9. 式の証明の問題（2016 年度出題）

【問 1】

和也さんは，2 けたの自然数の性質を調べていたときに，次のように考えました。

(和也さんの考え)

> 十の位と一の位の数の和が 9 になる 2 けたの自然数は，9 の倍数である。

次の問いに答えなさい。

（北海道　2016 年度）

問1　和也さんの考えについて，和也さんと先生が話し合っています。話し合いの中の，$\boxed{ア}$ に当てはまる 2 けたの自然数を，$\boxed{イ}$ ～ $\boxed{エ}$ に当てはまる整数を，それぞれ書きなさい。

> 先生　　「和也さんの考えが成り立つ例は，どのようなものがありますか。」
> 和也さん「例えば 72 です。十の位の 7 と一の位の 2 の和が 9 になる 72 は，9 の倍数になっています。」
> 先生　　「72 が 9 の倍数だといえる理由を説明できますか。」
> 和也さん「72 は 9×8 だから，9 の倍数です。」
> 先生　　「そうですね。9 と整数の積で表すことができるので，72 は 9 の倍数ですね。他にも和也さんの考えが成り立つ例を 1 つあげてください。」
> 和也さん「 $\boxed{ア}$ です。十の位の $\boxed{イ}$ と一の位の $\boxed{ウ}$ の和が 9 になる $\boxed{ア}$ は，9× $\boxed{エ}$ であり，9 と整数の積で表せるので，9 の倍数になります。」
> 先生　　「そうですね。」

問2　和也さんの考えがいつでも成り立つことを説明するとき，$\boxed{オ}$ ，$\boxed{カ}$ に当てはまる式を，それぞれ書きなさい。

(説明)

> 2 けたの自然数の十の位の数を x，一の位の数を y とすると，2 けたの自然数は $10x+y$ と表せます。また，十の位と一の位の数の和は 9 なので，$x+y=9$ となります。
> $10x+y$ を，一つの文字 x だけをふくむ式で表すと，$\boxed{\quad オ\quad}$ となり，
> $\boxed{\quad オ\quad}$ $=9\times($ $\boxed{\quad カ\quad}$ $)$ となります。
> $9\times($ $\boxed{\quad カ\quad}$ $)$ は，9 と整数の積なので，9 の倍数です。
> したがって，十の位と一の位の数の和が 9 になる 2 けたの自然数は，9 の倍数であるといえます。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
問2	オ	
	カ	

解答
問1
ア　18
イ　1
ウ　8
エ　2
問2
オ　$9x+9$
カ　$x+1$
解説
問1
$\boxed{\text{ア}}$は 18
$\boxed{\text{イ}}$は 1
$\boxed{\text{ウ}}$は 8
$\boxed{\text{エ}}$は 2
(注) $\boxed{\text{ア}}$に入る数は 2 けたの数で 9 の倍数ならよいので 9×2，9×3，9×4，…とある。
問2
$x+y=9$ より $y=9-x$
これを $10x+y$ に代入すると
$10x+9-x=9x+9\cdots\boxed{\text{オ}}$
$9x+9=9\times(x+1)\cdots\boxed{\text{カ}}$

【問 2】

「a, b がともに正の数　ならば　積 ab は正の数である。」ということがらは正しいです。ところが，このことがらの逆「積 ab が正の数　ならば　a, b はともに正の数である。」は正しくありません。このことを示す反例を 1 つ書きなさい。

（岩手県　2016 年度）

解答欄

解答

$a=-1$

$b=-1$

解説

a, b がともに負の数となるとき積 ab は正の数である。

【問 3】

右の図のように，袋の中に 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋の中から，2 個の玉を同時に取り出し，取り出した玉に書かれている数のうち，小さい数を a，大きい数を b とし，a を十の位，b を一の位にした 2 けたの自然数 M をつくる。次の問1，問2に答えなさい。

（秋田県　2016 年度）

問1　M が 50 以上の数になる確率を求めなさい。ただし，どの玉が取り出されることも同様に確からしいものとする。

問2　b を十の位，a を一の位にした 2 けたの自然数 N をつくり，N－M がどのような数になるか，次のように調べて予想し，［予想］が成り立つことを説明した。［説明］が正しくなるように，ア，イ，エ，オには a と b を用いた式を，ウには計算の過程を書きなさい。

［調べたこと］

$a=2$，$b=3$ のとき　N－M＝32－23＝ 9＝9×1
$a=4$，$b=6$ のとき　N－M＝64－46＝18＝9×2
$a=5$，$b=8$ のとき　N－M＝85－58＝27＝9×3

