

4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2005 年度出題】

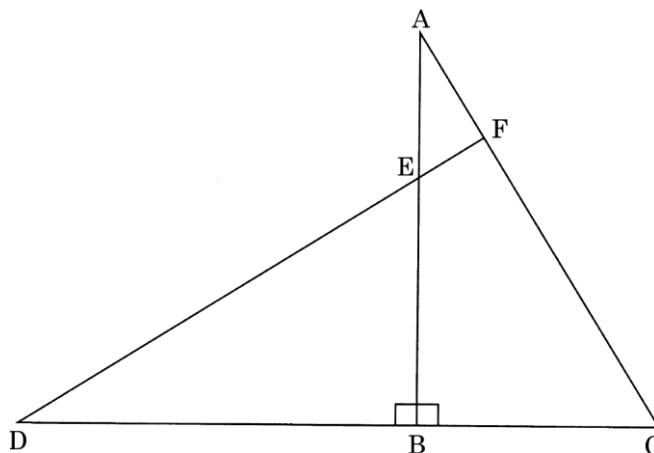
【問 1】

図は、 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB > BC$ である直角三角形 ABC と、 $\angle DBE = 90^\circ$, $DB > BE$ である直角三角形 DBE を組み合わせたもので、点 E は辺 AB 上にあり、 $\triangle ABC \equiv \triangle DBE$ となっています。

辺 DE の延長と辺 AC との交点を F とするとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(岩手県 2005 年度)

(1) $\triangle AEF \sim \triangle DEB$ であることを証明しなさい。



(2) $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$ であるとき、 EF の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

証明

$\triangle AEF$ と $\triangle DEB$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AEF = \angle DEB$$

$\triangle ABC \equiv \triangle DBE$ であるから

$$\angle EAF = \angle EDB$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AEF \sim \triangle DEB$$

$$(2) \frac{3}{5} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle AEF$ と $\triangle DEB$ において

$$\angle AEF = \angle DEB \text{ (対頂角)}$$

また $\triangle ABC \equiv \triangle DBE$ より

$$\angle EAF = \angle EDB$$

よって

2組の角がそれぞれ等しいことから

$$\triangle AEF \sim \triangle DEB$$

(2)

$\triangle ABC$ で三平方の定理より

$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

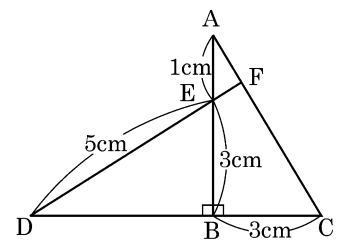
$$DE = AC = 5 \text{ cm}$$

$$AE = 4 - 3 = 1 \text{ cm} \text{ より}$$

$\triangle AEF \sim \triangle DEB$ だから

$$EF : 3 = 1 : 5$$

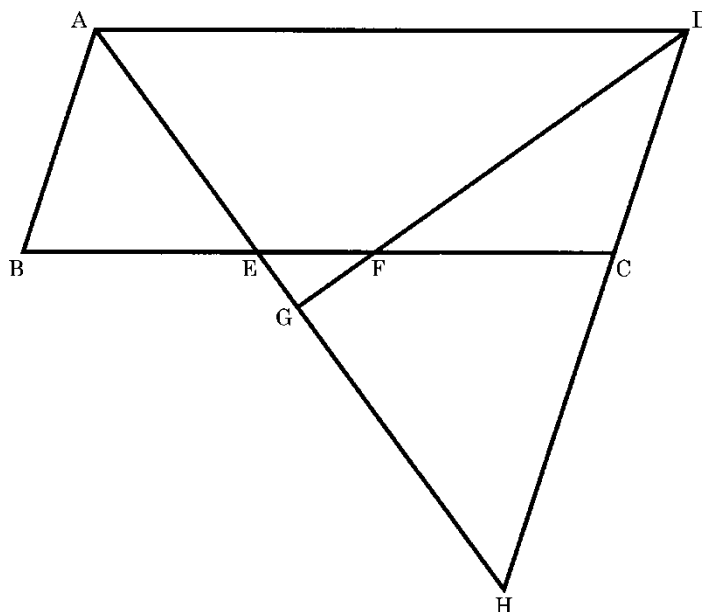
$$EF = \frac{3}{5} \text{ cm}$$



【問 2】

図のような平行四辺形 $ABCD$ がある。 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を E , $\angle D$ の二等分線と辺 BC との交点を F , $\angle A$ の二等分線と $\angle D$ の二等分線との交点を G とする。また, DC の延長と $\angle A$ の二等分線との交点を H とする。このとき, $\triangle GFE \sim \triangle GDH$ であることを証明しなさい。

(茨城県 2005 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$\triangle GFE$ と $\triangle GDH$ で

平行線の同位角だから

$$\angle GEF = \angle EAD \cdots ①$$

仮定から

$$\angle EAD = \angle EAB \cdots ②$$

平行線の錯角だから

$$\angle EAB = \angle GHD \cdots ③$$

①, ②, ③から

$$\angle GEF = \angle GHD \cdots ④$$

平行線の同位角だから

$$\angle GFE = \angle FDA \cdots ⑤$$

仮定から

$$\angle FDA = \angle GDH \cdots ⑥$$

⑤, ⑥から

$$\angle GFE = \angle GDH \cdots ⑦$$

④, ⑦から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle GFE \simeq \triangle GDH$$

解説

$\triangle GFE$ と $\triangle GDH$ で

平行線の同位角だから

$$\angle GEF = \angle EAD \cdots ①$$

仮定から

$$\angle EAD = \angle EAB \cdots ②$$

平行線の錯角だから

$$\angle EAB = \angle GHD \cdots ③$$

①, ②, ③から

$$\angle GEF = \angle GHD \cdots ④$$

平行線の同位角だから

$$\angle GFE = \angle FDA \cdots ⑤$$

仮定から

$$\angle FDA = \angle GDH \cdots ⑥$$

⑤, ⑥から

$$\angle GFE = \angle GDH \cdots ⑦$$

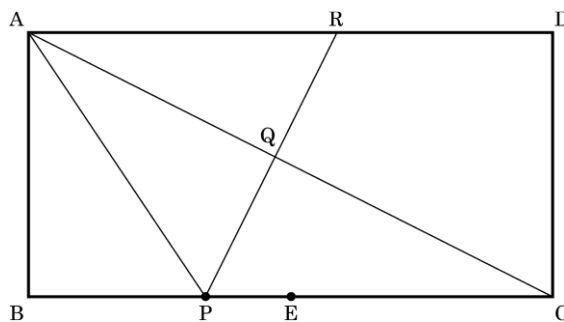
④, ⑦から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle GFE \simeq \triangle GDH$$

図で、四角形 $ABCD$ は、 $AD=2AB$ の長方形である。頂点 A と頂点 C を結ぶ。辺 BC の中点を E とする。辺 BC 上を頂点 B から点 E まで動く点を P とする。点 P を通り、対角線 AC と垂直に交わる直線をひき対角線 AC との交点を Q 、辺 AD との交点を R とする。頂点 A と点 P を結ぶ。

(東京都 2005 年度)



問3. $AB=4\text{ cm}$ で、点 P が点 E と一致するとき、四角形 RQCD の面積は何 cm^2 か。

問1	$\triangle ABC \cong \triangle PQC$	
問2	証明 $\triangle ABC$ と $\triangle PQC$ において, $\angle A = \angle P$ (対頂角) $\angle B = \angle Q$ (対頂角) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle PQC$ (A.A.)	
問3	12 cm^2	

解答

問1 $0 \leq \alpha \leq 45$

問2

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle PQC$ において

共通な角だから

$$\angle ACB = \angle PCQ \cdots \textcircled{1}$$

四角形 $ABCD$ が長方形であることと線分 PR が対角線 AC に垂直であることから

$$\angle ABC = \angle PQC = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle PQC$$

$$\text{問3 } \frac{44}{5} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle ABE$ は直角二等辺三角形だから $\angle BAE = 45^\circ$ となり $0 \leq \alpha \leq 45$ である。

問2

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle PQC$ において

共通な角だから

$$\angle ACB = \angle PCQ \cdots (1)$$

四角形 $ABCD$ が長方形であることと線分 PR が対角線 AC に垂直であることから

$$\angle ABC = \angle PQC = 90^\circ \cdots (2)$$

(1), (2)より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle PQC$$

問3

$\angle ABC = \angle RQA = 90^\circ$, $\angle ACB = \angle RAQ$ (平行線のつくる錯角)より

$$\triangle ABC \sim \triangle RQA$$

$$\text{三平方の定理より } AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$\triangle ABC$ は3辺の比が $4:8:4\sqrt{5} = 1:2:\sqrt{5}$ だから

$\triangle PQC$, $\triangle RQA$ も3辺の比が $1:2:\sqrt{5}$ になる。

よって $PC = 4\text{cm}$ より

$$CQ = 4 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$AQ = AC - CQ = 4\sqrt{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$RQ = \frac{12\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

