂角が等しく $\angle AOP=\angle BOD$ 、平行線の錯角なので $\angle OAP=\angle OBD$ となり、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle OAP \equiv \triangle OBD$ である。よって、 $\triangle OAP$ と $\triangle OBD$ の面積は等しい。よって、 $\triangle OAC : \triangle OBD = 3 : 1$ なので、 $\triangle OAC : \triangle OAP = 3 : 1$ である。さらに、 $\triangle OAC$ と $\triangle OAP$ の面積比から、高さが共通なので底辺の比は、 $AC : AP = 3 : 1$ である。

ここで、点Qと点Rを図2のように定義すると、

$\triangle APQ \sim \triangle ACR$ となり、その相似比は $AP : AC = 1 : 3$ である。点Aのx座標から $AQ=4$ なので、 $AR=12$ である。よって、点Cのx座標は $4-12=-8$ である。

イ、ウ： $-8 \leq x \leq 2$ のとき、グラフの形から、 $x=0$ のときに最小値 $y=0$ 、 $x=-8$ のとき最大値 $y=8$ をとることがわかる。よって、 $0 \leq y \leq 8$

(2)

点Eがx軸上のどこにあってもCAの長さは一定なので、 $\triangle ACE$ の3辺の和（ $=CA+AE+EC$ ）が最小となるのは、 $AE+EC$ が最小となるときである。ここで点Cとx軸に関して対称な点を C' とすると（図3）、 AC' とx軸の交点が点Eであれば、 $AE+EC$ が最小である。（※1）。

点Cの座標が $(-8, 8)$ なので、点 C' の座標は $(-8, -8)$ である。2点 $A(4, 2)$ 、 $C'(-8, -8)$ を通る直線の式は、 $y=\frac{5}{6}x-\frac{4}{3}$ である。

点Eのy座標が0なので、 $y=0$ をこの式に代入して $x=\frac{8}{5}$

（※1） $AE+EC$ が最小となる点の決め方についての説明。

点Cとx軸に関して対称な点 C' をとると、x軸が線分 CC' の垂直二等分線となる（図4）。このとき、 CC' の中点をHとすると、 $\triangle EHC \equiv \triangle EHC'$ である（ $CH=C'H$ 、 $EH=EH$ 、 $\angle EHC=\angle EHC'$ で2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい）。よって、合同な図形の対応する辺の長さは等しいので、 $EC=EC'$ である。これは点Eがx軸上のどこにあっても成立する。つまり、 $AE+EC$ の長さは、 $AE+EC'$ の長さと等しくなる。したがって、 $AE+EC$ が最小となるのは、 $AE+EC'$ が最小となるときである。ここで、 $AE+EC'$ が最小となるのは、点Eが線分 AC' 上にあるときである。

したがって $AE+EC$ が最小となるのは AC' 上に点Eがあるときであるといえる。

図1

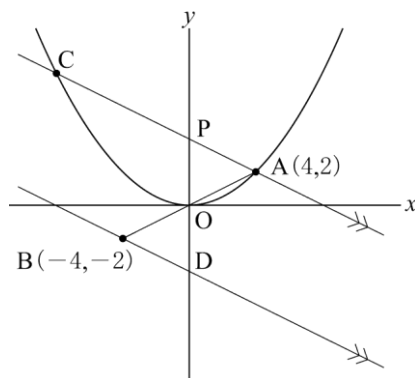


図2

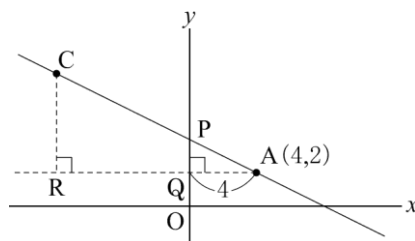


図3

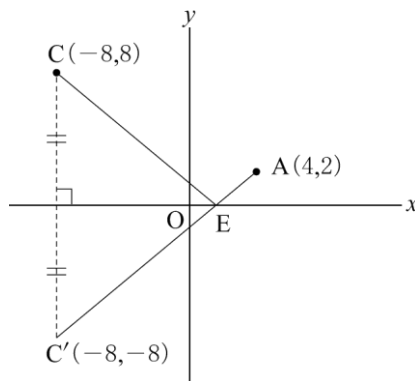
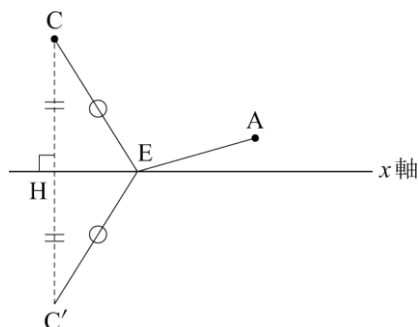


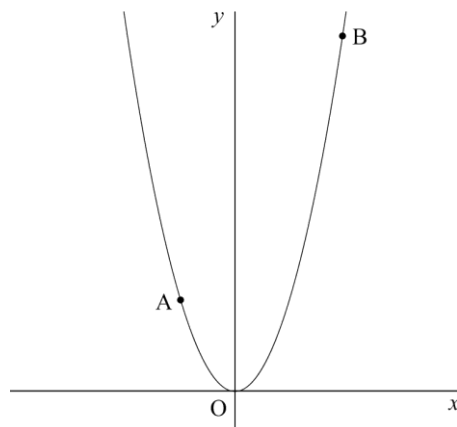
図4



【問 14】

右の図のように、関数 $y=ax^2$ ($a>0$) のグラフ上に、2 点 A, B があり、その x 座標はそれぞれ -1 , 2 である。原点を O として、各問いに答えよ。

(奈良県 2021 年度)



問 1 a の値が大きくなると、次の (1), (2) はどのように変化するか。正しいものを、それぞれ **ア**～**ウ** から 1 つずつ選び、その記号を書け。

(1) グラフの開き方

ア 大きくなる **イ** 小さくなる **ウ** 変わらない

(2) 線分 AB の長さ

ア 長くなる **イ** 短くなる **ウ** 変わらない

問 2 x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域が $0 \leq y \leq 2$ となる。このときの a の値を求めよ。

問 3 $a=2$ のとき、(1), (2) の問いに答えよ。

(1) 直線 AB の式を求めよ。

(2) 線分 OA 上に点 C をとり、直線 BC と y 軸との交点を D とする。また、直線 AB と y 軸との交点を E とする。 $\triangle BED$ の面積と $\triangle ODC$ の面積が等しくなるとき、点 C の x 座標を求めよ。

解答欄

問 1	(1)	
	(2)	
問 2		
問 3	(1)	
	(2)	

解答

問 1

(1) イ

(2) ア

問 2 $\frac{1}{2}$

問 3

(1) $y=2x+4$

(2) $-\frac{2}{3}$

解説

問 1

(2)

2 点 A, B の x 座標は決まっているから, その差は変わらない。よって, 線分 AB の長さは y 座標の差が大きくなれば長くなり, 小さくなれば短くなる。2 点 A, B は $y=ax^2$ 上の点だから, それぞれの点の y 座標は, $a, 4a$ で, その差は $3a$ である。 a が大きくなれば $3a$ も大きくなるので, 線分 AB の長さは長くなる。

問 3

(1)

$a=2$ より, 点 A, B の座標は, A(-1, 2), B(2, 8)となる。

よって, 直線 AB の式を $y=ax+b$ とおくと, $2=-a+b\cdots\textcircled{7}$ $8=2a+b\cdots\textcircled{8}$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ を連立方程式として解くと, $a=2, b=4$ よって, $y=2x+4$

(2)

直線 OA は原点と A(-1, 2)を通るから, OA の式は, $y=\frac{2}{-1}x=-2x$

よって, 点 C の x 座標を c とおくと, 点 C は線分 OA 上にあるから,

c の値の範囲は, $-1\leq c\leq 0$ 点 C の座標は, C($c, -2c$)

また, 点 D の y 座標を d とおくと, 点 D の座標は, D(0, d)

$\triangle BED$ は, 線分 ED を底辺とすると, 点 B の x 座標の絶対値が高さとなるから,

$$\frac{1}{2}\times(4-d)\times 2=4-d$$

$\triangle ODC$ は, 線分 OD を底辺とすると, 点 C の x 座標の絶対値が高さとなり, $c\leq 0$ だから,

$$\frac{1}{2}\times d\times(-c)=-\frac{1}{2}dc$$

$\triangle BED$ の面積と $\triangle ODC$ の面積は等しいから, $4-d=-\frac{1}{2}dc\cdots\textcircled{9}$

直線 BC の式を $y=mx+n$ とおくと, B(2, 8), D(0, d)を通るから, $m=\frac{8-d}{2-0}=\frac{8-d}{2}$

直線 BC の切片は D の y 座標となるから, $n=d$ よって, $y=\frac{8-d}{2}x+d$

C($c, -2c$)は直線 BC 上の点だから, $-2c=\frac{8-d}{2}c+d$ $-4c=8c-dc+2d$ $dc=12c+2d\cdots\textcircled{10}$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ より, $4-d=-\frac{1}{2}(12c+2d)$ $4-d=-6c-d$ $-6c=4$ よって, $c=-\frac{2}{3}$

