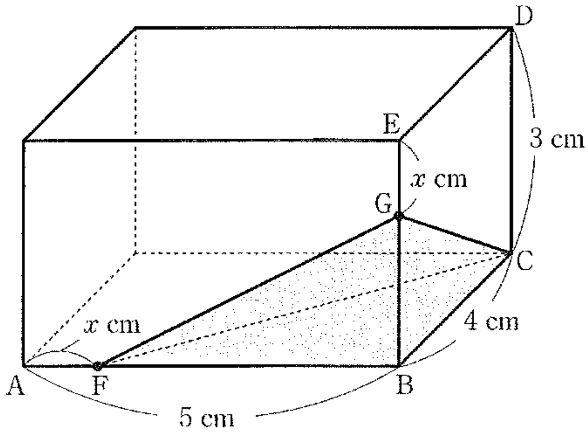
5.空間図形の複合問題 （長さ･面積･体積･角度ほか）【2012 年度出題】

【問 1】

図の直方体で，点 F を辺 AB 上に，点 G を辺 BE 上にとり，AF＝EG＝x cm とする。次の(1)～(3)に答えなさい。

（青森県　2012 年度　後期）



(1) BF の長さを x を用いて表しなさい。

(2) 三角すい GFBC の体積を x を用いて表しなさい。

(3) この三角すい GFBC の体積が 2 cm^3 になるときの x の値を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3
(3)	x＝

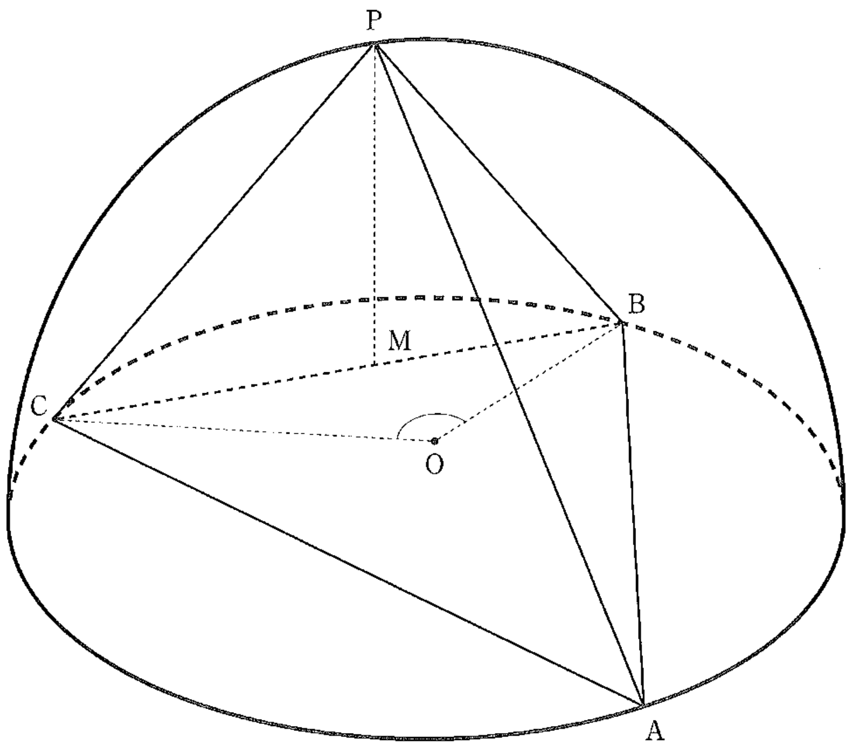
解答
(1) $5-x$ cm
(2) $\frac{2}{3}(5-x)(3-x)$ cm^3
(3) $x=2$
解説
(2)
三角すい GFBC の体積は $\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{FBC}\times\mathrm{GB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(5-x)\times4\times(3-x)=\frac{2}{3}(5-x)(3-x)$ cm^3
(3)
三角すい GFBC の体積が 2 cm^3 より
$\frac{2}{3}(5-x)(3-x)=2$
$(5-x)(3-x)=3$
$15-8x+x^2=3$
$x^2-8x+12=0$
$(x-2)(x-6)=0$
$0<x<3$ より
$x=2$ cm

【問 2】

下の図のように，半径 4 cm の円 O を底面とする半球があり，円 O の周上に，異なる 3 点 A, B, C を AB＝BC＝CA を満たすようにとります。また，線分 BC の中点を M とし，点 M を通り底面に垂直な直線がこの半球の表面と交わる点のうち，M と異なる点を P とします。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（岩手県　2012 年度）