よって

$$\text{四角形 } RQCD = \triangle ACD - \triangle RQA$$

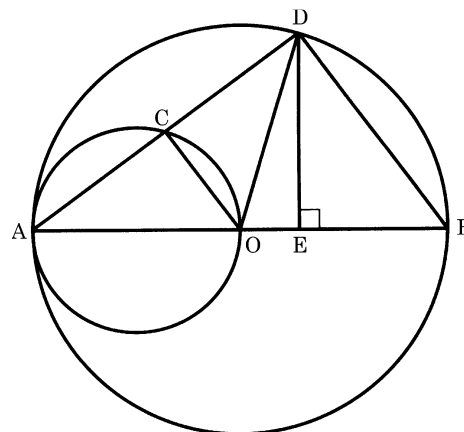
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 4 - \frac{1}{2} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} \times \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$= 16 - \frac{36}{5}$$

$$= \frac{44}{5} \text{ cm}^2 \text{ である。}$$

【問 4】

図のように、円 O の直径を AB とし、半径 OA を直径とする円の円周上に点 C をとる。また、直線 AC と円 O との交点を D 、 $AB \perp DE$ となる線分 AB 上の点を E とする。ただし、点 C は、点 A 、 O と異なる点とする。



このとき、次の1～3に答えなさい。

(山梨県 2005 年度)

1. $\angle OAC = 40^\circ$ となるように点 C をとるとき、 $\angle ODE$ の大きさを求めなさい。
2. $\triangle OBD$ が正三角形となるように点 C をとる。 $\triangle OBD$ の1辺の長さを 4 cm とするとき、線分 OC の長さを求めなさい。
3. 点 C を円周上のどこにとっても、 $\triangle BDE$ と相似となる三角形を図の中から1つ見つけて書きなさい。また見つけた三角形と $\triangle BDE$ が相似となることを証明しなさい。

解答欄

1	度
2	cm
3	$\triangle BDE$ と相似な三角形 … $\triangle$ _____ 証明

解答

1 10 度

2 2cm

3

$\triangle BDE$ と相似な三角形… $\triangle BAD$

証明

$\triangle BDE$ と $\triangle BAD$ において

$\angle DEB = 90^\circ$ (仮定)

AB は円 O の直径だから

$\angle ADB = 90^\circ$

したがって

$\angle DEB = \angle ADB \cdots \textcircled{1}$

また $\angle B$ は共通… $\textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDE \sim \triangle BAD$

他に以下の三角形も相似になる

$\triangle BDE$ と相似な三角形… $\triangle OAC$

$\triangle BDE$ と相似な三角形… $\triangle DAE$

$\triangle BDE$ と相似な三角形… $\triangle ODC$

解説

1

$\triangle OAD$ で $OA = OD$ から

$\angle ODA = \angle OAC = 40^\circ$

$\triangle ADE$ で $\angle AED = 90^\circ$ より

$\angle ADE = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

よって $\angle ODE = \angle ADE - \angle ODA = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$

2

$\angle ACO = \angle ADB = 90^\circ$ から $CO \parallel DB$

よって $AO : AB = CO : DB$

$AO = BD = 4\text{cm}$

$AB = 8\text{cm}$

$CO = x\text{ cm}$ とすると

$4 : 8 = x : 4$

$8x = 16$

$x = 2\text{cm}$

3

$\triangle BDE$ と相似な三角形… $\triangle BAD$

(証明)

$\triangle BDE$ と $\triangle BAD$ において

$\angle DEB = 90^\circ$ (仮定)

AB は円 O の直径だから $\angle ADB = 90^\circ$

したがって $\angle DEB = \angle ADB \cdots \textcircled{1}$

また $\angle B$ は共通… $\textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDE \sim \triangle BAD$

$\triangle BDE$ と相似な三角形… $\triangle OAC$

(証明)

$\triangle BDE$ と $\triangle OAC$ において AO , AB はともに円 O の直径だから $\angle BDA = \angle OCA = 90^\circ$

したがって $BD \parallel OC$ 平行線がつくる同位角は等しいので $\angle DBE = \angle AOC \cdots \textcircled{1}$

また仮定より $\angle BED = 90^\circ$ だから $\angle BED = \angle OCA \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle BDE \sim \triangle OAC$

※他に $\triangle BDE \sim \triangle DAE \sim \triangle ODC$ がある。

【問 5】

図 1 は、 $AB=a$ cm、 $BC=4$ cm の長方形 $ABCD$ を EF を折り目として、頂点 B が辺 AD 上の点 P にくるように折り返したものである。このとき、頂点 C が移動した点を Q 、 DF と PQ の交点を R とする。次の①、②の問いに答えなさい。

(滋賀県 2005 年度)

図 1

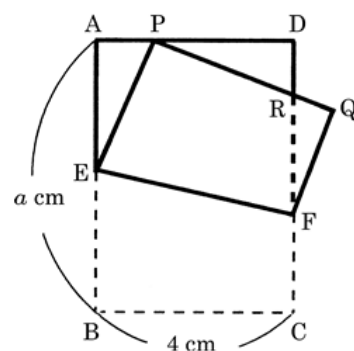
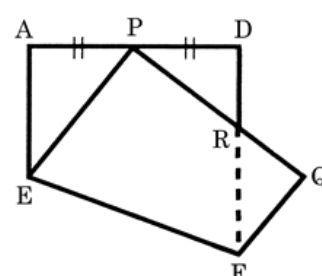


図 2



① $\triangle PDR \sim \triangle FQR$ を証明しなさい。

② 図 2 のように、点 P が AD の中点にあるとき、 $\triangle PDR$ と $\triangle FQR$ の面積が等しくなった。このときの a の値を求めなさい。

解答欄

①	証明
②	$a =$

解答

①

証明

$\triangle PDR$ と $\triangle FQR$ において

対頂角より

$$\angle PRD = \angle FRQ \cdots ①$$

長方形の内角はすべて直角なので

$$\angle PDR = \angle FQR \cdots ②$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいことより

$$\triangle PDR \sim \triangle FQR$$

②

$$a = 6$$

解説

①

証明

$\triangle PDR$ と $\triangle FQR$ において

対頂角より

$$\angle PRD = \angle FRQ \cdots ①$$

長方形の内角はすべて直角なので

$$\angle PDR = \angle FQR \cdots ②$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいことより

$$\triangle PDR \sim \triangle FQR$$

②

$DR = x$ cm とおく。

$\triangle PDR \sim \triangle FQR$ かつ面積が等しいことから

$\triangle PDR \equiv \triangle FQR$ である。

したがって、各辺の長さは図のようになる。

$$BC = PR + RQ$$

$$PR = \sqrt{x^2 + 4}$$

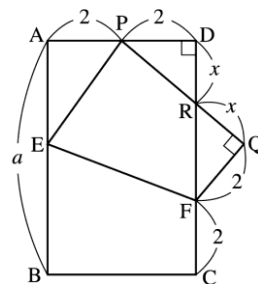
$$RQ = DR = x \text{ から}$$

$$\sqrt{x^2 + 4} + x = 4$$

$$x^2 + 4 = (4 - x)^2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\text{ゆえに } a = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 4} + 2 = 6$$



【問 6】

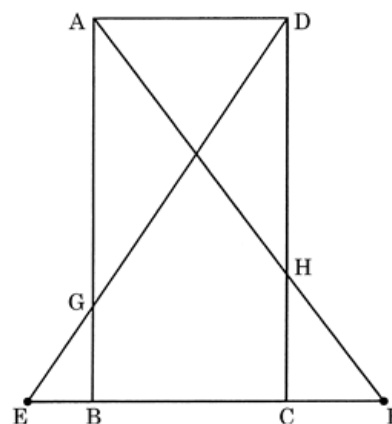
図Ⅰ，図Ⅱにおいて，四角形 $ABCD$ は $AB=12\text{ cm}$ ， $AD=6\text{ cm}$ の長方形である。 E は，直線 BC 上にあって B について C と反対側にある点である。 F は，直線 BC 上にあって C について B と反対側にある点である。 G は辺 AB と直線 DE との交点であり， H は辺 DC と直線 AF との交点である。 $BE=2\text{ cm}$ ， $CF=3\text{ cm}$ である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 2005 年度 前期)

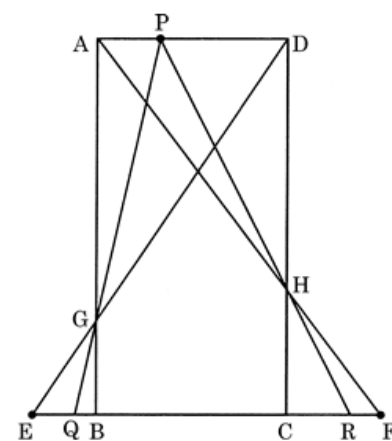
- (1) 図Ⅰにおいて，線分 AF の長さを求めなさい。

図Ⅰ



- (2) 図Ⅱにおいて， P は辺 AD 上にあって A ， D と異なる点である。 Q は直線 PG と直線 BC との交点であり， R は直線 PH と直線 BC との交点である。 $AP=x\text{ cm}$ とし， $0<x<6$ とする。