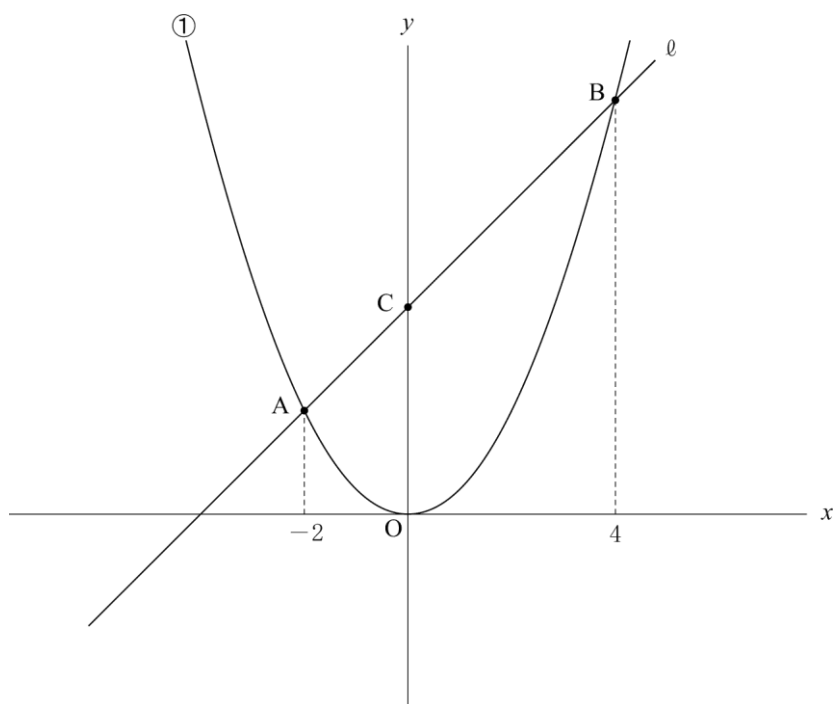
【問 15】

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ … ① のグラフ上に 2 点 A, B があり, その x 座標はそれぞれ -2 , 4 である。次の問 1, 問 2 に答えなさい。

(島根県 2021 年度)

問 1 図 1 のように, 2 点 A, B を通る直線を ℓ とし, ℓ と y 軸との交点を C とする。下の (1) ~ (3) に答えなさい。

図 1



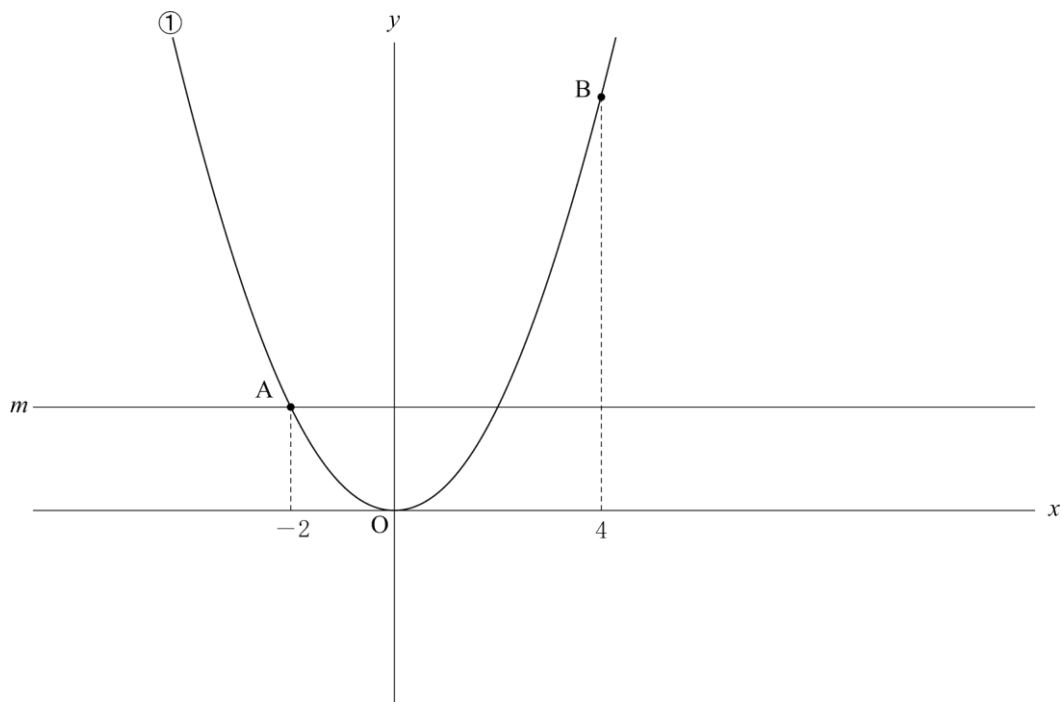
(1) 関数①について, x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のとき, y の変域を求めなさい。

(2) 点 C の y 座標を求めなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

問2 図2のように、点Aを通りx軸に平行な直線をmとする。下の(1), (2)に答えなさい。

図2



- (1) m 上に $\triangle OAB$ の面積と $\triangle OAP$ の面積が等しくなるような点Pをとるとき、点Pの座標を求めなさい。ただし、点Pの x 座標は正であるとする。
- (2) 問2の(1)の点Pに対して、四角形OABPを考える。辺BP上に点Qをとり、 $\triangle ABQ$ の面積が四角形OABPの面積の $\frac{1}{2}$ となるようにしたい。点Qの座標を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	
	(3)	
問2	(1)	P (,)
	(2)	Q (,)

解答

問 1

(1) $0 \leq y \leq 8$

(2) 4

(3) 12

問 2

(1) P(10, 2)

(2) Q(8, 4)

解説

問 1

(1)

$x = -2$ のとき, $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$,

$x = 4$ のとき, $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

であることに注意して, 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフをかくと,

図 1 のようになる。よって, y の変域は, $0 \leq y \leq 8$

(2)

点 A は, x 座標が -2 で, 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあるので,

その y 座標は, $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$

よって, 点 A の座標は, $(-2, 2)$ である。

点 B は, x 座標が 4 で, 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあるので,

その y 座標は, $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

よって, 点 B の座標は, $(4, 8)$ である。

したがって, 直線 ℓ の式を $y = ax + b$ とおき, $(x, y) = (-2, 2)$, $(4, 8)$ をそれぞれ代入してできる連立方程式を解くことで, $a = 1$, $b = 4$ すなわち, 直線 ℓ の式は, $y = x + 4$ と求められる。

点 C は, 直線 ℓ の切片なので, その y 座標は 4 である。

(3)

図 2 より, $\triangle OAC$ の底辺を OC としたときの高さは 2 な

ので, その面積は, $4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4$

また, $\triangle OBC$ の底辺を OC としたときの高さは 4 な

ので, その面積は, $4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$

したがって, $\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = 4 + 8 = 12$

問 2

(1)

$\triangle OAB$ と $\triangle OAP$ は, 底辺 OA が共通なので, 図 3 のように, $AO \parallel BP$ となる点 P を直線 m 上にとればよい。

直線 AO の傾きは, $\frac{0-2}{0-(-2)} = -1$ であり, 直線 BP の

傾きと等しくなるので, 直線 BP は, 傾きが -1 で, 点 $B(4, 8)$ を通る。

直線 BP を $y = -x + c$ とおき, $(x, y) = (4, 8)$ を代入すると, $8 = -4 + c \Rightarrow c = 12$

よって, 直線 BP の式は, $y = -x + 12$

したがって, 点 P は y 座標が 2 で, 直線 $BP: y = -x + 12$ 上にあるので, その x 座標は,

$2 = -x + 12 \Rightarrow x = 10$ よって, 点 P の座標は, $(10, 2)$

図 1

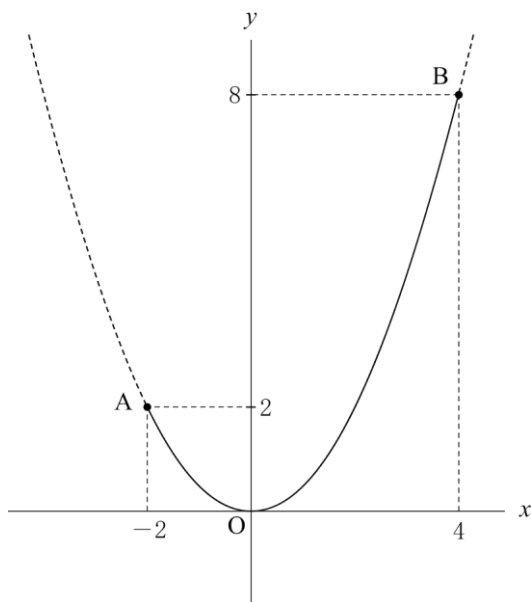


図 2

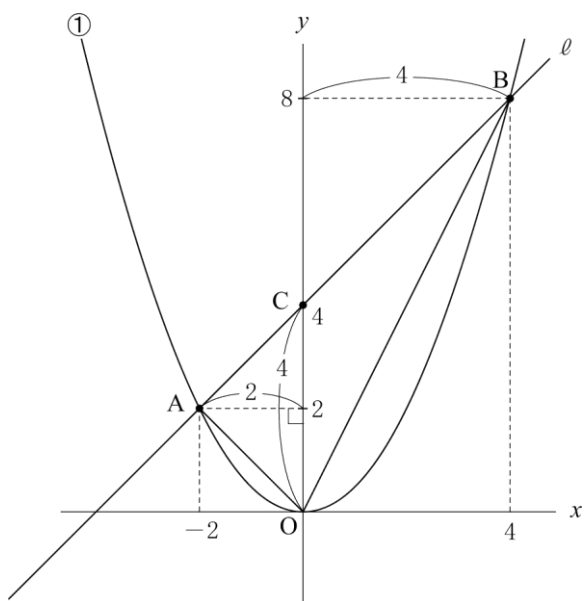


図4のように、 $AO \parallel BR$ となるように、 x 軸上の点 R をとると、 $\triangle AOP$ と $\triangle ARP$ は、底辺 AP が共通なので、 $\triangle AOP = \triangle ARP$ となる。

四角形 OABP の面積の $\frac{1}{2}$ となることは、すなわち、 $\triangle ABR$ の面積の $\frac{1}{2}$ となることであるから、そのときの点 Q は、線分 BR の中点であればよい。