［予想］

N－M は，9 の倍数になる。

［説明］

a と b を用いて，M を $\boxed{\text{ア}}$，N を $\boxed{\text{イ}}$ と表すことができる。
N－M を計算すると

$\boxed{\quad\text{ウ}\quad}$

$\boxed{\text{エ}}$ は整数であるから，$\boxed{\text{オ}}$ は 9 の倍数である。
したがって，N－M は，9 の倍数になる。

解答欄

問1		
問2	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
	オ	

解答

問1　$\dfrac{5}{18}$

問2

ア　$10a+b$

イ　$10b+a$

ウ例

N－M

$=(10b+a)-(10a+b)$

$=10b+a-10a-b$

$=9b-9a$

$=9(b-a)$

エ　$b-a$

オ　$9(b-a)$

解説

問1

2 個の玉を同時に取り出す確率と順番に 2 個を取り出す確率は同じになる。

M が 50 以上になるのは a が b より小さい数であることから

$a=5$ のとき $b=6$, 7, 8, 9

$a=6$ のとき $b=7$, 8, 9

$a=7$ のとき $b=8$, 9

$a=8$ のとき $b=9$

で 10 通りあり

a, b の出る順が 2 通りあるので確率は $\dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{8}\times10\times2=\dfrac{5}{18}$

問2

$M=10a+b$, $N=10b+a$ で

$N-M=10b+a-(10a+b)=9(b-a)$

$b-a$ が整数であるから $9(b-a)$は 9 の倍数となる。

【問 4】

一の位の数が 3 である 2 けたの自然数がある。この数は，十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数の 2 倍から 1 をひいた数に等しい。このとき，2 けたの自然数を求めなさい。

（茨城県 2016 年度）

解答欄

解答
73
解説
十の位の数を x とおくと
$10x+3=2(3\times 10+x)-1$
$10x+3=60+2x-1$
$8x=56$
$x=7$
これより 2 けたの自然数は 73

【問 5】

ある月のカレンダーにおいて，図1のような形に並ぶ 4 つの数を小さい順に a，b，c，d とし，この 4 つの数の間に成り立つ関係について考える。図2は $a=5$ のときの例である。

次の問1～問3に答えなさい。

（群馬県　2016 年度）

図1

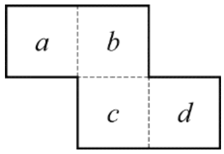
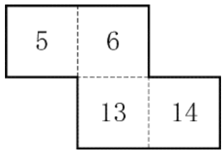


図2



問1　$c=27$ であるとき，a の値を求めなさい。

問2　d を a の式で表しなさい。

問3　$bc-ad$ の値はいつでも 8 であることを，文字を使って説明しなさい。

解答欄

問1	$a=$
問2	
問3	〔説明〕

解答
問1　$a=19$
問2　$d=a+9$
問3
〔説明〕
b，c，d をそれぞれ a の式で表すと
$b=a+1$，$c=a+8$，$d=a+9$　となるから
$bc-ad=(a+1)(a+8)-a(a+9)$
$=a^2+9a+8-a^2-9a$
$=8$
したがって $bc-ad$ の値はいつでも 8 である。
解説
問1
$c=b+7$，$b=a+1$ であるから $c=a+8$
よって $a=c-8=27-8=19$ となる。
問2
$d=c+1$
問1より $d=a+8+1=a+9$
問3
b，c，d を a を使って表し
$bc-ad$ を計算する。

【問 6】

2 けたの正の整数があり，十の位の数と一の位の数の和は 12 である。また，十の位の数と一の位の数を入れかえてできる整数は，もとの整数より 18 小さい。

このとき，もとの整数を求めなさい。

（千葉県　2016 年度　前期）

解答欄

解答
75
解説
もとの整数の十の位の数を x，一の位の数を y とおくと
$x+y=12$…①
$10y+x=10x+y-18$…②
②より
$x-y=2$…③
①＋③より
$2x=14$
$x=7$
①に代入して
$7+y=12$
$y=5$
よって求める整数は 75

【問 7】

ある中学校で，S さんが作った問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

（東京都　2016 年度）

［S さんが作った問題］

右の図1は，「かけ算九九の表」の一部である。図1において，かけられる数とかける数を除く 25 個の数の中から，縦と横がともに 3 マスの正方形の枠を用いて，1 マスに 1 個の数が入るように，9 個の数を囲むことを考える。

右の図2は，図1において，縦と横がともに 3 マスの正方形の枠を用いて，四すみのうち，左上の数が 2，右上の数が 4，左下の数が 6，右下の数が 12 となるように 9 個の数を囲んだ場合を表している。

