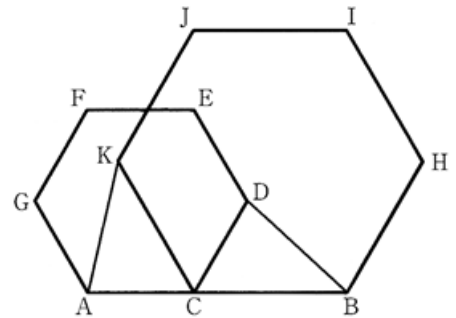


3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2006 年度出題】

【問 1】

右の図のように、線分 AB 上に点 C をとり、線分 AC を 1 辺とする正六角形 $ACDEFG$ と線分 CB を 1 辺とする正六角形 $CBHIJK$ をつくる。さらに、 A と K 、 B と D を結び、 $\triangle ACK$ と $\triangle DCB$ をつくる時、次の (1)、(2) に答えなさい。

(青森県 2006 年度)



- (1) $\triangle ACK$ と $\triangle DCB$ が合同になることを証明しなさい。
- (2) $AC = 3 \text{ cm}$, $CB = 4 \text{ cm}$ のとき、 $\triangle DCB$ の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	[証明]
(2)	cm^2

解答

(1)

[証明]

$\triangle ACK$ と $\triangle DCB$ について

正六角形の辺はすべて等しいので

$$AC=DC \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$CK=CB \quad \cdots \textcircled{2}$$

正六角形の1つの外角は 60° なので

$$\angle ACK=60^\circ$$

$$\angle DCB=60^\circ$$

$$\text{よって, } \angle ACK=\angle DCB \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACK \equiv \triangle DCB$$

(2)

$$3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

解説

(2)

$\triangle ACK \equiv \triangle DCB$ より,

$$DC=AC=3 \text{ cm}$$

また, 正六角形の1つの外角は 60° だから,

$$\angle DCB=\angle ACK=60^\circ$$

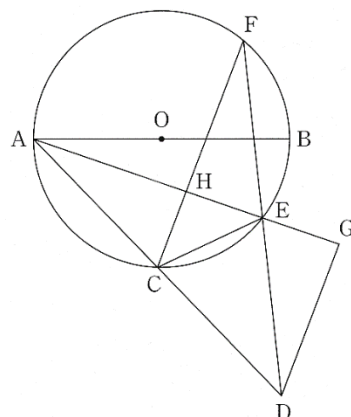
点 D から CB に垂線 DP をひくと, $3:DP=2:\sqrt{3}$

$$DP=\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって, } \triangle DCB=\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 2】

右の図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に、2 点 A, B とは異なる点 C をとる。線分 AC の延長上に点 A とは異なる点 D を $AC=CD$ となるようにとる。また、円 O の周上に点 C とは異なる点 E を $CD=DE$ となるようにとり、線分 DE の延長と円 O との交点で点 E とは異なる点を F とする。さらに、線分 AE の延長上に点 G を $CF \parallel DG$ となるようにとり、線分 AE と線分 CF との交点を H とする。このとき、次の問いに答えなさい。



(神奈川県 2006 年度)

問1 三角形 ACH と三角形 DEG が合同であることを次のように証明した。

空欄にあてはまるものとして、(a) には最も適する角を、記号 $\angle$ を用いて答え、(あ) ~ (う) には最も適するものを【選択群】から、それぞれ 1 つずつ選び、その番号を書きなさい。

[証明]

【選択群】

$\triangle ACH$ と $\triangle DEG$ において、
 まず、仮定から、 $AC=CD$ …①
 同様に、仮定から、 $CD=DE$ …②
 ①, ②より、 $AC=DE$ …③
 次に、 $\widehat{AF}$ に対する円周角は等しいから、
 $\angle ACF = \angle AEF$ …④
 また、対頂角は等しいから、
 $\angle AEF =$ (a) …⑤
 ④, ⑤より、 $\angle ACF = \angle DEG$
 よって、 $\angle ACH = \angle DEG$ …⑥
 さらに、(あ) から、
 $\angle CAE = \angle CFE$ …⑦
 また、(い) から、
 $\angle CFD = \angle FDG$
 よって、 $\angle CFE = \angle EDG$ …⑧
 ⑦, ⑧より、 $\angle CAE = \angle EDG$
 よって、 $\angle CAH = \angle EDG$ …⑨
 ③, ⑥, ⑨より、(う) から、
 $\triangle ACH \equiv \triangle DEG$

1. 平行線の同位角は等しい
2. 平行線の錯角は等しい
3. 対頂角は等しい
4. $\widehat{CE}$ に対する円周角は等しい
5. 3 辺がそれぞれ等しい
6. 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい
7. 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい

問2 $\angle DCE = 71^\circ$ のとき、 $\angle BAE$ の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(あ)	
	(い)	
	(う)	
問2	°	

解答

問1

(a) $\angle$ DEG

(あ) 4

(い) 2

(う) 7

問2

$\angle$ BCE = 19°

解説

問2

2 点 B, C を結ぶ。直径 AB に対する円周角より, $\angle$ ACB = 90°

よって, $\angle$ BCE = $180^{\circ} - 71^{\circ} - 90^{\circ} = 19^{\circ}$

弧 BE に対する円周角より,

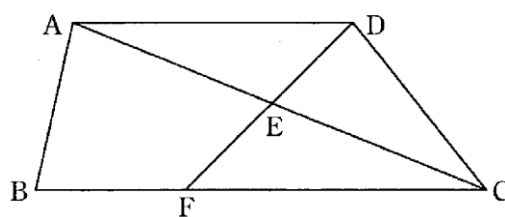
$\angle$ BAE = $\angle$ BCE = 19°

【問 3】

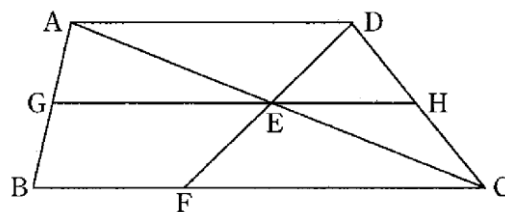
右の図のように、 $AD \parallel BC$ の四角形 $ABCD$ がある。対角線 AC の中点を E とし、点 D と E を結び、その延長と辺 BC との交点を F とする。ただし、 $BC > AD$ とする。