点 R は、 y 座標が 0 で、直線 BP: $y = -x + 12$ 上にあるので、その x 座標は、 $0 = -x + 12 \Rightarrow x = 12$ よって、点 R の座標は、 $(12, 0)$

[illegible]

【問 16】

図 1, 図 2 のように, 2 つの関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ と $y = x + 12$ のグラフが 2 点 A, B で交わっている。点 A の x 座標は -4 , 点 B の x 座標は 6 である。問 1・問 2 に答えなさい。

(徳島県 2021 年度)

問 1 図 1 について, (1)・(2)に答えなさい。

- (1) 点 A の y 座標を求めなさい。
- (2) 関数 $y = x + 12$ のグラフと x 軸について線対称となるグラフの式を求めなさい。

問 2 図 2 のように, 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上を点 A から点 B まで動く点 P をとり, 点 P から x 軸に平行な直線をひき, 関数 $y = x + 12$ のグラフとの交点を Q とする。また, 点 P, Q から x 軸へ垂線をひき, x 軸との交点をそれぞれ R, S とする。(1)・(2)に答えなさい。

- (1) 点 P の x 座標が 2 のとき, 原点を通り, 長方形 PQSR の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。
- (2) 長方形 PQSR が正方形になるときの PR の長さをすべて求めなさい。

図 1

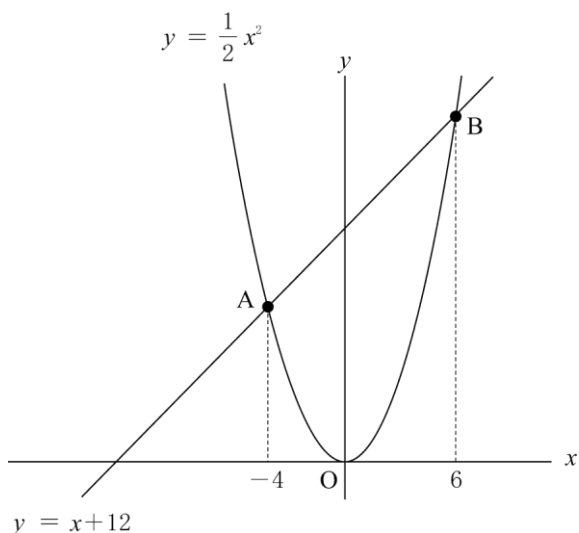
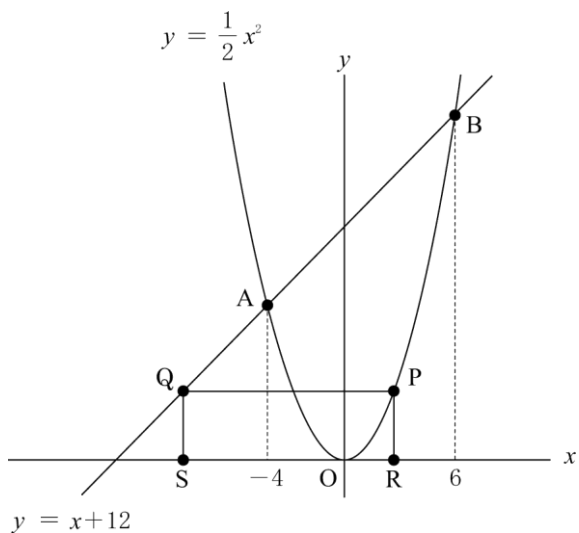


図 2



解答欄

問 1	(1)	
	(2)	
問 2	(1)	
	(2)	

解答

問 1

(1) 8

(2) $y = -x - 12$

問 2

(1) $y = -\frac{1}{4}x$

(2) $\frac{9}{2}, 8$

解説

問 1

(1)

$x = -4$ を $y = x + 12$ に代入して、 $y = 8$

(2)

x 軸について対称移動した後の直線は点 $(-12, 0)$ や、点 A, B をそれぞれ x 軸に関して対称移動させた $(-4, -8), (6, -18)$ を通る。これらのうちの 2 点を通る直線の式を求めればよい。

求める直線の式を $y = ax + b$ とおき、2 点 $(-12, 0), A(-4, -8)$ の座標をそれぞれ代入してできる連立方

程式 $\begin{cases} 0 = -12a + b \\ -8 = -4a + b \end{cases}$ を解くと、 $(a, b) = (-1, -12)$ である。よって、直線の式は、 $y = -x - 12$

問 2

(1)

長方形は平行四辺形であり、平行四辺形において、対角線の交点を通る直線はその面積を 2 等分する。長方形の対角線はそれぞれの中点で交わるので、点 R と点 Q の中点の座標を求め、その点と原点を通る直線の式を求めればよい。点 P の x 座標が 2 なので、点 R の座標は $(2, 0)$ である。

さらに $x = 2$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入して、 $y = 2$ 点 P の座標は $(2, 2)$ となる。

よって、点 Q の y 座標も 2 なので、 $y = 2$ を $y = x + 12$ に代入して、 $x = -10$ 点 Q の座標は $(-10, 2)$ となる。

したがって、点 Q と点 R の中点の座標は、 $\left(\frac{-10+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right), (-4, 1)$

求める直線は原点とこの点を通るので、切片が 0 であることから、求める直線の式を $y = mx$ とおき、点 $(-4, 1)$ の座標を代入すると、 $1 = -4m$ $m = -\frac{1}{4}$ よって、その直線の式は $y = -\frac{1}{4}x$

(2)

長方形 PQSR が正方形となるためには、 $PR = PQ$ (…式①) となればよい。 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 P の座標を

$\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ とする。点 P は点 A から点 B の間にあるので、 $-4 \leq t \leq 6$ である。点 Q の y 座標は点 P の y 座標

と等しく $\frac{1}{2}t^2$ なので、 $y = x + 12$ にこれを代入して x について解くと、 $x = \frac{1}{2}t^2 - 12$

よって、点 Q の座標は $\left(\frac{1}{2}t^2 - 12, \frac{1}{2}t^2\right)$ である。

式①より、 $PR = PQ$ $\frac{1}{2}t^2 = (P \text{ の } x \text{ 座標}) - (Q \text{ の } x \text{ 座標})$

$\frac{1}{2}t^2 = t - \left(\frac{1}{2}t^2 - 12\right)$ $t^2 - t - 12 = 0$ $(t-4)(t+3) = 0$ $t = -3, 4$ $-4 \leq t \leq 6$ より、どちらも問題にあう。

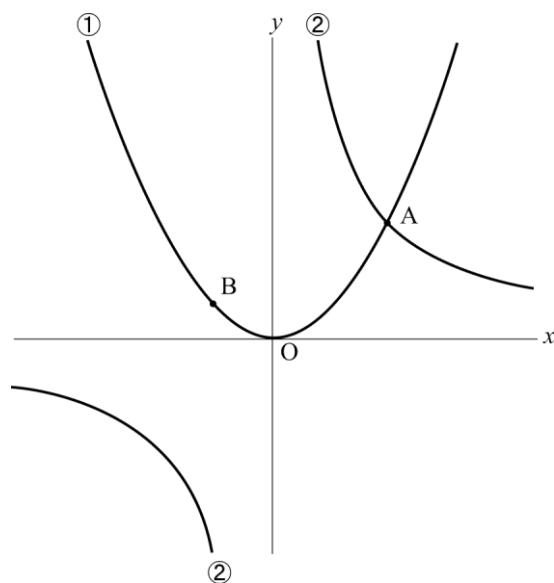
$t = -3$ のとき、 $PR = (点 P \text{ の } y \text{ 座標}) = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2} \times (-3)^2 = \frac{9}{2}$ $t = 4$ のとき、 $PR = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

よって、答えは、 $\frac{9}{2}, 8$

【問 17】

下の図において、放物線①は関数 $y=ax^2$ のグラフであり、双曲線②は関数 $y=\frac{16}{x}$ のグラフである。

放物線①と双曲線②は、点 A で交わっており、点 A の x 座標は 4 である。また、放物線①上の x 座標が -2 である点を B とする。



このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2021 年度)

問 1 次のア～エのうち、関数 $y=\frac{16}{x}$ について述べた文として正しいものはどれか。適当なものを 1 つ選び、その記号を書け。

ア 対応する x と y の値の和は一定である。

イ $x < 0$ の範囲で、 x の値が増加すると、 y の値は減少する。

ウ y は x に比例する。

エ グラフは y 軸を対称の軸として線対称である。

問 2 a の値を求めよ。

問 3 直線 AB の式を求めよ。

問 4 原点 O を通り直線 AB に平行な直線と双曲線②との交点のうち、 x 座標が正である点を C とする。このとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

問 5 点 P は、 y 軸上の $y > 0$ の範囲を動く点とする。 $\triangle ABP$ の面積と $\triangle AOP$ の面積が等しくなるとき、点 P の y 座標を全て求めよ。

解答欄

問 1	
問 2	$a=$
問 3	
問 4	
問 5	

解答

問 1 イ

問 2 $(a=) \frac{1}{4}$

問 3 $y=\frac{1}{2}x+2$

問 4 6

問 5 $\frac{6}{5}, 6$

解説

問 1

ア : x と y の積が一定である ウ : y は x に反比例している エ : グラフは原点を対称の中心とする, 点対称な曲線である。

問 2

点 A は双曲線②上の点なので, $y=\frac{16}{x}$ に, $x=4$ を代入して, $y=\frac{16}{4}=4$ よって, 点 A の座標は

$(4, 4)$ であると分かる。点 A は放物線①上の点でもあるので, $y=ax^2$ に, $x=4, y=4$ を代入して, $4=16a \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

問 3

点 B の x 座標は -2 なので, $y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=-2$ を代入して, $y=1$ よって, 点 B の座標は $(-2, 1)$ であると分かる。したがって, 点 A と点 B の座標が両方とも分かったので, 通る 2 点が分かっている直線の式を求める方法で, 直線 AB の式を求めればよい。