図1

かけられる数 ＼ かける数	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

図2

かけられる数 ＼ かける数	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

囲んだ 9 個の数の四すみの数について，左上の数と右下の数の和を P，右上の数と左下の数の和を Q としたとき，P＋Q の値が整数の 2 乗で表される数となる 9 個の数の囲み方は，全部で何通りあるか調べてみよう。

問1　次の $\boxed{}$ の中の「あ」に当てはまる数字を答えよ。

［S さんが作った問題］で，P＋Q の値が整数の 2 乗で表される数となる 9 個の数の囲み方は，全部で $\boxed{あ}$ 通りある。

先生は，［Sさんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

右の図3は，「かけ算九九の表」である。

n を 2 から 9 までの自然数とし，図3において，かけられる数とかける数を除く 81 個の数の中から，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて，1 マスに 1 個の数が入るように，n^2 個の数を囲むことを考える。

囲んだ n^2 個の数の四すみの数について，左上の数と右下の数の和をP，右上の数と左下の数の和をQとしたとき，P－Q の値を求める。

例えば，$n=4$ のとき，左上の数が 1，右上の数が 4 となるように 16 個の数を囲んだ場合，

P－Q＝(1＋16)－(4＋4)＝9＝3^2 となる。

また，$n=5$ のとき，左上の数が 10，右上の数が 18 となるように 25 個の数を囲んだ場合，

P－Q＝(10＋54)－(18＋30)＝16＝4^2 となる。

図3で示した「かけ算九九の表」の中の数を，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて囲むとき，P－Q＝$(n-1)^2$ となることを確かめなさい。

図3

かける数

かけられる数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

問2 ［先生が作った問題］で，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて囲んだ n^2 個の数の四すみの数のうち，左上の数のかけられる数を a，かける数を b とする。

このとき，左上の数，右上の数，左下の数，右下の数をそれぞれ a，b，n を用いた式で表し，P－Q＝$(n-1)^2$ となることを証明せよ。

解答欄

問1	あ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
問2	〔証明〕 $\mathrm{P}-\mathrm{Q}=(n-1)^2$	

解答
問1
あ　3
問2
〔証明〕
左上の数についてかけられる数が a, かける数が b であることから左上の数は ab となる。
また右上の数は $a\{b+(n—1)\}$
左下の数は $b\{a+(n-1)\}$
右下の数は $\{a+(n-1)\}\{b+(n—1)\}$
と表すことができる。
$n-1=\mathrm{N}$ とおくと
$\mathrm{P}-\mathrm{Q}$
$=\{ab+(a+\mathrm{N})(b+\mathrm{N})\}-\{a(b+\mathrm{N})+b(a+\mathrm{N})\}$
$=(ab+ab+a\mathrm{N}+b\mathrm{N}+\mathrm{N}^2)-(ab+a\mathrm{N}+ab+b\mathrm{N})$
$=ab+ab+a\mathrm{N}+b\mathrm{N}+\mathrm{N}^2-ab-a\mathrm{N}-ab-b\mathrm{N}$
$=\mathrm{N}^2$
$\mathrm{N}=n-1$ だから
$\mathrm{P}-\mathrm{Q}=(n-1)^2$
解説
問1
正方形の左上の数はかけられる数を a かける数を b をすると ab
右上の数はかけられる数が a かける数が $b+2$ なので $a(b+2)$
左下の数はかけられる数が $a+2$ かける数が b なので $(a+2)b$
右下の数はかけられる数が $a+2$ かける数が $b+2$ なので $(a+2)(b+2)$
$\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ は正方形の四隅の数を加えたものになるから
$ab+a(b+2)+(a+2)b+(a+2)(b+2)$
$=4(ab+a+b+1)$
$=4(a+1)(b+1)$
ここで $4=2^2$ なので $(a+1)(b+1)$ が 2 乗で表されればよい。
このとき a も b も 1 から 3 まで調べればよいので
$a=1$, $b=1$ と, $a=2$, $b=2$ と, $a=3$, $b=3$ の 3 通りがある。
なお縦と横の 3 マスの正方形の四隅の数の和が 2 乗になればよく
左上の数が 1 のとき $16=4^2$, 2 のとき 24 でダメ…を 9 回計算するのが試験のときは早い。
ここでは一般的な文字式を用いた方法を示した。
問2
問1の考え方を用いて
四隅の数を a, b, n を用いて表すことがポイントで
$n-1=N$ の置き換えも計算上大切である。

