

5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題 【2020 年度出題】

【問 1】

図 1 のように、点 O を中心とし、直径 AB が 8 cm である半円 O があり、 \widehat{AB} を 4 等分する点 C, D, E を \widehat{AB} 上にとる。線分 CB と線分 AE, OE との交点をそれぞれ F, G とする。次の問 1～問 3 に答えなさい。

(秋田県 2020 年度)

問 1 $\angle AOG$ の大きさを求めなさい。

問 2 $\triangle FAB$ が二等辺三角形であることを証明を、解答欄にしたがって書きなさい。

問 3 図 2 は、図 1 に線分 CA, CE をかき加えたものである。このとき、 $\triangle ACE$ の面積を求めなさい。

図 1

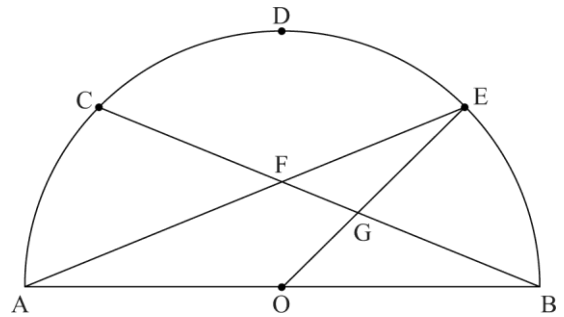
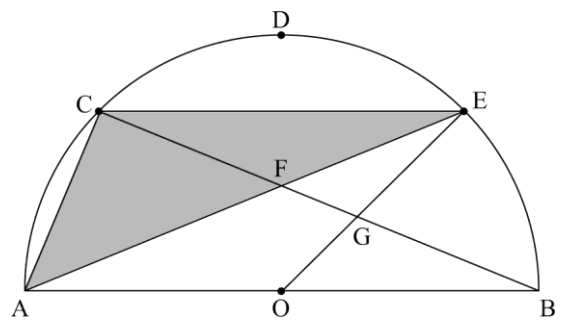


図 2



解答欄

問 1	。
問 2	<p>〔証明〕 $\triangle FAB$ において</p> <p>$\triangle FAB$ は二等辺三角形である。</p>
問 3	cm^2

解答

問 1 135 °

問 2

〔証明〕

△FAB において

仮定から、 $\widehat{AC} = \widehat{BE}$

等しい弧に対する円周角は等しいから、 $\angle ABC = \angle BAE$

よって、 $\angle ABF = \angle BAF$

したがって、2つの角が等しいから

△FAB は二等辺三角形である。

問 3 8 cm²

解説

問 1

$$\angle AOG = \angle AOE = 180 \times \frac{3}{4} = 135(\text{度})$$

問 3

\widehat{CDE} は半円の弧の半分だから、 $\angle COE = 90$ 度 △COE は辺の比が $1 : 1 : \sqrt{2}$ の三角形だから、

$CE = 4\sqrt{2}$ cm CE の中点を M とすると、 $OM \perp CE$ だから、 $OM = CE \div 2 = 2\sqrt{2}$ (cm)

$$\triangle ACE = CE \times OM \div 2 = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \div 2 = 8(\text{cm}^2)$$

【問2】

図1のように、点Oを中心とし、直径ABが12 cmである半円Oがあり、 \widehat{AB} を6等分する点C, D, E, F, Gを \widehat{AB} 上にとる。線分DBと線分OGの交点をHとする。次の問1～問3に答えなさい。

(秋田県 2020 年度)

問1 $\triangle HOB$ が二等辺三角形であることの証明を、解答欄にしたがって書きなさい。

問2 線分GHの長さを求めなさい。

問3 図2は、図1に線分AC, AD, AF, AGをかき加えたものである。このとき、 \widehat{CD} , 線分AC, ADによって囲まれた部分と、 \widehat{FG} , 線分AF, AGによって囲まれた部分の面積の和を求めなさい。ただし円周率を π とする。

図1

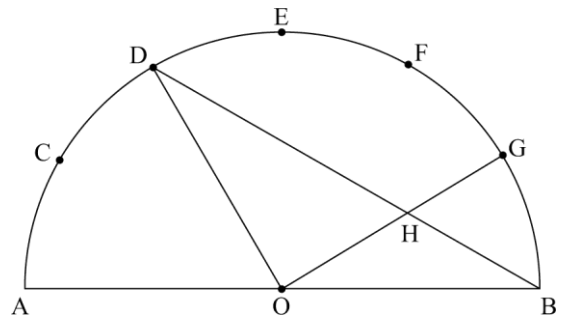
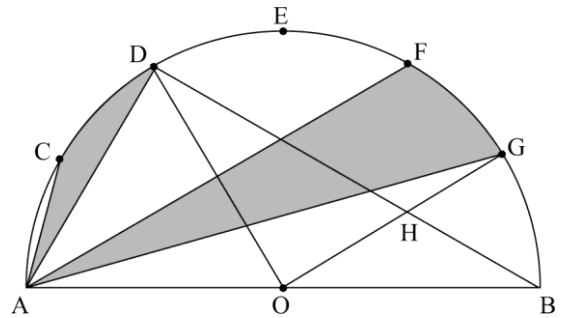