問 4

AB//OC より, 底辺 AB が共通な $\triangle ABC$ と $\triangle ABO$ の面積は等しい

(図 1)。よって, 直線 AB と y 軸の交点を D とすると, $\triangle ABC=$

$$\triangle ABO = \triangle ADO + \triangle BDO = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 6$$

問 5

直線 AB と y 軸の交点を D とする。

(ア)

点 P が点 D よりも上側にあるとき (図 2)。 $\triangle ABP$ と $\triangle AOP$ は, $\triangle APD$ の面積を共通して含んでいる。よって, それぞれ共通部分を除いた, $\triangle BDP$ と $\triangle ADO$ の面積が等しいとき, $\triangle ABP$ と $\triangle AOP$ の面積が等しくなる。つまり, $\triangle ADO = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ なので, $\triangle BDP$ の面積が 4 である。

DP を底辺としたときの $\triangle BDP$ の高さは 2 なので, $\triangle BDP$ の面積について, $4 = \frac{1}{2} \times 2 \times DP \Rightarrow DP = 4$

よって, 点 P の y 座標は, (点 D の y 座標) + 4 = 2 + 4 = 6 である。

(イ)

点 P が点 D よりも下側にあるとき (図 3)。点 P の y 座標を p ($0 < p < 2$) とおくと, $\triangle APO = \frac{1}{2} \times p \times 4 = 2p$,

$$\triangle ABP = \triangle ADP + \triangle BDP = \frac{1}{2} \times (2-p) \times 4 + \frac{1}{2} \times (2-p) \times 2 = 6-3p$$

この 2 つの面積が等しくなるので, $2p = 6-3p$

$$\Rightarrow p = \frac{6}{5} \quad \text{これは } 0 < p < 2 \text{ に適している。}$$

(ア) (イ) より, 答えとなる点 P の y 座標は $\frac{6}{5}, 6$

図 1

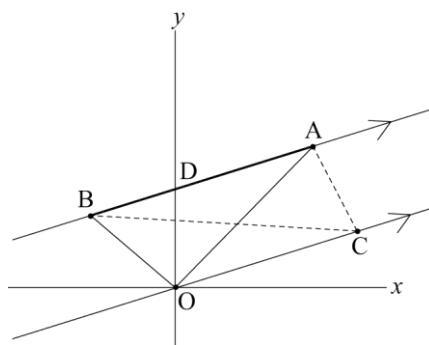


図 2

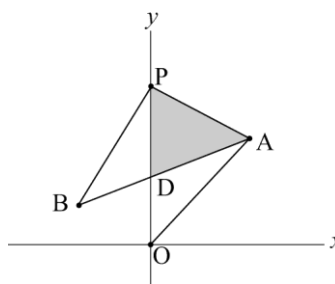
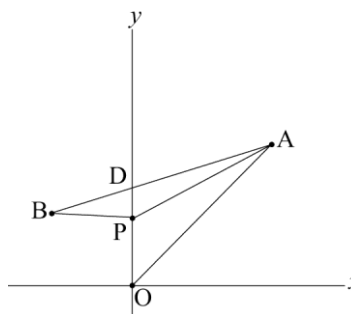


図 3

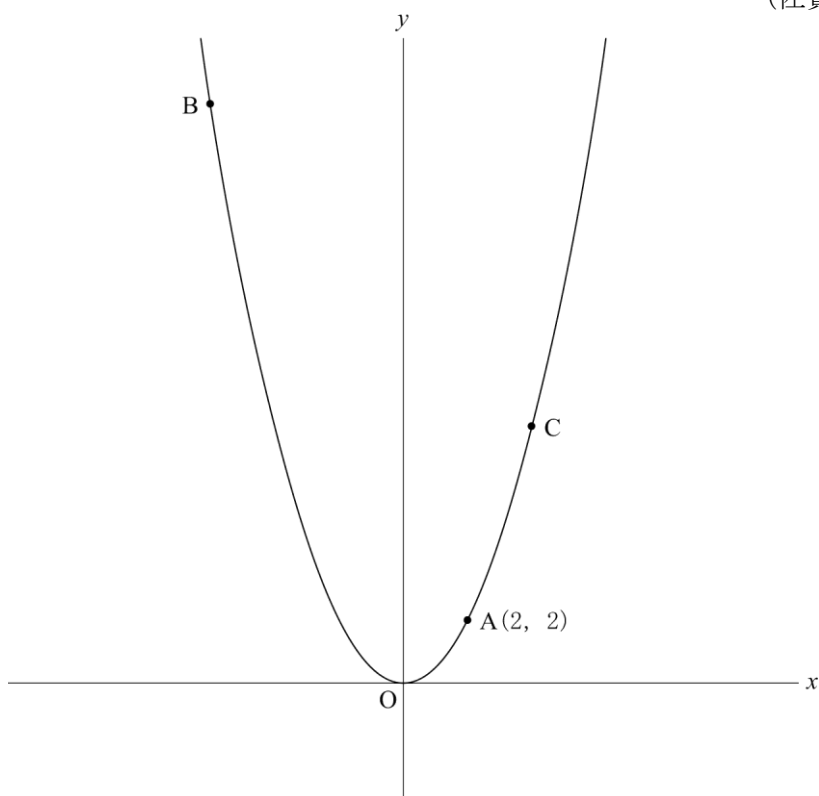


【問 18】

下の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 3 点 A, B, C がある。点 A の座標は A(2, 2), 点 B の x 座標は -6 , 点 C の x 座標は 4 である。

このとき、次の問 1～問 5 に答えなさい。

(佐賀県 2021 年度 一般)



問 1 a の値を求めなさい。

問 2 点 C の y 座標を求めなさい。

問 3 2 点 B, C を通る直線の切片を求めなさい。

問 4 点 A を通り $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線と、2 点 B, C を通る直線との交点の座標を求めなさい。

問 5 点 A を通り y 軸に平行な直線と、2 点 B, C を通る直線との交点を P とする。また、点 P を通り $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線と、2 点 A, B を通る直線との交点を Q とする。
このとき、(1), (2) の問いに答えなさい。

(1) $\triangle PAC$ の面積を求めなさい。

(2) 点 Q の座標を求めなさい。

解答欄

問 1	$a=$	
問 2	$y=$	
問 3		
問 4	(,)	
問 5	(1)	
	(2)	Q (,)

解答

問 1 $a=\frac{1}{2}$

問 2 $y=8$

問 3 12

問 4 (−1, 13)

問 5

(1) 8

(2) Q (−1, 8)

解説

問 1

点 A(2, 2) が、関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあるので、 $2=a \times 2^2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

問 2

点 C の x 座標が 4 であり、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるので、 $y=\frac{1}{2} \times 4^2=8$

問 3

点 B の x 座標が -6 であり、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるので、 $y=\frac{1}{2} \times (-6)^2=18$

$\Rightarrow B(-6, 18)$

2 点 B(-6, 18), C(4, 8) を通る直線の式を $y=ax+b$ とおき、2 点の座標を代入してできる連立方程式を解くと、 $y=-x+12$

よって、切片は 12

問 4

点 A を通り $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線は、辺 BC の中点を通る。その中点を M とおくと、

$M\left(\frac{-6+4}{2}, \frac{18+8}{2}\right)$ すなわち、 $M(-1, 13)$

問 5

(1)

点 P の x 座標が 2 であり、関数 $y=-x+12$ のグラフ上にあるので、 $y=-2+12=10 \Rightarrow P(2, 10)$

$\triangle PAC$ の底辺 PA の長さは、 $10-2=8$ 、高さは、 $4-2=2$ なので、その面積は、 $8 \times 2 \times \frac{1}{2}=8$

(2)

PA//MQ であれば、 $\triangle BPQ=\triangle BMQ+\triangle PMQ=\triangle BMQ+\triangle AMQ=\triangle BMA=\frac{1}{2}\triangle ABC$

$\triangle BMA=\triangle BMQ+\triangle AMQ=\triangle BMQ+\triangle PMQ=\triangle BPQ=\frac{1}{2}\triangle ABC$ より、直線 PQ が $\triangle ABC$ の面積を 2 等分することがわかる。

直線 AB の式を、 $y=mx+n$ とおき、2 点 A(2, 2), B(-6, 18) の座標を代入してできる連立方程式を解くと、直線 AB の式は、 $y=-2x+6$ と求められる。

直線 MQ が y 軸と平行になるので、点 Q の x 座標は -1 で、直線 AB : $y=-2x+6$ 上にあるので、 $y=-2 \times (-1)+6=8$ よって、点 Q の座標は、 $Q(-1, 8)$

図 1

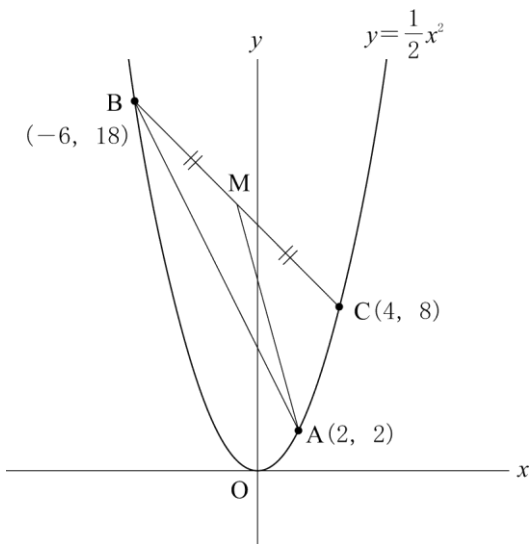
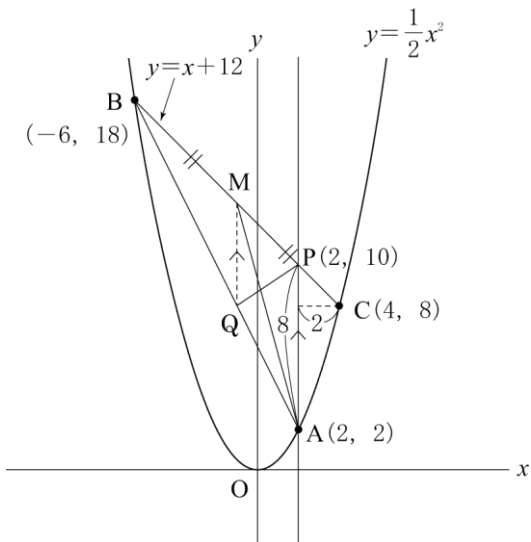