【問 8】

連続する 2 つの自然数があり，それぞれを 2 乗した数の和が 113 になるとき，小さいほうの自然数を求めなさい。

（神奈川県　2016 年度）

解答欄

解答
7
解説
連続する 2 つの自然数を x，$x+1$ とおくと
$x^2+(x+1)^2=113$
$x^2+x-56=0$
これより$(x+8)(x-7)=0$
よって小さい方の自然数は 7

【問 9】

表1，表2のように，自然数を規則的に並べた表がある。
このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（石川県　2016 年度）

問1　表1において，4 は 1 行目の 4 列目の位置，2 行目の 2 列目の位置，4 行目の 1 列目の位置の 3 か所にある。10 は何か所にあるか求めなさい。

表1

	1列目	2列目	3列目	4列目	…
1行目	1	2	3	4	…
2行目	2	4	6	8	…
3行目	3	6	9	12	…
4行目	4	8	12	16	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

問2　表1において，3 行目にある数のうち，横に連続して並んだ 3 つの数の和が 144 になるものがある。この 3 つの数の中で，もっとも小さい数を求めなさい。

問3　表2のように，縦 2 つ横 2 つの 4 つの数を $\boxed{}$ で囲む。(6＋12)－(9＋8) のように，$\boxed{}$の中の左上の数と右下の数の和から，右上の数と左下の数の和をひく。このとき，その差は，$\boxed{}$ がどの位置にあっても 1 になる。このことが成り立つことの証明を完成させなさい。

表2

	1列目	2列目	3列目	4列目	…
1行目	1	2	3	4	…
2行目	2	4	6	8	…
3行目	3	6	9	12	…
4行目	4	8	12	16	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

［証明］

a，b を自然数とする。$\boxed{}$ の中の左上の数が a 行目の b 列目の位置にあるとき，その数の値は ab と表され，

〔証明の続き〕

したがって，左上の数と右下の数の和から，右上の数と左下の数の和をひくと，その差は 1 になる。

解答欄

問1	か所
問2	
問3	〔証明の続き〕

解答
問1　4か所
問2　45
問3
〔証明の続き〕
右上の数の値は $a(b+1)$
左下の数の値は $(a+1)b$
右下の数の値は $(a+1)(b+1)$と表される。
このとき
$\{ab+(a+1)(b+1)\}-\{a(b+1)+(a+1)b\}$
$=(2ab+a+b+1)-(2ab+a+b)$
$=1$
解説
問1
表1の1行目は1の倍数，2行目は2の倍数，3行目は3の倍数…が並んでいる。
10は(1行目の10列目)，(2行目の5列目)，(5行目の2列目)，(10行目の1列目)の4か所ある。
問2
3行目は3の倍数が並んでいる。
連続した3つのうちもっとも小さい数を x とすると
$x+(x+3)+(x+6)=144$
$3x=135$ より
$x=45$
問3
4つの数を a，b を用いて表し(左上の数＋右下の数)－(右上の数＋左下の数) を計算すればよい。

【問 10】

2 けたの正の整数がある。その整数は，各位の数の和の 4 倍に等しく，また，十の位と一の位の数を入れかえてできる 2 けたの整数は，もとの整数の 2 倍より 9 だけ小さい。

このとき，もとの整数を求めなさい。

（愛知県 2016 年度 B）

解答欄

解答
36
解説
2 桁の正の整数を $10a+b$ とおくと
$10a+b=4(a+b)$…①
$10b+a=2(10a+b)-9$…②
①より $6a-3b=0$
②より $19a-8b=9$
$b=2a$ より
$19a-16a=9$
$3a=9$
$a=3$
$b=6$
よってもとの整数は 36

【問 11】

次の文章は，カレンダーに書かれた数字について述べたものである。文章中の $\boxed{\mathrm{A}}$ ，$\boxed{\mathrm{B}}$ ，$\boxed{\mathrm{C}}$ ，$\boxed{\mathrm{D}}$ にあてはまる数をそれぞれ書きなさい。

なお，2 か所の $\boxed{\mathrm{A}}$ ，$\boxed{\mathrm{B}}$ ，$\boxed{\mathrm{C}}$ にはそれぞれ同じ数があてはまる。

（愛知県 2016 年度 B）

図は，今年の 4 月のカレンダーである。

日	月	火	水	木	金	土
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

で囲まれた縦に並んだ 3 つの数 4，11，18 の和は 33 で， の中の上から $\boxed{\mathrm{A}}$ 番目にある数の 3 倍になっている。