図2



解答欄

問1	<p>〔証明〕 $\triangle HOB$ において</p> <p>$\triangle HOB$ は二等辺三角形である。</p>	
問2	cm	
問3	cm^2	

解答

問 1

〔証明〕

△HOB において

$$\text{仮定から, } \widehat{BG} = \frac{1}{6}\widehat{AB}$$

おうぎ形の弧の長さは中心角に比例するから

$$\angle BOG = \angle BOH = 30^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{仮定から, } \widehat{AD} = \frac{1}{3}\widehat{AB}$$

おうぎ形の弧の長さは中心角に比例するから

$$\angle AOD = 60^\circ$$

円周角の定理から

$$\angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD = \angle OBH = 30^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より, $\angle BOH = \angle OBH$

したがって, 2つの角が等しいから

△HOB は二等辺三角形である。

$$\text{問 2 } 6 - 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{問 3 } 6\pi \text{ cm}^2$$

解説

問2

\widehat{GB} は半円の弧の $\frac{1}{6}$ だから、 $\angle GOB=180 \div 6=30$ (度)

$\triangle HOB$ は $HO=HB$ の二等辺三角形だから、 H と OB の中点 M を結ぶと $HM \perp OB$ となり、 $\triangle HOM$ は

$HM : OH : OM=1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形である。よって、

$OM=OB \div 2=3$ (cm) $OH=\frac{2}{\sqrt{3}}OM=2\sqrt{3}$ (cm)だから、

$GH=OG-OH=(6-2\sqrt{3})$ cm

問3

\widehat{FGB} は、半円の弧の $\frac{1}{3}$ だから、

$\angle FAB=\angle FOB \div 2=180 \div 3 \div 2=30$ (度)

問2より、 $\angle GOB=30$ 度 同位角が等しいから、 $FA \parallel GO$ よって、 $\triangle FAG=\triangle FAO \rightarrow$ この時点で求める面積は図3

次に、 \widehat{ACD} 、 \widehat{FED} はともに半円の弧の $\frac{1}{3}$ だから、

$\angle AOD=\angle FOD=60$ 度 よって、 $\triangle AOD$ 、 $\triangle FOD$ はともに正三角形であり、四角形 $ADFO$ はひし形である。

ひし形 $ADFO=2\triangle AOF=2\triangle AOD$ より、

$\triangle AOF=\triangle AOD$

\rightarrow この時点で求める面積は図4

さらに、 \widehat{AC} と弦 AC とで囲まれた部分の図形、

\widehat{FG} と弦 FG とで囲まれた部分の図形は合同だから、

\widehat{FG} と弦 FG とで囲まれた部分の図形をそのまま

\widehat{AC} と弦 AC とで囲まれた部分の図形に重ねることができる。

\rightarrow この時点で求める面積は図5のおうぎ形

以上から、求める図形の面積は、

おうぎ形 OAD の面積に等しくなる。

よって、おうぎ形 $OAD=6^2 \pi \div 6=6\pi$ (cm^2)

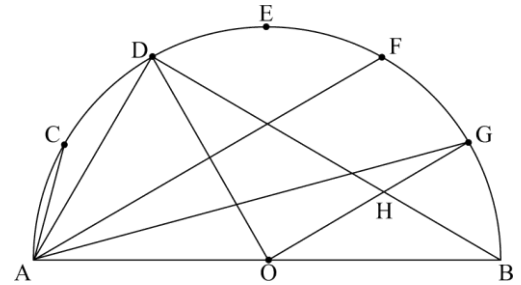
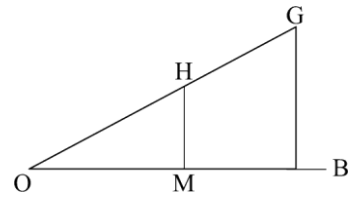