図 2



【問 19】

図 1, 図 2 のように, 関数 $y=x^2$ のグラフ上に, x 座標が 2 である点 A と, y 座標が 1 である点 B がある。原点を O として, 次の問いに答えなさい。ただし, 点 B の x 座標は負とする。

(長崎県 2021 年度)

問 1 点 A の y 座標を求めよ。

問 2 直線 AB の式を求めよ。

問 3 関数 $y=x^2$ について, x の変域が $-2 \leq x \leq 1$ のときの y の変域を求めよ。

問 4 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

問 5 図 2 のように, 点 A から x 軸にひいた垂線と x 軸との交点を C とし, 直線 AB と x 軸との交点を D とする。また, 点 C を通り, 傾きが -1 である直線上に点 P をとる。 $\triangle APD$ の面積が $4\sqrt{2}$ となるとき, 点 P の x 座標をすべて求めよ。

図 1

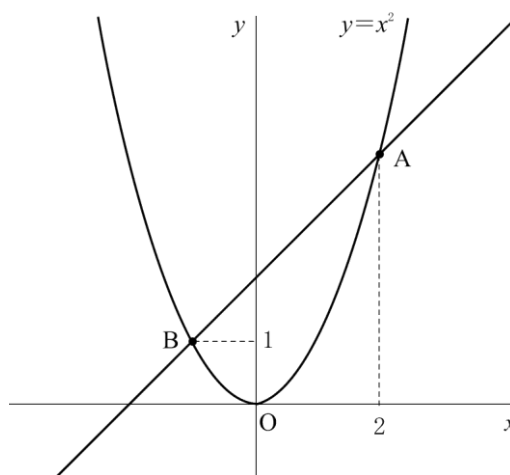
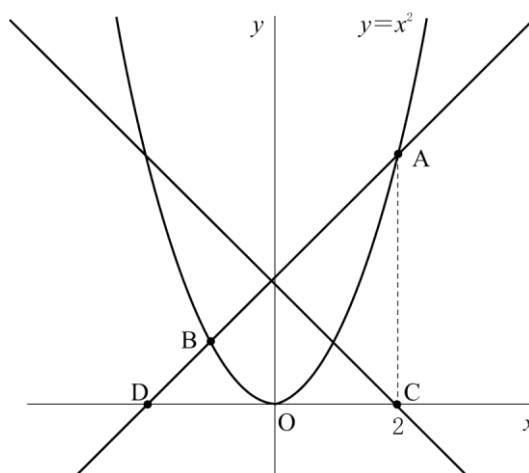


図 2



解答欄

問 1	
問 2	$y =$
問 3	$\leq y \leq$
問 4	
問 5	

解答

問 1 4

問 2 $y=x+2$

問 3 $0 \leq y \leq 4$

問 4 3

問 5 $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

解説

問 1

点 A は、 x 座標が 2 で、関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるので、その y 座標は、 $y=2^2=4$

問 2

問 1 より、点 A の座標は、(2, 4)

また、点 B は、 y 座標が 1 で、関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるので、 $1=x^2 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow$ 点 B の x 座標は負だから、 $x=-1$ よって、点 B の座標は、(-1, 1)

以上のことから、直線 AB の式を $y=ax+b$ とおき、 $(x, y)=(2, 4), (-1, 1)$ をそれぞれ代入してできる連立方程式を解くと、 $a=1, b=2$ よって、直線 AB の式は、 $y=x+2$

問 3

関数 $y=x^2$ について、 $x=-2$ のとき、 $y=(-2)^2=4$ 、

$x=1$ のとき、 $y=1^2=1$ であることに注意してグラフをかくと、図

1 のようになる。よって、 y の変域は、 $0 \leq y \leq 4$

問 4

図 2 のように、直線 AB と y 軸との交点を M とする。M(0, 2) より、OM=2 だから、 $\triangle AOM$ の底辺を OM とすると、点 A の x 座標が 2 なので、高さは 2 である。

よって、 $\triangle AOM = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$

また、 $\triangle BOM$ の底辺を OM とすると、点 B の x 座標が -1 なので、高さは 1 である。

よって、 $\triangle BOM = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$

したがって、 $\triangle OAB = \triangle AOM + \triangle BOM = 2 + 1 = 3$

問 5

図 3 のように、点 D は、 y 座標が 0 で、関数 $y=x+2$ のグラフ上にあるので、 $0=x+2 \Rightarrow x=-2$ より、その座標は、D(-2, 0) である。

D(-2, 0), M(0, 2), A(2, 4) より、DM=MA

また、 $\triangle ACD$ は、AC=CD=4 の二等辺三角形だから、DM=MA より、CM $\perp$ AD

よって、 $\triangle APD$ と $\triangle ACD$ は、どちらも底辺を AD としたときに、高さがそれぞれ PM と CM であるから、その面積比は、PM : CM である。

$\triangle ACD = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$ より、

$\triangle APD : \triangle ACD = PM : CM = 4\sqrt{2} : 8 = \sqrt{2} : 2$

よって、点 P の x 座標が正のとき、2 点 P, C の x 座標を比較することで、

(点 P の x 座標) : (点 C の x 座標) = $\sqrt{2} : 2 \Rightarrow$ (点 P の x 座標) : $2 = \sqrt{2} : 2$

$\Rightarrow$ (点 P の x 座標) = $\sqrt{2}$

また、点 P の x 座標が負のとき、2 点 P, C の x 座標を比較することで、

-(点 P の x 座標) : (点 C の x 座標) = $\sqrt{2} : 2 \Rightarrow$ -(点 P の x 座標) : $2 = \sqrt{2} : 2$

$\Rightarrow$ (点 P の x 座標) = $-\sqrt{2}$

図 1

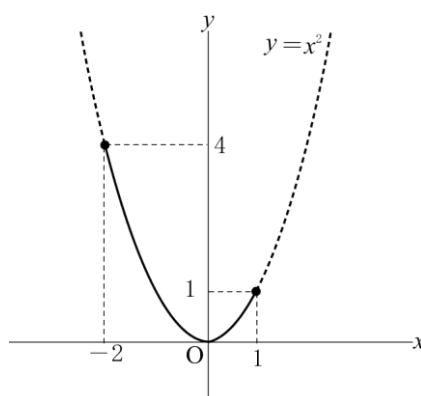


図 2

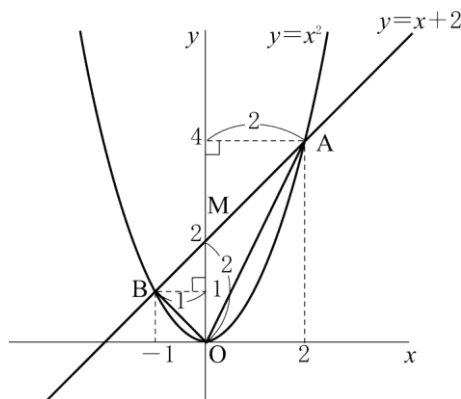
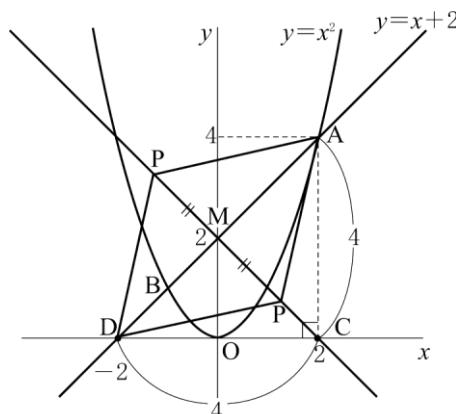


図 3



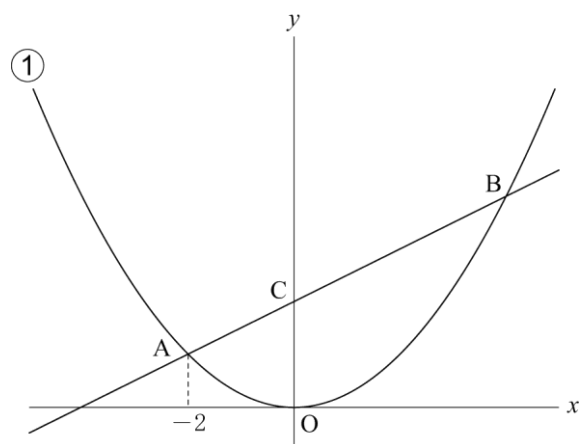
【問 20】

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ ……①のグラフ上に 2 点 A, B がある。A の x 座標は -2 , B の x 座標は正で、B の y 座標は A の y 座標より 3 だけ大きい。また、点 C は直線 AB と y 軸との交点である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2021 年度)

問 1 点 A の y 座標を求めなさい。



問 2 点 B の座標を求めなさい。

問 3 直線 AB の式を求めなさい。

問 4 線分 BC 上に 2 点 B, C とは異なる点 P をとる。また、関数①のグラフ上に点 Q を、線分 PQ が y 軸と平行になるようにとり、PQ の延長と x 軸との交点を R とする。

