

5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題 【2017 年度出題】

【問 1】

次の④, ⑤のどちらか 1 つを選び, 正方形でない平行四辺形 PQRS の 2 つの対角線 PR, QS がどのような関係にあれば, 平行四辺形 PQRS がひし形または長方形になるか, にあてはまる言葉を書きなさい。なお, 選んだ記号を解答欄に書くこと。

(山形県 2017 年度)

④ 対角線 PR と QS が ならば, 平行四辺形 PQRS はひし形になる。

⑤ 対角線 PR と QS が ならば, 平行四辺形 PQRS は長方形になる。

解答欄

《選択問題》 選んだ記号 ()

解答

《選択問題》

選んだ記号 ()

④ 垂直

⑤ 等しい

解説

④

ひし形の対角線は「それぞれの中点で垂直に交わる」。

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わっているので, あと垂直に交わっていればひし形になる。

⑤

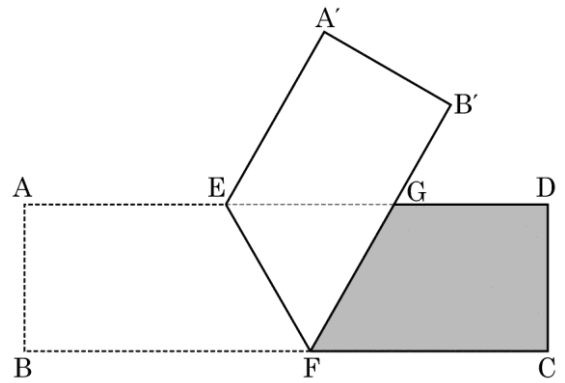
長方形の対角線は「長さが等しく, それぞれの中点で交わる」。

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わっているので, あと長さが等しければ長方形になる。

【問 2】

長方形 $ABCD$ を右の図のように折ったところ, $EF=EG$ となった。三角形 EFG が正三角形であることを証明しなさい。

(群馬県 2017 年度 前期)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

仮定より $EF=EG$ …①

四角形 $A'B'FE$ は四角形 $ABFE$ を折り返した図形であるから
対応する角は等しいので

$\angle EFB=\angle EFG$ …②

平行線の錯角は等しいので

$\angle EFB=\angle FEG$ …③

②, ③より

$\angle EFG=\angle FEG$

したがって $EG=FG$ …④

①, ④より

$EF=EG=FG$

よって $\triangle EFG$ は正三角形である。

解説

正三角形は 3 つの辺がすべて等しいので

$EF=EG=FG$ がいえれば

$\triangle EFG$ は正三角形であると証明できる。

まず折り返した図形であることと

平行線の錯角が等しいことを利用して

$\angle EFG=\angle FEG$ を求め

これから $EG=FG$ を導く。

次に仮定の $EF=FG$ がわかっているので

これらから 3 つの辺がすべて等しいことがいえる。

【問 3】

図1において、4 点 A, B, C, D は円 O の周上にあり、四角形 ABCD は正方形となっている。図2は、図1の正方形を点 O を中心として回転させたものであり、正方形の頂点はそれぞれ点 E, F, G, H の位置に移動している。図2において、EA と BH が平行となることを次のように証明した。

ア には適する数値を、イ , ウ には適する記号をそれぞれ入れなさい。また、 には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。

ただし、 $\widehat{AB}$ は、円周上の 2 点 A, B を両端とする弧のうち長くない方を表すものとし、その他の弧についても同様とする。

(群馬県 2017 年度 後期)

図1

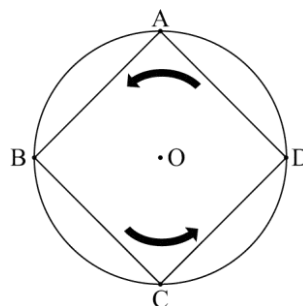
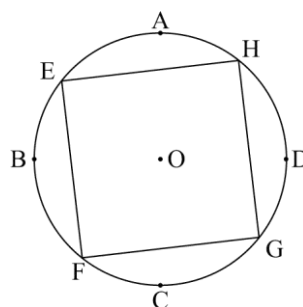


図2



証 明

線分 EA と線分 BH をひく。

$\widehat{AB}$ と $\widehat{EH}$ に対する中心角はともに ア $^{\circ}$ であるから

$\widehat{AB} = \widehat{EH}$

また、 $\widehat{AB}$ と $\widehat{EH}$ において イ が共通であるから

$\widehat{EB} =$ ウ

解答欄

ア		イ		ウ	
[証明の続き]					

解答

ア 90

イ AE

ウ AH

〔証明の続き〕

同じ長さの弧に対する円周角の大きさは等しいから

$$\angle AEH = \angle BHE$$

錯角が等しいので

$$EA \parallel BH$$

解説

ア

図1において、4点 A, B, C, D は円 O の周上にあり

四角形 ABCD は正方形だから

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 360^\circ \div 4 = 90^\circ$$

図2の正方形 EFGH は

図1の正方形 ABCD を点 O を中心として回転させたものだから

$$\angle EOH = 90^\circ$$

よって $\widehat{AB}$ に対する中心角, $\widehat{EH}$ に対する中心角はともに 90° である。

イ

$$\widehat{AB} = \widehat{AE} + \widehat{EB}, \widehat{EH} = \widehat{AE} + \widehat{AH} \text{ より}$$