問1　∠BOC の大きさを求めなさい。

問2　三角錐 PABC の体積を求めなさい。

解答欄

問1	度
問2	cm^3

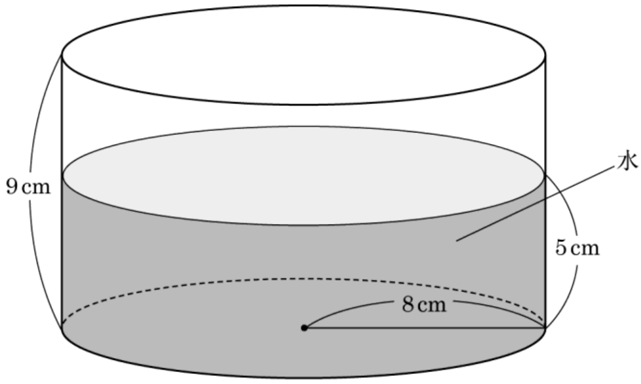
解答
問1 120 度
問2 24 cm^3
解説
問2
△OCM は∠COM＝60°，∠CMO＝90° 三角形だから
$\mathrm{OM}=\dfrac{\mathrm{OC}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ cm
$\mathrm{CM}=\sqrt{3}\ \mathrm{OM}=2\sqrt{3}$ cm
△OPM において
OM＝2 cm
OP＝4 cm
∠PMO＝90° より PM＝$2\sqrt{3}$ cm
よって求める体積は$\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{PM}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3}\times2)\times(2+4)\times2\sqrt{3}=24\ \mathrm{cm}^3$

【問 3】

底面の半径が 8 cm，高さが 9 cm の円柱の形をした容器を水平な台に置き，右の図のように底から 5 cm の高さまで水を入れた。次の問いに答えなさい。

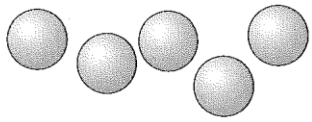
ただし，円周率は π とし，容器の厚さは考えないものとする。

（山形県　2012 年度）



(1) 容器に入っている水の体積を求めなさい。

ビー玉



(2) この容器に，半径が 1 cm の球の形をしたビー玉を，静かに何個か沈めたところ，水面がちょうど 1 cm 上昇した。沈めたビー玉の個数を求めなさい。

ただし，沈めたビー玉は全体が水中に収まっているものとする。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	個

解答

(1) 320π cm^3

(2) 48 個

解説

ビー玉を x 個入れたとすると

ビー玉 x 個分の体積が円柱の中の水位が上昇した分の体積と等しいので

$$\frac{4}{3}\times\pi\times1^3\times x=\pi\times8^2\times1$$

これを解いて

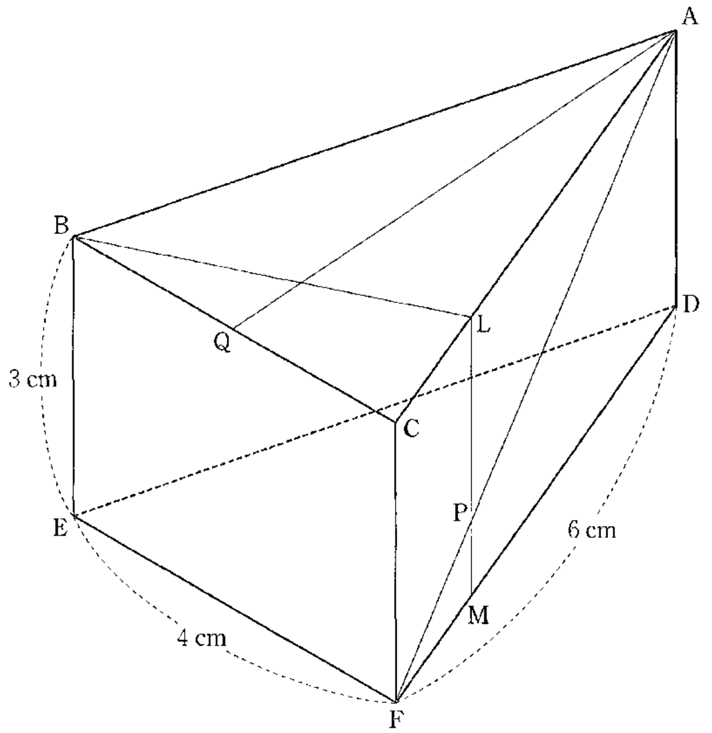
$x=48$ 個

【問 4】

下の図のような，底面が DE＝DF＝6 cm，EF＝4 cm の二等辺三角形で，高さが 3 cm の三角柱がある。辺 AC 上に線分 BL の長さがもっとも短くなるように点 L をとり，L を通り辺 CF に平行な直線と辺 DF との交点を M とする。また，線分 AF と線分 LM との交点を P とし，辺 BC の中点を Q とする。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（福島県　2012 年度）



問1　線分 AQ の長さを求めなさい。

問2　線分 LP と線分 PM の長さの比を求めなさい。

問3　4 点 Q，A，E，P を結んでできる三角すいの体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	LP：PM＝　　：
問3	cm^3