PQ : QR = 5 : 1 となるときの P の座標を求めなさい。

解答欄

問 1	
問 2	(,)
問 3	$y =$
問 4	(,)

解答

問 1 1

問 2 (4, 4)

問 3 $y = \frac{1}{2}x + 2$

問 4 $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

解説

問 1

点 A は、 x 座標が -2 であり、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあるので、その y 座標は、 $y = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$

問 2

点 B の y 座標は、点 A の y 座標より 3 だけ大きいことから、 $1 + 3 = 4$ であり、点 B は、

関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあるので、 $4 = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow$ 点 B の x 座標は正であることから、

$x = 4$ よって、点 B の座標は B(4, 4)

問 3

問 1、問 2 より、2 点 A、B の座標は、A(-2, 1)、B(4, 4) である。直線 AB の式を $y = ax + b$ とおき、2

点 A、B の座標を代入してできる連立方程式 $\begin{cases} 1 = -2a + b \\ 4 = 4a + b \end{cases}$ を解くと、 $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ なので、直線 AB

の式は、 $y = \frac{1}{2}x + 2$ である。

問 4

図 1 のように、点 P の x 座標を t とおくと、

点 P が関数 $y = \frac{1}{2}x + 2$ のグラフ上にあることか

ら、その y 座標は、 $y = \frac{1}{2}t + 2$ 、

点 Q が関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあることから、

その y 座標は、 $y = \frac{1}{4}t^2$ 、

点 R が x 軸上にあることから、その y 座標は、0 である。

よって、 $PQ = \frac{1}{2}t + 2 - \frac{1}{4}t^2 =$

$-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 2$ 、 $QR = \frac{1}{4}t^2$ より、

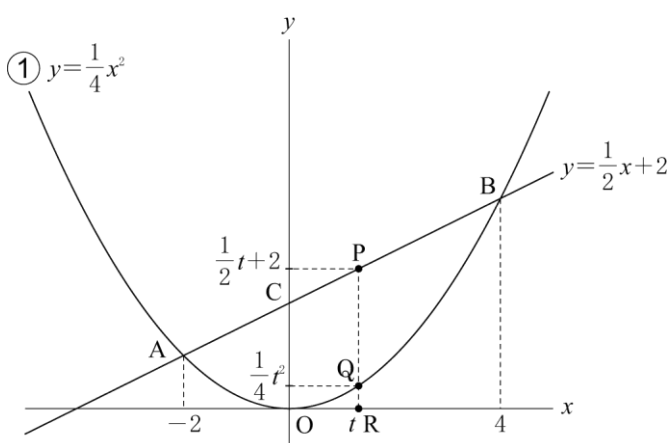
$PQ : QR = \left(-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 2\right) : \frac{1}{4}t^2 = 5 : 1 \Rightarrow \frac{5}{4}t^2 = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 2 \Rightarrow 3t^2 - t - 4 = 0$

$\Rightarrow$ 二次方程式の解の公式より、 $t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{1 \pm 7}{6}$

$\Rightarrow t = \frac{4}{3}$ 、 -1 点 P は線分 BC 上にあることから、 $0 \leq t \leq 4$ より、 $t = \frac{4}{3}$

よって、点 P の y 座標は、 $y = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + 2 = \frac{8}{3}$ だから、点 P の座標は、 $P\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

図 1



【問 21】

右の図のように、2つの関数

$$y=ax^2 \ (a \text{ は定数}) \quad \cdots \textcircled{ア}$$

$$y=-x+1 \quad \cdots \textcircled{イ}$$

のグラフがある。

2点A、Bは関数 $\textcircled{ア}$ 、 $\textcircled{イ}$ のグラフの交点で、Aのy座標は3で、Aのx座標は負であり、Bのx座標はAのx座標より $\frac{8}{3}$ だけ大きい。点Cは関数 $\textcircled{ア}$ のグラフ上にあって、Cのx座標は4である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2021 年度)

問 1 a の値を求めなさい。

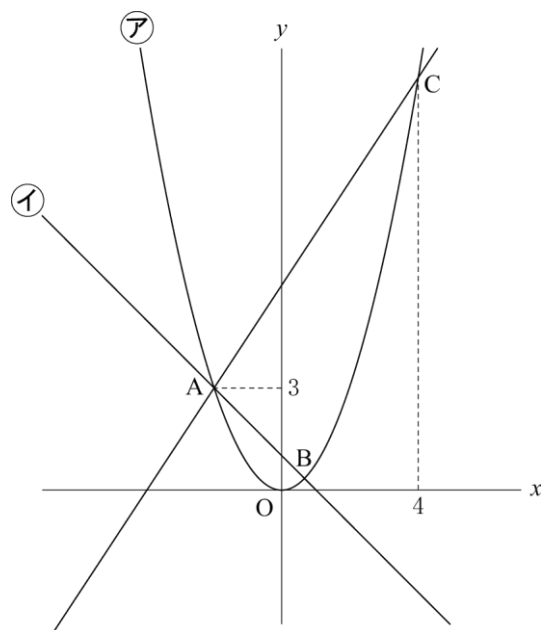
問 2 直線ACの式を求めなさい。

問 3 関数 $\textcircled{ア}$ のグラフ上において2点B、Cの間に点Pを、直線AC上において点Qを、直線PQがy軸と平行になるようにとる。また、直線PQと関数 $\textcircled{イ}$ のグラフとの交点をRとする。

PQ : PR = 3 : 1 となるとき、

(1) 点Pのx座標を求めなさい。

(2) $\triangle ARC$ の面積は、 $\triangle ABP$ の面積の何倍であるか、求めなさい。



解答欄

問 1	$a =$	
問 2	$y =$	
問 3	(1)	
	(2)	倍

解答

問1 $a = \frac{3}{4}$

問2 $y = \frac{3}{2}x + 6$

問3

(1) $\frac{3}{2}$

(2) 9 倍

解説

問1

点Aは、 y 座標が3であり、関数 $y = -x + 1$ のグラフ上にあるので、その x 座標は、 $3 = -x + 1 \Rightarrow x = -2$ よって、点Aの座標はA(-2, 3)

また、点Aは、関数 $y = ax^2$ のグラフ上にもあるので、 $3 = a \times (-2)^2$ よって、 $a = \frac{3}{4}$

問2

問1より、関数㊦のグラフの式は、 $y = \frac{3}{4}x^2$

点Cは、 x 座標が4であり、関数 $y = \frac{3}{4}x^2$ のグラフ上にあるので、その y 座標は、 $y = \frac{3}{4} \times 4^2 = 12$
よって、点Cの座標は、C(4, 12)

直線ACの式を $y = mx + n$ とおき、2点A, Cの座標を代入してできる連立方程式 $\begin{cases} 3 = -2m + n \\ 12 = 4m + n \end{cases}$ を解くと、
 $(m, n) = \left(\frac{3}{2}, 6\right)$ なので、直線ACの式は、 $y = \frac{3}{2}x + 6$ である。

問3

(1)

点Bの x 座標は、点Aの x 座標より $\frac{8}{3}$ だけ大きいことから、 $-2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$ である。

点Pの x 座標を t とおくと、点Pが関数 $y = \frac{3}{4}x^2$ のグラフ上にあることから、その y 座標は、 $y = \frac{3}{4}t^2$,

点Qが関数 $y = \frac{3}{2}x + 6$ のグラフ上にあることから、その y 座標は、 $y = \frac{3}{2}t + 6$,

点Rが関数 $y = -x + 1$ のグラフ上にあることから、その y 座標は、 $y = -t + 1$ である。

よって、 $PQ = \frac{3}{2}t + 6 - \frac{3}{4}t^2 = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 6$, $PR = \frac{3}{4}t^2 - (-t + 1) = \frac{3}{4}t^2 + t - 1$ より、

$$PQ : PR = \left(-\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 6\right) : \left(\frac{3}{4}t^2 + t - 1\right) = 3 : 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}t^2 + t - 1\right) \times 3 = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 6 \\ \Rightarrow 2t^2 + t - 6 = 0$$

$$\text{二次方程式の解の公式より、} t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

$$t = \frac{3}{2}, -2 \quad \text{点Pは2点B, Cの間にあることから、} \frac{2}{3} \leq t \leq 4 \text{ より、} t = \frac{3}{2}$$

(2)

ここまでの状況をまとめると、図 1 のようになる。3 点 A, B, R の x 座標を利用することで、

$$AB : BR = \left\{ \frac{2}{3} - (-2) \right\} : \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = 16 : 5 \text{ とわかるから、}$$

$$\triangle APR = \frac{21}{16} \triangle ABP$$

PQ : PR = 3 : 1 より、

$$\triangle ARQ = \frac{4}{1} \triangle APR = \frac{4}{1} \times \frac{21}{16} \triangle ABP = \frac{21}{4} \triangle ABP$$