図3

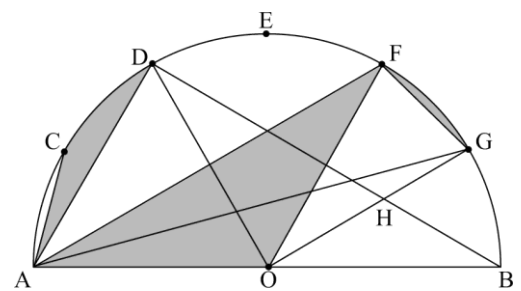


図4

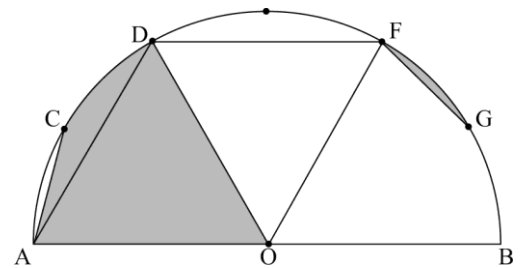
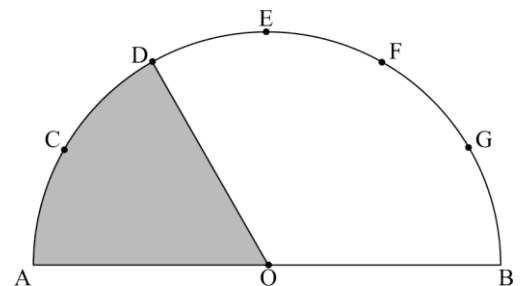


図5

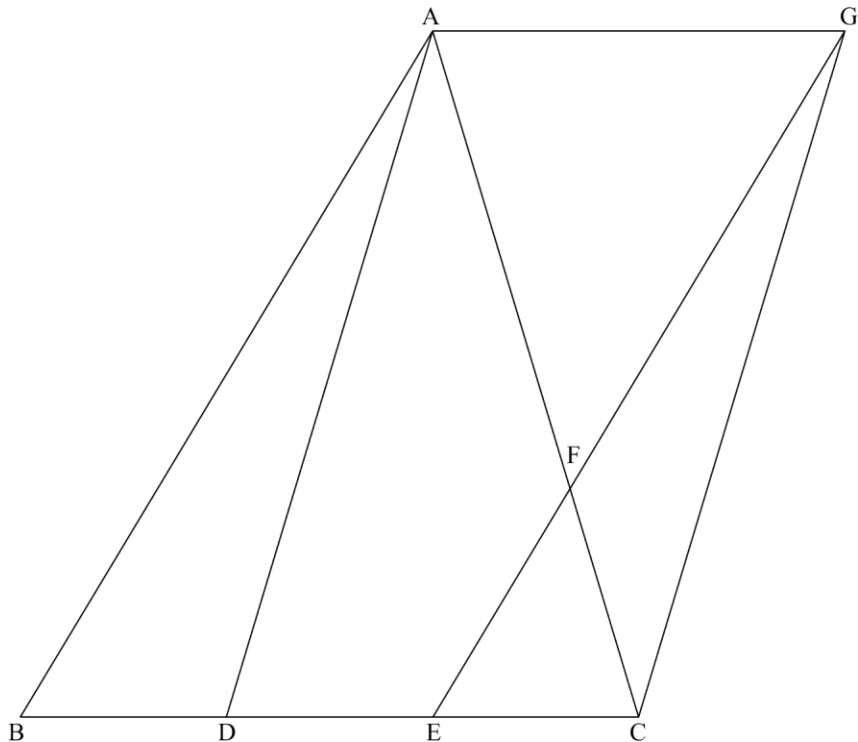


【問 3】

下の図のように、 $\triangle ABC$ の辺 BC 上に、 $BD=DE=EC$ となる 2 点 D, E をとる。 E を通り辺 AB に平行な直線と辺 AC との交点を F とする。 また、直線 EF 上に、 $EG=3EF$ となる点 G を直線 AC に対して E と反対側にとる。

このとき、四角形 $ADCG$ は平行四辺形であることを証明しなさい。

(福島県 2020 年度)



解答欄

[証明]

解答

〔証明〕例1

$\triangle ABD$ と $\triangle GEC$ において

仮定から $BD=EC$ …①

仮定より、平行線の同位角は等しいから

$\angle ABD=\angle GEC$ …②

$AB \parallel FE$ であるから、三角形と比の定理より

$AB:FE=CB:CE=3:1$ によって $AB=3FE$ …③

仮定から $GE=3FE$ …④

③, ④より $AB=GE$ …⑤

①, ②, ⑤より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \cong \triangle GEC$

