

4.二次関数と図形関連の複合問題 2003 年度出題

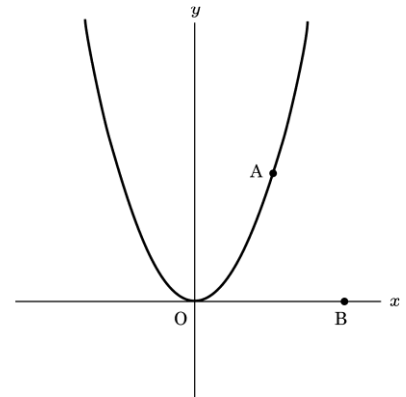
【問 1】

図のように、関数 $y=ax^2$ (a は正の定数)のグラフ上に点 A, x 軸上に点 B があります。点 A の x 座標は 2, 点 B の x 座標は正の数とします。点 O は原点とします。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2003 年度)

問1. 点 B の x 座標が 4 のとき, 点 B を通り, 傾きが $-\frac{1}{2}$ である直線をかきなさい。



問2. 点 A の y 座標が 6 のとき, a の値を求めなさい。

問3. a の値を 1 とします。OA=OB のとき, $\triangle AOB$ の面積を求めなさい。

解答欄

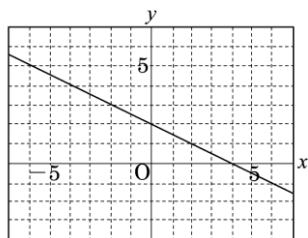
問1	
問2	$a =$
問3	

解答

問1

問2 $a = \frac{3}{2}$

問3



解説

問2

$y = ax^2$ に $x = 2$, $y = 6$ を代入して, $6 = a \times 2^2$ $a = \frac{3}{2}$

問3

$a = 1$ よりグラフの式は $y = x^2$ 点 A の x 座標が 2 より y 座標は $2^2 = 4$ だから, A(2, 4) $OB = OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$
 $= 2\sqrt{5}$ よって $\triangle AOB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4 = 4\sqrt{5}$

$y = 2^2 = 4$ より, A(2, 4) …①

$OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ …②

$OB = 2\sqrt{5}$

$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4 = 4\sqrt{5}$ …③

答 $4\sqrt{5}$

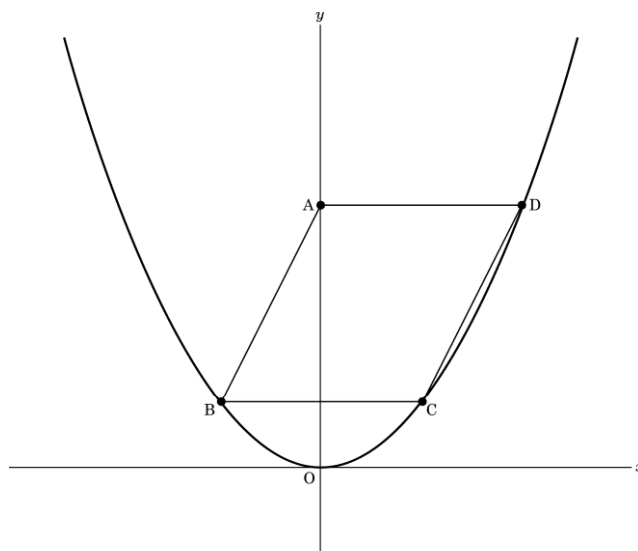
【問 2】

図で、放物線は $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフである。点 A は y 軸上の点で、 y 座標は 8 である。また、点 B, C, D は放物線上にあり、四角形 ABCD は平行四辺形で、点 D の x 座標は正、AD と x 軸は平行である。

次の(1)～(4)に答えなさい。ただし、座標軸の単位の長さを 1 cm とする。

(青森県 2003 年度)

(1) AD の長さを求めなさい。



(2) $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x が -1 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(3) 原点を通り、平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

(4) 放物線 CD 上に点 P をとる。△DAP の面積が 7 cm^2 になるときの点 P の座標を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	
(3)	
(4)	

解答

(1) 4 cm

(2) 2

(3) $y=5x$

(4) $(3, \frac{9}{12})$

解説

(1) 点 D の y 座標は 8 より, $y=\frac{1}{2}x^2$ に $y=8$ を代入して, $8=\frac{1}{2}x^2$ $x^2=16$ $x>0$ より, $x=4$ よって, AD の長さは 4 cm

(2) x の増加量は $5-(-1)=6$, y の増加量は $\frac{1}{2} \times 5^2 - \frac{1}{2} \times (-1)^2 = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12$ より,

変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{12}{6} = 2$

(3) 平行四辺形の対角線の交点を通る直線は平行四辺形の面積を 2 等分するから, AC の中点を通る直線の式を求めればよい。AD=4 より, BC=4 だから, C の x 座標は 2, y 座標は 2 である。よって, AC の中点を E とすると, $E(\frac{0+2}{2}, \frac{8+2}{2})=E(1, 5)$ ゆえに, 直線 OE の式は $y=5x$

(4) 点 P の x 座標を p とすると y 座標は $\frac{1}{2}p^2$ $\triangle DAP=7$ より $\frac{1}{2} \times 4 \times (8 - \frac{1}{2}p^2) = 7$

これを解く。 $16 - p^2 = 7$ $p > 0$ より, $p=3$ よって, $P(3, \frac{9}{2})$

【問 3】

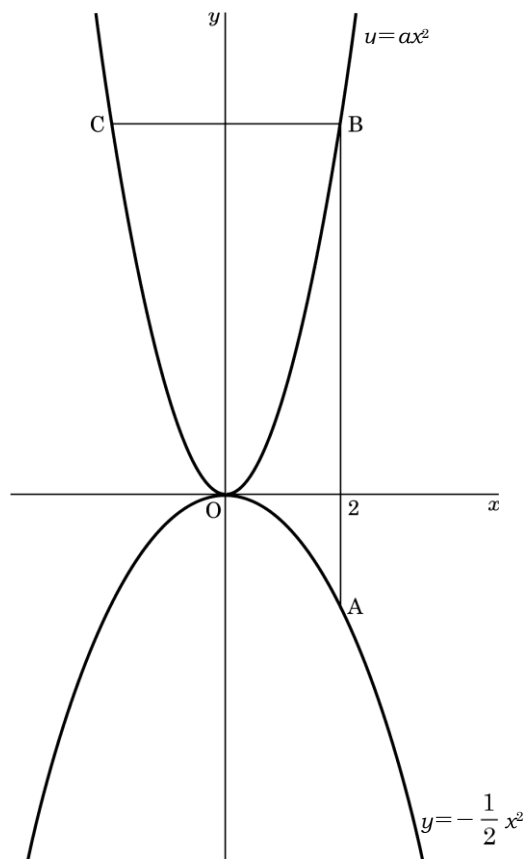
図のように、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に点 A があり、関数 $y = ax^2 (a > 0)$ のグラフ上に2点 B, C があります。A と B の x 座標はどちらも 2 で、B と C の y 座標は等しくなっています。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(岩手県 2003 年度)