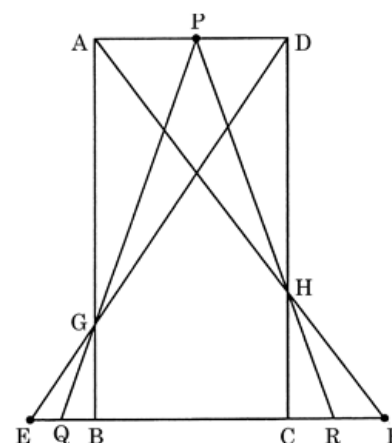
図Ⅱ



- ① 線分 PD の長さと線分 CR の長さとの比を最も簡単な整数の比で表しなさい。また，線分 CR の長さを x の式で表しなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。
- ② $AP=x\text{ cm}$ のときの線分 QR の長さを $y\text{ cm}$ とする。 y を x の式で表しなさい。

- (3) 図Ⅲは，図Ⅱにおいて $PQ=PR$ であるときの状態を示している。図Ⅲにおいて，

図Ⅲ



- ① $\triangle AGP \sim \triangle DHP$ であることを証明しなさい。
- ② 線分 AP の長さを求めなさい。

解答欄

(1)		cm	
(2)	①	求め方 PD:CR= : 線分CRの長さ cm	
	②	y =	
(3)	①	証明 	
	②	cm	

解答

(1) 15

(2)

①

求め方

AD // CF だから

$$PD:CR=DH:HC=AD:CF$$

$$=6:3=2:1$$

AP = x cm だから

$$PD = 6 - x \text{ cm}$$

よって

$$CR = \frac{1}{2} PD = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ cm}$$

答 PD:CR = 2:1

答 線分 CR の長さ $-\frac{1}{2}x + 3$

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{1}{6}x + 9$$

(3)

①

△AGP と △DHP において

四角形 ABCD は長方形だから

$$\angle PAG = \angle PDH = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{ア}$$

△PQR は PQ = PR の二等辺三角形で二等辺三角形の二つの底角は等しいから

$$\angle PQR = \angle PRQ \quad \cdots \textcircled{イ}$$

AD // QR だから

$$\angle APG = \angle PQR \text{ (錯角)} \quad \cdots \textcircled{ウ}$$

$$\angle DPH = \angle PRQ \text{ (錯角)} \quad \cdots \textcircled{エ}$$

①, ③, ⑤より

$$\angle APG = \angle DPH \quad \cdots \textcircled{オ}$$

⑦, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

△AGP ∽ △DHP

$$\textcircled{2} \quad \frac{54}{17}$$

解説

(1) BF = 6 + 3 = 9 cm だから △ABF に三平方の定理を用いて $AF = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm}$

(2) ① AD // CF だから PD:CR = DH:HC = AD:CF = 6:3 = 2:1 AP = x cm だから PD = 6 - x cm

$$\text{よって } CR = \frac{1}{2} PD = \frac{1}{2} (6 - x) = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ cm}$$

② AD // EB だから △ADG ∽ △BEG より AG:BG = AD:BE = 6:2 = 3:1 また △APG ∽ △BQG より

$$AP:BQ = AG:BG = 3:1 \text{ よって } BQ = \frac{1}{3} AP = \frac{1}{3}x \text{ cm} \quad y = BQ + BC + CR = \frac{1}{3}x + 6 + (-\frac{1}{2}x + 3) = -\frac{1}{6}x + 9$$

(3) ① 証明

△AGP と △DHP において四角形 ABCD は長方形だから $\angle PAG = \angle PDH = 90^\circ$

…⑦ △PQR は PQ = PR の二等辺三角形であり二等辺三角形の二つの底角は等

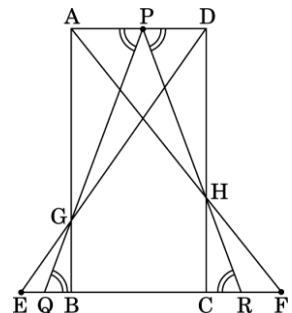
しいから $\angle PQR = \angle PRQ$ …④ AD // QR だから $\angle APG = \angle PQR$ (錯角) …③

$\angle DPH = \angle PRQ$ (錯角) …⑤ ①, ③, ⑤より $\angle APG = \angle DPH$ …⑥

⑦, ⑥より2組の角がそれぞれ等しいから △AGP ∽ △DHP

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{1} \text{より } AP:DP = AG:DH = \frac{3}{4} AB : \frac{2}{3} DC$$

$$\text{ここで, } AB = DC \text{ だから } AP:DP = \frac{3}{4} : \frac{2}{3} = 9:8 \quad AP = \frac{9}{9+8} AD = \frac{9}{17} \times 6 = \frac{54}{17} \text{ cm}$$



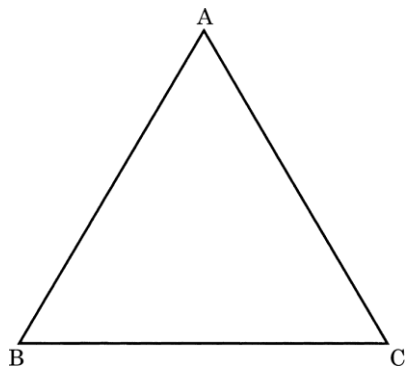
【問 7】

図Ⅰで、 $\triangle ABC$ は1辺の長さが 6 cm の正三角形とする。図Ⅱのように、辺 BC 上に $BD=4$ cm となる点 D をとり、頂点 A が点 D と重なるように線分 EF を折り目として折り返すと、 $BE=\frac{5}{2}$ cm となった。

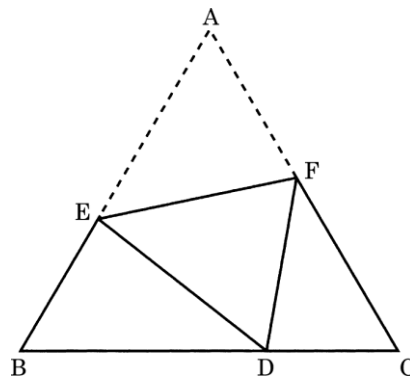
このとき、次の各問いに答えなさい。

(鳥取県 2005 年度)

図Ⅰ



図Ⅱ



問1. 折り目 EF を定規とコンパスを使って作図しなさい。なお、作図に用いた線は、消さずに残しておきなさい。

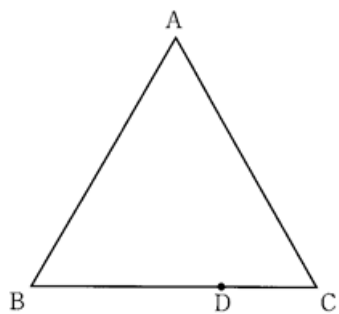
問2. $\triangle BDE \sim \triangle CFD$ であることを証明したい。下の に、必要なことを述べて、証明を完成させなさい。

証明	$\triangle BDE$ と $\triangle CFD$ で, $\triangle BDE \sim \triangle CFD$
---	---

問3. 線分 CF の長さを求めなさい。

問4. 四角形 $BCFE$ の面積を求めなさい。

問1



問2

証明
 $\triangle BDE$ と $\triangle CFD$ で,

$$\triangle BDE \sim \triangle CFD$$

問3

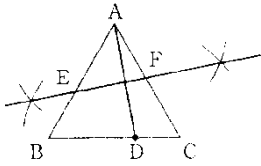
CF= cm

問4

cm²

解答

問1



問2

証明

$\triangle BDE$ と $\triangle CFD$ で

$\triangle ABC$ は正三角形だから $\angle B = \angle C \cdots ①$

$\triangle BDE$ で $\angle B + \angle BDE + \angle BED = 180^\circ \cdots ②$

直線だから $\angle EDF + \angle BDE + \angle CDF = 180^\circ \cdots ③$

ところが

$\angle A = \angle EDF = \angle B = 60^\circ \cdots ④$

②, ③, ④より

$\angle BED = \angle CDF \cdots ⑤$

①, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDE \sim \triangle CFD$

問3 $CF = \frac{16}{5} \text{ cm}$

問4 $\frac{131\sqrt{3}}{20} \text{ cm}^2$

解説

問1

点 A と点 D を結び、線分 AD の垂直二等分線にかく。

その垂直二等分線と AB, AC の交点がそれぞれ点 E, 点 F となる。

問2

$\triangle BDE$ と $\triangle CFD$ で $\triangle ABC$ は正三角形だから $\angle B = \angle C \cdots ①$

$\triangle BDE$ で $\angle B + \angle BDE + \angle BED = 180^\circ \cdots ②$

直線だから $\angle EDF + \angle BDE + \angle CDF = 180^\circ \cdots ③$

ところが $\angle A = \angle EDF = \angle B = 60^\circ \cdots ④$

②, ③, ④より $\angle BED = \angle CDF \cdots ⑤$

①, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDE \sim \triangle CFD$

問3

$\triangle BDE \sim \triangle CFD$ より $BD:BE = CF:CD$ が言えるので $4:\frac{5}{2} = CF:(6-4)$