したがって、 $AD=GC$ …⑥

また、 $\angle BDA=\angle ECG$ より、同位角が等しいから

$AD \parallel GC$ …⑦

⑥, ⑦より、1組の対辺が平行でその長さが等しいから

四角形 $ADCG$ は平行四辺形である。

〔証明〕例2

四角形 $ABEG$ において

仮定から $AB \parallel GE$ …①

$AB \parallel FE$ であるから、三角形と比の定理より

$AB:FE=CB:CE=3:1$ によって $AB=3FE$ …②

仮定から $GE=3FE$ …③

②, ③より $AB=GE$ …④

①, ④より、1組の対辺が平行でその長さが等しいから

四角形 $ABEG$ は平行四辺形である。

したがって、 $AG \parallel BE$ から $AG \parallel DC$ …⑤

また、平行四辺形の対辺は等しいから

$AG=BE$ …⑥

$BD=DE=EC$ より $BE=DC$ …⑦

⑥, ⑦より $AG=DC$ …⑧

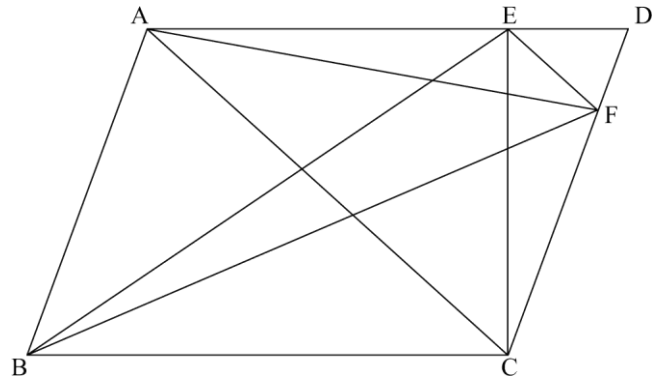
⑤, ⑧より、1組の対辺が平行でその長さが等しいから

四角形 $ADCG$ は平行四辺形である。

【問 4】

右の図の平行四辺形 ABCD において、点 E, F はそれぞれ辺 AD, CD 上の点であり、 $AC \parallel EF$ である。次の問 1～問 3 に答えなさい。

(群馬県 2020 年度 前期)



問 1 三角形 ABC と三角形 EBC の面積が等しいことを次のように証明した。

, に適する記号をそれぞれ入れなさい。

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle EBC$ について、ともに底辺を BC として考えると、 // より、高さが等しいといえる。したがって、底辺と高さがそれぞれ等しいので、 $\triangle ABC$ と $\triangle EBC$ の面積は等しい。

問 2 三角形 ADF と三角形 CDE の面積が等しいことを証明しなさい。

問 3 平行四辺形 ABCD の面積を 96cm^2 , $AE : ED = 3 : 1$ とする。四角形 EBF D の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	ア	
	イ	
問 2	〔証明〕	
問 3	cm^2	

解答

問 1

ア AD

イ BC

問 2

〔証明〕

$\triangle ADF$ の面積は、 $\triangle AEF$ の面積と $\triangle DEF$ の面積の和に等しく、 $\triangle CDE$ の面積は、 $\triangle CEF$ の面積と $\triangle DEF$ の面積の和に等しい。 $\triangle AEF$ と $\triangle CEF$ について、ともに底辺を EF として考えると、 $AC \parallel EF$ より、高さが等しいといえる。よって、底辺と高さがそれぞれ等しいので、 $\triangle AEF$ と $\triangle CEF$ の面積は等しい。

したがって、 $\triangle DEF$ が共通で、 $\triangle AEF$ と $\triangle CEF$ の面積が等しいので、 $\triangle ADF$ と $\triangle CDE$ の面積は等しい。

問 3 24 cm^2

解説

問 2

前設問である問 1 の考え方を利用する。

$\triangle ADF = \triangle AEF + \triangle DEF$ 、 $\triangle CDE = \triangle CEF + \triangle DEF$ である。ここで $\triangle AEF$ と $\triangle CEF$ について、ともに底辺を EF として考えると、 $AC \parallel EF$ より高さが等しいといえ、 $\triangle AEF = \triangle CEF$ である (1) の考え方)。その面積を S とすると、 $\triangle ADF = S + \triangle DEF$ 、 $\triangle CDE = S + \triangle DEF$ となり、 $\triangle ADF = \triangle CDE$ となる。

問 3

四角形 $EBFD =$ 平行四辺形 $ABCD - \triangle ABE - \triangle BCF$ (…①式) と考える。

$\triangle ABE$ について、 $\triangle ABD = 96 \div 2 = 48 \text{cm}^2$ であり、 $AE : ED = 3 : 1$ になるので、

$\triangle ABE = \triangle ABD \times \frac{3}{3+1} = 48 \times \frac{3}{4} = 36 \text{cm}^2$ となる。 $\triangle BCF$ も同様に考える。仮定の $AC \parallel EF$ より $CF : FD =$

$AE : ED = 3 : 1$ となる。

$\triangle BCF = \triangle BCD \times \frac{3}{3+1} = 36 \text{cm}^2$

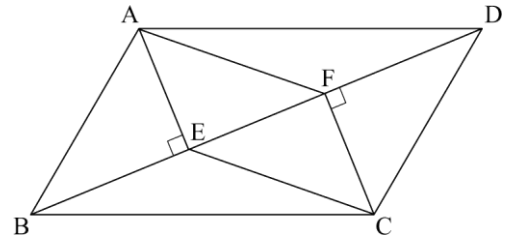
よって、四角形 $EBFD = 96 - 36 - 36 = 24 (\text{cm}^2)$