$\widehat{AB}$ と $\widehat{EH}$ において $\widehat{AE}$ が共通である。

ウ

等しい中心角に対する弧の長さは等しいから

$$\widehat{AB} = \widehat{EH}$$

$$\text{よって } \widehat{EB} = \widehat{AB} - \widehat{AE}, \widehat{AH} = \widehat{EH} - \widehat{AE} \text{ より}$$

$$\widehat{EB} = \widehat{AH}$$

証明の続きは

円周角の定理より

$$\angle EHB = \angle AEH \text{ を導き}$$

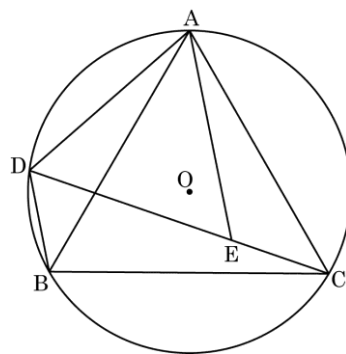
錯角が等しくなることを証明する。

【問 4】

図のように、円 O の円周上にある 3 点 A, B, C を頂点とする正三角形 ABC がある。点 C を含まない $\widehat{AB}$ 上に、2 点 A, B とは異なる点 D をとり、点 D と、3 点 A, B, C をそれぞれ結ぶ。線分 CD 上に、 $BD=CE$ となる点 E をとり、点 A と点 E を結ぶ。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(千葉県 2017 年度 前期)



問1 $\triangle ADE$ が正三角形となることの証明を、次の の中に途中まで示してある。

(a) , (b) に入る最も適当なものを、次の選択肢のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び、符号で答えなさい。また、(c) には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。

ただし、 の中の①～④に示されている関係を使う場合、番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

証明

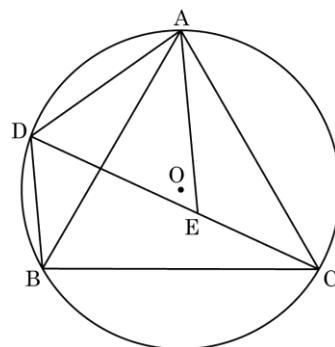
$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において、
 仮定から、 $BD=CE$ …①
 $\triangle ABC$ は正三角形なので、
 $AB=AC$ …②
 $\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいので、
 $\angle ABD =$ (a) …③
 ①, ②, ③より、
(b) がそれぞれ等しいので、
 $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ …④

(c)

選択肢

ア $\angle DEA$	イ $\angle EAC$	ウ $\angle ACE$
エ 3 辺	オ 2 辺とその間の角	カ 1 辺とその両端の角

問2 $AD=2\text{ cm}$, $BC=3\text{ cm}$ のとき、線分 CE の長さを求めなさい。



解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2	cm	

解答

問1

(a) ウ

(b) オ

(c)

④より

$$AD=AE\cdots\textcircled{5}$$

$\triangle ADE$ において

⑤から $\triangle ADE$ は二等辺三角形なので

$$\angle ADE=\angle AED\cdots\textcircled{6}$$

正三角形の内角はすべて 60° で

$\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいことから

$$\angle ADE=\angle ABC=60^\circ \cdots\textcircled{7}$$

⑥, ⑦より

$$\angle ADE=\angle AED=60^\circ \cdots\textcircled{8}$$

三角形の内角の和は 180° なので

$$\angle DAE=60^\circ \cdots\textcircled{9}$$

⑧, ⑨より

$\triangle ADE$ の内角がすべて 60° なので

$\triangle ADE$ は正三角形である。

問2 $\sqrt{6}-1$ cm

解説

問1

(a)

$\widehat{AD}$ に対する円周角で

$\angle ABD=\angle ACD$ なので $\angle ABD=\angle ACE$ となりウ。

(b)

①, ②, ③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいことを示しているのです。

(c)

正三角形になるためには

3つの辺がすべて等しいか, 3つの角の大きさがすべて等しいことを証明する。

問2

点 A から線分 DC に垂線 AH をひくと $\triangle ADE$ は正三角形だから

$$HE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 2=1\text{cm}$$

また $\triangle AHE$ は, 90° , 30° , 60° の角を持つ直角三角形だから

$$AH:HE=\sqrt{3}:1 \text{ となるので } AH=\sqrt{3}\text{ cm}$$

よって $CE=x$ cm とすると $AC=BC=3$ cm だから

$\triangle AHC$ において

三平方の定理より $(\sqrt{3})^2+(1+x)^2=3^2$ が成り立つ

これを整理をすると

$$x=-1\pm\sqrt{6}$$

したがって $x>0$ より

$$x=-1+\sqrt{6}\text{ cm}$$

【問 5】

図1, 図2のように, 線分 AB を直径とする円 O の周上に 2 点 A , B と異なる点 C がある。円 O の周上の点 P のとり方を問1, 問2のようにしたとき, 次の問いに答えなさい。

(富山県 2017 年度)

問1 右の図1のように, 点 C を含まない $\widehat{AB}$ 上に 2 点 A , B と異なる点 P をとる。

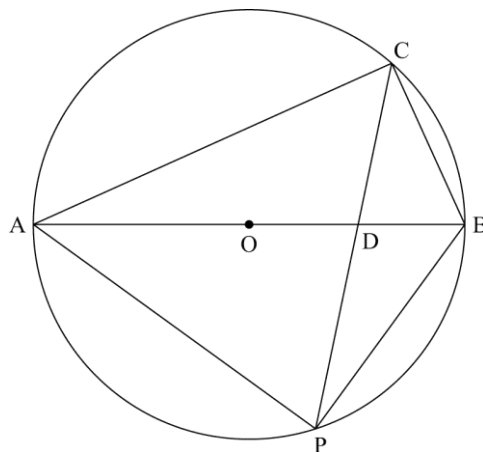
また, AB と CP の交点を D とすると, $AD:DB=3:1$, $CD:DP=2:3$ であった。

このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) 円 O の半径が 10 cm であるとき, 線分 CP の長さを求めなさい。

(2) 四角形 $APBC$ の面積は $\triangle DBC$ の面積の何倍になるか求めなさい。

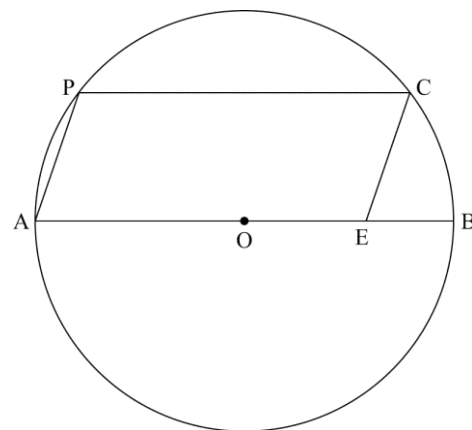
図1



問2 右の図2のように, $\widehat{AC}$ 上に 2 点 A , C と異なる点 P をとると, 図2

$\widehat{BC}=\widehat{AP}$ であった。また, $PC=AE$ となるように, 線分 AB 上に点 E をとる。

このとき, 四角形 $AEC P$ が平行四辺形であることを証明しなさい。ただし, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{AP}$ はそれぞれ短い方の弧を指すものとする。



解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	倍
問2	〔証明〕	

解答

問1

$$(1) \frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

$$(2) 10 \text{ 倍}$$

問2

〔証明〕

四角形 AECP の対角線 AC をひく。

$\widehat{BC} = \widehat{AP}$ より円周角は等しいから

$$\angle ACP = \angle EAC$$

錯角が等しいから

$$PC \parallel AE \cdots \textcircled{1}$$

仮定より

$$PC = AE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

1 組の対辺が平行で, 長さが等しいから

四角形 AECP は平行四辺形である。

解説

問1

(1)

円 O の半径が 10 cm だから $AB = 20 \text{ cm}$

$$AD:DB = 3:1 \text{ より } AD = 20 \times \frac{3}{4} = 15 \text{ cm}$$

$$DB = 20 \times \frac{1}{4} = 5 \text{ cm}$$

$CD:DP = 2:3$ より

$CD = 2k$, $DP = 3k$ ($k > 0$) とおく。

このとき $\triangle APD \sim \triangle CBD$ より

$AD:PD = CD:BD$ だから

$$15:3k = 2k:5$$

$$6k^2 = 75$$

$$k^2 = \frac{25}{2}$$

$k > 0$ より

$$k = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{よって } CP = CD + DP = 2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} + 3 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle DBC = S$ とおく。

$AD:DB = 3:1$ より $\triangle CAD = 3S$

$CD:DP = 2:3$ より $\triangle DPB = \frac{3}{2} S$

$$\triangle APD = \frac{3}{2} \times \triangle CAD = \frac{9}{2} S$$

$$\text{よって四角形 APBC} = \triangle DBC + \triangle CAD + \triangle DPB + \triangle APD = S + 3S + \frac{3}{2} S + \frac{9}{2} S = 10S$$

したがって 10 倍

問2

仮定より $PC = AE$ なので四角形 AECP が平行四辺形になるためには

あと $PA = CE$ か $PC \parallel AE$ のどちらかがいえればよい。

1 つの円の中で弧が等しい円周角の大きさは等しくなるから $\widehat{BC} = \widehat{AP}$ より $\angle BAC = \angle ACP$

よって錯角が等しくなるので $PC \parallel AE$ がいえるので

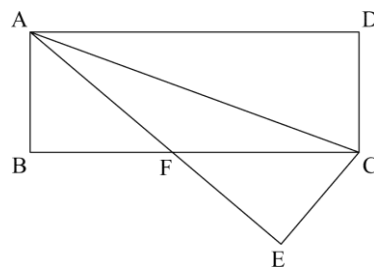
1 組の対辺が平行で長さが等しいから四角形 AECP は平行四辺形といえる。

【問 6】

図3は、辺 AB の長さが辺 BC の長さより短い長方形 $ABCD$ を、対角線 AC を折り目として折り曲げたとき、頂点 D が移る点を E 、 BC と AE の交点を F としたものである。

(長野県 2017 年度)

図3



- (1) りなさんとなおさんは、 $\triangle FCA$ が二等辺三角形であることを、それぞれ次のように正しく証明した。

[りなさんの証明]

長方形 $ABCD$ の対角線 AC を折り目としているから、 $\angle FAC = \boxed{\text{あ}}$ …①

$AD \parallel BC$ で、錯角は等しいから、

$$\angle FCA = \boxed{\text{あ}} \dots ②$$

よって、①、②より、 $\angle FAC = \angle FCA$

したがって、2 つの角が等しいので、

$\triangle FCA$ は二等辺三角形である。

[なおさんの証明]