$8:5 = CF:2 \quad 5CF = 16 \quad CF = \frac{16}{5} \text{ cm}$

問4

点 A から BC に下ろした垂線と BC との交点を G とすると

$\triangle ABG$ は $\angle ABG = 60^\circ$ の直角三角形なので $AG = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \quad AG = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

よって $\triangle ABC$ の面積は $6 \times 3\sqrt{3} \div 2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

また点 E から AF に下ろした垂線と AF の交点を H とおくと

$\triangle AEH$ は $\angle EAH = 60^\circ$ の直角三角形なので $EH = \frac{\sqrt{3}}{2} AE \quad EH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (6 - \frac{5}{2}) = \frac{7\sqrt{3}}{4} \text{ cm}$

よって $\triangle FAE$ の面積は $\frac{1}{2} FA \times EH = \frac{1}{2} \times (CA - CF) \times \frac{7\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{14}{5} \times \frac{7\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{20} \text{ cm}^2$

したがって求める面積は $9\sqrt{3} - \frac{49\sqrt{3}}{20} = \frac{131\sqrt{3}}{20} \text{ cm}^2$

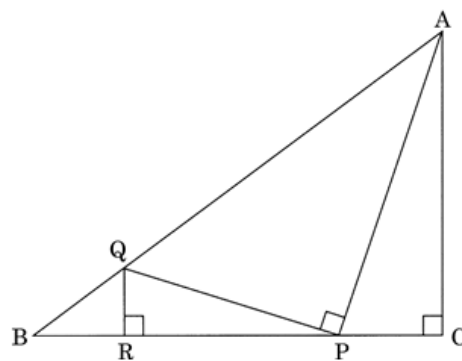
【問 8】

図1のように、 $\angle C=90^\circ$ の直角三角形 ABC の辺 BC 上に点 P をとる。また、 $AP \perp PQ$ となるように辺 AB 上に点 Q をとり、さらに、 $BC \perp QR$ となるように辺 BC 上に点 R をとる。次の問1、問2に答えなさい。

(島根県 2005 年度)

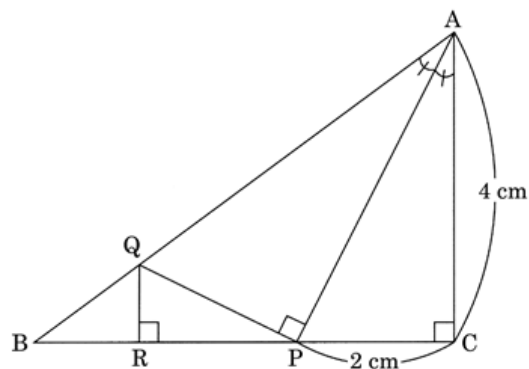
問1. $\triangle APC \sim \triangle PQR$ であることを証明しなさい。

図 1



問2. 図2のように、 AP が $\angle A$ の二等分線となるように点 P をとったとき、 $AC=4\text{ cm}$ 、 $PC=2\text{ cm}$ であった。次の1～4に答えなさい。

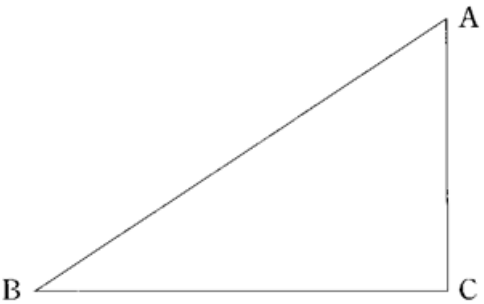
1. 解答用紙の図において、 $\angle A$ の二等分線を作図しなさい。ただし、作図で用いた線は消さないこと。



2. 線分 AP の長さを求めなさい。

3. 線分 PQ の長さを求めなさい。

4. $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

問1	証明	
問2	1	作図 
	2	cm
	3	cm
	4	cm ²

解答

問1

証明

$\triangle APC$ と $\triangle PQR$ で

$$\angle ACP = \angle PRQ = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle PQR$ で $\angle PQR + \angle QPR = 90^\circ$

$$\text{また } \angle APC + \angle QPR = 180^\circ - \angle APQ = 90^\circ$$

$$\text{よって } \angle APC = \angle PQR \cdots \textcircled{2}$$

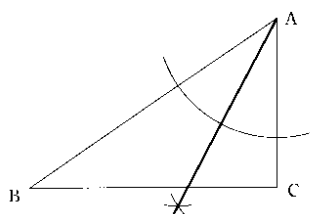
①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle APC \sim \triangle PQR$$

問2

1



2 $2\sqrt{5}$

3 $\sqrt{5}$

4 $\frac{32}{3}$

解説

問1

$\triangle APC$ と $\triangle PQR$ で $\angle ACP = \angle PRQ = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$\triangle PQR$ で $\angle PQR + \angle QPR = 90^\circ$

$$\text{また } \angle APC + \angle QPR = 180^\circ - \angle APQ = 90^\circ$$

$$\text{よって } \angle APC = \angle PQR \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle APC \sim \triangle PQR$$

問2

1

解答欄の図のように、点 A を中心とする円弧をかく。

次にその円弧と AB, AC の交点をそれぞれ中心とする等しい半径の円弧をかき
その交点と点 A を直線で結ぶ。

2

$$\triangle APC \text{ で、三平方の定理より } AP^2 = AC^2 + PC^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \quad AP = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

3

$\angle ACP = \angle APQ = 90^\circ$, $\angle CAP = \angle PAQ$ から $\triangle APC \sim \triangle AQP$ が言えるので
 $AC:CP = AP:PQ = 2:1$

$$\text{よって } PQ = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

4

問1より $AP:PC = PQ:QR = \sqrt{5}:1$ が言えるので $QR = 1 \text{ cm} \cdots \textcircled{1}$

同様に $PC:AC = QR:PR = 1:2$ が言えるので $PR = 2 \text{ cm} \cdots \textcircled{2}$

$AC \parallel QR$ より $\triangle ABC \sim \triangle QBR$ が言えるので

①より $\triangle ABC$ と $\triangle QBR$ の相似比は $AC:QR = 4:1$ となり $\triangle ABC$ と $\triangle QBR$ の面積比は $4^2:1^2 = 16:1 \cdots \textcircled{3}$

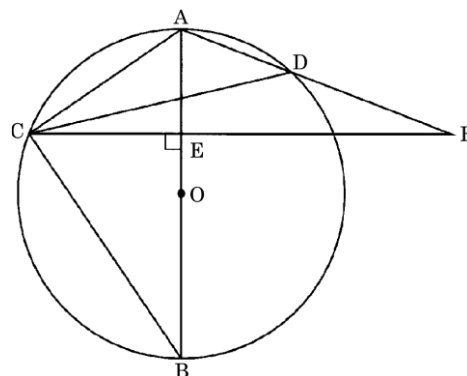
①, ②より台形 AQRC の面積は $1 \times (2+2) \div 2 + 4 \times (2 \times 2) \div 2 = 10 \text{ cm}^2$

③より $\triangle ABC$ と台形 AQRC の面積比が $16:(16-1) = 16:15$ とわかるので

$$\triangle ABC \text{ の面積は } 10 \times \frac{16}{15} = \frac{32}{3} \text{ cm}^2$$

【問 9】

図のように、線分 AB を直径とする円 O の円周上に2点 A, B と異なる点 C をとり、点 C を含まない弧 $\widehat{AB}$ 上に2点 A, B と異なる点 D を弧 $\widehat{AD}$ の長さが弧 $\widehat{AC}$ の長さより短くなるようにとる。ただし、弧 $\widehat{AC}$ 、弧 $\widehat{AD}$ はどちらも点 B を含まない弧である。点 A と点 C 、点 B と点 C 、点 A と点 D 、点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。また点 C を通り線分 AB に垂直な直線をひき、線分 AB との交点を E 、線分 AD の延長との交点を F とする。



(岡山県 2005 年度)

① $\triangle ACD$ の $\triangle AFC$ を証明しなさい。

② $AB=8\text{ cm}$, $AD=2\text{ cm}$, $\angle ABC=30^\circ$ であるとき、 $AC=\boxed{\text{(ア)}}\text{ cm}$, $AF=\boxed{\text{(イ)}}\text{ cm}$ である。また $\triangle CFD$ の面積は $\boxed{\text{(ウ)}}\text{ cm}^2$ であり、 $CD=\boxed{\text{(エ)}}\text{ cm}$ である。

解答欄

①	証明			
②	(ア)	cm	(イ)	cm
	(ウ)	cm ²	(エ)	cm

解答

①

証明

$\triangle ACD$ と $\triangle AFC$ において

$$\angle CAD = \angle FAC \cdots \textcircled{1}$$

また線分 AB は円の直径であるから

$$\angle ACB = 90^\circ$$

よって $\triangle ABC$ から

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC$$

また同じ弧 $\widehat{AC}$ に対する円周角から

$$\angle ABC = \angle ADC$$

よって

$$\angle ADC = 90^\circ - \angle BAC \cdots \textcircled{2}$$

また $\triangle ACE$ は $\angle AEC = 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$\angle ACE = 90^\circ - \angle EAC$$