3 点 A, Q, C の x 座標を利用することで、

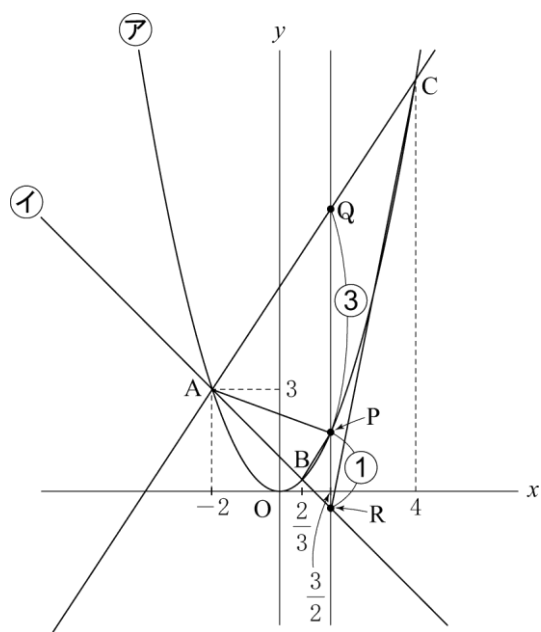
$$AQ : QC = \left\{ \frac{3}{2} - (-2) \right\} : \left(4 - \frac{3}{2} \right) = 7 : 5 \text{ とわかるから、} \triangle$$

$$ARC = \frac{12}{7} \triangle ARQ$$

$$= \frac{12}{7} \times \frac{21}{4} \triangle ABP = 9 \triangle ABP$$

よって、 $\triangle ARC$ の面積は、 $\triangle ABP$ の面積の 9 倍である。

図 1



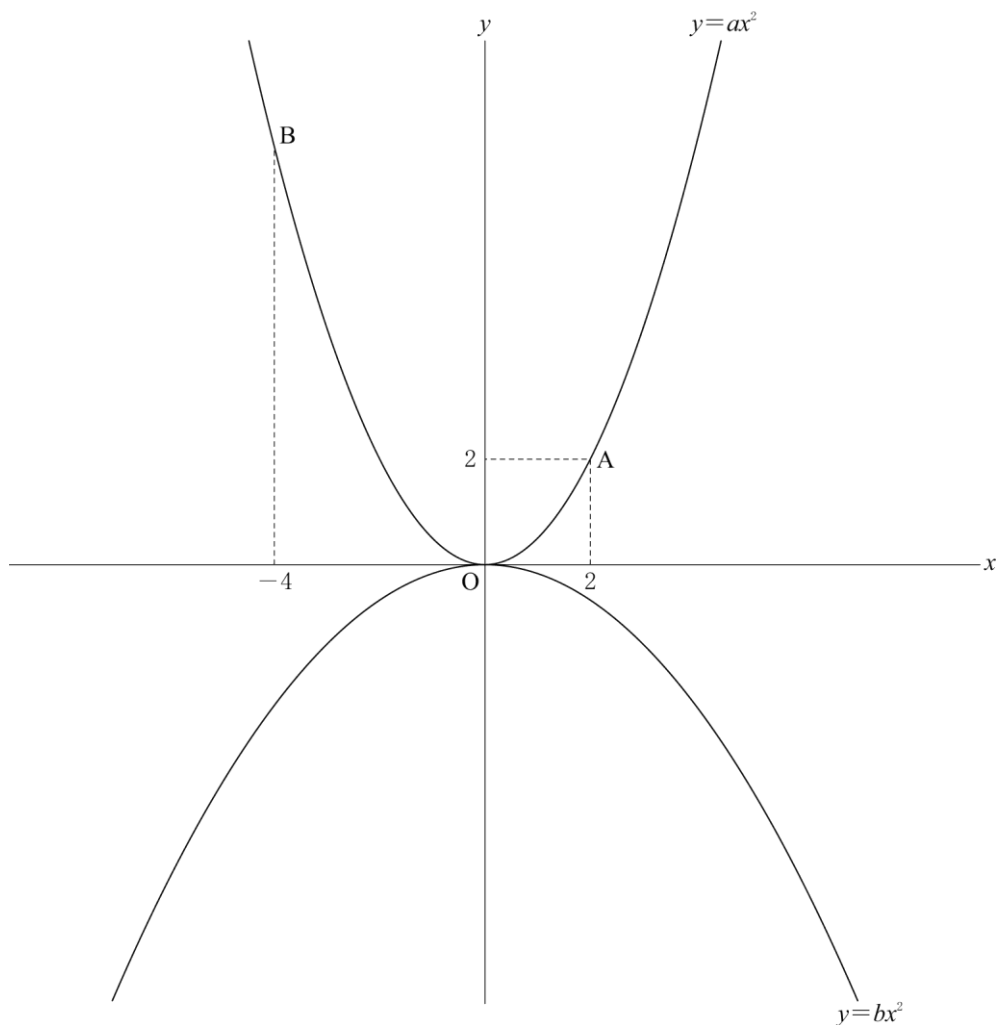
【問 22】

下の図 1 のように、関数 $y=ax^2$ ($a>0$) と、関数 $y=bx^2$ ($b<0$) のグラフがある。関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、点 A の座標は $(2, 2)$ 、点 B の x 座標は -4 である。

次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(大分県 2021 年度)

図 1

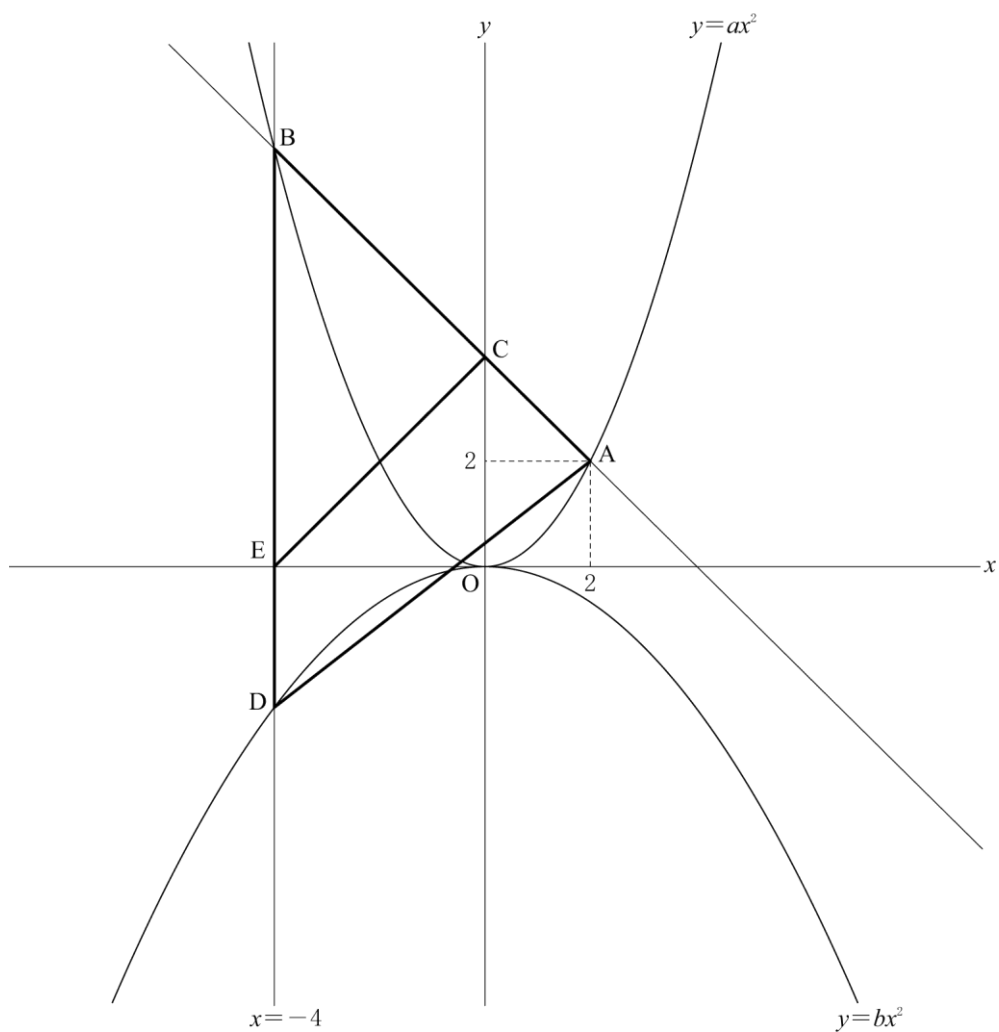


問 1 a の値を求めなさい。

問 2 直線 AB の式を求めなさい。

問3 下の図2のように、直線ABとy軸との交点をC、直線 $x=-4$ と関数 $y=bx^2$ との交点をD、直線 $x=-4$ とx軸との交点をEとする。 $\triangle BEC$ の面積と四角形ACEDの面積が等しくなるときの b の値を求めなさい。

図2



解答欄

問1	$a=$
問2	
問3	$b=$

解答

問 1 $a = \frac{1}{2}$

問 2 $y = -x + 4$

問 3 $b = -\frac{1}{6}$

解説

問 1

$y = ax^2$ に、点 A の座標である $x = 2$, $y = 2$ を代入して、 $2 = 4a$ $a = \frac{1}{2}$

問 2

$y = \frac{1}{2}x^2$ に $x = -4$ を代入して、 $y = 8$ よって、点 B の座標は $(-4, 8)$ である。

直線 AB の式を $y = mx + n$ とおき、2 点 A, B の座標, $(x, y) = (2, 2), (-4, 8)$ をそれぞれ代入してできる

連立方程式 $\begin{cases} 2 = 2m + n \\ 8 = -4m + n \end{cases}$ を解くと、 $(m, n) = (-1, 4)$ よって、直線 AB の式は、 $y = -x + 4$

問 3

$\triangle BEC$ の面積と四角形 ACED の面積が等しくなるには、 $\frac{1}{2}\triangle ABD = \triangle BEC$ となればよい。

点 E $(-4, 0)$ なので、 $\triangle BEC = \frac{1}{2} \times BE \times OE = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 点 D は $y = bx^2$ 上の点で、その座標は

$(-4, 16b)$ と表すことができるので、 $\triangle ABD = \frac{1}{2} \times BD \times (\text{点 A から BD までの距離})$

$= \frac{1}{2} \times (8 - 16b) \times 6 = 24 - 48b$ よって、 $\frac{1}{2}\triangle ABD = \triangle BEC$ となればよいので、 $\frac{1}{2}(24 - 48b) = 16$

$b = -\frac{1}{6}$

【問 23】

以下の会話は授業の一場面である。次の問 1～問 3 に答えなさい。

(鹿児島県 2021 年度)