い

合同な図形では、対応する辺は等しいので、

$$FA = FC$$

したがって、2 つの辺が等しいので、

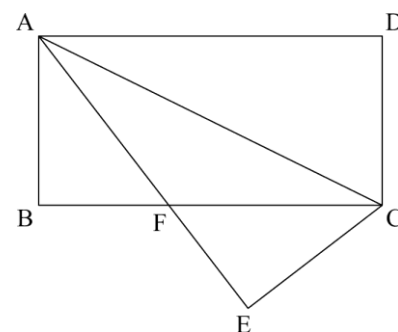
$\triangle FCA$ は二等辺三角形である。

- ① $\boxed{\text{あ}}$ に当てはまる最も適切な角を、記号を用いて書きなさい。

- ② $\boxed{\text{い}}$ に、 $\triangle ABF \equiv \triangle CEF$ であることを証明し、なおさんの証明を完成させなさい。

- (2) 図4は、図3の図形で $AB = 4 \text{ cm}$ 、 $BF = 3 \text{ cm}$ としたものとする。図5は、図4の図形で、点 B と点 E 、点 D と点 E をそれぞれ結び、 AC と DE の交点を P 、 BC と DE の交点を Q としたものとする。

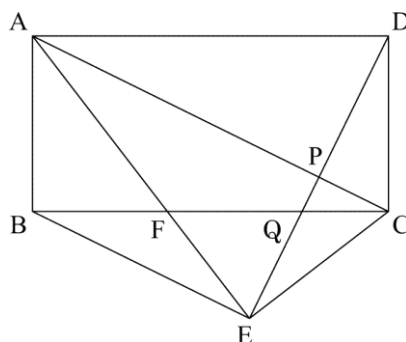
図4



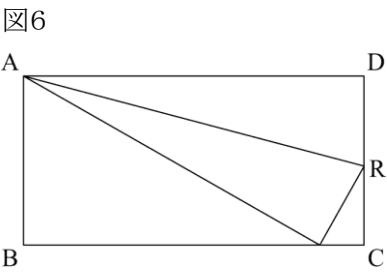
- ① 図5において、 $\triangle FCA$ と相似な三角形を記号を用いて 2 つ書きなさい。

- ② 図5において、四角形 $ABEP$ の面積を求めなさい。

図5



(3) 図6は、図4の長方形 $ABCD$ を、辺 CD 上の点 R と頂点 A を結んだ線分 AR を折り目として、頂点 D が辺 BC 上にくるように折り曲げたものとする。このとき、 CR の長さを求めなさい。



解答欄

(1)	①	∠	
	②		
(2)	①	△	△
	②	cm ²	
(3)	cm		

解答

(1)

① $\angle DAC$

②

$\triangle ABF$ と $\triangle CEF$ について

四角形 $ABCD$ は長方形であり対角線 AC を折り目として折り曲げるから

$AB=CE\cdots①$

$\angle ABF=\angle CEF\cdots②$

対頂角は等しいから

$\angle AFB=\angle CFE\cdots③$

三角形の内角の和は 180° であることと

②, ③から

$\angle BAF=\angle ECF\cdots④$

①, ②, ④より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABF\equiv\triangle CEF$

(2)

① $\triangle FBE, \triangle CDE$

② $\frac{112}{5}\text{ cm}^2$

(3) $8\sqrt{3}-12\text{ cm}$

解説

(1)

①

対角線 AC を折り目として折り曲げたとき頂点 D が点 E に移るから

$\angle EAC=\angle DAC$

よって $\angle FAC=\angle DAC$

また四角形 $ABCD$ は長方形で $AD\parallel BC$ より平行線の錯角は等しいから

$\angle FCA=\angle DAC$

よって あ には $\angle DAC$ が入る。

②

長方形の性質と折り曲げたことから長さの等しい辺や大きさの等しい角を見つける。

$\triangle ABF$ と $\triangle CEF$ において

四角形 $ABCD$ は長方形だから

$AB=CD\cdots㉗$

$\angle ABF=\angle CDA\cdots㉘$

対角線 AC を折り目として折り曲げるから

$CE=CD\cdots㉙$

$\angle CEF=\angle CDA\cdots㉚$

㉗, ㉙より

$AB=CE\cdots㉛$

㉘, ㉚より

$\angle ABF=\angle CEF\cdots㉜$

対頂角は等しいから

$\angle AFB=\angle CFE\cdots㉝$

また $\angle BAF=180^\circ-\angle ABF-\angle AFB\cdots㉞$

$\angle ECF=180^\circ-\angle CEF-\angle CFE\cdots㉟$

㉜, ㉝, ㉞, ㉟より

$\angle BAF=\angle ECF\cdots㊱$

㉛, ㉜, ㊱より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF\equiv\triangle CEF$

(2)

①

$\triangle ABF$ において

三平方の定理より

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad AF > 0 \text{ より } AF = 5 \text{ cm}$$

$\triangle FCA$ は二等辺三角形だから $FC = FA = 5 \text{ cm}$ より $BC = BF + FC = 3 + 5 = 8 \text{ cm}$

よって $AE = AD = BC = 8 \text{ cm}$ だから

$$FE = AE - AF = 8 - 5 = 3 \text{ cm}$$

$\triangle FCA$ と $\triangle FBE$ において

$$FC : FB = 5 : 3, \quad FA : FE = 5 : 3 \text{ だから}$$

$$FC : FB = FA : FE$$

対頂角は等しいから $\angle AFC = \angle EFB$

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle FCA \sim \triangle FBE$$

よって $\angle FCA = \angle FBE$ より錯角が等しいから $AC \parallel BE$

$\triangle CDE$ は $CD = CE$ の二等辺三角形で線分 CP は $\angle DCE$ の二等分線になっている。

二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に2等分するから $\angle CPE = 90^\circ$, $DP = EP$

