9. 式の証明の問題 （2004 年度出題）

【問 1】

2 つの続いた正の整数があります。小さい方の整数を 5 でわると，商が n で余りが 2 となるとき，次の（１），（２）の問いに答えなさい。

（宮城県 2004 年度）

（１）小さい方の整数を n の式で表しなさい。

（２）この 2 つの整数の和が 5 の倍数になるわけを，（１）で表した式を利用して説明しなさい。

解答欄

（１）	
（２）	［わけ］

解答

(1) $5n+2$

(2)

［わけ］

大きい方の整数は，$5n+3$ と表される。

この 2 つの整数の和は$(5n+2)+(5n+3)=10n+5$

$=5(2n+1)$

$2n+1$ は整数であるから

$5(2n+1)$は 5 の倍数である。

したがってこの 2 つの整数の和は 5 の倍数である。

【問２】

２つの続いた正の整数があります。小さい方の整数を５でわると，商が n で余りが２となるとき，次の（１），（２）の問いに答えなさい。

（宮城県　2004 年度）

（１）小さい方の整数を n の式で表しなさい。

（２）この２つの整数の積を５でわったとき，（１）で表した式を利用して，その余りを求めなさい。また，その求め方も説明しなさい。

解答欄

（１）	
（２）	［求め方］ 余り

解答

(1) $5n+2$

(2)

［求め方］

大きい方の整数は $5n+3$ と表される。

この２つの整数の積は

$(5n+2)(5n+3)$

$=25n^2+25n+6$

$=5(5n^2+5n+1)+1$

$5n^2+5n+1$ は整数であるから

求める余りは１である。

余り　１

【問 3】

一の位が 0 でない 2 けたの自然数がある。この自然数の十の位の数字と一の位の数字を入れかえてつくった数を，もとの自然数からひくと 36 になる。このような 2 けたの自然数の中で，**もっとも小さい**数を求めなさい。

（秋田県 2004 年度）

解答欄

解答
51
解説
十の位を x，一の位を y とすると
この自然数は $10x+y$
十の位と一の位の数字を入れかえたものは $10y+x$ と表される。
$10x+y-(10y+x)=36$
$9x-9y=36$
$x=y+4$
これを満たす自然数
$(x,\ y)=(5,\ 1)(6,\ 2)(7,\ 3)(8,\ 4)(9,\ 5)$
この中で最も小さいものは(5，1)
よって求める自然数は 51 となる。

【問 4】

連続する 3 つの整数がある。もっとも大きい数と中央の数との積から，中央の数ともっとも小さい数との積をひいた差は，中央の数の 2 倍になる。このことを，もっとも小さい数を n として，式を用いて説明しなさい。

（栃木県　2004 年度）

解答欄

説明

解答
連続する 3 つの整数は n，$n+1$，$n+2$ と表せる。
よってもっとも大きい数と中央の数との積は$(n+2)(n+1)$
中央の数ともっとも小さい数との積は$(n+1)n$
このとき差は
$(n+2)(n+1)-(n+1)n$
$=n^2+3n+2-n^2-n$
$=2(n+1)$
$n+1$ は中央の数だから $2(n+1)$は中央の数の 2 倍である。
したがって
もっとも大きい数と中央の数との積から中央の数ともっとも小さい数との積をひいた差は
中央の数の 2 倍になる。

【問 5】

太郎さんは，**図 1** のように「**十の位の数が同じで，一の位の数の和が10になる2けたの自然数の乗法**」には，速く計算できる**方法 1** があることを知り，この方法でも正しく計算できることを下のように証明した。

図 1

62	34	13
×68	36	×17
4216	1224	221
$6\times(6+1)$ → A　B ← 2×8	A　B	A　B

［**方法 1**］

・答えの下 2 けた(B の部分)は一の位の数の積にする。
・その上の 2 けた(A の部分)は十の位の数とそれに 1 を加えた数の積にする。

（証明）

十の位の数を a，一の位の数を b，c とすると，2 つの自然数は，$10a+b$，$10a+c$ と表せる。このとき，2 数の積は，

$$
\begin{aligned}
&(10a+b)(10a+c)\\
=\ &100a^2+10ab+10ac+bc\\
=\ &100a^2+10a(b+c)+bc &\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ア}\\
=\ &100a^2+100a+bc &\cdots\cdots\cdots\cdots \text{イ}\\
=\ &100\boxed{\quad ① \quad}+bc &\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ウ}
\end{aligned}
$$