【問 5】

右の図のように、平行四辺形 $ABCD$ の頂点 A 、 C から対角線 BD に垂線をひき、対角線との交点をそれぞれ E 、 F とします。

このとき、四角形 $AECF$ は平行四辺形であることを証明しなさい。

(埼玉県 2020 年度)



解答欄

[証明]

解答

[証明]

$\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において

仮定から $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ \dots ①$

平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいので $AB = CD \dots ②$

また、 $AB \parallel DC$ から錯角は等しいので $\angle ABE = \angle CDF \dots ③$

①、②、③から、 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ は直角三角形で、斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので $\triangle ABE \cong \triangle CDF$

よって、 $AE = CF \dots ④$

また、 $\angle AEF = \angle CFE = 90^\circ$ から錯角が等しいので

$AE \parallel FC \dots ⑤$

④、⑤から、1 組の対辺が平行でその長さが等しいので、四角形 $AECF$ は平行四辺形である。

解説

平行四辺形であることを証明するには、次の 5 つのうちどれか 1 つ証明できればよい。

「2 組の向かいあう辺が、それぞれ平行であるとき」

「2 組の向かいあう辺が、それぞれ等しいとき」

「2 組の向かいあう角が、それぞれ等しいとき」

「対角線が、それぞれの midpoint で交わるとき」

「1 組の向かいあう辺が、等しくて平行であるとき」

また、これらを証明するために、 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ が合同であることを証明する必要がある。あることながらを証明するために、まず、三角形の合同を証明するパターンはよく出題される。

【問 6】

図 1, 図 2 において, $\triangle ABC$ は内角 $\angle BAC$ が鈍角の三角形であり, $AB < AC$ である。 $\triangle DAE \equiv \triangle ABC$ であり, D は辺 AC 上にあって, E は直線 AC について B と反対側にある。このとき, $AB \parallel ED$ である。 B と D とを結ぶ。このとき, $\triangle ABD$ は $AB = AD$ の二等辺三角形である。 F は, E を通り辺 AC に平行な直線と直線 BD との交点である。 F と C とを結ぶ。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 C 2020 年度)

問 1 図 1 において, 四角形 $EACF$ は平行四辺形であることを証明しなさい。

図 1

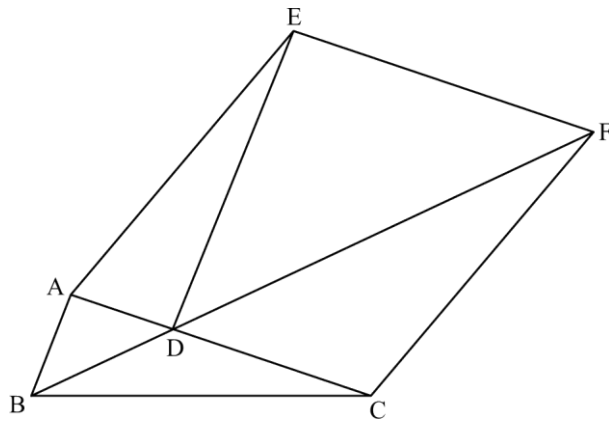
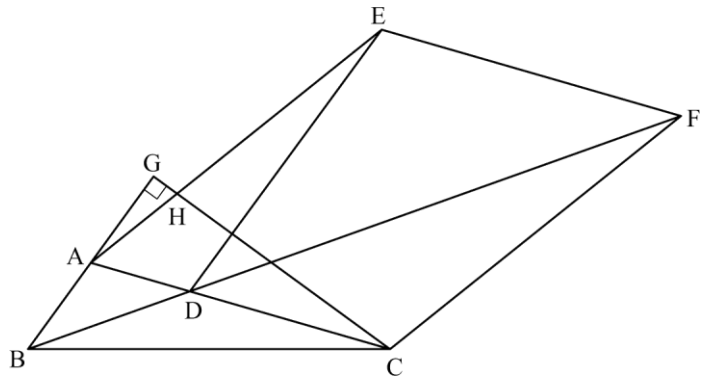


図 2



問 2 図 2 において, $AB = 2 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$ である。 G は C から直線 AB にひいた垂線と直線 AB との交点であり, $GA = 2 \text{ cm}$ である。 H は, 線分 GC と辺 EA との交点である。

- (1) 辺 BC の長さを求めなさい。
- (2) 線分 EH の長さを求めなさい。
- (3) 四角形 $EHCF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	cm ²