よって $\angle ACE = \angle ACF$

$$\angle EAC = \angle BAC \text{ から}$$

$$\angle ACF = 90^\circ - \angle BAC \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle ADC = \angle ACF \cdots \textcircled{4}$$

①, ④から2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACD \sim \triangle AFC$$

②

$$(ア) \ 4\text{cm} \quad (イ) \ 8\text{cm} \quad (ウ) \ \frac{3\sqrt{15}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{cm}^2 \quad (エ) \ \sqrt{15} + \sqrt{3} \text{cm}$$

解説

①

$\triangle ACD$ と $\triangle AFC$ において $\angle CAD = \angle FAC \cdots (1)$

また線分 AB は円の直径であるから $\angle ACB = 90^\circ$

よって $\triangle ABC$ から $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC$

また同じ弧 $\widehat{AC}$ に対する円周角だから $\angle ABC = \angle ADC$

よって $\angle ADC = 90^\circ - \angle BAC \cdots (2)$

また $\triangle ACE$ は $\angle AEC = 90^\circ$ の直角三角形であるから $\angle ACE = 90^\circ - \angle EAC$

よって $\angle ACE = \angle ACF$, $\angle EAC = \angle BAC$ から $\angle ACF = 90^\circ - \angle BAC \cdots (3)$

(2), (3)から $\angle ADC = \angle ACF \cdots (4)$

(1), (4)から2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle ACD \sim \triangle AFC$

②

$\triangle ABC$ は内角が 30° , 60° , 90° の直角三角形であるから $AC = \frac{1}{2} AB = 4\text{cm}$

また $\triangle ACD \sim \triangle AFC$ より $AD:AC = AC:AF$

よって $2:4 = 4:AF$ がいえこれを計算すると $2AF = 16$ より $AF = 8\text{cm}$

さらに $\triangle ACE$ も内角が 30° , 60° , 90° の直角三角形であるから

$$AE = \frac{1}{2} AC = 2, \quad CE = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = 2\sqrt{3}$$

$$\text{また } \triangle AEF \text{ に三平方の定理を用いて } EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$\text{よって } \triangle ACF = \frac{1}{2} \times CF \times AE = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}) \times 2 = 2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}$$

ここで $\triangle CFD : \triangle ACF = DF : AF = (8 - 2) : 8 = 3 : 4$ がいえるので

$$\triangle CFD = \frac{3}{4} \triangle ACF = \frac{3}{4} (2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{15}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{cm}^2$$

また $\triangle ACD \sim \triangle AFC$ より $AD:AC = CD:FC$ $2:4 = CD:(2\sqrt{15} + 2\sqrt{3})$

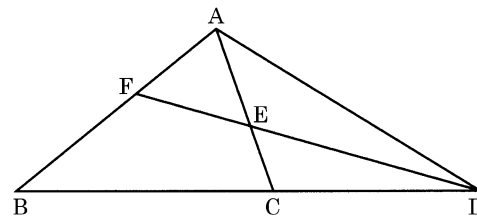
よって $4CD = 2(2\sqrt{15} + 2\sqrt{3})$ より $CD = \sqrt{15} + \sqrt{3} \text{cm}$

【問 10】

図のように、 $\triangle ABC$ の辺 BC の延長上に、 $\angle CBA = \angle CAD$ となる点 D をとる。 $\angle ADC$ の二等分線が辺 AC , AB と交わる点をそれぞれ E , F とする。

次の(1), (2)に答えなさい。

(山口県 2005 年度)



(1) $\triangle ADF \sim \triangle CDE$ であることを証明しなさい。

(2) $AE = 3 \text{ cm}$, $EC = 2 \text{ cm}$, $CD = 6 \text{ cm}$ のとき、線分 BC の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

証明

$\triangle ADF$ と $\triangle CDE$ で

仮定から

$$\angle ADF = \angle CDE \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle CAD = \angle CBA \cdots \textcircled{2}$$

また

$$\angle FAD = \angle FAE + \angle CAD \cdots \textcircled{3}$$

三角形の外角はそれととなり合わない2つの内角の和に等しいので

$\triangle ABC$ において

$$\angle ACD = \angle BAC + \angle CBA \text{ だから}$$

$$\angle ECD = \angle FAE + \angle CBA \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ から

$$\angle FAD = \angle ECD \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{5}$ から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADF \sim \triangle CDE$

$$(2) \quad \frac{15}{2} \text{ cm}$$

解説

(1)

証明

$\triangle ADF$ と $\triangle CDE$ で

仮定から,

$$\angle ADF = \angle CDE \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle CAD = \angle CBA \cdots \textcircled{2}$$

また

$$\angle FAD = \angle FAE + \angle CAD \cdots \textcircled{3}$$

三角形の外角はそれととなり合わない2つの内角の和に等しいので $\triangle ABC$ において

$$\angle ACD = \angle BAC + \angle CBA \text{ だから } \angle ECD = \angle FAE + \angle CBA \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ から

$$\angle FAD = \angle ECD \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{5}$ から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADF \sim \triangle CDE$

(2)

$$(1) \text{より } \angle AFD = \angle CED = \angle AEF$$

$\triangle AFE$ は $AF = AE = 3$ の二等辺三角形とわかる。

$\triangle ADF \sim \triangle CDE$ より

$$AD : FA = CD : EC$$

$$\text{よって } AD : 3 = 6 : 2$$

$$\text{したがって } AD = 9$$

同様に $\angle BAD = \angle ACD$

$$\text{仮定より } \angle DBA = \angle CAD$$

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABD \sim \triangle CAD$

$$\text{よって } BD : AD = AD : CD \text{ より}$$

$$BD : 9 = 9 : 6$$

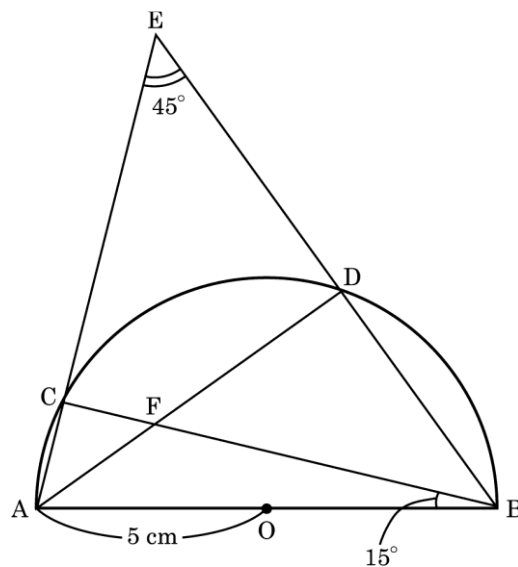
$$\text{したがって } BD = \frac{27}{2} \text{ から}$$

$$BC = \frac{27}{2} - 6 = \frac{15}{2}$$

【問 11】

図のように、点 O を中心とし、線分 AB を直径とする半径 5 cm の半円がある。 $\widehat{AB}$ 上に、2点 C, D をとり、直線 AC と直線 BD の交点を E とする。また、線分 AD と線分 BC の交点を F とする。このとき、 $\angle ABC = 15^\circ$ 、 $\angle AEB = 45^\circ$ である。次の(1)～(4)に答えなさい。

(徳島県 2005 年度)



(1) $\triangle EAD \sim \triangle EBC$ を証明しなさい。

(2) $\angle AFB$ は何度か、求めなさい。

(3) $\widehat{AD}$ と $\widehat{DB}$ の長さの比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

(4) $\triangle ABE$ の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	度
(3)	$\widehat{AD} : \widehat{DB} = \quad :$
(4)	cm^2

解答

(1)

証明

$\triangle EAD$ と $\triangle EBC$ で、共通な角より

$$\angle AED = \angle BEC \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{CD}$ に対する円周角の大きさは等しいから

$$\angle EAD = \angle EBC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から, 2組の角が, それぞれ等しいので

$$\triangle EAD \sim \triangle EBC$$

(2) 135 度

$$(3) \widehat{AD} : \widehat{DB} = 2 : 1$$

$$(4) \frac{75+25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

解説

(1)

$\triangle EAD$ と $\triangle EBC$ で、共通な角より

$$\angle AED = \angle BEC \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{CD}$ に対する円周角の大きさは等しいから

$$\angle EAD = \angle EBC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle EAD \sim \triangle EBC$$

(2)

円の直径に対する円周角は 90° だから $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$

よって $\angle ECB = 90^\circ$ より $\angle CBE = 180^\circ - \angle ECB - \angle BEC = 45^\circ$

よって三角形の外角は, それととなり合わない2つの内角の和に等しいから

$$\angle AFB = \angle FDB + \angle DBF = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ \text{ である。}$$

(3)