(1) 点 A の y 座標を求めなさい。

(2) $AB:BC=2:1$ のとき、関数 $y = ax^2$ の a の値を求めなさい。



解答欄

(1)	
(2)	$a =$

解答

(1) -2 (2) $a = \frac{3}{2}$

解説

(1)

点 A は関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点だから、 $x = 2$ を代入して、

$y = -\frac{1}{2} \times 2^2 = -2$ よって、A の y 座標は -2

(2)

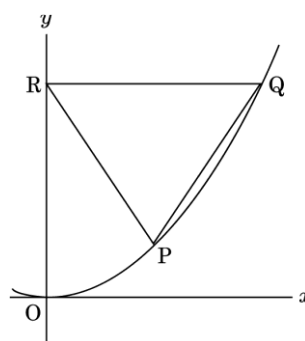
点 B は関数 $y = ax^2$ のグラフ上の点だから、 $x = 2$ を代入して、 $y = a \times 2^2 = 4a$ より、 $B(2, 4a)$

$AB = 4a - (-2) = 4a + 2$, $BC = 4$, $AB:BC = 2:1$ より、 $(4a + 2):4 = 2:1$ $4a + 2 = 4 \times 2$ よって、 $a = \frac{3}{2}$

【問 4】

図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上の、 x 座標が 2 である点を P、 x 座標が正で y 座標が 4 である点を Q とし、 y 軸上の点(0, 4)を R とする。このとき、 $\triangle PQR$ の面積を求めなさい。

(山形県 2003 年度)



解答欄

解答

6

解説

点 P は $y = \frac{1}{4}x^2$ に $x=2$ を代入して、 $y = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$ より、P(2, 1)

点 Q は $y=4$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して、 $4 = \frac{1}{4}x^2$ $x^2 = 16$

$x > 0$ より、 $x=4$ だから、Q(4, 4) よって、 $\triangle PQR = \frac{1}{2} \times 4 \times (4-1) = 6$

【問 5】

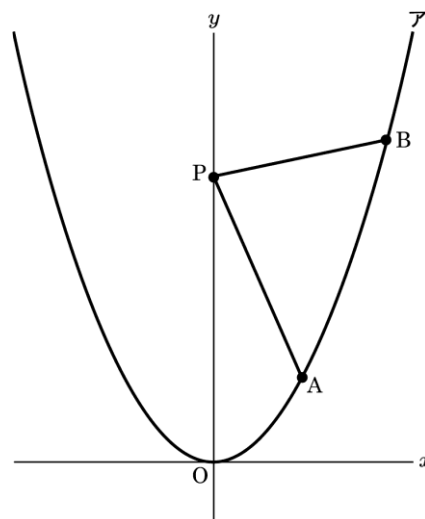
図において、曲線アは関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフで、2点 A, B は曲線ア上の点であり、 x 座標がそれぞれ 2, 4 である。また、点 P は y 軸上の点である。ただし、O は原点、座標の目盛りの単位は cm とする。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(茨城県 2003 年度)

(1) 2点 A, B を通る直線の式を求めなさい。

(2) 線分 AP と線分 PB の長さの和が最小となるように点 P をとるとき、その長さの和を求めなさい。



解答欄

(1)	
(2)	cm

解答

(1) $y = 3x - 4$ (2) $6\sqrt{2}$ cm

解説

(1)

$y = \frac{1}{2}x^2$ において、 $x = 2$ のとき、 $y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$ 、 $x = 4$ のとき、 $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ だから、A(2, 2), B(4, 8)

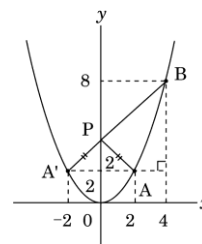
直線 AB の傾きは $\frac{8-2}{4-2} = 3$ だから、直線 AB の式を $y = 3x + b$ とおくと、

これが点 A(2, 2) を通ることから、 $2 = 3 \times 2 + b$ $b = -4$ よって、直線 AB の式は、 $y = 3x - 4$

(2)

点 A と y 軸について対称な点を A' とすると、 $A'P + PB = AP + PB$ となるので、
 $A'P + PB$ が最小のとき $AP + PB$ も最小となる。よって、直線 $A'B$ と y 軸の交点を P とすればよい。求める長さの和は $A'(-2, 2)$ と B(4, 8) の距離だから、

三平方の定理より、 $\sqrt{\{4 - (-2)\}^2 + \{8 - 2\}^2} = 6\sqrt{2}$ cm

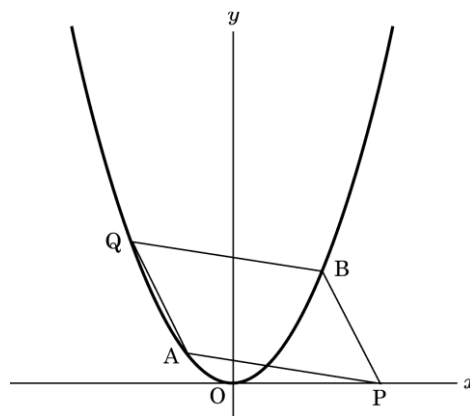


【問 6】

図で曲線は関数 $y=x^2$ のグラフであり、グラフ上に2点 $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ をとります。また、 x 軸上に x 座標が正である点 P をとり、グラフ上に点 Q をとって、四角形 $APBQ$ をつくります。この四角形 $APBQ$ が平行四辺形になるとき、点 Q の座標を求めなさい。

ただし、根号はつけたままで答えなさい。

(埼玉県 2003 年度)



解答欄

(,)

解答

$(-\sqrt{5}, 5)$

解説

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから、線分 AB の中点を M とすると、 M の y 座標は、 $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$

$P(p, 0)$ 、 $Q(q, q^2)$ とすると、 M は線分 PQ の中点でもあるから、 y 座標について、 $\frac{0+q^2}{2} = \frac{5}{2}$ $q^2=5$ $q<0$ より、

$q=-\sqrt{5}$ よって、 $Q(-\sqrt{5}, 5)$

【問 7】

図1で、点 O は原点、点 A の座標は $(-3, 0)$ 、曲線 ℓ は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを表している。点 B は曲線 ℓ 上にあり、座標は $(6, 18)$ である。曲線 ℓ 上にある点を P とする。次の各問に答えよ。

(東京都 2003 年度)

問1. 点 P の x 座標を a 、 y 座標を b とする。 a のとる値の範囲が $-3 \leq a \leq 4$ のとき、 b のとる値の範囲を不等号を使って、 $\square \leq b \leq \square$ で表せ。