解答

問 1

〔証明〕

仮定より $EF \parallel AC \cdots \textcircled{7}$

$\triangle ABD$ は $AB=AD$ の二等辺三角形だから

$\angle ABD = \angle ADB \cdots \textcircled{1}$

$AB \parallel ED$ であり、平行線の同位角は等しいから

$\angle EDF = \angle ABD \cdots \textcircled{7}$

$EF \parallel AC$ であり、平行線の同位角は等しいから

$\angle EFD = \angle ADB \cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より $\angle EDF = \angle EFD$

よって、 $\triangle EDF$ は二等辺三角形だから

$EF = ED \cdots \textcircled{9}$

$\triangle ABC \cong \triangle DAE$ だから $CA = ED \cdots \textcircled{10}$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{10}$ より $EF = CA \cdots \textcircled{11}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{11}$ より、1組の対辺が平行でその長さが等しいから、四角形 $EACF$ は平行四辺形である。

問 2

(1) $4\sqrt{3}$ cm

(2) $\frac{14\sqrt{3}}{5}$ cm

(3) $\frac{102\sqrt{2}}{5}$ cm²

解説

問2

(1)

$\triangle ACG$ において三平方の定理により, $CG^2 = AC^2 - GA^2 = 6^2 - 2^2 = 32$

$CG > 0$ より $CG = 4\sqrt{2}$ (cm)

$\triangle BCG$ において三平方の定理により, $BC^2 = BG^2 + CG^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 = 48$

$BC > 0$ より $BC = 4\sqrt{3}$ (cm)

(2)

線分 GC と線分 DE との交点を I とする。仮定より $DI \parallel AG$ だから $\triangle ACG$ において平行線と線分の比を考える (図1) と,

$AB = AD = 2$ (cm) より, $CD : CA = DI : AG \Rightarrow 4 : 6 = DI : 2$

$\Rightarrow DI = \frac{4}{3}$ (cm)

同様に $AG \parallel IE$ だから $\triangle AHG$ と $\triangle EHI$ において平行線と線分の比を考える (図2) と, $\triangle DAE \equiv \triangle ABC$ から $DE = AC = 6$ (cm) より

$AH : EH = AG : EI \Rightarrow AH : EH = 2 : \frac{14}{3} = 3 : 7$

$\Rightarrow EH = \frac{7}{10}AE$

ここで, $AE = BC = 4\sqrt{3}$ (cm) より, $EH = \frac{7}{10} \times 4\sqrt{3} = \frac{14}{5}\sqrt{3}$ (cm)

(3)

(2) と同様にして, CI の長さを求める。まず $\triangle ACG$ (図1) において平行線と線分の比により

$CD : CA = CI : CG \Rightarrow 4 : 6 = CI : 4\sqrt{2} \Rightarrow CI = \frac{8}{3}\sqrt{2}$ (cm)

$\triangle CDE = \frac{1}{2} \times DE \times CI = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{8}{3}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (cm²)

図3 において, $\triangle ADE : \triangle CDE = AD : DC$ より

$\triangle ADE : 8\sqrt{2} = 2 : 4 \Rightarrow \triangle ADE = 4\sqrt{2}$ (cm²)

よって, $\triangle ACE = \triangle ADE + \triangle CDE = 12\sqrt{2}$ (cm²)

四角形 $EACF$ は平行四辺形なので, $\triangle ACE = \triangle CEF = 12\sqrt{2}$ (cm²)

また, $\triangle CAH : \triangle CEH = AH : HE = 3 : 7$ より

$\triangle CEH = \frac{7}{10} \triangle ACE = \frac{42}{5}\sqrt{2}$ (cm²)

よって, (四角形 $EHCF$) = $\triangle CEH + \triangle CEF = \frac{42}{5}\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$

$= \frac{102}{5}\sqrt{2}$ (cm²)

図1

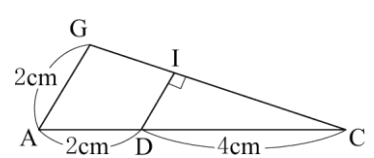


図2

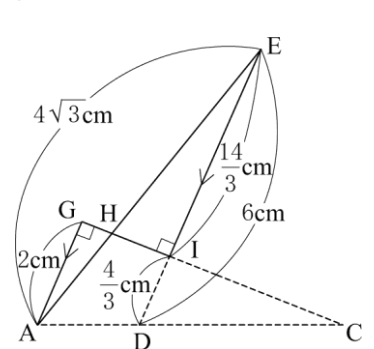
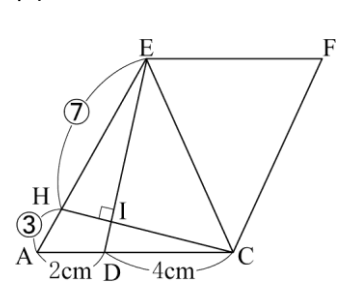