ここで，図の のように縦に並んだ 3 つの数について，上から 1 番目にある数を a，2 番目にある数を b，3 番目にある数を c とすると，

$b=a+\boxed{\mathrm{B}}$

$c=a+\boxed{\mathrm{C}}$

と表せる。

そして，

$$a+b+c=a+(a+\boxed{\mathrm{B}})+(a+\boxed{\mathrm{C}})$$
$$=3(a+\boxed{\mathrm{D}})$$

となり，3 つの数の和は， のように縦に並んだ 3 つの数の上から $\boxed{\mathrm{A}}$ 番目にある数の 3 倍になっていることがわかる。

解答欄

A (　　　)，B (　　　)，C (　　　)，D (　　　)

解答
A (2)
B (7)
C (14)
D (7)
解説
A＝2
B＝7
C＝14
D＝7

【問 12】

n は 3 けたの自然数であり，n の一の位の数は 8 である。n の百の位の数と十の位の数と一の位の数との和の 28 倍が n と等しくなるような n の値をすべて求めなさい。

（大阪府 2016 年度 C）

解答欄

解答

308，448，588

解説

a，b を整数($1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$)として

n を a，b で表すと

$n = 100a + 10b + 8$

$100a + 10b + 8 = 28(a + b + 8)$

を整理すると

$a = \dfrac{b}{4} + 3$

よって

$b = 0$，4，8

$b = 0$ のとき $a = 3$

$b = 4$ のとき $a = 4$

$b = 8$ のとき $a = 5$

したがって $n = 308$，448，588

【問 13】

n が自然数のとき，$6n+3$ の式の値について正しいのは，ア～エのうちではどれですか。当てはまるものをすべて答えなさい。

（岡山県　2016 年度　特別）

ア　偶数　　　イ　奇数　　　ウ　3 の倍数　　　エ　4 の倍数

解答欄

解答
イ ウ
解説
$6n+3=2(3n+1)+1$ で
$3n+1$ は整数だから $2(3n+1)$ は偶数。
したがって $2(3n+1)+1$ は奇数。
また $6n+3=3(2n+1)$ で
$2n+1$ は整数だから $3(2n+1)$ は 3 の倍数。
よって正しいのはイ，ウ

【問 14】

優花さんは，千の位の数と一の位の数，百の位の数と十の位の数がそれぞれ等しい 4 桁の自然数が 11 の倍数であることを，下のように説明しました。

【優花さんの説明】

千の位の数と一の位の数，百の位の数と十の位の数がそれぞれ等しい 4 桁の自然数は，千の位の数と一の位の数を x，百の位の数と十の位の数を y とすると，$1000x+100y+10y+x$ と表すことができる。 $\boxed{}$ したがって，千の位の数と一の位の数，百の位の数と十の位の数がそれぞれ等しい 4 桁の自然数は，11 の倍数である。

【優花さんの説明】の $\boxed{}$ に説明の続きを書き，説明を完成させなさい。

（広島県　2016 年度）

解答欄
解答は問題の枠に書きなさい。
解答
$1000x+100y+10y+x$
$=1001x+110y$
$=11(91x+10y)$
$91x+10y$ は自然数だから
$11(91x+10y)$は 11 の倍数である。
解説
11 の倍数であることを説明するのだから 11×(自然数) の形に導く

【問 15】

図1は，かけ算の九九の表の一部である。問1，問2に答えなさい。

（徳島県　2016 年度）

問1　さなえさんは，次のような予想をした。(1)・(2)に答えなさい。

【予想】

図2のように，横に並んだ 3 つの数を（　　　　）で囲んだとき，この 3 つの数の和は，中央の数の 3 倍になる。

(1)　さなえさんは，【予想】が，(12 ｜ 16 ｜ 20) のときに成り立つことを，次のように確かめた。

［ア］にあてはまる式を書きなさい。

3 つの数の和は，12＋16＋20＝48＝［ア］となり，3 つの数の和は中央の数の 3 倍になっている。

図1

かける数 / かけられる数

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

［［　］の部分の6は，かけられる数が2，かける数が3で，2×3の値を表している。］

図2

かける数 / かけられる数

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

(2)　さなえさんは，【予想】が，いつでも成り立つことを，次のように説明した。［イ］～［エ］にあてはまる式を書きなさい。

【説明】

中央の数は，かけられる数を m，かける数を n とすると，mn と表される。このとき，中央の数 mn の左の数は［イ］，右の数は［ウ］と m，n を使って表すことができる。