$AC \parallel BE$ より, 平行線の錯角は等しいから $\angle BED = \angle CPE = 90^\circ$

$\triangle FCA$ と $\triangle CDE$ において

$$\angle FAC = \angle FEB = \angle BED - \angle AEP = 90^\circ - \angle AEP$$

$$\angle CED = \angle AEC - \angle AEP = 90^\circ - \angle AEP \quad \text{よって } \angle FAC = \angle CED$$

$$\angle FAC = \angle FCA, \quad \angle CED = \angle CDE \text{ だから } \angle FCA = \angle CDE$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle FCA \sim \triangle CDE$$

②

$$\triangle FCA = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10 \text{ cm}^2$$

$$\triangle CEF = \triangle ABF = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ cm}^2$$

$$\triangle FBE = \frac{3}{5} \triangle ABF = \frac{3}{5} \times 6 = \frac{18}{5} \text{ cm}^2$$

$\triangle FCA$ と $\triangle CDE$ の相似比は $FC : CD = 5 : 4$ だから面積の比は $5^2 : 4^2 = 25 : 16$

$$\triangle CDE = \frac{16}{25} \triangle FCA = \frac{16}{25} \times 10 = \frac{32}{5} \text{ cm}^2$$

$$\triangle CEP = \frac{1}{2} \triangle CDE = \frac{1}{2} \times \frac{32}{5} = \frac{16}{5} \text{ cm}^2$$

よって四角形 $ABEP$ の面積は

$$\triangle FCA + \triangle ABF + \triangle CEF + \triangle FBE - \triangle CEP = 10 + 6 + 6 + \frac{18}{5} - \frac{16}{5} = \frac{112}{5} \text{ cm}^2$$

(3)

図6で頂点 D が移る辺 BC 上の点を G とする。

$$AG = AD = 8 \text{ cm} \quad \angle AGR = \angle ADR = 90^\circ$$

$\triangle ABG$ において三平方の定理より $BG^2 = AG^2 - AB^2 = 8^2 - 4^2 = 48$

$$BG > 0 \text{ より } BG = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$\triangle ABG$ と $\triangle GCR$ において

$$\angle ABG = \angle GCR$$

$$\angle GAB = 180^\circ - \angle ABG - \angle AGB = 180^\circ - 90^\circ - \angle AGB = 90^\circ - \angle AGB$$

$$\angle RGC = 180^\circ - \angle AGR - \angle AGB = 180^\circ - 90^\circ - \angle AGB = 90^\circ - \angle AGB \text{ だから } \angle GAB = \angle RGC$$

2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABG \sim \triangle GCR$ となるので

$$AB : GC = BG : CR$$

$$CR = x \text{ cm とすると } 4 : (8 - 4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} : x$$

$$\text{これを整理すると } x = 8\sqrt{3} - 12$$

【問 7】

「図1において、点Pを通り、直線 l に平行な直線を作図せよ。」という問題について花子さんと太郎さんが話し合っている。後の各問いに答えよ。

(奈良県 2017 年度)

花子:1組の三角定規を使うと、図2のように、㊸三角定規の一方を固定し、もう一方を動かして直線をひけば、平行な直線がひけるね。

太郎:でも、図3のように、三角定規をとってしまおうと、どのようにして平行な直線をひいたのか、他の人にはわからないね。

花子:定規とコンパスを使ったらどうか。それなら、作図に使った線が残るよ。

太郎:じゃあ、㊹平行四辺形をかいて、平行な直線をひいてみようかな。

花子:私は㊺垂線を2回ひくことで平行な直線をひいてみるね。

図1

P

l

図2

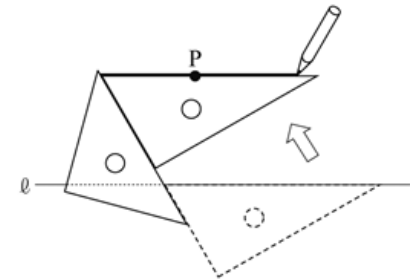
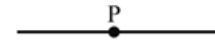


図3



問1 下線部㊸が成り立つことを次のように示すとき、() に当てはまる用語を書け。

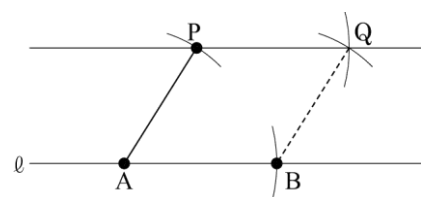
「図2の直線 l 、ひいた直線、固定した三角定規の斜辺は、2つの直線に1つの直線が交わる位置関係にある。三角定規を動かしたので、() が等しくなるから、直線 l とひいた直線は平行になる。」

問2 次の 内は、下線部㊹の太郎さんの考えを説明したものである。 内の () に当てはまる、平行四辺形になるための条件を書け。

図4のように、直線 l 上に2点A、Bをとり、点Pと点Aを結ぶ。点Pを中心として、線分ABを半径とする円をかく。点Bを中心として、線分APを半径とする円をかく。2つの円の交点をQとして、直線PQをひく。

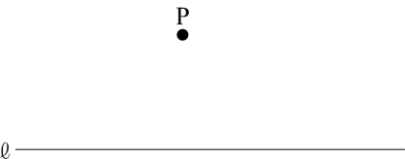
四角形PABQは、() から平行四辺形といえる。
よって、直線PQは直線 l に平行である。