図3



【問7】

次の会話文は「課題学習」におけるグループ活動の一場面である。ひろしさんとよしこさんのグループは、写真の観覧車を題材に数学の問題をつくろうと考えた。以下の会話文を読んで、次の問1～問3に答えなさい。

(鹿児島県 2020 年度)

写真

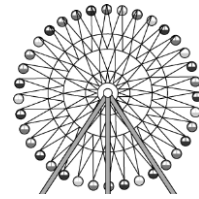
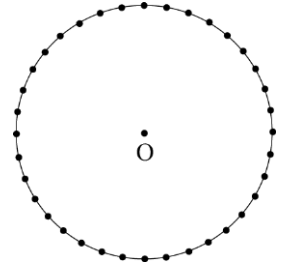


図1



ひろし：この観覧車は直径 60 m，ゴンドラのは数は 36 台で，1 周するのにちょうど 15 分かかるんだって。この観覧車を題材に，円に関する問題がつくれそうな気がするけど。

よしこ：まず，観覧車を円と考え，ゴンドラを円周上の点としてみよう。また，観覧車の軸を中心 O とすると，36 個の点が円周上に等間隔に配置されている図 1 のように表されるね。ここで隣り合う 2 つのゴンドラを，2 点 X，Y とすると…。

ひろし：まず，角の大きさが求められそうだね。∠XOY の大きさはいくらかかな。

よしこ：図をかいて，計算してみるね。……わかった。∠XOY の大きさは 度だね。

ひろし：いいね。じゃあ点 O を対称の中心として，点 Y と点对称となるように点 Z をとるときを考えてみよう。このとき∠XZY の大きさはいくらかかな。

よしこ：実際に図をかいて角の大きさを測ってみたら，さっきの∠XOY の半分になったよ。そういえば，1 つの弧に対する円周角は，その弧に対する中心角の半分であるって習ったよね。

ひろし：つまり，式で表すと $\angle XZY = \frac{1}{2} \angle XOY$ となるんだね。

よしこ：面白いね。では次はどこか 2 つのゴンドラの距離を求めてみようよ。いま，最高地点にあるものをゴンドラ①，5 分後に最高地点にあるものをゴンドラ②とする。この 2 つのゴンドラの距離を求めよ，なんてどうかな。さっきの図 1 だとどうなるかな。

ひろし：2 点間の距離だね。1 周 15 分だから。……できた。2 点間の距離は m だ。

先生：ひろしさんとよしこさんのグループはどんな問題を考えましたか。なるほど，観覧車を円と考え，角の大きさや距離を求める問題ですね。答えも合っていますね。次はどんな問題を考えてみますか。

よしこ：はい。面積を求める問題を考えてみます。点 O を対称の中心として，ゴンドラ②と点对称の位置にあるゴンドラをゴンドラ③とするとき，ゴンドラ①，②，③で三角形ができるから…。

ひろし：せっかくだから観覧車の回転する特徴も問題に取り入れたいな。でもゴンドラが移動するとごちゃごちゃしそうだし。先生，こんなときはどうしたらいいんですか。

先生：図形の回転ですか。たとえば，ある瞬間のゴンドラ①の位置を点 P とし，t 分後のゴンドラ①の位置を点 P' とするなど，文字でおいてみてはどうですか。もちろん，観覧車は一定の速さで，一定の方向に回転していますね。

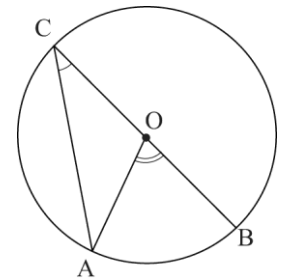
ひろし：わかりました。ゴンドラ②，③も同様に考えて，問題をつくってみます。

問1 , に適当な数を入れ、会話文を完成させよ。

問2 会話文中の下線部について、次の問いに答えよ。

図2は、線分BCを直径とする円Oの周上に点Aをとったものである。図2において、 $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ が成り立つことを証明せよ。

図2



問3 会話文中に出てきたゴンドラ①, ②, ③について、ひろしさんとよしさんは次の問題をつくった。

ある瞬間のゴンドラ①, ②, ③の位置をそれぞれ点P, Q, Rとする。観覧車が回転し、ある瞬間から t 分後のゴンドラ①, ②, ③の位置をそれぞれ点 P' , Q' , R' とする。線分QRと $P'R'$ が初めて平行になるとき、3点P, O, P' を結んでできる三角形の $\angle POP'$ の大きさと t の値をそれぞれ求めよ。また、そのときの $\triangle PP'Q$ の面積を求めよ。

この問題について、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(1) 3点P, O, P' を結んでできる三角形の $\angle POP'$ の大きさと t の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\triangle PP'Q$ の面積は何 m^2 か。