問2. 点 P が点 B と一致するとき、2点 A, P を通る直線の式を求めよ。

問3. 図2は、図1において、 x 座標が6より小さい正の数である点 P を通り、 x 軸に平行な直線を m とし、直線 m と曲線 ℓ との交点のうち、 x 座標が負の数である点を Q とした場合を表している。点 A と点 P 、点 A と点 Q 、点 B と点 P 、点 B と点 Q を結んでできる四角形 $APBQ$ を考える。直線 m が四角形 $APBQ$ の面積を2等分するとき、点 P の座標を求めよ。ただし、答えに根号がふくまれるときは、根号をつけたままで表せ。

図 1

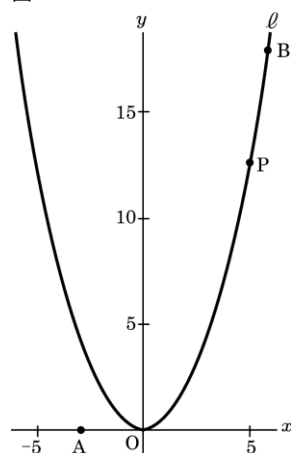
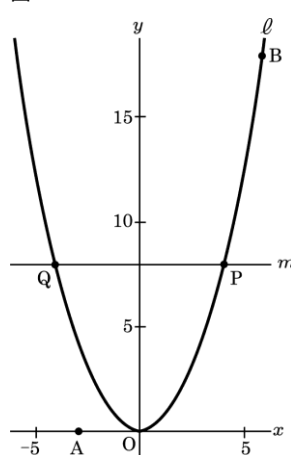


図 2



解答欄

問1	$\leq b \leq$
問2	$y =$
問3	(,)

解答

問1. $0 \leq b \leq 8$ 問2. $y = 2x + 6$ 問3. $(3\sqrt{2}, 9)$

解説

問1

点 P は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあるから, $b = \frac{1}{2}a^2$ $a = 0$ のとき $b = 0$ $a = 4$ のとき $b = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ よって, $0 \leq b \leq 8$

問2

求める直線の式を $y = mx + n$ とおくと, 点 A を通るから, $0 = -3m + n \cdots \text{①}$

点 P を通るから, $18 = 6m + n \cdots \text{②}$

② - ①より, $18 = 9m$ $m = 2$

これを①に代入して, $n = 6$ よって, $y = 2x + 6$

問3

直線 m が四角形 APBQ の面積を2等分するとき, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ となる。このとき, 底辺 PQ が共通だから, 高さも等しくなる。点 P の y 座標を p とすると, $p - 0 = 18 - p$ $2p = 18$ $p = 9$ 点 P は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあるから $9 = \frac{1}{2}x^2$
 $x^2 = 18$

$x > 0$ より, $x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ よって, $P(3\sqrt{2}, 9)$

【問 8】

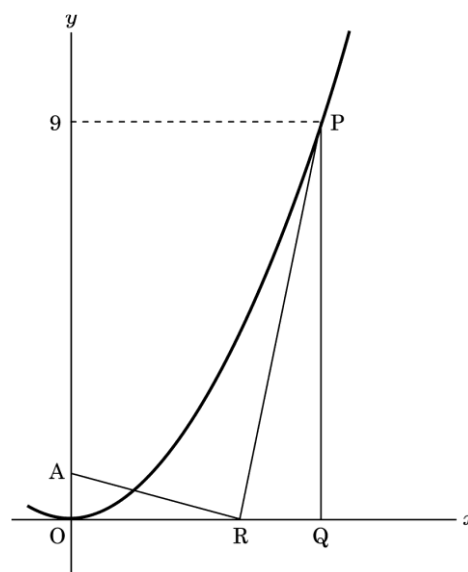
図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフの上に、 x 座標が正で y 座標が 9 である点 P をとる。この点 P から、 x 軸に引いた垂線と x 軸との交点を Q、原点を O として、線分 OQ 上の点 R の座標を $(a, 0)$ とする。また、 y 軸上の点 A の座標を $(0, 1)$ とするとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(新潟県 2003 年度)

(1) 点 P の x 座標を求めなさい。

(2) $\triangle AOR$ の面積と $\triangle RQP$ の面積の和が 18 となるとき、 a の値を求めなさい。

(3) $a > 1$ で、 $\triangle AOR \sim \triangle RQP$ となるとき、 a の値を求めなさい。



解答欄

(1)	
(2)	$a =$
(3)	$a =$

解答

(1) 6 (2) $a = \frac{9}{4}$ (3) $a = 3$

解説

(1)
 $9 = \frac{1}{4}x^2$ より、 $x = \pm 6$ 点 P の x 座標は正だから、その座標は $(6, 9)$ である。

(2)
 $\triangle AOR = \frac{1}{2} \times a \times 1 = \frac{1}{2}a$ $\triangle RQP = \frac{1}{2} \times (6-a) \times 9 = \frac{9}{2}(6-a)$

以上より、 $\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}(6-a) = 18$ これを解くと、 $a = \frac{9}{4}$

(3)
 $\angle AOR = \angle RQP = 90^\circ$ だから、直角をはさむ2組の辺の比が等しいとき、 $\triangle AOR$ と $\triangle RQP$ はたがいに相似になる。
 $AO : RQ = OR : QP$ $1 : (6-a) = a : 9$ $a(6-a) = 9$ これを解くと、 $a = 3$

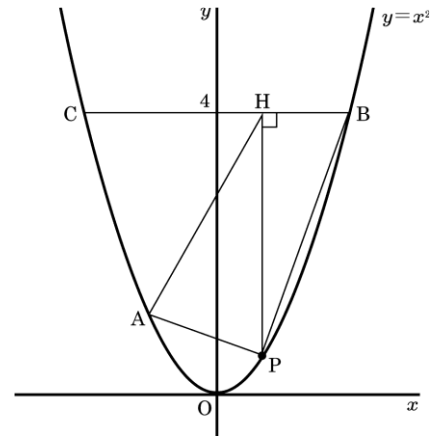
【問 9】

図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に、2点 $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ をとり、点 B と y 軸について対称な点を C とする。また、点 P は放物線上を A から B まで動き、点 P から線分 BC にひいた垂線と線分 BC との交点を H とする。

このとき、次の(1), (2)に答えなさい。

(石川県 2003 年度)

- (1) 点 P の y 座標が 2 のとき、点 H の座標を求めなさい。なお、解答欄の には答だけを書くこと。



- (2) 点 P の x 座標が $\frac{1}{2}$ のとき、四角形 APBH の面積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

解答欄

(1)	
(2)	計算 答

解答

(1) $(\sqrt{2}, 4)$ (2) $\frac{45}{8}$

解説

- (1)

点 P の y 座標が 2 だから x 座標は, $2=x^2$ から, $x=\pm\sqrt{2}$

点 P の x 座標は正の数だから, $x = \sqrt{2}$ よって, 点 H の座標は $(\sqrt{2}, 4)$

- (2)

点 P の x 座標が $\frac{1}{2}$ のとき y 座標は $\frac{1}{4}$ だから, $\text{PH} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