図4



問3 下線部㊺の花子さんの考えで、点Pを通り、直線 l に平行な直線を、定規とコンパスを使って解答欄の枠内に作図せよ。なお、作図に使った線は消さずに残しておくこと。

解答欄

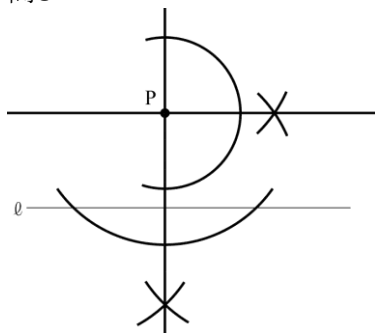
問1		
問2		
問3		

解答

問1 同位角

問2 2組の対辺がそれぞれ等しい

問3



解説

問1

図2で動かす前と動かした後の三角定規の 60° の部分の作る 2 つの角を同位角という。

問2

平行四辺形になる条件は

- ① 2組の対辺がそれぞれ平行であるとき
- ② 2組の対辺がそれぞれ等しいとき
- ③ 2組の対角がそれぞれ等しいとき
- ④ 対角線がそれぞれの中点で交わる時
- ⑤ 1組の対辺が等しくて平行であるとき

である。

点 P を中心として線分 AB を半径とする円をかいているので $PQ = AB$ がいえる。

同様に $AP = BQ$ がいえるので

四角形 PABQ は

- ② 2組の対辺がそれぞれ等しいから平行四辺形といえる。

問3

花子さんの考えで作図すると同位角が 90° になり平行な直線をかくことができる。

【問 8】

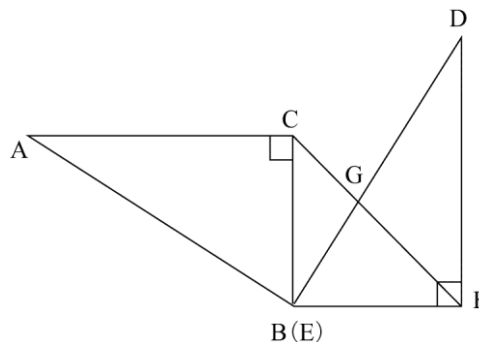
$\triangle ABC$ は、 $BC=4\text{ cm}$ 、 $CA=a\text{ cm}$ 、 $\angle C=90^\circ$ の直角三角形である。 $\triangle DEF$ は、 $\triangle ABC$ と合同で、図1のように、 $\triangle ABC$ を点 B を回転の中心として、時計の針の回転と同じ向きに 90° 回転移動させた位置にある。また、線分 CF と DE の交点を G とする。

次の問1～問4に答えなさい。

(和歌山県 2017 年度)

問1 線分 CF の長さを求めなさい。

図1



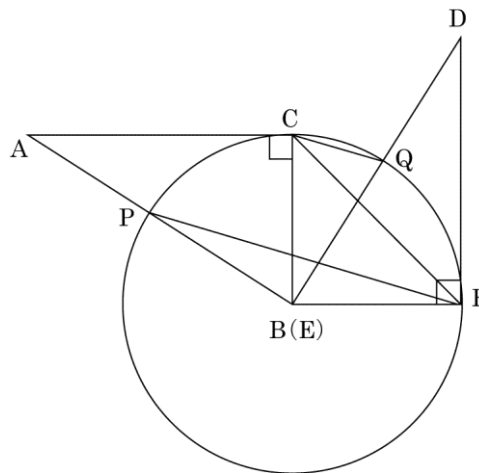
問2 $\angle BAC = x^\circ$ とするとき、 $\angle DGF$ の大きさを、 x の式で表しなさい。

問3 図2のように、点 B を中心とし辺 BC を半径とする円をかき、そ

の円と辺 AB 、 DB との交点をそれぞれ P 、 Q とする。

このとき、 $CQ \parallel PF$ を証明しなさい。

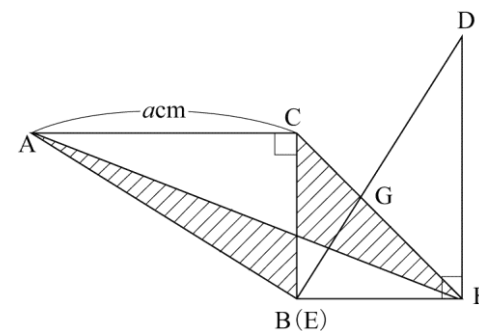
図2



問4 図3のように、 A と F を結ぶ。2 つの  の部分の面積の

和が 10 cm^2 のとき、 a の値を求めなさい。

図3



解答欄

問1	cm
問2	度
問3	〔証明〕
問4	$\alpha =$

解答

問1 $4\sqrt{2}$ cm

問2 $135-x$ 度

問3

〔証明〕

$\widehat{CP}$ に対する円周角の定理より

$$\angle CFP = \frac{1}{2} \angle CBP \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{FQ}$ に対する円周角の定理より

$$\angle FCQ = \frac{1}{2} \angle FBQ \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ なので

$$\angle CBP = \angle FBQ \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$\angle CFP = \angle FCQ$$

よって, 錯角が等しいので

$$CQ \parallel PF$$

$$\text{問4 } a = \frac{20}{3}$$

解説

問1

$\triangle BCF$ は $BC=BF$ の直角二等辺三角形になるから $CF = \sqrt{2} BC = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$ cm

問2

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ より

$$\angle EDF = \angle BAC = x^\circ$$

$\triangle BCF$ は $BC=BF$ の直角二等辺三角形だから

$$\angle BFC = 45^\circ \quad \angle GFD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$\triangle DGF$ において