だから，3 つの数の和は，［イ］$+mn+$［ウ］＝［エ］となり，3 つの数の和は中央の数の 3 倍になっている。

問2　図1において，図2のように，横に並んだ 3 つの数を（　　　　）で囲んだとき，囲まれた 3 つの数の和が 30 の倍数になる 3 つの数の組は何組あるか，求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="4">問1</td><td>(1)</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>ウ</td><td></td></tr>
<tr><td>エ</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="3">組</td></tr>
</table>

解答
問1
(1)
ア　16×3
(2)
イ　$mn-m$
ウ　$mn+m$
エ　$3mn$
問2　6 組
解説
問1
(1)
アには 16×3
イには $m(n-1)$より $mn-m$
ウには同様に $m(n+1)$より $mn+m$
エには $mn-m+mn+mn-m=3mn$ が入る。
問2
30 の倍数は 30，60，90，120 があり
中央の数がそれぞれの $\frac{1}{3}$ になる 3 つの数の組である。
10 が 2 組
20 が 2 組
30 が 2 組
40 が 0 なので計 6 組。

【問 16】

あきらさんは，「数当てのしくみ」について先生と会話した。次の $\boxed{}$ は，先生とあきらさんの会話とそのときのあきらさんの考えたことである。また，下のノートは，あきらさんが「数当てのしくみ」について，正しく説明したものの一部である。このとき，下の問1・問2に答えなさい。

（高知県　2016 年度）

会話とあきらさんの考えたこと　（　　）は，あきらさんの考えたこと。

先　生：「あきらさんの考える数を当ててみせます。十の位の数字より一の位の数字のほうが大きい 2 けたの自然数を決めてください。」

あきら：(37 にしよう。)

先　生：「では，十の位の数字と一の位の数字について考えます。まず，十の位の数字を 4 倍してください。」

あきら：(3 を 4 倍して 12 だ。)

先　生：「その数に 2 をたしてください。」

あきら：(12 に 2 をたして 14 だ。)

先　生：「その数を 5 倍してください。」

あきら：(14 の 5 倍だから 70 だ。)

先　生：「その数に，はじめに決めた数の一の位の数字の 2 倍をたしてください。」

あきら：(70 に，7 の 2 倍の 14 をたして 84 だ。)

先　生：「では，【計算結果】はいくつになりましたか。」

あきら：「84 です。」

先　生：「84 ですね。ということは，はじめに決めた 2 けたの自然数は 37 ですね。」

あきら：「そのとおりです。どうしてわかったのですか。」

先　生：「実は，この【計算結果】に，ある特別な計算をすると，はじめに決めた 2 けたの自然数になります。この特別な計算は，【計算結果】がどんな数でも変わりません。この特別な計算を，文字式を使って考えてみましょう。特別な計算は，例えば『1 をたして，2 をかける』のような，加法，減法，乗法，除法のうちのいずれか 2 つを組み合わせた計算方法です。」

あきらさんのノート

> 「数当てのしくみ」
> 　はじめに決めた2けたの自然数について，十の位の数字を m，一の位の数字を n とすると，m，n を用いて，
> はじめに決めた2けたの自然数は $\boxed{ア}$
> 【計算結果】は $\boxed{イ}$
> と表せる。これらの文字式を比べると，この【計算結果】から，はじめに決めた 2 けたの自然数を求めるには，$\boxed{}$ という特別な計算をするとよいことがわかる。これは，m，n がどんな数の場合でも成り立つ。
> 　実際，84 にこの特別な計算をすると，37 が求められる。さらに，他の数字でも同じように求めることができた。

問1 $\boxed{ア}$ ・ $\boxed{イ}$ に当てはまる文字式をそれぞれ書け。

問2 $\boxed{}$ には，加法，減法，乗法，除法のうちのいずれか 2 つを組み合わせた計算方法が入る。その計算方法を言葉で説明せよ。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2		

解答
問1
ア　$10m+n$
イ　$20m+2n+10$
問2例
10 をひいて 2 でわる。
解説
問1
十の位の数が m，一の位の数が n なのでアは $10m+n$
またイは「会話」のところを読んで計算結果を求めると十の位を 4 倍して 2 を加えると $4m+2$
それを 5 倍して一の位の数の 2 倍を加えると $5(4m+2)+2n=20m+2n+10$
問2
$20m+2n+10$ から $10m+n$ を導く方法は 10 をひいた数を 2 でわればよい。

【問 17】

0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 3 で分子が自然数である数の和について調べ，表にした。

$n=0$ のときは，
$\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ の 2 つの分数があるね。

調べたこと

$n=0$ のとき
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$$
$n=1$ のとき
$$\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{9}{3}=3$$
$n=2$ のとき
$$\frac{7}{3}+\frac{8}{3}=\frac{15}{3}=5$$
$n=3$ のとき
$$\frac{10}{3}+\frac{11}{3}=\frac{21}{3}=7$$