また、点 B の y 座標は 4 だから、 x 座標は、 $4=x^2$, $x>0$ から、 $x=2$

よって、求める四角形 APBH の面積は、 $\triangle APH + \triangle BPH = \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times \{(\frac{1}{2} + 1) + (2 - \frac{1}{2})\} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times 3 = \frac{45}{8}$

【問 10】

図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 $y=2x+3$ が2点 A, B で交わっている。点 P は、 $y=ax^2$ のグラフ上を A から B まで動く。また、直線 $y=2x+3$ と x 軸との交点を C、点 B から x 軸に垂線をひき、 x 軸との交点を D とする。点 A, B の x 座標は、それぞれ、 $-1, 3$ である。

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2003 年度)

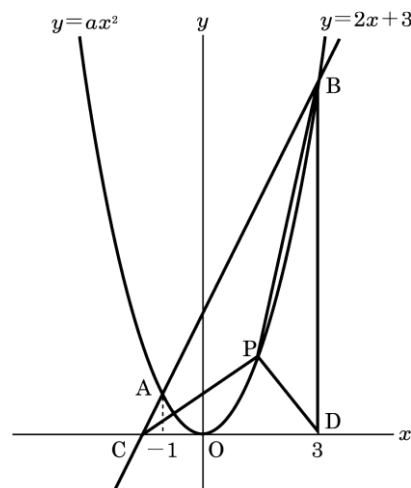
- (1) a の値を求めよ。また、関数 $y=ax^2$ について、 $-1 \leq x \leq 3$ のときの y の変域を求めよ。

- (2) 点 C の座標を求めよ。

- (3) 点 P の x 座標を t とする。点 P が $y=ax^2$ のグラフ上を A から B に向かって動くとき、

ア $\triangle BDP$ の面積はどのように変化していくか。 ☐ の中で適当なものを1つ選び、 ☐ で囲め。また、その理由を述べよ。

イ $\triangle BDP$ の面積が $\triangle CDP$ の面積の $\frac{1}{2}$ になるときの t の値を求めよ。



解答欄

(1)	$a=$	y の変域
(2)	C (,)	
(3)	ア	$\triangle BDP$ の面積は ☐ 増加する ☐ 一定である ☐ 減少する
		理由
	イ	$t=$

解答

(1) $a=1$, y の変域 $0 \leq y \leq 9$ (2) $C(-\frac{3}{2}, 0)$

(3) ア イ $t=2$

$\triangle BDP$ の面積は減少する

理由

P から BD に垂線 PH をひくと, $BD=9$, $PH=3-t$ だから,

$\triangle BDP$ の面積を S とすると,

$$\triangle BDP = \frac{1}{2} \times BD \times PH \text{ より } S = \frac{1}{2} \times 9 \times (3-t) = -\frac{9}{2}t + \frac{27}{2} \text{ となり,}$$

t の値が -1 から 3 まで増加するとき S の値は 18 から 0 まで減少する。

解説

(1)
点 B の x 座標は 3 で $y=2x+3$ 上の点だから $B(3, 9)$ $y=ax^2$ は点 B を通るから, $9=a \times 3^2$ $a=1$ また, $y=x^2$ において $-1 \leq x \leq 3$ だから, y の値は, $x=0$ で最小となり $y=0$, $x=3$ で最大となり $y=3^2=9$ よって y の変域は $0 \leq y \leq 9$

(2)
 $y=2x+3$ に $y=0$ を代入して, $0=2x+3$ $x=-\frac{3}{2}$ よって, $C(-\frac{3}{2}, 0)$

(3)
ア P から BD に垂線 PH をひくと, $BD=9$, $PH=3-t$ だから, $\triangle BDP$ の面積を S とすると, $\triangle BDP = \frac{1}{2} \times BD \times PH$ より, $S = \frac{1}{2} \times 9 \times (3-t) = -\frac{9}{2}t + \frac{27}{2}$

t の値が -1 から 3 まで増加するとき, S の値は 18 から 0 まで減少する。

イ 点 P は $y=x^2$ 上にあるから, $P(t, t^2)$ $CD=3-(-\frac{3}{2})=\frac{9}{2}$ より,

$$\triangle CDP = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times t^2 = \frac{9}{4}t^2 \quad \triangle BDP = \frac{1}{2} \triangle CDP \text{ より, } -\frac{9}{2}t + \frac{27}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4}t^2$$

$$9t^2 + 36t - 108 = 0 \quad t^2 + 4t - 12 = 0 \quad (t+6)(t-2) = 0 \quad t = -6, 2 \quad -1 \leq t \leq 3 \text{ より, } t = 2$$

【問 11】

図において①は関数 $y=ax^2$, ②は関数 $y=bx^2$ のグラフであり, ①は点 $A(2, 2)$ を通る。 x 座標が -4 である①上の点を B とする。また, ③は2点 A, B を通る直線である。

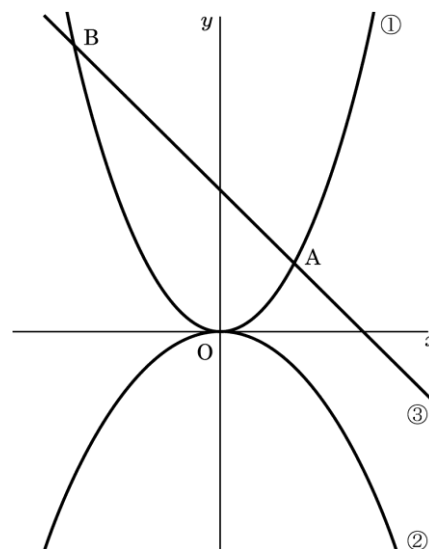
このとき, 次の1～3に答えなさい。

(山梨県 2003 年度)

1. a の値を求めなさい。

2. ③の式を求めなさい。

3. 線分 AB を1辺とする正方形 $ABCD$ をかくと, 対角線 AC は x 軸と平行になり, 頂点 D は②の上にくる。このとき, b の値を求めなさい。



解答欄

1	$a =$
2	
3	$b =$

解答

1 $a = \frac{1}{2}$ 2 $y = -x + 4$ 3 $b = -\frac{1}{4}$

解説

1
 $y=ax^2$ は点 $A(2, 2)$ を通るので, $a=\frac{1}{2}$
 2
 点 B は $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点なので, 座標は $(-4, 8)$ である。③の式を, $y=cx+d$ とすると $2c+d=2 \cdots (i)$ $-4c+d=8$
 $\cdots (ii)$ これを解いて, $y=-x+4$
 3
 頂点 D の x 座標は頂点 B の x 座標と同じ。また, BD の中点の y 座標は点 A の y 座標なので, 頂点 D の y 座標は -4 である。よって, ②の関数は $y=-\frac{1}{4}x^2$