したがって，下 2 けたは一の位の数の積にし，その上の 2 けたは十の位の数とそれに 1 を加えた数の積にすればよい。

このとき，次の**1**～**3**に答えなさい。

（山梨県　2004 年度）

1　**証明**の中の**ア**から**イ**への変形ができる理由を書きなさい。

2　**ウ**が**方法 1** の内容に合うように，$\boxed{\quad ① \quad}$ に当てはまる最も適当な式を書きなさい。

3　太郎さんは，**図2**のような「**一の位の数が同じで，十の位の数の和が10になる2けたの自然数の乗法**」にも，**方法 1** と同じように速く計算できる方法があるのではないかと考え，方法2を見つけた。

図2

65	32	24
×45	×72	×84
2925	2304	2016

［**方法2**］

・答えの下 2 けたは一の位の数の 2 乗にする。
・その上の 2 けたは〔　　　　②　　　　〕。

このとき，次の**(1)**，**(2)**に答えなさい。

(1) **方法2**の〔　②　〕に当てはまる言葉を書きなさい。

(2) 2 つの自然数を，$10a+b$,$10c+b$ とおいて，**方法2**が正しいことを証明するときの式の変形の部分（上の**証明**の $\boxed{}$ に相当する部分）を書きなさい。

解答欄

1		
2		
3	(1)	
	(2)	

解答

1 一の位の数の和が 10 だから

2 $a(a+1)$

3

(1)

十の位の数の積と一の位の数の和にする

(2)

$(10a+b)(10c+b)$

$=100ac+10ab+10bc+b^2$

$=100ac+10b(a+c)+b^2$

$=100ac+100b+b^2$

$=100(ac+b)+b^2$

解説

1

仮定より

$b+c=10$

$10\times a\times(b+c)=10\times a\times 10=100a$

【問 6】

3 以上の奇数は，連続する 2 つの自然数の平方の差として表される。

（長野県　2004 年度）

例　$5=3^2-2^2$

① 9 を，上の例のように，連続する 2 つの自然数の平方の差として表しなさい。

② n を 3 以上の奇数とする。n を連続する 2 つの自然数の平方の差として表したとき，この連続する 2 つの自然数のうちの小さい方を p として，p を n を用いて表しなさい。

解答欄

①	$9=$
②	$p=$

解答

①　$9=5^2-4^2$

②　$p=\dfrac{n-1}{2}$

解説

②

小さい方を p とすると，大きい方を $p+1$ と表すことができる。

よって $n=(p+1)^2-p^2=p^2+2p+1-p^2=2p+1$

これを p について解くと

$n=2p+1$

$2p=n-1$

$p=\dfrac{n-1}{2}$

【問 7】

表 1 は，2 けたの自然数のうち，一の位の数字が 1 から 5 の数を，11 から 55 まで順に，横に 5 つずつ書き並べたものである。

（静岡県　2004 年度）

表1

11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45
51	52	53	54	55

ア この表の，上から m 番目で左から n 番目の数に，上から n 番目で左から m 番目の数を加えると，いずれの場合もある決まった自然数の倍数になる。どんな自然数の倍数になるか。1 以外の数を答えなさい。

イ アで答えたことを証明したい。$\boxed{}$ の中に，証明の続きを書きなさい。

（証明）m，n は，自然数である。
上から m 番目で左から n 番目の数は，$10m+n$ と表される。
また，上から n 番目で左から m 番目の数は，

解答欄

	（証明の続き）

解答

ア 11 の倍数

イ

(証明の続き)

$10n+m$ と表される。

$(10m+n)+(10n+m)=11m+11n=11(m+n)$

m，n は，自然数であるから

上から m 番目で左から n 番目の数に

上から n 番目で左から m 番目の数を加えると 11 の倍数になる。

【問 8】

次の例 1～例 3 のように，2 つの 2 けたの正の整数について，その積が，それぞれの整数の十の位と一の位の数字を入れかえてできる 2 つの 2 けたの整数の積と等しくなるときがある。