表

n の値	0	1	2	3
和	1	3	5	7

調べたことと表から，0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 3 で分子が自然数である数の和は奇数になると考え，次のように予想した。

予想

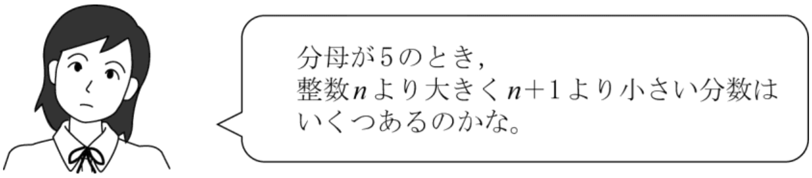
0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 3 で分子が自然数である数の和は，$2n+1$ になる。

予想がいつでも成り立つことを証明①のように証明した。

証明①

0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 3 で分子が自然数である数は，n を用いて $\frac{3n+1}{3}$，$\frac{3n+2}{3}$ と表される。
これらの和は，
$$\frac{3n+1}{3}+\frac{3n+2}{3}$$
$$=\frac{6n+3}{3}$$
$$=2n+1$$
したがって，0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 3 で分子が自然数である数の和は，$2n+1$ である。

前ページを参考にして，0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 5 で分子が自然数である数の和について考える。



次の問1は最も簡単な数で，問2は指示にしたがって答えよ。

（福岡県　2016 年度）

問1 $n=1$ のとき，n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 5 で分子が自然数である数をすべて求めよ。

問2 0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 5 で分子が自然数である数の和は，$4n+2$ であることの証明②を完成せよ。

証明②

0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 5 で分子が自然数である数は，n を用いて

したがって，0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 5 で分子が自然数である数の和は，$4n+2$ である。

解答欄

問1	
問2	〔証明〕 0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 5 で分子が自然数である数は，n を用いて したがって，0 以上の整数 n より大きく $n+1$ より小さい分数のうち，分母が 5 で分子が自然数である数の和は，$4n+2$ である。

解答

問1　$\dfrac{6}{5}$，$\dfrac{7}{5}$，$\dfrac{8}{5}$，$\dfrac{9}{5}$

問2

〔証明〕例

$\dfrac{5n+1}{5}$，$\dfrac{5n+2}{5}$，$\dfrac{5n+3}{5}$，$\dfrac{5n+4}{5}$ と表される。

これらの和は,

$\dfrac{5n+1}{5}+\dfrac{5n+2}{5}+\dfrac{5n+3}{5}+\dfrac{5n+4}{5}$

$=\dfrac{20n+10}{5}$

$=4n+2$

解説

問1

1 より大きく 2 より小さい分数で

分母が 5 分子が自然数である数は $\dfrac{6}{5}$，$\dfrac{7}{5}$，$\dfrac{8}{5}$，$\dfrac{9}{5}$ の 4 つである。

問2

n より大きく $n+1$ より小さい分数で

分母が 5 である分数の分子(自然数)は $5n+1$，$5n+2$，$5n+3$，$5n+4$ である。

【問 18】

次の[問題]について考えている太郎さんと花子さんの会話文を読んで，あとの(1)～(4)の各問いに答えなさい。

（佐賀県　2016 年度　特色）

［問題］

> 1 けたの自然数 A，B，C を使って表した一の位が 8 である 4 けたの ABC8 がある。この数を 4 倍すると，右のように千の位が 8 である 4 けたの数 8CBA となった。このとき，A，B，C にあてはまる数をそれぞれ求めなさい。
>
> $$\begin{array}{r} \mathrm{A\,B\,C\,8} \\ \times\quad\ \ 4 \\ \hline \mathrm{8\,C\,B\,A} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square\,\mathrm{B\,C\,8} \\ \times\quad\ \ 4 \\ \hline \mathrm{8\,C\,B}\,\square \end{array}$$

太郎さん：A にあてはまる数は，わかりそうだね。

花子さん：じゃあ，わかった数を A にあてはめてみるわね。次に，B にあてはまる数を考えてみましょう。

太郎さん：B は，ABC8 の B と 8CBA の B の 2 つがあるけど，順に考えてみよう。

花子さん：まず，ABC8 の B を 9 として計算してみると，あてはまらないことがわかるわ。

太郎さん：次に，8CBA の B について考えてみると，C×4 は $\boxed{\text{①}}$ だから，B は $\boxed{\text{②}}$ であることがわかるね。