【問 12】

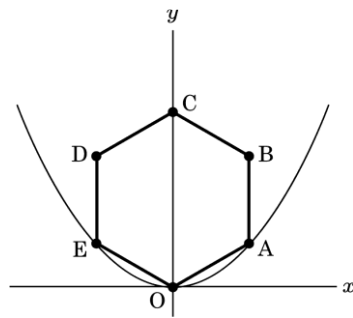
図で、 O は原点、 A, E は関数 $y=ax^2$ (a は定数)のグラフ上の点で、六角形 $OABCDE$ は正六角形である。

点 C の座標が $(0, 6)$ のとき、次の①、②の問いに答えよ。

(愛知県 2003 年度 A)

① 直線 DB の式を求めよ。

② a の値を求めよ。



解答欄

①	$y =$
②	$a =$

解答

① $y = \frac{9}{2}$ ② $a = \frac{2}{9}$

解説

①

OC の中点を M とすると $CM = CB$ より、 $CB = 3$ 、 OC と DB の交点を F とすると、正六角形の1つの内角は 120° だから、 $\angle BCF = 60^\circ$ より、 $\triangle CBF$ は 30° 、 60° 、 90° の直角三角形になる。

したがって、 $CF:BF:CB = 1:\sqrt{3}:2$ より、 $CF = \frac{3}{2}$ $FO = CO - CF = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

よって直線 DB は点 $(0, \frac{9}{2})$ を通り、 x 軸に平行な直線だから直線 DB の式は、 $y = \frac{9}{2}$

②

OC と AE の交点を G とし、①と同様に考えると、 $OA = 3$ 、 $OG = \frac{3}{2}$ 、 $GA = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ となるので、点 A の座標は $(\frac{3\sqrt{3}}{2},$

$\frac{3}{2})$ となる。これを、 $y = ax^2$ に代入して、 $\frac{3}{2} = a \times (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2$ $\frac{3}{2} = \frac{27}{4}a$ $a = \frac{3}{2} \div \frac{27}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{27} = \frac{2}{9}$

【問 13】

まりこさんとけんたさんは、身のまわりにあることから、ともなって変わる2つの数量の関係が反比例になるものについて話し合いました。下の2人の会話文を読み、あとの各問いに答えなさい。

(三重県 2003 年度)

(けんた) ともなって変わる2つの数量 x , y の関係が $y = \frac{a}{x}$ (a は定数)で表されるとき, y は x に反比例するといいますね。

(まりこ) 1辺の長さが x cmの正方形の面積を y cm²とすると, x と y の関係を式に表すと, (ア) となるから, この x と y の関係は反比例ではありません。

(けんた) (※)「6 kmの道のりを時速 x kmで進むとき y 時間かかる」とすると, x と y の関係は, $y = \frac{6}{x}$ という式になります。この x と y の関係は反比例です。

(まりこ) けんたさんが言った, 道のりが一定のときの速さと時間の関係以外に, 身のまわりには, $y = \frac{6}{x}$ という式で表すことができる反比例の関係はありますか。

(けんた) たとえば, 「(イ)」とすると, $y = \frac{6}{x}$ という式で表すことができます。

① (ア) にあてはまる式を書きなさい。

② (イ) にあてはまる, x と y の関係を表すことがらを, 数量には単位などもつけ, 下線部(※)を参考にして1つ書きなさい。ただし, 変域についてふれる必要はない。

解答欄

①	
②	

解答

① $y = x^2$

②

- ・面積が6cm²の長方形のたての長さが x cmのとき, 横の長さが y cmである
- ・6リットルの水を水そうに入れるとき毎分 x リットルずつ水を入れると y 分かかる

解説

① (ア) (正方形の面積)=(1辺の長さ)²より, $y = x^2$

② (イ)

例1) 面積が6 cm²の長方形のたての長さが x cmのとき, 横の長さが y cmである。

例2) 6リットルの水を水そうに入れるとき毎分 x リットルずつ水を入れると y 分かかる。

【問 14】

図のように、2つの関数

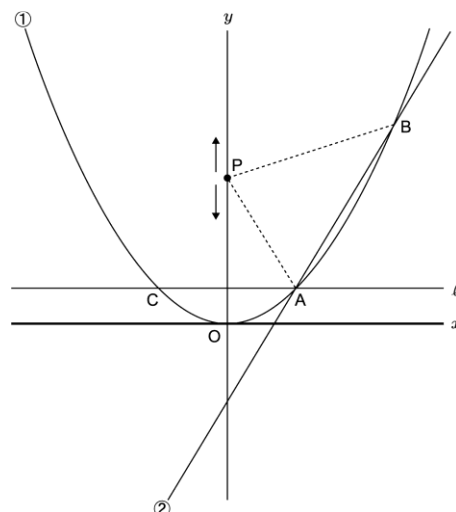
$$y=ax^2 \ (a>0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y=\frac{3}{2}x-2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

のグラフが2点 A, B で交わっており、点 A の x 座標は 2, 点 B の x 座標は 4 である。点 A を通り、 x 軸に平行な直線 ℓ と $\textcircled{1}$ のグラフの2つの交点のうち、点 A と異なる点を C とする。また、 y 軸上を動く点を P とし、その y 座標を t とする。

このとき、次の問い(1)・(2)に答えよ。

(京都府 2003 年度)



(1) a の値と点 C の座標を求めよ。

(2) 2つの線分の長さの和 $AP+PB$ が最小となるときの t の値を求めよ。

解答欄

(1)	$a=$, 点C(,)
(2)	$t=$

解答

(1) $a = \frac{1}{4}$, 点C (−2, 1) (2) $t = 2$

解説

(1)

$y = \frac{3}{2}x - 2$ に $x = 2$ を代入すると $y = 1$ さらにこれを $y = ax^2$ に代入すると、 $1 = 4a$, $a = \frac{1}{4}$

また点 C は点 A と y 軸に対して対称の位置にあるから、点 A と点 C の x 座標は絶対値が等しく、符号は反対である。よって、点 C(−2, 1)

(2)

$CP+PB$ が最小になるのは点 P が直線 CB 上にあるときである。また $PC=PA$ だから、 $AP+PB$ が最小になるのも同様のときである。直線 CB の式を求めると $y = \frac{1}{2}x + 2$ だから、 $t = 2$ である。

【問 15】

図Ⅰの①は、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフである。点 A, B は、①上の点で、点 C は、直線 AB と x 軸との交点である。また、点 A の x 座標は負の数で、点 B の x 座標は 2, $AB:BC=3:1$ とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

ただし、原点 O と点(1, 0), 点(0, 1)との距離をそれぞれ 1 cm とする。

(鳥取県 2003 年度)