(富山県 2006 年度)

- (1) $\triangle AED \equiv \triangle CEF$ を証明しなさい。ただし、証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。



- (2) 点 E を通り、辺 BC に平行な直線と辺 AB , DC との交点をそれぞれ G , H とする。 $BF = x$ cm, $FC = y$ cm とするとき、線分 GH の長さを x, y を用いて表しなさい。



解答欄

(1)	
(2)	

解答

(1)

$\triangle AED$ と $\triangle CEF$ において

仮定より, E は AC の中点だから

$$AE = CE \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、平行線の錯角は等しいから

$$\angle DAE = \angle FCE \quad \cdots \textcircled{2}$$

対頂角は等しいから

$$\angle AED = \angle CEF \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AED \equiv \triangle CEF$$

(2)

$$\left(\frac{x}{2} + y \right) \text{ cm}$$

解説

(2)

$\triangle AED \equiv \triangle CEF$ より,

$$DE = EF$$

$GH \parallel BC$ より,

$$AG = GB, \quad DH = HC$$

よって, $\triangle ABC$ で中点連結の定理より, $GE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} (x + y)$

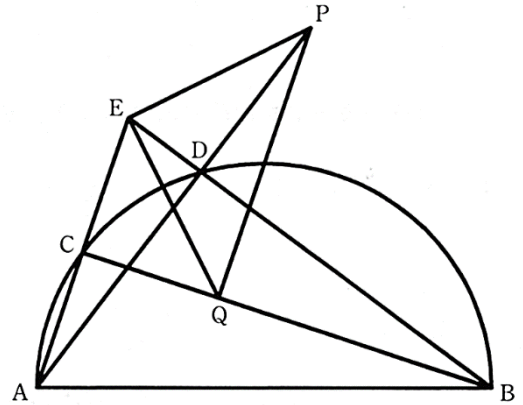
$\triangle DCF$ で中点連結の定理より, $EH = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2} y$ よって, $GH = \frac{1}{2} (x + y) + \frac{1}{2} y = \frac{x}{2} + y \text{ cm}$

【問 4】

下の図において、点 C, D は線分 AB を直径とする半円の周上の点であり、点 E は線分 AC の延長線と線分 BD の延長線の交点である。また、線分 AD の延長線上に $AP=BE$ となる点 P 、線分 BC 上に $BQ=AE$ となる点 Q をとる。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2006 年度)



問1 $\triangle EAP \equiv \triangle QBE$ であることの証明を、次の ア から ウ に適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

〈証 明〉

$\triangle EAP$ と $\triangle QBE$ において、

仮定から、

$AP=BE$ …①

$AE=BQ$ …②

同じ弧に対する ア は等しいから、

イ …③

①, ②, ③より、ウ がそれぞれ等しいので、

$\triangle EAP \equiv \triangle QBE$

問2 $\triangle EQP$ は直角二等辺三角形であることを証明しなさい。

問3 線分 BC が $\angle ABE$ を二等分し、 $AB=8\text{ cm}$ 、 $BD=6\text{ cm}$ のとき、 $\triangle EDP$ の面積を求めなさい。

なお、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $\sqrt{\quad}$ を用いて最も簡単な形で書きなさい。

解答欄

問1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問2	〈証明〉	
問3	cm ²	

解答

問1

(ア) 円周角

(イ) $\angle EAP = \angle QBE$

(ウ) 2 辺とその間の角

問2

〈証明〉

$\triangle EQP$ において,

問1より, $\triangle EAP \equiv \triangle QBE$ だから,

$EP = QE \cdots \textcircled{1}$

$\angle EPA = \angle QEB \cdots \textcircled{2}$

また,

$\angle QEP = \angle QEB + \angle BEP \cdots \textcircled{3}$

②, ③より,

$\angle QEP = \angle EPA + \angle BEP$

$= \angle PDB$

$= 180^\circ - \angle ADB$

AB は半円の直径なので, $\angle ADB = 90^\circ$ となるから,

$\angle QEP = 180^\circ - 90^\circ$

$= 90^\circ \cdots \textcircled{4}$

①, ④より, $\triangle EQP$ は直角二等辺三角形である。

問3

$8 - 2\sqrt{7} \text{ cm}^2$

解説

問3

$\triangle BCA$ と $\triangle BCE$ において,

BC は共通, 直径に対する円周角より, $\angle BCA = \angle BCE = 90^\circ$

$\angle ABC = \angle EBC$ より,

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle BCA \equiv \triangle BCE$

よって, $BE = BA = 8 \text{ cm}$

$ED = BE - BD = 8 - 6 = 2 \text{ cm}$

また, $\triangle EAP \equiv \triangle QBE$ より, $AP = BE = 8 \text{ cm}$

$\triangle ABD$ で三平方の定理より,

$AD = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$ $DP = 8 - 2\sqrt{7} \text{ cm}$

よって, $\triangle EDP = \frac{1}{2} \times DP \times ED = \frac{1}{2} \times (8 - 2\sqrt{7}) \times 2 = 8 - 2\sqrt{7} \text{ cm}^2$

【問 5】

下の図のように、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ を、対角線 BD を折り目として折り返し、頂点 C が移った点を E 、 AD と BE との交点を F とする。