先 生：今日は放物線上の 3 点を頂点とした三角形について学びましょう。その前にまずは練習問題です。右の図の関数 $y=2x^2$ のグラフ上に点 A があり、点 A の x 座標が 3 のとき、 y 座標を求めてみましょう。

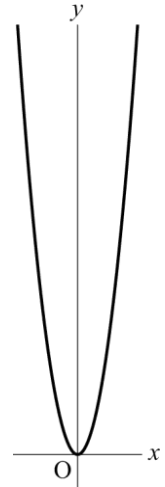
ゆうき： y 座標は ア です。

先 生：そうですね。それでは、今日の課題です。

【課題】

関数 $y=2x^2$ のグラフ上に次のように 3 点 A, B, C をとるとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよう。

- ・点 B の x 座標は点 A の x 座標より 1 だけ大きい。
- ・点 C の x 座標は点 B の x 座標より 1 だけ大きい。



たとえば、点 A の x 座標が 1 のとき、点 B の x 座標は 2、点 C の x 座標は 3 ですね。

ゆうき：それでは私は点 A の x 座標が -1 のときを考えてみよう。このときの点 C の座標は イ だから…よしっ、面積がでた。

しのぶ：私は、直線 AB が x 軸と平行になるときを考えてみるね。このときの点 C の座標は ウ だから…面積がでたよ。

先 生：お互いの答えを確認してみましょう。

ゆうき：あれ、面積が同じだ。

しのぶ：点 A の x 座標がどのような値でも同じ面積になるのかな。

ゆうき：でも三角形の形は違うよ。たまたま同じ面積になったんじゃないの。

先 生：それでは、同じ面積になるか、まずは点 A の x 座標が正のときについて考えてみましょう。点 A の x 座標を t とおいて、 $\triangle ABC$ の面積を求めてみてください。

問 1 ア にあてはまる数を書け。

問 2 イ , ウ にあてはまる座標をそれぞれ書け。

問3 会話文中の下線部について、次の(1)，(2)の問いに答えよ。

- (1) 点 C の y 座標を t を用いて表せ。

- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。ただし、求め方や計算過程も書くこと。

また、点 A の x 座標が正のとき、 $\triangle ABC$ の面積は点 A の x 座標がどのような値でも同じ面積になるか、求めた面積から判断し、解答欄の「同じ面積になる」、「同じ面積にならない」のどちらかを  で囲め。

解答欄

問 1	ア	
問 2	イ	(,)
	ウ	(,)
問 3	(1)	
	(2)	[求め方や計算] 答 同じ面積になる ・ 同じ面積にならない

解答

問 1

ア 18

問 2

イ (1, 2)

ウ $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

問 3

(1) $2(t+2)^2$

(2)

[求め方や計算]

$A(t, 2t^2)$, $B(t+1, 2(t+1)^2)$, $C(t+2, 2(t+2)^2)$ である。

$L(t, 0)$, $M(t+1, 0)$, $N(t+2, 0)$ とおくと

台形 $ALNC$ の面積は $\frac{1}{2} \times \{2t^2 + 2(t+2)^2\} \times 2 \cdots \textcircled{1}$

台形 $ALMB$ の面積は $\frac{1}{2} \times \{2t^2 + 2(t+1)^2\} \times 1 \cdots \textcircled{2}$

台形 $BMNC$ の面積は $\frac{1}{2} \times \{2(t+1)^2 + 2(t+2)^2\} \times 1 \cdots \textcircled{3}$

$\triangle ABC$ の面積は $\textcircled{1} - (\textcircled{2} + \textcircled{3})$ より

$$\frac{1}{2} \{2t^2 + 2(t+2)^2\} \times 2 - \frac{1}{2} \{2t^2 + 2(t+1)^2 + 2(t+1)^2 + 2(t+2)^2\}$$

$$= t^2 + (t+2)^2 - 2(t+1)^2$$

$$= 2$$

(答) 2

同じ面積にな ・ 同じ面積にならない

解説

問 1

点 A は x 座標が 3 で、関数 $y=2x^2$ のグラフ上にあるので、 $y=2 \times 3^2=18$

問 2

点 A の x 座標が -1 のとき、点 B の x 座標は $-1+1=0$,

点 C の x 座標は $0+1=1$ なので、点 C の y 座標は、 $y=2 \times 1^2=2$
よって、点 C の座標は、 $(1, 2)$

また、直線 AB が x 軸と平行になるとき、図 1 のように、
2 点 A, B の y 座標は等しい。

点 A の x 座標を t とすると、点 B の x 座標は $t+1$ である。

よって、点 A の y 座標は、 $y=2t^2$ であり

点 B の y 座標は、 $y=2(t+1)^2$ であるから

$$2t^2 = 2(t+1)^2 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ すなわち、点 } A \text{ の } x \text{ 座標は、} -\frac{1}{2}$$

よって、点 B の x 座標は、 $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$, 点 C の x 座標は、 $\frac{1}{2}+1=$

$$1=\frac{3}{2} \text{ だから、点 } C \text{ の } y \text{ 座標は、} y=2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

したがって、点 C の座標は、 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

問 3

(1)

点 A の x 座標を t とすると、点 B の x 座標は

$t+1$, 点 C の x 座標は $t+2$ だから、点 C の y 座標は、 $y=2(t+2)^2$

(2)

解答例の図を示すと、図 2 の通り。

図 1

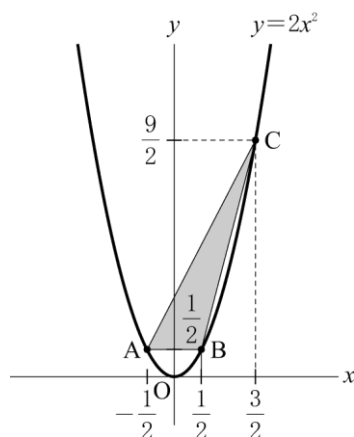
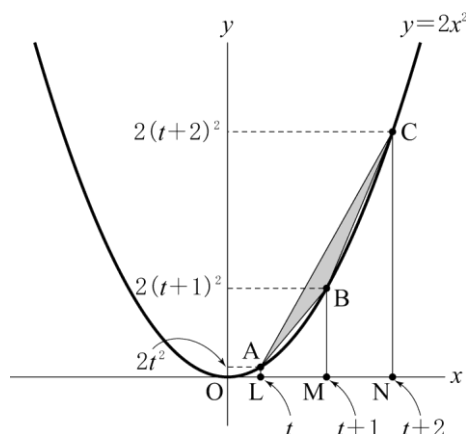


図 2

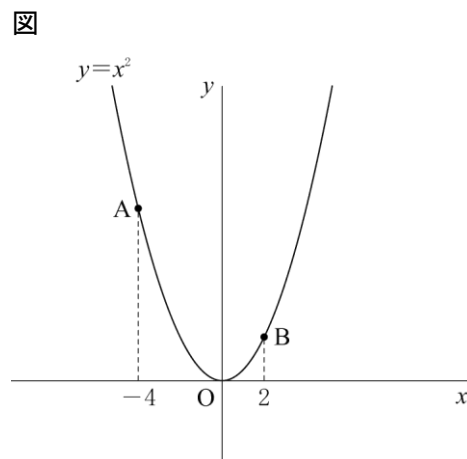


【問 24】

右の図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。

2 点 A, B の x 座標がそれぞれ -4 , 2 であるとき、次の各問に答えなさい。

(沖縄県 2021 年度)



問 1 点 A の y 座標を求めなさい。

問 2 2 点 A, B を通る直線の式を求めなさい。

問 3 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

問 4 図の関数 $y=x^2$ のグラフ上に x 座標が正である点 P をとる。直線 AP と x 軸との交点を Q とすると、 $\triangle OPA$ の面積は $\triangle OPQ$ の面積と等しくなった。
このとき、点 P の座標を求めなさい。

解答欄

問 1	A (-4 ,)
問 2	$y =$
問 3	
問 4	P (,)

解答

問 1 A (-4, 16)

問 2 $y = -2x + 8$

問 3 24

問 4 P ($2\sqrt{2}$, 8)

解説

問 1

点 A は、 x 座標が -4 で、関数 $y = x^2$ のグラフ上にあるため、その y 座標は、 $y = (-4)^2 = 16$

問 2

点 B は、 x 座標が 2 で、関数 $y = x^2$ のグラフ上にあるため、その y 座標は、 $y = 2^2 = 4$

よって、直線 AB の式を $y = ax + b$ とおき、2 点 A $(-4, 16)$ 、B $(2, 4)$ の座標をそれぞれ代入してできる連立方程式を解くと、 $a = -2$ 、 $b = 8$ だから、その式は $y = -2x + 8$

問 3

図 1 のように、直線 AB と y 軸との交点を C とすると、C $(0, 8)$

$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = 8 \times 4 \times \frac{1}{2} + 8 \times 2 \times \frac{1}{2} = 24$$

問 4

点 P の x 座標を t とおく。図 2 のように、 $\triangle OPA = \triangle OPQ$ となるためには、点 P が線分 AQ の中点となればよい。

点 Q の y 座標は 0 だから、点 P の座標は、P $(t, 8)$

点 P は関数 $y = x^2$ のグラフ上にあるため、

$$8 = t^2 \Rightarrow t = \pm 2\sqrt{2}$$

点 P の x 座標は正であるから、条件に合う点 P の座標は、

P $(2\sqrt{2}, 8)$

図 1

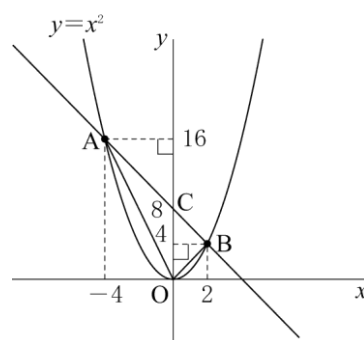


図 2