花子さん：そうしたら，B にあてはまる数はわかるわね。

(1) A にあてはまる数を求めなさい。

(2) 会話文の中の①，②には，「偶数」か「奇数」のどちらかの言葉が入る。①，②にあてはまる言葉をそれぞれ書きなさい。

(3) B にあてはまる数を求めなさい。

(4) C にあてはまる数を求めなさい。

解答欄

(1)		
(2)	①	
	②	
(3)		
(4)		

解答
(1)　2
(2)
①　偶数
②　奇数
(3)　1
(4)　7
解説
(1)
8×4＝32 より A にあてはまる数は 2 である。
(2)
C×4 は 4 が偶数だから C が偶数，奇数のどちらでも偶数になる。
B は 32 の十の位の 3 と C×4 の和の一の位の数であるから
奇数＋偶数＝奇数より B は奇数。
(3)
B×4 は 1 桁でなければならないので B は 1 か 2 である。
また B は奇数だから 1 である。
(4)
B が 1 だから 3 と C×4 の和の一の位は 1 である。
よって C×4 は 8 か 28 である。
C×4 が 8 のとき C は 2 だから
ABC8 は 2128
2128×4＝8512 となり 2 はあてはまらない。
C×4 が 28 のとき C は 7 だから
ABC8 は 2178
2178×4＝8712 となり
C は 7 である。

【問 19】

下の会話は，中学生のあつしくんとさくらさんが，先生から出された課題について話しているときのものである。会話を読んで，次の問1～問3に答えなさい。

（大分県　2016 年度）

［先生から出された課題］

異なる 2 つの自然数を自由に選び，それら 2 つの自然数の和を A，大きい方の自然数から小さい方の自然数をひいた差を B とする。さらに，A の 2 乗から B の 2 乗をひいた差を X とする。

このとき，X はいつでもある自然数の倍数になっている。どんな自然数の倍数になっているか予想して，それが成り立つわけを説明しなさい。

あつしくん：まずは，具体的な数で考えてみてはどうかな？
異なる 2 つの自然数として，2 と 3 を選ぶと X＝24，3 と 4 を選ぶと X＝48，
4 と 5 を選ぶと X＝80 になるよね。

さくらさん：24，48，80 はどれも 8 の倍数になっているから，X はいつでも 8 の倍数になると考えていいのかな？

…………

あつしくん：そうとは限らないんじゃないかな。
たとえば，異なる 2 つの自然数として，$\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ を選ぶと X＝ $\boxed{ウ}$ になるから，このとき，X は 8 の倍数ではないよね。

さくらさん：じゃあ，X はいつでも 4 の倍数になるのかな？
いつでも成り立つわけを説明するためには，授業で学習した文字と式を利用すればいいのよね。

あつしくん：そうだったね。やってみよう。

…………

あつしくん：確かに，X はいつでも 4 の倍数になるんだ。次のようにして説明できたよ。

［説明］

選んだ 2 つの自然数を a，b $(a>b)$ とすると，

$\boxed{エ}$

さくらさん：そうね。わたしも同じように説明できたわ。

問1 会話の中の下線部のことがらが正しくないことを示す例となるように，$\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$ に適する数を求めなさい。また，その $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$ を用いて $\boxed{\text{ウ}}$ に適する数を求めなさい。

問2 会話の中の $\boxed{\text{エ}}$ に続きを書き，[説明]を完成させなさい。

問3 X＝2016 となる異なる 2 つの自然数のうち，B の値がもっとも小さくなるものを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>ウ</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">〔説明〕
選んだ 2 つの自然数を a，b ($a＞b$) とすると，
$\boxed{\text{エ}}$</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">と</td></tr>
</table>

解答
問1例
ア　1
イ　3
ウ　12
問2例
A＝a＋b，B＝a－b より
X＝$\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2$
$=(a+b)^2-(a-b)^2$
$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$
$=4ab$
a，b は自然数だから，$4ab$ は 4 の倍数である。
したがって，X はいつでも 4 の倍数である。
問3　21　と　24
解説
問1
1 と 3 を選ぶと A＝4，B＝2 より $\mathrm{X}=\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=16-4=12$ となり X は 8 の倍数ではない。
ほかに(1 と 4)，(3 と 5)，(3 と 7)　などでもよい。
問2
X が 4X (自然数)の形で表せればよい。
問3
問2より X＝$4ab$ とおくと
$4ab=2016$ より $ab=504$　$504=2^3\times3^2\times7$ と素因数分解できる。
B＝$a-b$ が最小となる 2 数 a，b は $a=24$，$b=21$ のときである。