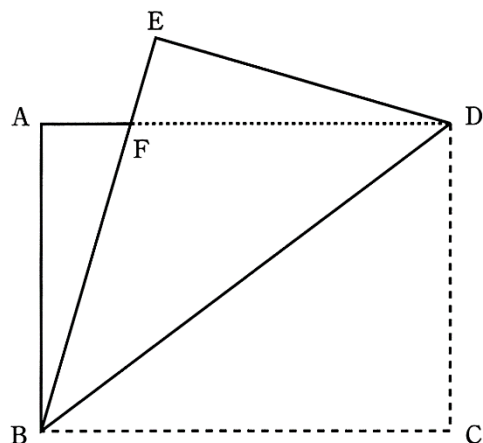
下の問1～問3に答えなさい。

(和歌山県 2006 年度)

問1 $\triangle FAB \equiv \triangle FED$ を証明しなさい。

問2 辺 BD を軸として、 $\triangle BDE$ を 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

問3 A と E を結ぶとき、 AE の長さを求めなさい。



解答欄

問1	
問2	cm^3
問3	cm

解答

問1

$\triangle FAB$ と $\triangle FED$ で

$$AB=CD=ED \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle BAF=\angle DCB=\angle DEF \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle AFB=\angle EFD \quad \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle ABF=180^\circ -(\angle BAF+\angle AFB)$$

$$=180^\circ -(\angle DEF+\angle EFD)$$

$$=\angle EDF \quad \cdots \textcircled{4}$$

①, ②, ④から,

1 辺とその両端の角が, それぞれ等しいので

$$\triangle FAB \equiv \triangle FED$$

問2

$$\frac{384}{5} \pi \text{ cm}^3$$

問3

$$\frac{14}{5} \text{ cm}$$

解説

問2

$ED=AB=6 \text{ cm}$, $BE=BC=8 \text{ cm}$, $\angle BED=90^\circ$ より,

三平方の定理から, $BD=\sqrt{6^2+8^2}=10 \text{ cm}$

E から BD に垂線 EH をひく。

2 組の角がそれぞれ等しいので, $\triangle EBD \sim \triangle HBE$

$$ED:BD=HE:BE \quad 6:10=HE:8 \quad HE=\frac{6 \times 8}{10}=\frac{24}{5} \text{ cm}$$

よって, 求める体積は,

$$\frac{1}{3} \times \pi \times EH^2 \times BH + \frac{1}{3} \times \pi \times EH^2 \times DH$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times EH^2 \times (BH+DH)$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{24}{5}\right)^2 \times 10$$

$$= \frac{384}{5} \pi \text{ cm}^3$$

問3

$\triangle EBD \sim \triangle HED$ だから,

$$BD:ED=ED:HD$$

$$10:6=6:HD$$

$$HD=\frac{36}{10}$$

$$=\frac{18}{5} \text{ cm}$$

A から BD に垂線 AK をひくと,

直角三角形において斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので, $\triangle ABK \equiv \triangle EDH$

同位角が等しいので, $AK \parallel EH$,

$AK=EH$, $\angle AKH=90^\circ$ より,

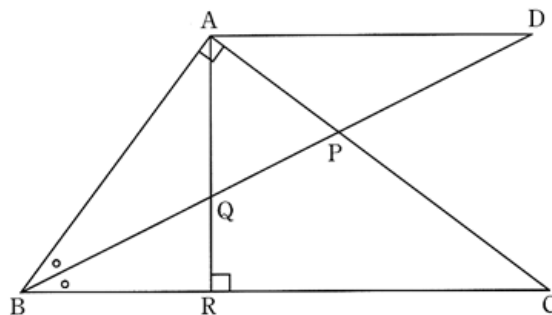
1 組の辺が平行で長さが等しく, 1 つの内角が 90° だから, 四角形 AKHE は長方形。

$$\text{よって, } AE=KH=BD-(BK+DH)=10-2 \times \frac{18}{5}=\frac{14}{5} \text{ cm}$$

【問 6】

図のように $\angle A=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。 $\angle B$ の二等分線上に、 $AD \parallel BC$ となる点 D をとり、 BD と AC の交点を P とする。また、 A から辺 BC に垂線 AR を引き、 AR と BD の交点を Q とする。次の問1～問4に答えなさい。

(島根県 2006 年度)



問1 解答用紙の図において、点 A を通り直線 BC に垂直な直線を、定規とコンパスを使って作図しなさい。ただし、作図で用いた線は消さないこと。

問2 次の(1), (2)に答えなさい。

- (1) $\triangle ABD$ が、 $AB=AD$ の二等辺三角形であることを次のように説明した。次の文の を埋めなさい。

BD は、 $\angle B$ の二等分線だから、

$$\angle ABD = \angle \text{ア} \cdots \text{①}$$

$AD \parallel BC$ より、

$$\angle ADB = \angle \text{ア} \cdots \text{②}$$

よって、①, ②より $\angle ABD = \angle ADB$ となる。

したがって、 $\triangle ABD$ は、 $AB=AD$ の二等辺三角形である。

- (2) $\triangle ABQ \equiv \triangle ADP$ であることを証明しなさい。

問3 $\triangle APQ$ が正三角形になるとき、次の(1), (2)に答えなさい。

- (1) 線分の長さの比 $BP:PD$ を求めなさい。
- (2) $\triangle PBC$ の面積は、 $\triangle APQ$ の面積の何倍になるか、求めなさい。

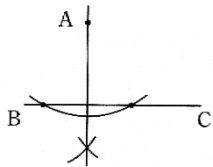
問4 $AB=3\text{ cm}$, $BC=5\text{ cm}$ のとき、次の(1), (2)に答えなさい。

- (1) AP の長さを求めなさい。
- (2) $\triangle APQ$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(作図)	
	A • B C	
問2	(1)	
	(2)	(証明)
問3	(1)	BP:PD= :
	(2)	倍
問4	(1)	cm
	(2)	cm ²

問1



(1) $\angle \text{CBD}$

(証明)