1 つの円において円周の長さの比はそれに対応する円周角の比に等しいから

$$\widehat{AD} : \widehat{DB} = \angle ABD : \angle DAB$$

$$= (\angle ABC + \angle CBD) : \angle DAB = (15^\circ + 45^\circ) : 30^\circ = 60^\circ : 30^\circ = 2 : 1 \text{ である。}$$

(4)

$\triangle ABD$ は $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle BDA = 90^\circ$, $\angle DAB = 30^\circ$ の三角形だから

$$BD : AB : AD = 1 : 2 : \sqrt{3} \text{ である。}$$

$$\text{よって } BD = \frac{1}{2} AB = 5 \text{ cm, } AD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 5\sqrt{3} \text{ cm より}$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times BD \times AD = \frac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{3} = \frac{25}{2} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

一方, $\triangle EAD$ は $AD = DE$ の直角二等辺三角形だから

$$\triangle EAD = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = \frac{75}{2} \text{ cm}^2 \text{ である。}$$

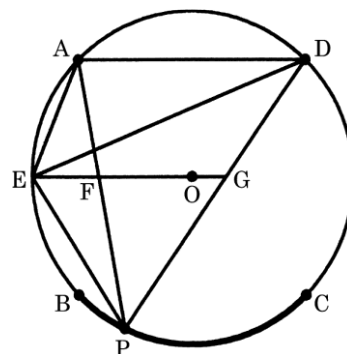
$$\text{したがって } \triangle ABE = \triangle ABD + \triangle EAD = \frac{25}{2} \sqrt{3} + \frac{75}{2} = \frac{75+25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \text{ である。}$$

【問 12】

図のように、半径 2 cm の円 O の円周を4等分する点を A, B, C, D とし、太線で表した $\widehat{BC}$ 上に点 P をとり、円の中心 O を通り線分 AD に平行な直線と AB , 線分 AP, DP との交点をそれぞれ E, F, G とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2005 年度)



1. $\triangle AEP$ における $\angle APE$ の大きさを求めよ。

2. $\triangle AEP \sim \triangle DGE$ であることを証明せよ。

3. 点 P は太線で表した $\widehat{BC}$ 上を、点 B から点 C まで動く。線分 FG の長さが最も短くなるときの、線分 FG の長さを求めよ。

解答欄

1	度	
2	証明	
3	cm	

解答

1 22.5°

2

証明

$\triangle AEP$ と $\triangle DGE$ において

$\widehat{EP}$ に対する円周角だから $\angle EAP = \angle GDE \cdots ①$

$\widehat{AE}$ に対する円周角だから $\angle APE = \angle ADE \cdots ②$

$AD \parallel EG$ より $\angle ADE = \angle DEG \cdots ③$

②, ③より $\angle APE = \angle DEG \cdots ④$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AEP \sim \triangle DGE$

3 $\sqrt{2}$ cm

解説

1

4点 A, B, C, D は円 O の円周を 4 等分する点だから $\angle AOD = 90^\circ$

$OA = OD$ だから $\angle ODA = 45^\circ$

$AD \parallel EO$ より

$\angle EDA = \angle OED$

また $OE = OD$ より $\angle OED = \angle ODE$

よって $\angle EDA = \frac{1}{2} \angle ODA = 22.5^\circ$

$\widehat{AE}$ に対する円周角だから

$\angle APE = \angle EDA = 22.5^\circ$

2

(証明)

$\triangle AEP$ と $\triangle DGE$ において

$\widehat{EP}$ に対する円周角だから

$\angle EAP = \angle GDE \cdots ①$

$\widehat{AE}$ に対する円周角だから

$\angle APE = \angle ADE \cdots ②$

$AD \parallel EG$ より

$\angle ADE = \angle DEG \cdots ③$

②, ③より

$\angle APE = \angle DEG \cdots ④$

①, ④で

2つの三角形は2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AEP \sim \triangle DGE$

3

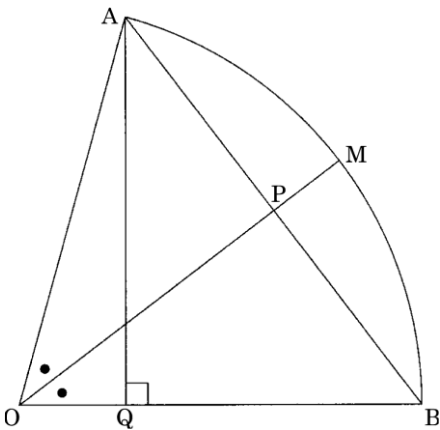
線分 FG の長さが最も短くなるのは、点 P が点 B または点 C と一致するときで

このとき $FG = \frac{1}{2} AD = \sqrt{2}$ cm

【問 13】

図のようなおうぎ形 OAB がある。 $\angle AOB$ の二等分線と $\widehat{AB}$ の交点を M とし、 AB と OM の交点を P とする。また点 A から OB にひいた垂線と OB の交点を Q とする。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。
(佐賀県 2005 年度)



- (1) $\triangle OAP \sim \triangle ABQ$ であることを証明しなさい。
- (2) $OA=5\text{ cm}$, $OP=4\text{ cm}$ のとき、次の(ア)～(ウ)の各問いに答えなさい。
- (ア) AB の長さを求めなさい。
- (イ) AQ の長さを求めなさい。
- (ウ) $\triangle OPQ$ の面積を求めなさい。

解答欄

(1)		
(2)	(ア)	cm
	(イ)	cm
	(ウ)	cm ²

解答

(1)

$\triangle OAP$ と $\triangle ABQ$ で

$\triangle OAB$ は $OA=OB$ の二等辺三角形だから

$\angle OAP = \angle ABQ \cdots \textcircled{1}$

また, OP は $\angle AOB$ の二等分線だから

$OP \perp AB$ となり

$\angle OPA = \angle AQB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

①, ②から

2組の角が, それぞれ等しいので

$\triangle OAP \sim \triangle ABQ$

(2)

(ア) 6cm

(イ) $\frac{24}{5}$ cm

(ウ) $\frac{42}{25}$ cm²

解説

(1)

$\triangle OAP$ と $\triangle ABQ$ で

$\triangle OAB$ は $OA=OB$ の二等辺三角形だから

$\angle OAP = \angle ABQ \cdots \textcircled{1}$

また OP は $\angle AOB$ の二等分線だから

$OP \perp AB$ となり

$\angle OPA = \angle AQB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

①, ②から

2組の角が, それぞれ等しいので

$\triangle OAP \sim \triangle ABQ$

(2)

(ア)

$\triangle OAP$ に三平方の定理を用いて $AP = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm $AB = 2AP = 6$ cm

(イ)

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times AB \times OP = 12$ また $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times OB \times AQ = 12$ より $AQ = \frac{24}{5}$ cm

(ウ)

$\triangle OAQ$ に三平方の定理を用いて $OQ = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{7}{5}$ cm

$\triangle OPQ : \triangle OPB = OQ : OB = \frac{7}{5} : 5 = 7 : 25$

よって $\triangle OPQ = \frac{7}{25} \triangle OPB = \frac{7}{25} \times 6 = \frac{42}{25}$ cm²

【問 14】

図1～図3のように、点 O を中心とする半径 2 cm の円の周上に3点 A, B, C があり、この3点を頂点とする三角形 ABC において、 $\angle BAC = 45^\circ$ 、 $\angle ACB = 60^\circ$ である。また、点 B をふくまない弧 AC 上(ただし、点 A, C を除く)に点 P をとり、線分 AC と線分 BP との交点を Q とするとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2005 年度)

問1. $\angle ABC$ の大きさは何度か。

問2. 線分 BC の長さは何 cm か。

問3. 図1において、 $\triangle ABQ \sim \triangle PCQ$ であることを証明せよ。

問4. 図2のように、線分 BP が円 O の直径であるとき、次の(1), (2)に答えよ。

(1) 弧 AP の長さは何 cm か。ただし、弧 AP は点 B をふくまない弧とする。

(2) 線分 AQ と線分 QC の長さの比は、 $AQ:QC = \square:1$ である。

このときの $\square$ にあてはまる数を求めよ。

図 1

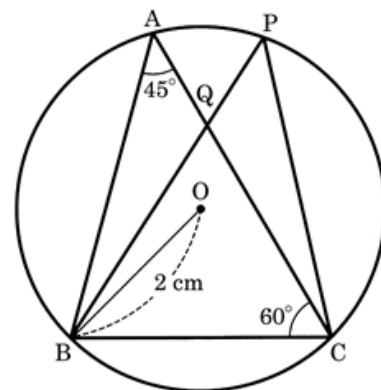


図 2

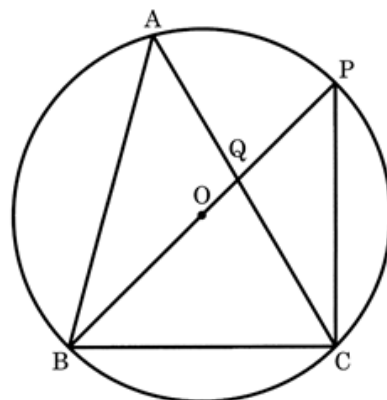
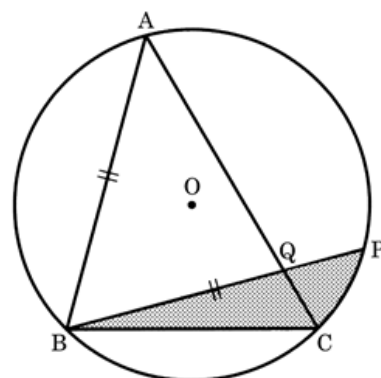