解答欄

問 1	ア	
	イ	
問 2	〔証明〕	
問 3	(1)	度
		$t=$
	(2)	m^2

解答

問 1

ア 10

イ $30\sqrt{3}$

問 2

〔証明〕

$\angle ACB = \angle a$ とする。

$\triangle OAC$ は二等辺三角形であるから、

$\angle OCA = \angle OAC = \angle a$

$\angle AOB$ は $\triangle OAC$ の外角であるから、

$\angle AOB = \angle OCA + \angle OAC = 2\angle a$

したがって、 $\angle AOB = 2\angle ACB$

すなわち、 $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$

問 3

(1)

120 (度)

($t=$)5

(2) $675\sqrt{3}$ (m^2)

解説

問 1

(イ)

ゴンドラ①の位置を点 S, ゴンドラ②の位置を点 T とする。(図 3) 中心 O から, 線分 ST に垂線 OH をおろすと, $\triangle OHT$ は内角が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の辺の比が決まった直角三角形となる。 $OT : HT = 2 : \sqrt{3}$ であり, $HT = 15\sqrt{3}$ となる。二等辺三角形の性質より $ST = 2HT$ であり, 2 点間の距離は $30\sqrt{3}$ (m)

問 3

(1)

ゴンドラは 1 周するのに 15 分かかり, Q は 5 分後に P の位置にいるため, \widehat{PQ} の長さは円周の $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ (倍) であることがわかる。

よって, $\angle QOP = \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$ であり, 円周角の定理より,

$\angle PRQ = \frac{1}{2} \angle QOP = 60^\circ$ つまり, $\angle P'R'Q' = \angle PRQ = 60^\circ \dots \textcircled{1}$ である。

Q と R は O に対して点対称なので, QR は円 O の直径である。

よって, 半円の弧に対する円周角は 90° だから, $\angle QPR = 90^\circ$ であり, $\triangle PQR$ の内角の和は 180° だから,

$\angle PQR = 180^\circ - \angle PRQ - \angle QPR = 30^\circ \dots \textcircled{2}$

QR // R'P' となるとき (図 4), 平行線における同位角と①より,

$\angle P'R'Q' = \angle ROQ' = 60^\circ$ であり, 円周角と中心角の関係性より

$\angle RQQ' = \frac{1}{2} \angle ROQ' = 30^\circ$ である。よって, $\angle PQR = \angle Q'QR = 30^\circ$

であることから, 点 P と点 Q' は一致するといえる。また, $OP = OP'$ より, $\triangle POP'$ は二等辺三角形であり, $\angle OPP' = \angle OP'P = 30^\circ$ だから, $\angle POP' = 180^\circ - \angle OPP' - \angle OP'P = 120^\circ$ である。また, ゴンドラが 120° 回転するのにかかる時間は $t = 5$ (分)

(2)

同じ弧に対する円周角は等しいため, $\angle P'R'P = \angle P'QP = 60^\circ$ である。さらに, $\angle P'PR' = 30^\circ$ で, $\triangle OPQ$ が二等辺三角形で $\angle OPQ = 30^\circ$ なので, $\angle P'PQ = 60^\circ$ である。

よって, $\triangle PP'Q$ は底角が 60° の二等辺三角形, つまり正三角形である (図 5)。

問 1 より, $\triangle PP'Q$ の 1 辺の長さは $PQ = 30\sqrt{3}$ (m) である。また, 点 P から辺 QP' に垂線 PM をおろすと (図 6), $PP' : PM = 2 : \sqrt{3}$ より, $PM = 45$ (m) である。

したがって, $\triangle PP'Q = \frac{1}{2} \times 30\sqrt{3} \times 45 = 675\sqrt{3}$ (m²)

図 3

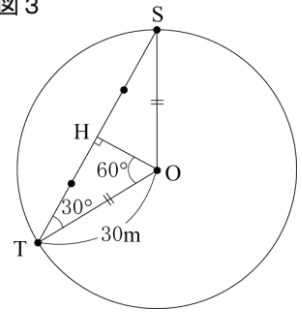


図 4

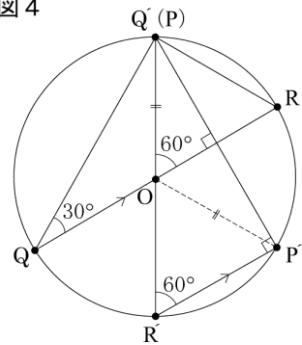


図 5

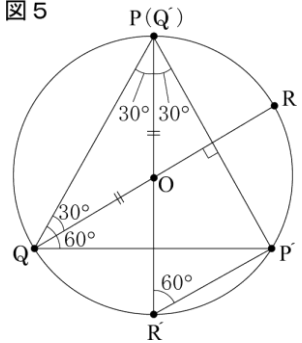


図 6