1 より $\triangle ABD$ は, 二等辺三角形だから,

$\angle ABQ = \angle ADP \cdots \textcircled{2}$ である。

$\angle DAP + \angle QAP = 90^\circ$ だから,

$$\angle \text{BAQ} = \angle \text{DAP} \cdots \textcircled{3}$$

$$\triangle ABQ \equiv \triangle ADP$$

問4 (1) $\frac{3}{2}$ cm (2) $\frac{9}{10}$ cm²

問3

$\triangle APQ$ が正三角形になるとき, $\angle APB = 60^\circ$ より, $BP = 2AP$

よって, $BP:PD=BP:BQ=2:1$

AD // BC より, CP:PA=BP:PD=2:1

よって、 $\triangle PBC=2\triangle ABP\cdots\textcircled{1}$

また、 $BP:QP=2:1$ より、 $\triangle ABP=2\triangle APQ \cdots \textcircled{2}$

①, ②より, $\triangle PBC = 2 \times 2 \triangle APQ = 4 \triangle APQ$

よって, 4 倍

(1)

△ABC で三平方の定理より, $AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\text{cm}$ ここで, $AD \parallel BC$ より, $AP:CP = AD:CB$ $AD = AB = 3\text{ cm}$
 $BC = 5\text{ cm}$ より, $AP:PC = 3:5$ よって, $AP = \frac{3}{8}AC = \frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}\text{ cm}$

△ABC と△RAC は、 $\angle BAC = \angle ARC = 90^\circ$, $\angle C = \angle C$ より、2 組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABC \sim \triangle RAC$ よって、 $RC:AC=AC:BC$ $RC:4=4:5$ $RC=\frac{16}{5}$ cm $BR=5-\frac{16}{5}=\frac{9}{5}$ cm よって、 $AQ:RQ=3:\frac{9}{5}$

$$=5:3 \quad \triangle APQ = \frac{AQ}{AR} \triangle ARP = \frac{5}{8} \triangle ARP \cdots \textcircled{1} \quad \text{ここで、} AD \parallel BC \text{ より、} AP:CP = AD:CB = 3:5 \text{ よって、} \triangle ARP$$

$$= \frac{3}{8} \triangle ABC \cdots \textcircled{2} \quad \text{また, } BR:RC = \frac{9}{5} : \frac{16}{5} = 9:16 \quad \text{よって, } \triangle ARC = \frac{16}{25} \triangle ABC = \frac{16}{25} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{96}{25}$$

$$\text{cm}^2 \cdots \textcircled{3} \quad \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より}, \triangle \text{APQ} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{96}{25} = \frac{9}{10} \text{ cm}^2$$

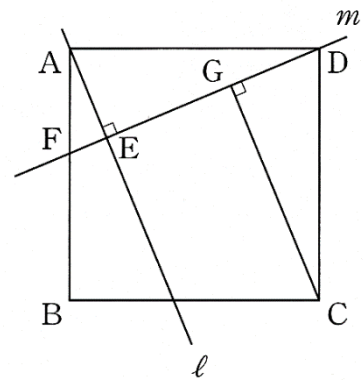
【問 7】

右の図のように、正方形 $ABCD$ と、点 A を通る直線 ℓ がある。点 D を通り、 ℓ に垂直な直線 m をひき、 ℓ との交点を E 、辺 AB との交点を F とする。また、点 C から m に垂線 CG をひく。

次の問1、問2に答えなさい。

(山口県 2006 年度)

問1 $\triangle ADE \equiv \triangle DCG$ を証明しなさい。



問2 $AD = 13 \text{ cm}$, $EG = 7 \text{ cm}$ のとき、 AF の長さを求めなさい。

解答欄

問1	証明
問2	cm

解答

問1

証明

$\triangle ADE$ と $\triangle DCG$ で

仮定から

$$AD=DC \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle AED=\angle DGC=90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle ADE+\angle CDG=90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

また, $\triangle DCG$ は直角三角形なので

$$\angle DCG+\angle CDG=90^\circ \cdots \textcircled{4}$$

③, ④から

$$\angle ADE=\angle DCG \cdots \textcircled{5}$$

①, ②, ⑤から,

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ADE \equiv \triangle DCG$$

問2

$$\frac{65}{12} \text{ cm}$$

解説

問2

$AE=x \text{ cm}$ とすると, $\triangle ADE \equiv \triangle DCG$ より, $DG=AE=x \text{ cm}$

よって, $\triangle AED$ において, 三平方の定理より,

$$x^2+(x+7)^2=13^2$$

$$2x^2+14x-120=0$$

$$2(x+12)(x-5)=0$$

$x>0$ より,

$$x=5(\text{cm})$$

ここで, $\triangle ADE$ と $\triangle FDA$ は, $\angle D$ が共通で, $\angle AED=\angle FAD=90^\circ$ より,

2組の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ADE \sim \triangle FDA$$

よって,

$$EA:AF=DE:DA$$

$$5:AF=(7+5):13$$

$$AF=\frac{5 \times 13}{12}=\frac{65}{12} \text{ cm}$$

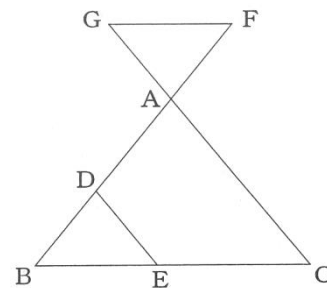
【問 8】

右の図のように、 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC があり、辺 AB 上に、2 点 A 、 B と異なる点 D をとる。点 D を通り、辺 AC に平行な直線をひき、辺 BC との交点を E とする。

また、辺 BA の延長上に、 $DB=AF$ となる点 F をとる。点 F を通り、辺 BC に平行な直線をひき、辺 CA の延長との交点を G とする。

このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(香川県 2006 年度)