図 3



問5. 図3のように、線分 BP の長さが線分 AB の長さと等しくなるとき、点 B をふくまない弧 PC と2つの線分 BP, BC で囲まれた部分の面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	。	
問2	cm	
問3	証明	
問4	(1)	cm
	(2)	
問5	cm ²	

解答

問1 75

問2 $2\sqrt{2}$

問3

$\triangle ABQ$ と $\triangle PCQ$ において

$\angle AQB = \angle PQC$ (対頂角) $\cdots$ ①

$\angle BAQ = \angle CPQ = 45^\circ$ (弧 BC に対する円周角) $\cdots$ ②

①, ②より, 2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABQ \sim \triangle PCQ$

問4

(1) $\frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

問5 $2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

解説

問1

$\angle ABC = 180 - (45 + 60) = 75^\circ$

問2

円周角の定理より $\angle BOC = 90^\circ$ であり $OB = OC$ であるから

$\triangle OBC$ は直角二等辺三角形である。

したがって $BC = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

問3

$\triangle ABQ$ と $\triangle PCQ$ において

$\angle AQB = \angle PQC$ (対頂角)

$\angle BAQ = \angle CPQ = 45^\circ$ (弧 BC に対する円周角)

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABQ \sim \triangle PCQ$

問4

(1)

円周角の定理より $\angle AOP = 60^\circ$ だから $4\pi \times \frac{60}{360} = \frac{2}{3}\pi \text{ cm}$

(2)

右の図のように考えると

$\angle AQD = \angle CQO$ (対頂角)

$\angle ADQ = \angle COQ = 90^\circ$ より $\triangle AQD \sim \triangle CQO$ であるから

$AQ : CQ = AD : CO \cdots$ ①が成り立つ。

$\angle BAP = 90^\circ$, $\angle BPA = 60^\circ$ より $BP : BA = 2 : \sqrt{3}$

したがって $BA = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

また $\triangle ABD$ においても $AB : AD = 2 : 1$

ゆえに $AD = \sqrt{3} \text{ cm}$

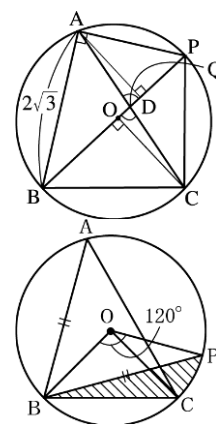
また $OC = 2 \text{ cm}$

よって①より $AQ : CQ = \sqrt{3} : 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$

問5

おうぎ形 $OBP - \triangle OBP -$ (おうぎ形 $OBC - \triangle OBC$)

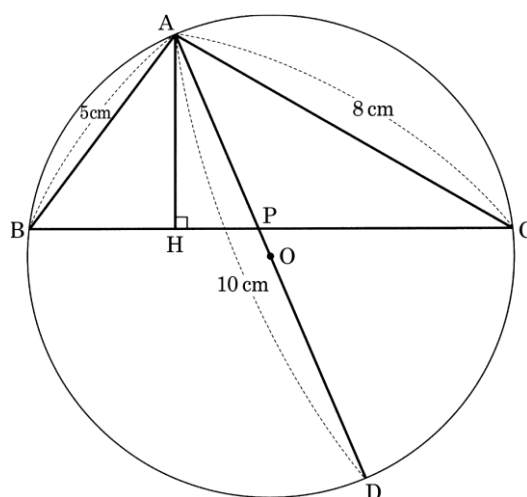
$= 4\pi \times \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 - (4\pi \times \frac{90}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2) = \frac{1}{3}\pi + 2 - \sqrt{3} \text{ cm}^2$



【問 15】

図のように、 $\triangle ABC$ において、頂点 A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を H とする。また、頂点 A, B, C を通る円を O とし、直線 AO と辺 BC の交点を P 、円 O との交点を D とする。 $AB=5\text{ cm}$, $AC=8\text{ cm}$, $AD=10\text{ cm}$ であるとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(大分県 2005 年度)



- (1) 点 D と他の点を結ぶ線分を1本ひくことで、 $\triangle ABH$ と相似な三角形ができる。この三角形を解答欄の()の中に書き、 $\triangle ABH$ と相似になることを証明しなさい。

- (2) 線分 AH の長さを求めなさい。

- (3) $\frac{PD}{AP}$ の値を求めなさい。

解答欄

(1)	$\triangle ABH \sim (\quad)$	
	証明	
(2)		cm
(3)		

解答

(1) $\triangle ADC$

証明

$\triangle ABH$ と $\triangle ADC$ において

仮定から $\angle AHB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

半円の弧に対する円周角は直角だから

$\angle ACD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より $\angle AHB = \angle ACD \cdots \textcircled{3}$

また弧 AC に対する円周角は等しいから

$\angle ABH = \angle ADC \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より

2組の角が, それぞれ等しいから

$\triangle ABH \sim \triangle ADC$

(2) 4cm

(3) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)

証明

$\triangle ABH$ と $\triangle ADC$ において

仮定から

$\angle AHB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

半円の弧に対する円周角は直角だから

$\angle ACD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$\angle AHB = \angle ACD \cdots \textcircled{3}$

また, 弧 AC に対する円周角は等しいから

$\angle ABH = \angle ADC \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABH \sim \triangle ADC$

(2)

(1)から三平方の定理より $DC = 6$

比の値から $AH = 4$, $BH = 3$

(3)

$\angle BAP = \angle DCP$, $\angle ABP = \angle CDP$

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABP \sim \triangle CDP \cdots \textcircled{1}$

$AP = x$ とおくと $PD = 10 - x$

$\textcircled{1}$ より相似比は $5:6$ なので

$PC = \frac{6x}{5} \cdots \textcircled{2}$

$BP = \frac{5}{6}(10 - x) \cdots \textcircled{3}$

また三平方の定理より

$HC = 4\sqrt{3} \cdots \textcircled{4}$

$BC = BH + HC = BP + PC = 3 + 4\sqrt{3} \cdots \textcircled{5}$

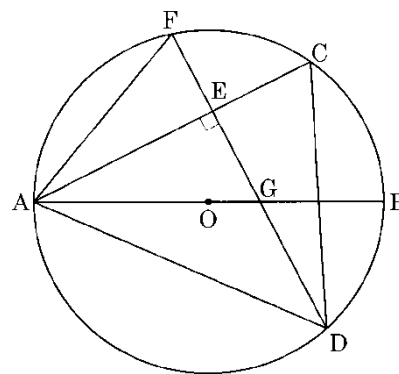
$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ を $\textcircled{5}$ に代入すると $\frac{5}{6}(10 - x) + \frac{6x}{5} = 3 + 4\sqrt{3}$

よって $x = \frac{40(3\sqrt{3} - 4)}{11} \cdots \textcircled{6}$

$\frac{PD}{AP} = \frac{(10 - x)}{x}$ x に $\textcircled{6}$ を代入すると $\frac{PD}{AP} = \frac{27 - 12\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3} - 4)} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

【問 16】

図は、点 O を中心とする円で、線分 AB は円の直径である。2点 C, D は円 O の周上にあって、線分 CD は線分 OB と交わっている。点 E は D から線分 AC にひいた垂線と AC との交点で、点 F は DE の延長と円 O との交点である。また、点 G は2つの線分 AB, DE の交点である。このとき、次の各問いに答えなさい。



(熊本県 2005 年度)

(1) $\triangle ADC \sim \triangle AGF$ であることを証明しなさい。

(2) $AB=9$ cm, $AC=8$ cm, $CD=7$ cm のとき、線分 FG の長さを求めなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

証明

$\triangle ADC$ と $\triangle AGF$ において

$\angle DCA$ と $\angle GFA$ は $\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$$\angle DCA = \angle GFA \cdots ①$$

BとCを結ぶと $\angle ADC$ と $\angle ABC$ は $\widehat{AC}$ に対する円周角だから

$$\angle ADC = \angle ABC \cdots ②$$

またABは円Oの直径だから $\angle BCA = 90^\circ$

$DE \perp AC$ だから $\angle DEA = 90^\circ$

$\angle BCA = \angle DEA$ より $BC \parallel DF$ だから

$$\angle AGF = \angle ABC \cdots ③$$

②, ③より

$$\angle ADC = \angle AGF \cdots ④$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADC \sim \triangle AGF$$

$$(2) \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle ADC$ と $\triangle AGF$ において

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$$\angle DCA = \angle GFA \cdots ①$$