例 1

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 84 \\ \hline 3024 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ \times\ 48 \\ \hline 3024 \end{array}$$

$36 \times 84 = 63 \times 48$

例 2

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times\ 26 \\ \hline 806 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 62 \\ \hline 806 \end{array}$$

$31 \times 26 = 13 \times 62$

例 3

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times\ 32 \\ \hline 1472 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ \times\ 23 \\ \hline 1472 \end{array}$$

$46 \times 32 = 64 \times 23$

このとき，十の位の数と一の位の数について，次のようになっている。

$$\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 8 & 4 \\ 3 \times 8 & 6 \times 4 \\ =24 & =24 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 6 \\ 3 \times 2 & 1 \times 6 \\ =6 & =6 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 4 \times 3 & 6 \times 2 \\ =12 & =12 \end{array}$$

次の(1)，(2)に答えなさい。

（山口県　2004 年度）

(1) 次の ア と イ にあてはまる2けたの正の整数を求めなさい。ただし， イ は， ア の十の位と一の位の数字を入れかえたもので， ア ， イ は，それぞれ 41，14 と異なる整数とする。

$14 \times \boxed{\text{ア}} = 41 \times \boxed{\text{イ}}$

(2) 一の位の数字が 0 でない 2 つの 2 けたの正の整数について，

1 つの整数の十の位の数を a，一の位の数を b，

もう 1 つの整数の十の位の数を c，一の位の数を d

とする。

この 2 つの整数の積が，それぞれの整数の十の位と一の位の数字を入れかえてできる 2 つの 2 けたの整数の積と等しくなるとき，これを式で表すと，

$\boxed{(\qquad)(\qquad) = (\qquad)(\qquad)}$ となる。

上の (　　) にあてはまる 2 けたの整数を表す式を書き入れなさい。

また，この等式を変形し，a と c の積 ac を，b，d で表しなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td>$\boxed{ア}$</td><td>$\boxed{イ}$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">$\boxed{解}$
(　　　　)(　　　　) ＝ (　　　　)(　　　　)

ac ＝ $\boxed{}$</td></tr>
</table>

解答

(1)

ア　82

イ　28

(2)

$\boxed{解}$

$(10a+b)(10c+d)=(10b+a)(10d+c)$

$100ac+10ad+10bc+bd=100bd+10bc+10ad+ac$

$100ac+bd=100bd+ac$

$99ac=99bd$

したがって $ac=bd$

解説

(1)

14 の十の位の数 1 とアの十の位の数の積が

14 の一の位の数 4 とアの一の位の数との積と等しくなることから

アの十の位の数＝4×(アの一の位の数)と表されるので

アの十の位の数は 4 の倍数である。

設問の条件より

十の位の数は 4 ではないので十の位の数は 8 である。

よってアの一の位の数は 8÷4＝2

【問 9】

2 けたの正の整数がある。この整数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる整数を 8 倍した数と，もとの整数との和を N とする。

このとき，整数 N は 9 の倍数であることを，文字式を使って説明せよ。

（香川県　2004 年度）

解答欄

説明

解答

説明

もとの整数の十の位の数を x，一の位の数を y とすると

もとの整数は $10x+y$

入れかえてできる整数は $10y+x$ と表せる。

したがって

$N=(10x+y)+8(10y+x)$

$=9(2x+9y)$

$2x+9y$ は整数だから N は 9 の倍数である。

【問 10】

「連続する 3 つの整数において，最も大きい整数とまん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひいた数に 1 をたした数は，3 でわりきれる」ことの証明を，$\boxed{}$ の中に完成せよ。

（福岡県 2004 年度）

(証明) 最も小さい整数を n とする。

解答欄

証明は上の点線枠の中にを書きなさい。

解答

（証明）

最も小さい整数を n とする。

まん中の整数は $n+1$，最も大きい整数は $n+2$ である。

最も大きい整数とまん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひいた数に 1 をたした数は

$(n+2)(n+1)-n^2+1$

$=n^2+3n+2-n^2+1$

$=3n+3$

$=3(n+1)$

となり 3×(整数)となる。

したがって最も大きい整数とまん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひいた数に 1 をたした数は 3 でわりきれる。