問1 $\triangle AFG \equiv \triangle DBE$ であることを証明せよ。

問2 点 F から、辺 BC に垂線をひき、辺 BC との交点を H とする。線分 FH と辺 AC との交点を I とするとき、 $AD=IC$ であることを証明せよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	〔証明〕

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AFG$ と $\triangle DBE$ において,

仮定より,

$AF = DB$

$GF \parallel BE$ より, 錯角は等しいから,

$\angle GFA = \angle EBD$

$AC \parallel DE$ より, 同位角は等しいから,

$\angle BAC = \angle BDE$

対頂角は等しいから,

$\angle BAC = \angle FAG$

よって, $\angle FAG = \angle BDE$

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle AFG \cong \triangle DBE$

問2

〔証明〕

$\triangle BFH$ と $\triangle CIH$ において,

仮定より,

$\angle FHB = \angle IHC = 90^\circ$

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから,

$\angle FBH = \angle ICH$ 2 組の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle BFH \cong \triangle CIH$

よって, $\angle BFH = \angle CIH \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいから,

$\angle AIF = \angle CIH \cdots \textcircled{2}$

$\angle BFH = \angle AFI$ だから,

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より,

$\angle AFI = \angle AIF$

2 角が等しいから,

$\triangle AIF$ は二等辺三角形

よって, $AF = AI$

仮定より, $DB = AF$ だから,

$DB = AI \cdots \textcircled{3}$

また, 仮定より,

$AB = AC \cdots \textcircled{4}$

したがって, $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より,

$AD = AB - DB = AC - AI = IC$

解説

問2

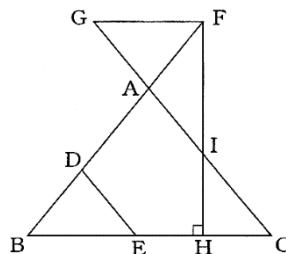
AD と IC をふくむ合同になりそうな三角形はないが,

$AD = AB - DB$, $IC = AC - AI$, $AB = AC$ より, DB と AI が等しくなることを示す。

また, 仮定より $DB = AF$ だから,

AF が AI と等しくなれば, $DB = AI$ といえるので,

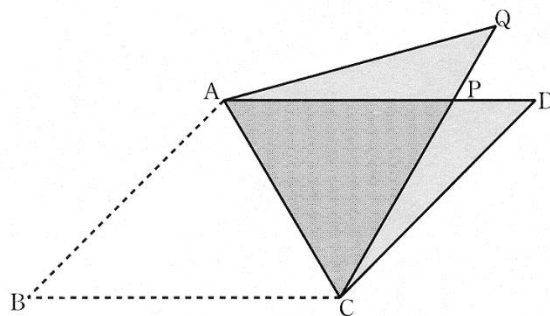
$\triangle AIF$ が二等辺三角形であることを示す。



【問 9】

右の図のように、平行四辺形 $ABCD$ を、対角線 AC を折り目として折ると、頂点 B は点 Q の位置にきた。線分 AD と CQ の交点を P とするとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2006 年度)



問1 $\triangle APQ \equiv \triangle CPD$ であることを証明せよ。

問2 $\angle ACD = 75^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$, $AC = 4 \text{ cm}$ とするとき、

(1) $\triangle PCD$ における $\angle PCD$ の大きさを求めよ。

(2) $\triangle ACD$ の面積を求めよ。

(3) 2 点 Q , D を結んでできる $\triangle ADQ$ の周の長さを求めよ。

解答欄

問1	(証明)	
問2	(1)	度
	(2)	cm^2
	(3)	cm

解答

問1

(証明)

$\triangle APQ$ と $\triangle CPD$ において,

平行四辺形の性質から,

$$AQ = CD \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle AQP = \angle CDP \quad \cdots \textcircled{2}$$

対頂角は等しいから,

$$\angle APQ = \angle CPD \quad \cdots \textcircled{3}$$

三角形の内角の和は 180° だから, ②, ③より,

$$\angle PAQ = \angle PCD \quad \cdots \textcircled{4}$$

①, ②, ④で, 2 つの三角形は,

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいことがいえたから,

$$\triangle APQ \equiv \triangle CPD$$

問2

(1) 15 度

$$(2) 6 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$(3) 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

解説

問2

(1)

$$\angle CAD = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$$

$\triangle APQ \equiv \triangle CPD$ より, $PA = PC$

$\triangle PAC$ は二等辺三角形だから, $\angle PCA = \angle CAP = 60^\circ$

$$\text{よって, } \angle PCD = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$$

(2)

点 C から辺 AD に垂線 CH をひく。

$\triangle ACH$ は 60° の角をもつ直角三角形だから,

$$AC : CH : AH = 2 : \sqrt{3} : 1$$

$$AC = 4\text{cm} \text{ より, } CH = 2\sqrt{3} \text{ cm, } AH = 2\text{cm}$$

$$\text{また, } \triangle CHD \text{ は } 45^\circ \text{ の角をもつ直角三角形だから } CH = DH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって, } \triangle ACD = \frac{1}{2} \times (2 + 2\sqrt{3}) \times 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(3)

$PH = AH = 2\text{cm}$ $\triangle PQD$ は正三角形になるから,

$$QD = PD = 2\sqrt{3} - 2\text{cm}$$

$$AQ = CD = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

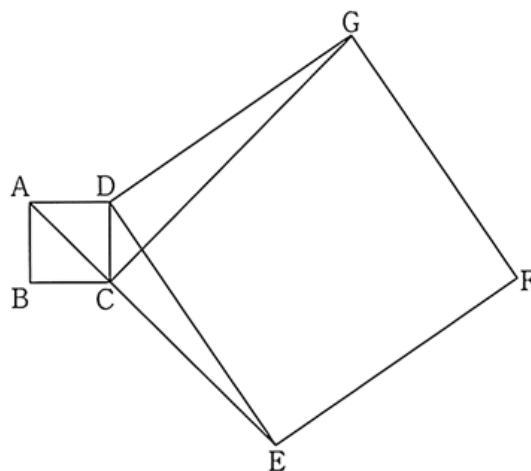
よって, $\triangle ADQ$ の周の長さは,

$$AP + PD + QD + AQ = 4 + (2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} - 2) + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