BとCを結ぶと $\widehat{AC}$ に対する円周角だから

$$\angle ADC = \angle ABC \cdots ②$$

ABは円Oの直径だから

$$\angle BCA = 90^\circ$$

$DE \perp AC$ だから

$$\angle DEA = 90^\circ$$

$\angle BCA = \angle DEA$ より $BC \parallel DF$

よって $\angle AGF = \angle ABC \cdots ③$

②, ③より

$$\angle ADC = \angle AGF \cdots ④$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADC \sim \triangle AGF$$

(2)

(1)より $\angle FAC = b$, $\angle CAB = a$ とおくと $\angle FAG = b + a$, $\angle CAD = a + b$ である。

弧FBに着目して円周角の定理から $\angle FOB = 2a + 2b$ であり

同様に弧CDに対して円周角の定理より $\angle COD = 2a + 2b$

したがって $\angle FOB = \angle COD$ であるから $FB = CD = 7$ を得る。

($\triangle FOB \equiv \triangle COD$ となる)

$\angle AFB = 90^\circ$ であるから、三平方の定理から

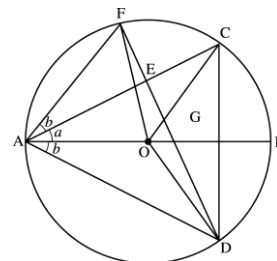
$$AF = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ である。}$$

ゆえに $AF:AC = FG:CD$ が成り立つから

$$4\sqrt{2}:8 = FG:7 \text{ より}$$

$$8FG = 28\sqrt{2}$$

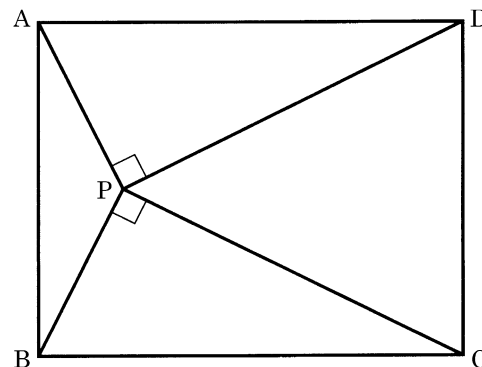
$$FG = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$



【問 17】

図は、長方形 ABCD の内部に点 P を、 $PA=PB$ 、 $\angle APD=\angle BPC=90^\circ$ となるようにとったものである。このとき、次の1～3の問いに答えなさい。

(鹿児島県 2005 年度)



1. 長方形 ABCD は線対称であり、点対称な図形でもある。図の中から線対称であるが、点対称ではない図形を1つあげよ。

2. 点 P から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を H とするとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。

- (1) $\triangle PBH \sim \triangle CPH$ であることを次のように証明した。ア ～ エ にそれぞれあてはまる角を文字を用いて表せ。

(証明) $\triangle PBH$ と $\triangle CPH$ において

$$\angle \text{ア} = \angle \text{イ} = 90^\circ \quad \cdots \text{①}$$

$\triangle PBH$ は直角三角形だから

$$\angle PBH + \angle \text{ウ} = 90^\circ \quad \cdots \text{②}$$

$\angle BPC = 90^\circ$ だから

$$\angle \text{ウ} + \angle \text{エ} = 90^\circ \quad \cdots \text{③}$$

②, ③より

$$\angle PBH = \angle \text{エ} \quad \cdots \text{④}$$

①, ④より2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PBH \sim \triangle CPH$

- (2) $AB=12 \text{ cm}$, $BC=15 \text{ cm}$ のとき、BH の長さを $x \text{ cm}$ として、BH の長さを求めよ。ただし、BH の長さは CH の長さより短いものとし、 x についての方程式と計算過程も書くこと。

3. 2の(2)のとき、長方形 ABCD から $\triangle PAB$ を切り取り、PC, PD を折り目として、2点 A, B が重なるように折り曲げ、三角すいの形をした容器を作る。2点 A, B が重なった点を Q とし、3点 Q, C, D を含む平面を S とするとき、点 P と平面 S との距離は何 cm か。

解答欄

1					
2	(1)	ア	イ	ウ	エ
	(2)	式と計算 答 cm			
3	cm				

解答

1 $\triangle PAB$

2

(1) ア BHP イ PHC ウ HPB エ CPH

(2)

式と計算

$\triangle PBH \sim \triangle CPH$ であるから

$BH:PH=PH:CH$

$BH=x$, $CH=15-x$, $PH=6$ だから

$$x:6=6:(15-x)$$

$$36=x(15-x)$$

$$x^2-15x+36=0$$

$$(x-3)(x-12)=0$$

$$x=3, x=12$$

$$0 < x < 7.5 \text{ より}$$

$$x=3$$

答 3cm

$$3 \frac{4\sqrt{105}}{7} \text{ cm}$$

解説

1

$\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ が考えられる。

2

(1)

①は $PH \perp BC$ から, ②は $\triangle PBH$ において

$\angle BHP=90^\circ$ から, ③は②から④は②と③に共通するウをひけばよい。

(2)

(式と計算)

$\triangle PBH \sim \triangle CPH$ であるから

$BH:PH=PH:CH$

$BH=x$, $CH=15-x$, $PH=6$ だから

$$x:6=6:(15-x)$$

$$36=x(15-x)$$

$$x^2-15x+36=0$$

$$(x-3)(x-12)=0$$

$$x=3, 12$$

$$0 < x < 7.5 \text{ より}$$

$$x=3$$

3

三角すいの PQ の長さは

三平方の定理より $PQ^2=3^2+6^2$ $PQ=3\sqrt{5}$ ($PQ>0$ から)

三角すいの体積は底面を $\triangle PCD$ とするとき

$$12 \times 12 \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{1}{3} = 72\sqrt{5} \text{ cm}^3$$

同様に $\triangle DQC$ (平面 S) を底面として考えると高さは $\triangle DQC$ (平面 S) と点 P との距離になる。

DC を底辺としたときの $\triangle DQC$ の高さを z とすると

$$\text{三平方の定理より } 15^2=6^2+z^2 \quad z=3\sqrt{21}$$

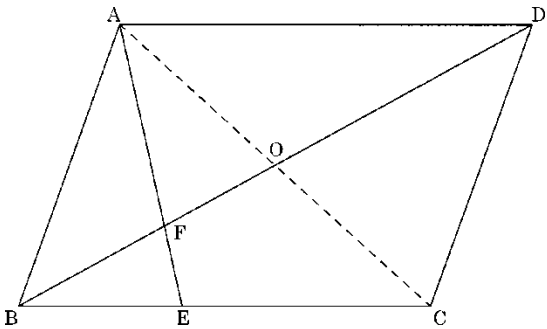
$\triangle DQC$ (平面 S) と点 P との距離を x cm とすると

$$72\sqrt{5} = 12 \times 3\sqrt{21} \times \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{3} \quad \text{から } x = \frac{4\sqrt{105}}{7}$$

【問 18】

図のように、平行四辺形 $ABCD$ の対角線の交点を O とする。また、辺 BC を $2:3$ に分ける点を E 、 AE と BD の交点を F とする。

(沖縄県 2005 年度)



問1. $\triangle BEF \sim \triangle DAF$ となることを証明しなさい。

問2. 図において、 $AD = 10\text{ cm}$ 、平行四辺形 $ABCD$ の面積が 70 cm^2 のとき、次の各問いに答えなさい。

- (1) BE の長さを求めなさい。
- (2) $\triangle BEF$ において、辺 BE を底辺としたときの高さを求めなさい。
- (3) $\triangle OAF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	証明	
問2	(1)	$BE = \qquad \qquad \text{cm}$
	(2)	$\qquad \qquad \qquad \text{cm}$
	(3)	$\qquad \qquad \qquad \text{cm}^2$

解答

問1

証明

$\triangle BEF$ と $\triangle DAF$ において

$BE \parallel AD$ より

$$\angle EBF = \angle ADF (\text{錯角}) \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle BEF = \angle DAF (\text{錯角}) \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BEF \sim \triangle DAF$

問2

(1) $BE = 4\text{cm}$

(2) 2cm

(3) $\frac{15}{2} \text{cm}^2$

解説

問2

(1)

$$BE = \frac{2}{2+3} BC = \frac{2}{5} \times 10 = 4\text{cm}$$

(2)

平行四辺形 ABCD の面積は 70cm^2 だから

辺 BC を底辺としたときの高さは 7cm

$\triangle BEF \sim \triangle DAF$ より

$$EF:AF = BE:DA = 2:5$$

よって $\triangle BEF$ において、辺 BE を底辺としたときの高さは

$$7 \times \frac{2}{2+5} = 2\text{cm}$$

(3)

$\triangle DAF$ において辺 AD を底辺としたときの高さは

$$7 - 2 = 5\text{cm} \text{ だから}$$

$$\triangle DAF = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25\text{cm}^2$$

$$\text{よって } \triangle OAF = \triangle DAF - \triangle DAO = 25 - 70 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{2} \text{cm}^2$$