三角形の内角の和は 180° だから

$$\angle DGF = 180^\circ - (45^\circ + x^\circ) = 135^\circ - x^\circ$$

問3

錯角か同位角が等しくなることを証明すればよい。

円周角の定理と $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ を利用して $\angle CFP = \angle FCQ$ を導く。

問4

線分 AF と辺 BC との交点を H とする。

$\angle ACB = \angle CBF = 90^\circ$ より錯角が等しいから $AC \parallel EF$ となるので $\triangle ABC = \triangle AFC$

よって $\triangle ABC - \triangle AHC = \triangle AFC - \triangle AHC$ より

$$\triangle ABH = \triangle CFH$$

$\triangle ABH$ の面積と $\triangle CFH$ の面積の和が 10 cm^2 だから

$$\triangle ABH = \triangle CFH = 10 \div 2 = 5 \text{ cm}^2$$

$\triangle AHC$ と $\triangle FHE$ において

$$\angle ACH = \angle FEH = 90^\circ, \angle AHC = \angle FHE \text{ より}$$

$$\triangle AHC \sim \triangle FHE$$

よって $HC:HE = AC:FE = a:4$ より

$$BH:BC = 4:(a+4) \text{ だから}$$

$$BH = \frac{4}{a+4} BC = \frac{4}{a+4} \times 4 = \frac{16}{a+4} \text{ cm}$$

$$\triangle ABH \text{ の面積の関係から } \frac{1}{2} \times \frac{16}{a+4} \times a = 5$$

$$\text{これを整理すると } a = \frac{20}{3}$$

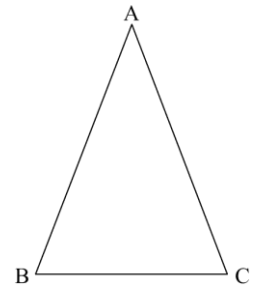
【問 9】

右の図のような二等辺三角形 ABC において、

「 $AB=AC$ ならば、 $\angle B=\angle C$ である」

ことを、次のように証明した。 に証明の続きをかき、証明を完成しなさい。

(鳥取県 2017 年度)



〔証明〕

点 A から辺 BC に垂線をひき、辺 BC との交点を D とする。

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ で、



合同な図形では、対応する角は等しいので、

$\angle B=\angle C$

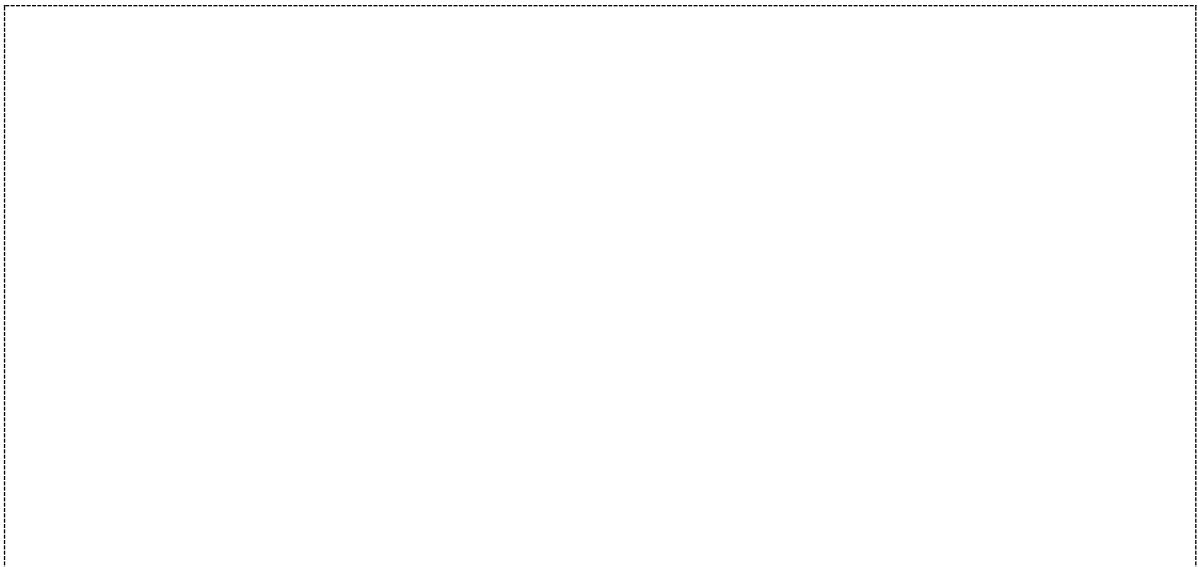
(証明終)

解答欄

〔証明〕

点 A から辺 BC に垂線をひき、辺 BC との交点を D とする。

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ で、



合同な図形では、対応する角は等しいので、

$\angle B=\angle C$

(証明終)

解答

〔証明〕

点 A から辺 BC に垂線をひき辺 BC との交点を D とする。

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ で

辺 AD は辺 BC の垂線だから

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

仮定より

$$AB = AC \cdots \textcircled{2}$$

また AD は共通だから

$$AD = AD \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

合同な図形では対応する角は等しいので

$$\angle B = \angle C$$

解説

垂線をひいているので

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \text{ になり}$$

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ は直角三角形であることがわかる。

また, $AB = AC$ より

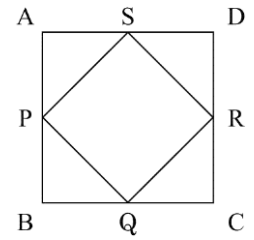
斜辺が等しく AD は共通な辺で等しいことがわかる。

よって直角三角形の合同条件

「斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい」ことを使って証明できる。

【問 10】

四角形 $ABCD$ の 4 辺 AB , BC , CD , DA の中点を、それぞれ P , Q , R , S とする。このとき、図1のように、四角形 $ABCD$ が正方形の場合、4 辺の中点を結んでできる四角形 $PQRS$ も正方形となる。