【問 10】

図のように、正方形 ABCD がある。この正方形の対角線 AC の延長上に、 $AE = 3AC$ となるように点 E をとる。また、DE を 1 辺とする正方形 DEFG をつくり、点 C と点 G を結ぶ。このとき、次の 1・2 の問いに答えなさい。

(高知県 2006 年度)



問1 $\triangle ADE \equiv \triangle CDG$ を証明せよ。

問2 正方形 ABCD の面積が 2 cm^2 のとき, 正方形 DEFG の面積を求めよ。

解答欄

[illegible]

解答

問1

【証明】

$\triangle ADE$ と $\triangle CDG$ において

四角形 $ABCD$ と四角形 $DEFG$ は正方形だから

$$AD=CD \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$DE=DG \quad \cdots \textcircled{2}$$

また

$$\angle ADE = 90^\circ + \angle CDE$$

$$\angle CDG = 90^\circ + \angle CDE$$

したがって

$$\angle ADE = \angle CDG \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2 辺とその間の角がそれぞれ等しい

ゆえに $\triangle ADE \equiv \triangle CDG$

問2

$$26 \text{ cm}^2$$

解説

問2

正方形 $ABCD$ の面積が 2cm^2 より, $AD=CD=\sqrt{2} \text{ cm}$

$$AC = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\text{cm}$$

$$AE = 3AC = 3 \times 2 = 6\text{cm}$$

$\triangle ADE \equiv \triangle CDG$ より, $CG = AE = 6\text{cm}$

D から CG に垂線 DH をひくと, $\angle DCG = \angle DAE = 45^\circ$ より,

$$DH = CH = \frac{1}{\sqrt{2}} \times DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1\text{cm}$$

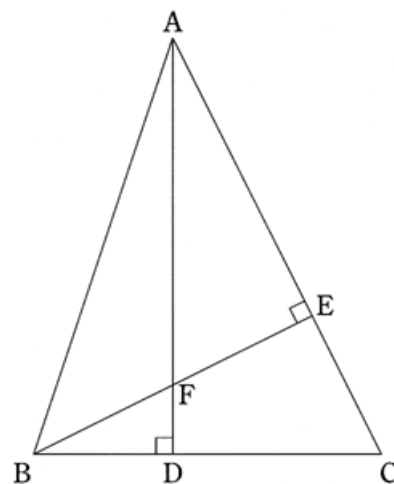
よって, $GH = 6 - 1 = 5\text{cm}$

$$\triangle GDH \text{ で三平方の定理より, } GD^2 = DH^2 + GH^2 = 1^2 + 5^2 = 26\text{cm}^2$$

【問 11】

右の図のような $\angle BAC=45^\circ$ の $\triangle ABC$ において、2点 A, B から対辺にそれぞれ垂線 AD, BE をひき、AD と BE の交点を F とする。このとき、 $\triangle AFE \equiv \triangle BCE$ であることを証明しなさい。

(佐賀県 2006 年度 後期)



解答欄

解答

$\triangle AFE$ と $\triangle BCE$ で、

$AC \perp BE$, $\angle BAC = 45^\circ$ だから、

$$\angle AEF = \angle BEC = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$AE = BE \quad \cdots \textcircled{2}$$

$AD \perp BC$ だから、 $\angle AEF = \angle BDF = 90^\circ$

また、 $\angle AFE = \angle BFD$

よって、 $\angle FAE = \angle FBD$

$$\text{つまり、} \angle FAE = \angle CBE \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から、

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AFE \equiv \triangle BCE$$

【問 12】

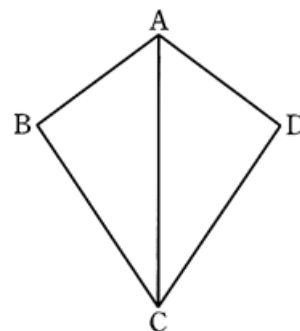
図 1～図 5 のように四角形 ABCD があり, $AB=AD$ で, 対角線 AC は $\angle BAD$ を 2 等分している。このとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2006 年度)

問1 図 1 において, $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ であることを証明せよ。

図1

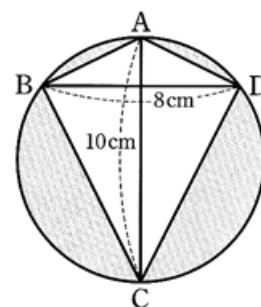
(証明)



問2 図 2 において, 四角形 ABCD の 4 つの頂点 A, B, C, D は同じ円の周上にあ

図2

る。AC=10 cm, BD=8 cm のとき, 弧 AB と辺 AB, 弧 BC と辺 BC, 弧 CD と辺 CD, 弧 DA と辺 DA によって囲まれた 4 つの部分 (図 2 の影をつけた部分) の面積の和は何 cm^2 か。



問3 図 3 において, 点 E は辺 AB の中点で

(作図)

ある。点 E を定規とコンパスを用いて作図し, その位置を点・で示せ。ただし, 定規は直線や線分をひくときに使い, 長さを測ったり角度を利用したりしてはならない。なお, 作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