問1. 2点 A, B の座標を求めなさい。

問2. 図Ⅱのように、図Ⅰで、 y 軸について点Aと対称な点をDとし、直線BDと x 軸との交点をEとする。このとき、線分CEの長さを求めたい。

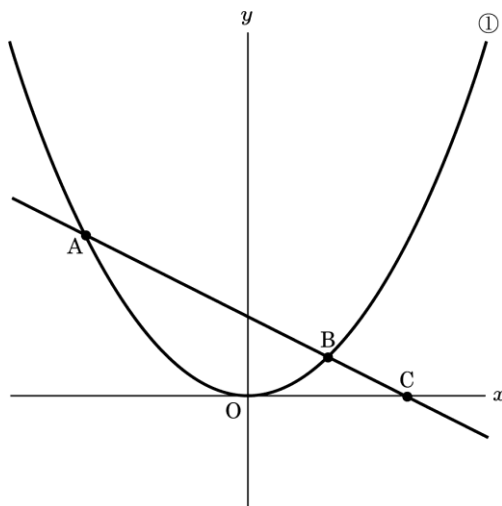
- (1) 高志さんは、直線 BD の式を用いて線分 CE の長さを求めた。 にはあてはまる式を、 にはあてはまる数を書きなさい。

《高志さんの求め方》

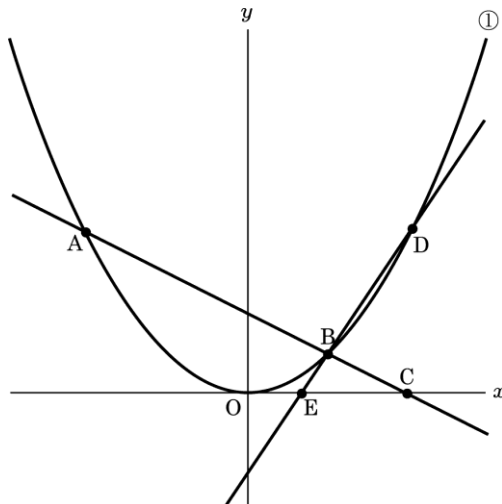
直線 BD の式は、 $y =$
 $y=0$ として、点 E の x 座標を求め、
 点 C の x 座標との差を計算すると、
 $CE =$ cm

- (2) 良子さんは、「直線 BD の式を用いなくても、 $AB:BC=3:1$ であることを利用すれば、線分 CE の長さを求めることができる」と考えました。良子さんの考えをもとにした線分 CE の長さの求め方を説明しなさい。

図Ⅰ



図Ⅱ



解答欄

問1	A (,)		B (,)	
問2	(1)	ア	$y =$	イ $CE =$ cm
	(2)	説明		

解答

問1. $A(-4, 4)$ $B(2, 1)$ 問2. (1) ア $y = \frac{3}{2}x - 2$ イ $CE = \frac{8}{3} \text{ cm}$

(2)

説明

$AD \parallel CE$, $AB:BC = 3:1$ だから $AD:CE = 3:1$

したがって, $8:CE = 3:1$ よって, $CE = \frac{8}{3} \text{ cm}$

解説

問1

B は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点だから $x=2$ を代入して $y = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$ よって, $B(2, 1)$

2 点 A, B から x 軸上にそれぞれ垂線 AA' , BB' をひくと, $\triangle CAA' \sim \triangle CBB'$ より,
 $AA':BB' = AC:BC = (3+1):1 = 4:1$ よって, $AA' = 4$

A は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点だから $y=4$ を代入して $4 = \frac{1}{4}x^2$ $x^2 = 16$ $x < 0$ より $x = -4$

したがって, $A(-4, 4)$

問2

(1) y 軸について点Aと対称だから, $D(4, 4)$

直線 BD の式を $y = ax + b$ とおくと, 点 B を通るから,

$1 = 2a + b \cdots (i)$ 点 D を通るから, $4 = 4a + b \cdots (ii)$

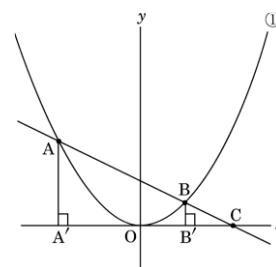
(i), (ii) の連立方程式を解いて, $a = \frac{3}{2}$, $b = -2$

よって, $y = \frac{3}{2}x - 2$ これに $y=0$ を代入して, $0 = \frac{3}{2}x - 2$

$x = \frac{4}{3}$ また, $A'B':B'C = AB:BC = 3:1$ より, $B'C = \frac{1}{3}A'B' = \frac{1}{3} \times \{2 - (-4)\} = 2$ よって, $OC = 2 + 2 = 4$ し

たがって, $CE = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}$

(2) $AD \parallel CE$, $AB:BC = 3:1$ だから, $AD:CE = 3:1$ したがって, $8:CE = 3:1$ よって, $CE = \frac{8}{3} \text{ cm}$



【問 16】

1 辺の長さ 12 cm の正方形の厚紙がある。図1のように、四すみから同じ大きさの正方形を切り取って、破線にそって折り曲げ、図2のようなふたのない箱をつくる。切り取る正方形の1辺の長さを x cm とする。

次の問1, 問2に答えなさい。

(島根県 2003 年度)

図1

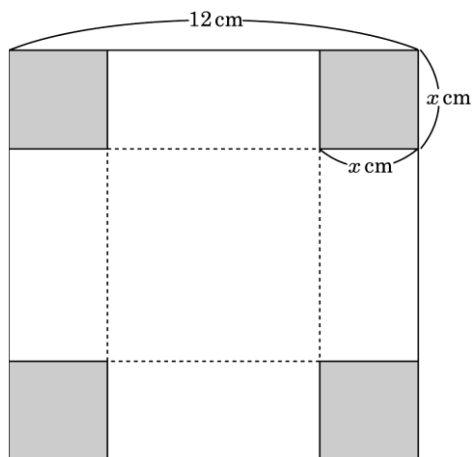
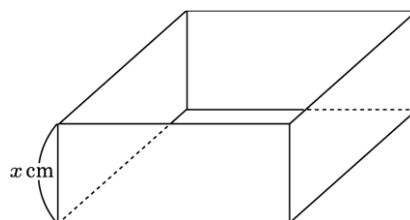


図2



問1. 次の1, 2に答えなさい。

1. 箱の底面の1辺の長さを y cm とする。次の の中にあてはまる数または式を書き入れなさい。

(1) x の変域は $< x <$ である。

(2) y を x の式で表すと, $y =$ となる。

2. 箱の形が立方体になるのは、切り取る正方形の1辺の長さが何 cm のときか、求めなさい。

問2. x の値を1, 2, 3, ...と変えていく。箱の底面積を S cm², 箱の容積を V cm³とし, その変化のようすを下のような表にまとめた。 ア イ にあてはまる数を求めなさい。

表

x	1	2	3	4	...
底面積 S	100	64	ア		...
容積 V	100	128		イ	...