このように、四角形 $ABCD$ と内側にできる四角形 $PQRS$ が同じ呼び方となるのは、四角形 $ABCD$ がどのような場合か。次のア～エから正しいものをすべて選び、記号で答えなさい。

ただし、ここでは正方形を長方形や平行四辺形などと呼ばないように、四角形は最もふさわしい呼び方で考えるものとする。

(島根県 2017 年度)

ア 台形

イ 平行四辺形

ウ 長方形

エ ひし形

解答欄

解答

イ

解説

四角形 $ABCD$ が台形るとき四角形 $PQRS$ は平行四辺形になる。

四角形 $ABCD$ が平行四辺形るとき四角形 $PQRS$ も平行四辺形になる。

四角形 $ABCD$ が長方形るとき四角形 $PQRS$ はひし形になる。

四角形 $ABCD$ がひし形るとき四角形 $PQRS$ は長方形になる。

【問 11】

図 1 のように、4 点 A, B, C, D が同一円周上にあり、
 $\triangle BCD$ は正三角形である。線分 AC 上に $AP=BP$ となる点 P をとるとき、下の(1)～(3)に答えなさい。

(島根県 2017 年度)

(1) $\angle BAD$ の大きさを求めなさい。

(2) $\triangle PAB$ は正三角形であることを証明しなさい。

(3) 図 2 のように、 $AB=5\text{ cm}$, $AD=3\text{ cm}$, $BC=7\text{ cm}$ の関係にある。このとき、四角形 ABCD の面積を求めなさい。

図 1

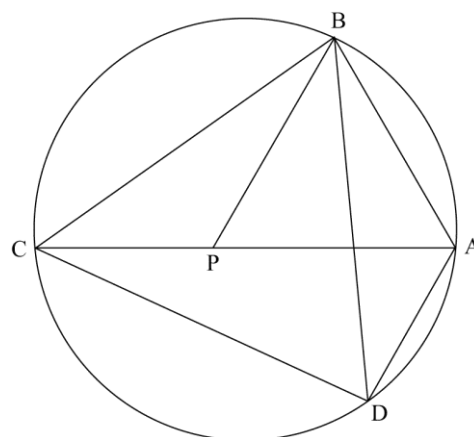
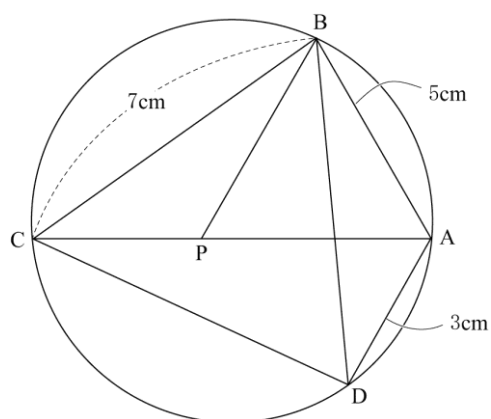


図 2



解答欄

(1)	○
(2)	〔証明〕
(3)	cm^2

解答

(1) 120°

(2)

〔証明〕

$\triangle BCD$ は正三角形だから

$$\angle CDB = 60^\circ$$

弧 BC の円周角より

$$\angle PAB = \angle CDB$$

$$\text{よって } \angle PAB = 60^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$AP = BP$ より二等辺三角形の底角は等しいから

$$\angle PBA = \angle PAB \cdots \textcircled{2}$$

三角形の内角の和は 180° であるから

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$\angle APB = 60^\circ \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

3 つの角がすべて 60° の三角形となるので

$\triangle PAB$ は正三角形である。

$$(3) \quad 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

解説

(1)

正三角形の 1 つの内角の大きさは 60° である。

円周角の定理より

$$\angle BAC = \angle BDC = 60^\circ$$

$$\angle CAD = \angle CBD = 60^\circ$$

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

(2)

正三角形は 3 つの辺がすべて等しいか 3 つの角の大きさがすべて等しいことを証明すればよい。

(3)

四角形 $ABCD$ の面積は

$\triangle ABC$ の面積と $\triangle ADC$ の面積の和になるから

それぞれの三角形の面積を求める。

点 B , D から線分 AC にそれぞれ垂線をひきその交点をそれぞれ Q , R とする。

このとき円周角の定理より

$$\angle CAD = \angle CBD = 60^\circ$$

$$\angle BAC = \angle BDA = 60^\circ \text{ となるから}$$

$\triangle ABQ$, $\triangle ADR$ は

3 つの角が 90° , 30° , 60° である直角三角形になることがわかる。

ここで $BD = BC$, $AB = PB$, $\angle ABD = \angle PBC$ より

$$\triangle ABD \equiv \triangle PBC \text{ がいえるので } PC = AD = 3 \text{ cm}$$

$$\text{よって } BQ = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$DR = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm となるから}$$

$$\triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times (5+3) \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\triangle ADC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times (5+3) \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{したがって四角形 } ABCD \text{ の面積は } 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$