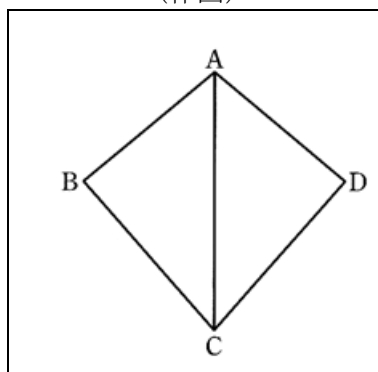
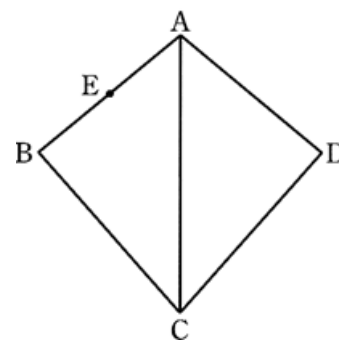


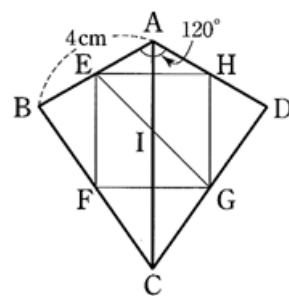
図3



問4 図4, 図5において, $AB=4\text{ cm}$, $\angle BAD=120^\circ$ である。また, 辺 AB , BC , CD , DA の中点をそれぞれ E , F , G , H とすると, 四角形 $EFGH$ は正方形となった。線分 AC と線分 EG との交点を I とするとき, 次の(1)~(3)に答えよ。

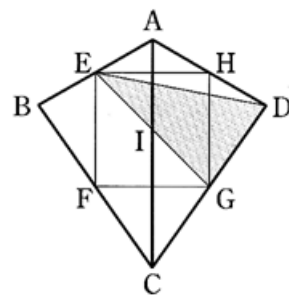
(1) 線分 EH の長さは何 cm か。

図4

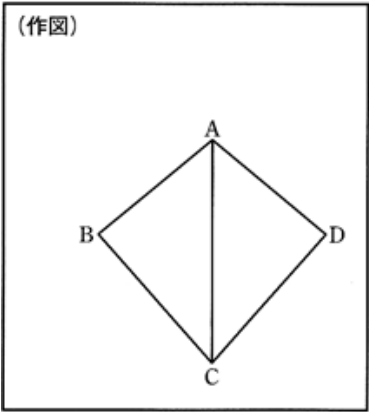


(2) 線分 IC の長さは何 cm か。

図5



(3) 図5において, 三角形 DEG の面積は何 cm^2 か。

問1		
問2	cm ²	
問3	(作図) 	
問4	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	cm ²

解答

問1

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ において

$AB=AD$ (仮定) …①

$\angle BAC=\angle DAC$ (仮定) …②

AC は共通 …③

①, ②, ③より,

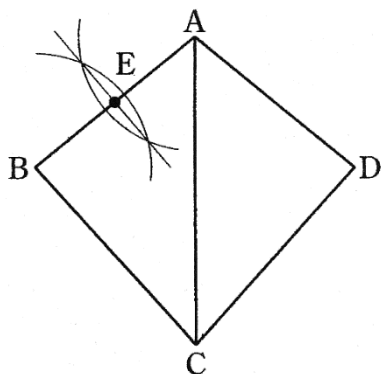
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$

問2

$$25\pi - 40\text{ cm}^2$$

問3



問4

(1) $2\sqrt{3}\text{ cm}$

(2) $3\sqrt{3} - 1\text{ cm}$

(3) $9 - \sqrt{3}\text{ cm}^2$

解説

問4

(2)

四角形 EFGH は正方形より, $HG=EH=2\sqrt{3}\text{ cm}$

中点連結定理より, $AC=2HG=4\sqrt{3}\text{ cm}$

AC と EH との交点を K とすると, $AK=\frac{1}{2}AE=1\text{ cm}$

I は正方形の対角線の交点だから, $IK=\frac{1}{2}HG=\sqrt{3}\text{ cm}$

よって, $IC=4\sqrt{3}-1-\sqrt{3}=3\sqrt{3}-1\text{ cm}$

(3)

$$\triangle DEG = \triangle CEG = \triangle ICG + \triangle ICE$$

$\triangle ICG = \triangle ICE$ になるから,

$$\triangle DEG = 2\triangle ICG$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times IC \times KH$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times (3\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{3}$$

$$= 9 - \sqrt{3}\text{ cm}^2$$

【問 13】

図 I のように、円 O の円周上に異なる 4 点 A, B, C, D があり、弦 AC と弦 BD は点 E で交わっている。また、 $\angle BOC = 30^\circ$, $\angle ACB = \angle DBC$ である。このとき、次の 1～3 の問いに答えなさい。

(宮崎県 2006 年度)

問1 $\angle BAC$ の大きさを求めなさい。

問2 $\triangle ABE \equiv \triangle DCE$ であることを証明しなさい。

問3 図 II は、図 I において、 $\angle AOB = 90^\circ$ となったものである。弦 AC と線分 OB との交点を F 、弦 BD と線分 OC との交点を G とする。円 O の半径が 6 cm のとき、次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

(1) 線分 FC の長さを求めなさい。

(2) 四角形 $OFEG$ の面積を求めなさい。

図 I

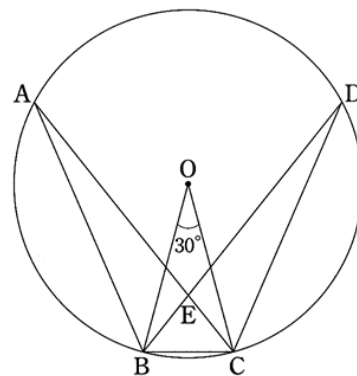
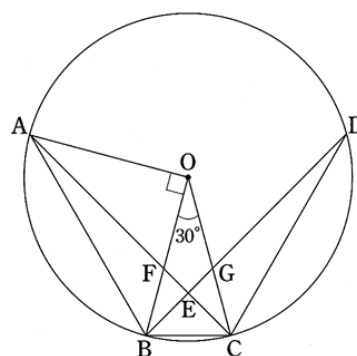