解答欄

問1	1	(1)	$0 < x < 6$
		(2)	$y = 12 - 2x$
	2	4 cm	
問2	ア 36		イ 64

解答

問1

1

(1) $0 < x < 6$

(2) $y = 12 - 2x$

2

4 cm

問2

ア 36

イ 64

解説

問1

1

(1)

12 cm のはばから1辺の長さ x cm の正方形を2つ切り取るから, x の変域は $0 < x < 6$

(2)

(1)のとき, $y = 12 - 2x$

2. $y = x$ だから, $12 - 2x = x$ $-3x = -12$ $x = 4$ cm

問2

$S = y^2 = (12 - 2x)^2$ $x = 3$ を代入して $S = (12 - 6)^2 = 36$ $V = Sx = x(12 - 2x)^2$

$x = 4$ を代入して, $V = 4 \times (12 - 8)^2 = 64$

【問 17】

2点 A(1, 1), B(4, 3)の間の距離は, AB= である。

(岡山県 2003 年度)

解答欄

解答

$\sqrt{13}$

解説

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

【問 18】

図のように、 x の変域を $-3 \leq x \leq 4$ とする関数 $y = x^2$ のグラフがあります。このグラフ上に3点 $A(-3, 9)$, $B(4, 16)$, $C(a, a^2)$ をとり、 x 軸上に点 $D(b, 0)$ をとります。ただし、 a は -2 から 3 までの整数であり、 $b > 0$ とします。

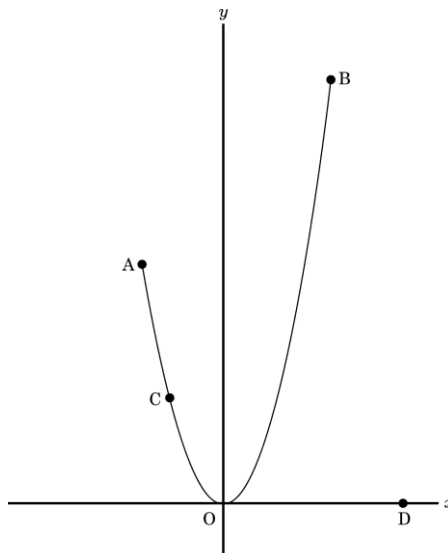
これについて、次の(1)～(3)に答えなさい。

(広島県 2003 年度)

(1) この関数の y の変域を求めなさい。

(2) この関数について、 x の値が a から 4 まで増加するときの変化の割合が最も大きくなるとき、 a の値を求めなさい。

(3) $a = -2$ とします。 $\triangle ACB$ と $\triangle ACD$ の面積が等しくなるとき、 b の値を求めなさい。



解答欄

(1)	$\leq y \leq$
(2)	
(3)	

解答

(1) $0 \leq y \leq 16$ (2) 3 (3) $\frac{36}{5}$

解説

(1) $y = x^2$ において、 x の変域が、 $-3 \leq x \leq 4$ より、 y の値は $x=0$ のとき最小となり $y=0$ $x=4$ のとき最大となり、 $y = 4^2 = 16$ よって、 y の変域は、 $0 \leq y \leq 16$

(2) $y = x^2$ において、 x の値が a から 4 まで増加するときの変化の割合は、

$\frac{4^2 - a^2}{4 - a} = \frac{(4+a)(4-a)}{4-a} = 4+a$ a は -2 から 3 までの整数であるから、 $a=3$ のとき $4+a=7$ で、変化の割合は最も大きくなる。

(3) $a = -2$ のとき、 $C(-2, 4)$ $\triangle ACB = \triangle ACD$ のとき、 $BD \parallel AC$ となる。

直線 AC の傾きは、 $\frac{4-9}{-2-(-3)} = -5$ 、平行な2直線の傾きは等しいから、直線 BD の式を、 $y = -5x + n$ とおくと、点

$B(4, 16)$ を通るから、 $16 = -20 + n$ $n = 36$

よって、 $y = -5x + 36$ これに点 $D(b, 0)$ の座標を代入して、 $0 = -5b + 36$ $b = \frac{36}{5}$

【問 19】

図のように、原点を O とし、関数 $y=2x^2$ のグラフがある。2点 P, Q を x 軸上にとり、その x 座標をそれぞれ $t, t+1$ とする。また、点 P, Q と x 座標が等しく、関数 $y=2x^2$ のグラフ上にある点をそれぞれ A, B とする。

このとき、次の(1)～(5)の各問いに答えなさい。

(佐賀県 2003 年度)

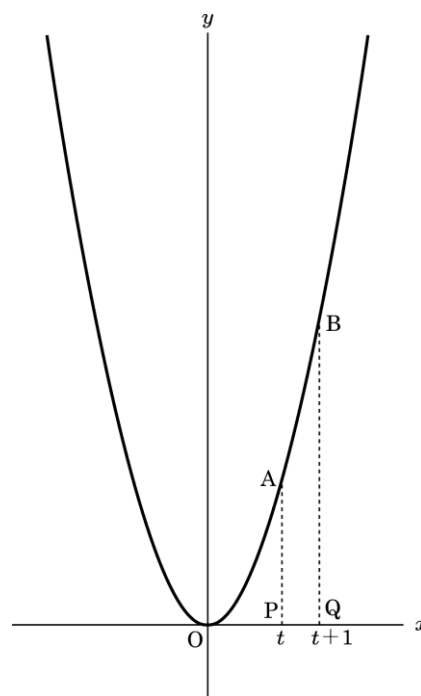
(1) $t=1$ のとき点 B の座標を求めなさい。

(2) $t=1$ のとき直線 AB の式を求めなさい。

(3) $t=-3$ のとき四角形 $APQB$ の面積を求めなさい。

(4) 四角形 $APQB$ の面積が 25 となるときの t の値を求めなさい。

(5) 線分 AB の長さが $\sqrt{2}$ となるときの t の値を求めなさい。



解答欄

(1)	(,)
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

解答

(1) $(2, 8)$

(2) $y=6x-4$

(3) 13

(4) $-4, 3$

(5) $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$

解説

(1)

点 B の x 座標は 2 であるから, $y=2 \times 2^2=8$

よって, B(2, 8)

(2)

(1)と同様にして, A(1, 2)

直線 AB の式を $y=ax+b$ とおくと, 2点 A, B を通るから, $2=a+b, 8=2a+b$

この連立方程式を解いて $a=6, b=-4$

よって $y=6x-4$

(3)

$t=-3$ のとき, A(-3, 18), B(-2, 8)だから

$$\text{四角形 APQB} = \frac{1}{2} \times (\text{AP} + \text{BQ}) \times \text{PQ} = \frac{1}{2} \times (18 + 8) \times 1 = 13$$

(4)

A($t, 2t^2$), B($t+1, 2(t+1)^2$)だから

$$\text{四角形 APQB} = \frac{1}{2} \times (\text{AP} + \text{BQ}) \times \text{PQ} = \frac{1}{2} \times \{2t^2 + 2(t+1)^2\} \times 1 = 2t^2 + 2t + 1$$

$$\text{よって } 2t^2 + 2t + 1 = 25 \quad t^2 + t - 12 = 0 \quad (t+4)(t-3) = 0 \quad t = -4, 3$$