図 II



解答欄

問1	$\angle BAC =$ 度	
問2	証明	
問3	(1)	$FC =$ cm
	(2)	cm ²

解答

問1

$\angle BAC = 15^\circ$

問2

証明

$\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ で,

仮定より, $\angle ACB = \angle DBC$ から,

$\triangle EBC$ は 2 つの角が等しいので, 二等辺三角形である。

よって, $BE = CE \cdots ①$

対頂角は等しいので,

$\angle AEB = \angle DEC \cdots ②$

$\angle ABD$ と $\angle ACD$ は, $\widehat{AD}$ に対する円周角なので,

$\angle ABE = \angle DCE \cdots ③$

①, ②, ③から, 1 辺とその両端の角が, それぞれ等しいので,

$\triangle ABE \equiv \triangle DCE$

問3

(1) $FC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

(2) $9 - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問3

(1)

$\angle OCB = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$

よって, $\angle OCF = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$

$\triangle FCO$ において, $\angle FCO = \angle FOC = 30^\circ$ より, $FC = FO$

F から底辺 CO に垂線 FH をひくと, $\triangle FCH$ は 30° と 60° の角をもつ直角三角形なので,

$$FC = \frac{2}{\sqrt{3}} CH$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{6}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

(2)

$\angle GEC = \angle ECB + \angle EBC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$\triangle GEC$ も 30° と 60° の角をもつ直角三角形なので,

$GE : GC : EC = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$GC = FB = 6 - 2\sqrt{3} \text{ cm}$ より

$GE = (6 - 2\sqrt{3}) \div 2 = 3 - \sqrt{3} \text{ cm},$

$EC = \sqrt{3} (3 - \sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3 \text{ cm}$

また, (1)より,

$$FH = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

よって,

(四角形 OFEG) = $\triangle OFC - \triangle GEC$

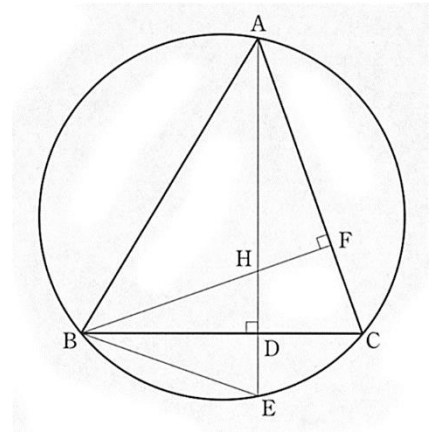
$$= \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times (3 - \sqrt{3}) \times (3\sqrt{3} - 3)$$

$$= 9 - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 14】

図は、内角がすべて鋭角である $\triangle ABC$ と3つの頂点 A, B, C を通る円において、点 A から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を D 、円との交点を E とし、 B と E を結んだものである。また、点 B から辺 AC に引いた垂線と辺 AC との交点を F とし、線分 AE と線分 BF との交点を H としたものである。このとき、次の1～3の問いに答えなさい。

(鹿児島県 2006 年度)



問1 $\widehat{AB}$, $\widehat{BE}$, $\widehat{EC}$, $\widehat{CA}$ の中から1つ選び、その弧に対する円周角を1つあげよ。

問2 $\triangle BHD \equiv \triangle BED$ であることを証明せよ。

問3 $BC=3\text{ cm}$, $BE=2\text{ cm}$, $CF=1\text{ cm}$ のとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(1) 線分 BF , 線分 AH の長さはそれぞれ何 cm か。

(2) 4点 A, B, E, C を結んでできる四角形 $ABEC$ の面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	選んだ弧		円周角		
問2	(証明)				
問3	(1)	線分 BF	cm	線分 AH	cm
	(2)	cm ²			

解答

問1

選んだ弧 $\widehat{AB}$
円周角 $\angle ACB$

問2

(証明)

$\triangle BHD$ と $\triangle BED$ において

BD は共通 …①

$\angle BDH = \angle BDE = 90^\circ$ …②

ここで、 $\triangle BFC$ と $\triangle ADC$ はそれぞれ直角三角形だから

$\angle DBH + \angle ACD = 90^\circ$

$\angle CAD + \angle ACD = 90^\circ$

したがって

$\angle DBH = \angle CAD$ …③

また、同じ弧に対する円周角は等しいから

$\angle CAD = \angle DBE$ …④

③, ④より

$\angle DBH = \angle DBE$ …⑤

①, ②, ⑤より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BHD \equiv \triangle BED$

問3

(1)

線分 BF $2\sqrt{2}$ cm

線分 AH $6\sqrt{2} - 6$ cm

(2)

$9\sqrt{2} - 7$ cm²

解説

問3

(1)

$\triangle BCF$ で,

三平方の定理より $BF = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ $HF = BF - BH = 2\sqrt{2} - 2 \text{ cm}$

$\triangle BCF$ と $\triangle AHF$ は,

$\angle BFC = \angle AFH = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

弧 EC に対する円周角より

$\angle CBF = \angle HAF \cdots \textcircled{2}$

①, ②より,

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BCF \sim \triangle AHF$

よって,

$BC : AH = CF : HF$

$3 : AH = 1 : (2\sqrt{2} - 2)$

$AH = 6\sqrt{2} - 6 \text{ cm}$

(2)

$\triangle BHD$ と $\triangle BCF$ も

2組の角がそれぞれ等しいので相似になるから,

$BH : BC = HD : CF$

$2 : 3 = HD : 1$

$HD = \frac{2}{3} \text{ cm}$

よって, $DE = HD = \frac{2}{3} \text{ cm}$

(四角形 $ABEC$) = $\triangle ABC + \triangle EBC$

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD + \frac{1}{2} \times BC \times DE$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times \left(6\sqrt{2} - 6 + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3}$

$= 9\sqrt{2} - 7 \text{ cm}^2$