(5)

$$\text{C}(t+1, 2t^2)\text{とすると, 直角三角形 ACB に三平方の定理を用いて, } \text{BC} = \sqrt{\text{AB}^2 - \text{AC}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 1$$

$$\text{よって, } 2(t+1)^2 - 2t^2 = 1 \text{ のとき } 4t = -1 \quad t = -\frac{1}{4}$$

$$\text{また, } 2t^2 - 2(t+1)^2 = 1 \text{ のとき } -4t = 3 \quad t = -\frac{3}{4}$$

【問 20】

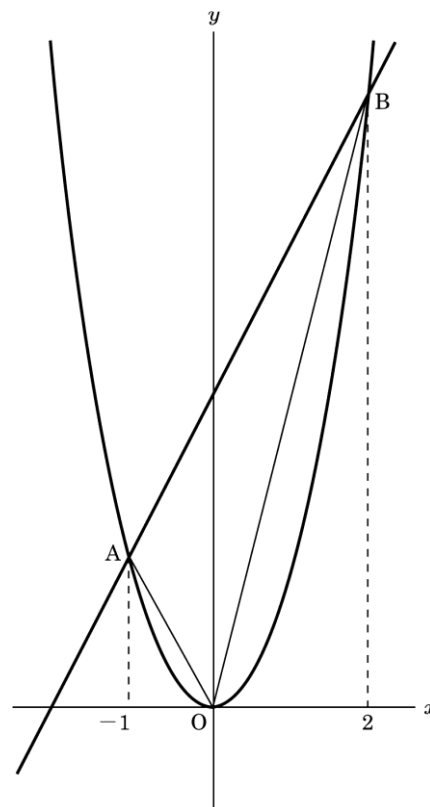
図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に、点 A、B がある。点 A、B の x 座標がそれぞれ $-1, 2$ 、また、直線 AB の傾きが 2 であるとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(大分県 2003 年度)

(1) a の値を求めなさい。

(2) y 軸上に点 $C(0, p)$ をとり、 $\triangle ACB$ の面積が $\triangle AOB$ の面積の $\frac{1}{4}$ 倍になるようにする。このとき、 p の値をすべて求めなさい。

(3) x 軸上に点 D をとり、 $\triangle ADB$ の面積が $\triangle AOB$ の面積の $\frac{5}{4}$ 倍になるようにする。このとき、点 D の座標を求めなさい。ただし、点 D の x 座標は正とする。



解答欄

(1)	$a =$
(2)	
(3)	(,)

解答

(1) $a=2$ (2) $p=3, p=5$ (3) $(\frac{1}{2}, 0)$

解説

(1) $y=ax^2$ の x に $-1, 2$ を代入して、点 A の y 座標は a 、点 B の y 座標は $4a$ で、直線 AB の傾きが 2 だから、
 $\frac{4a-a}{2-(-1)}=2, a=2$

(2) 直線 AB は傾きが 2 だから、 $y=2x+b$ とおくと、点 A $(-1, 2)$ を通るから $2=-2+b, b=4$ よって直線 AB の式は $y=2x+4$ だから直線 AB の切片は 4 で、求める点 C の y 座標は、 4 より 1 小さい 3 と、 1 大きい 5

(3) 2点 $(-1, 0), (2, 0)$ を H, K とし、求める点 D の座標を $(x, 0)$ とすると、

$$\triangle ADB = \triangle AOB \times \frac{5}{4} = 4 \times (2+1) \div 2 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{2}$$

$$\triangle ADB = \text{台形 AHKB} - \triangle AHD - \triangle DKB = \frac{(2+8) \times 3}{2} - \frac{(x+1) \times 2}{2} - \frac{(2-x) \times 8}{2} = 15 - x - 1 - 8 + 4x = 3x + 6$$

$$3x + 6 = \frac{15}{2}, 6x + 12 = 15, x = \frac{1}{2}$$

【問 21】

図のように、2つの関数

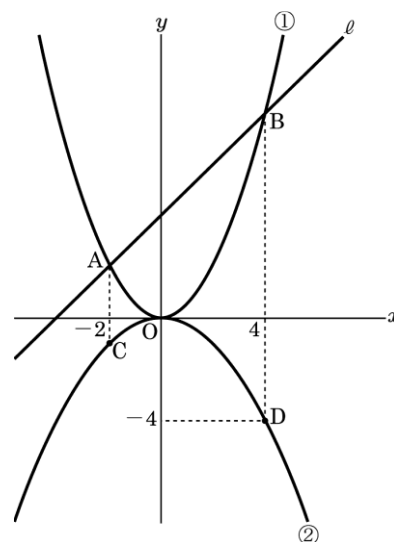
$$y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = ax^2 \cdots \textcircled{2}$$

のグラフと直線 ℓ がある。①のグラフは直線 ℓ と2点 A, B で交わり、点 C, D は②のグラフ上の点である。また、点 A, C の x 座標は -2 、点 B の x 座標は 4 、点 D の座標は $(4, -4)$ である。

このとき、次の(1)～(4)の問いに答えなさい。

(宮崎県 2003 年度)



(1) a の値を求めなさい。

(2) 点 A の座標を求めなさい。

(3) 直線 ℓ の式を求めなさい。

(4) x 軸上に点 P をとり、 $\triangle BAP = \triangle BCD$ となるようにする。このような点 P の x 座標のうち、正の値を求めなさい。

解答欄

(1)	$a =$	(2)	(,)
(3)		(4)	

解答

(1) $a = -\frac{1}{4}$

(2) $(-2, 2)$

(3) $y = x + 4$

(4) 8

解説

(1)

$D(4, -4)$ は $y = ax^2$ 上の点だから $-4 = a \times 4^2$ $a = -\frac{1}{4}$

(2)

A は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点だから, $x = -2$ を代入して, $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$

よって $A(-2, 2)$

(3)

B は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点だから, $B(4, 8)$

直線 ℓ の式を $y = mx + n$ とおくと, 2点 A, B を通るから

$2 = -2m + n \cdots (\text{i})$

$8 = 4m + n \cdots (\text{ii})$

(i), (ii) の連立方程式を解いて, $m = 1, n = 4$

よって $y = x + 4$

(4)

p を正の数として, $P(p, 0)$ とおく。直線 ℓ が x 軸と交わる点を E とすると

$y = x + 4$ に $y = 0$ を代入して, $x = -4$ $PE = p - (-4) = p + 4$ より

$\triangle BAP = \triangle BEP - \triangle AEP = \frac{1}{2} \times (p + 4) \times 8 - \frac{1}{2} \times (p + 4) \times 2 = 3p + 12$

また, $\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (8 + 4) \times (4 + 2) = 36$

$\triangle BAP = \triangle BCD$ より, $3p + 12 = 36$ $3p = 24$ $p = 8$