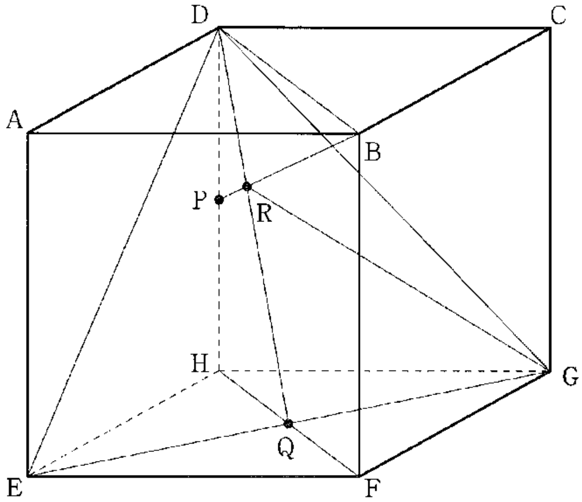
解答
問1　$4\sqrt{2}$ cm
問2 LP：PM＝7：2
問3　$\dfrac{56\sqrt{2}}{9}$ cm^3
解説
問2
CL＝x cm とおくと AL＝6－x cm と表せる。
∠BLA＝90° だから三平方の定理より
$BC^2-CL^2=AB^2-AL^2$
$4^2-x^2=6^2-(6-x)^2$
これを解いて
$x=\dfrac{4}{3}$ cm
AL＝$6-\dfrac{4}{3}=\dfrac{14}{3}$ cm
AC // DF より平行線と線分の比の定理を利用して
LP：PM＝AL：FM＝$\dfrac{14}{3}:\dfrac{4}{3}$＝7：2
問3
△AEP：△AEF＝AP：AF＝7：9
よって三角すい AQEP の体積は
$\dfrac{7}{9}$ ×三角すい AQEF の体積
$=\dfrac{7}{9}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times3\times4\sqrt{2}$
$=\dfrac{56\sqrt{2}}{9}$ cm^3

【問 5】

図のように，1 辺の長さが 6 cm である立方体 ABCDEFGH がある。辺 DH の中点を P とし，長方形 BDHF と△DEG の交線が，線分 FH と交わる点を Q とする。また，線分 DQ と線分 BP との交点を R とする。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2012 年度）



問1　長方形 BDHF の面積を求めなさい。

問2　△RQG の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm^2

解答

問1　$36\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

問2　$\dfrac{27\sqrt{3}}{5}\ \text{cm}^2$

解説

問2

長方形 DHFB において HF は正方形 EFGH の対角線だから $6\sqrt{2}$ cm

$\text{HQ}=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ cm

BP の延長線と FH の延長線の交点を K とする。

△PBD≡△PKH だから

$\text{KH}=\text{BD}=6\sqrt{2}$ cm

DB // KQ より

$\text{DR}:\text{RQ}=\text{DB}:\text{KQ}=6\sqrt{2}:(6\sqrt{2}+3\sqrt{2})=6:9=2:3$

よって$\triangle\text{RQG}=\dfrac{3}{5}\triangle\text{DQG}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\triangle\text{DEG}$

ここで△DEG は $\text{DE}=\text{DG}=\text{EG}=6\sqrt{2}$ cm の正三角形だから

$\text{DQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{2}=3\sqrt{6}$ cm

よって$\triangle\text{RQG}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 3\sqrt{6}=\dfrac{27\sqrt{3}}{5}\ \text{cm}^2$

【問 6】

図1の長方形 ABCD は，AB＝8 cm，AD＝16 cm であり，辺 AD の中点を E とする。また，辺 BC 上に，2 点 F，G を BF＝CG＝4 cm となるようにとる。

図1の長方形を，線分 AF，FE，EG，GD を折り目として図2のように折り，図3の四面体 HEFG をつくった。辺 FG の中点を M とするとき，後の問1～問4に答えなさい。

（群馬県 2012 年度）

図1

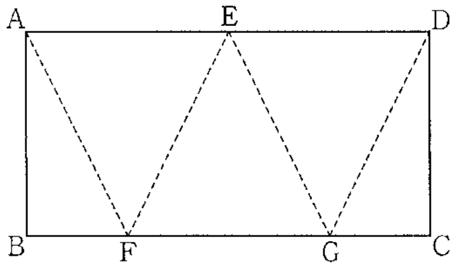


図2

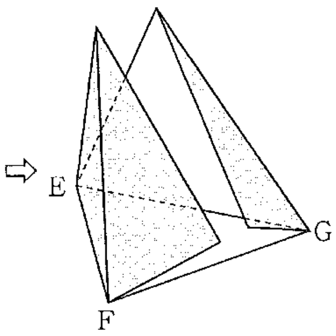
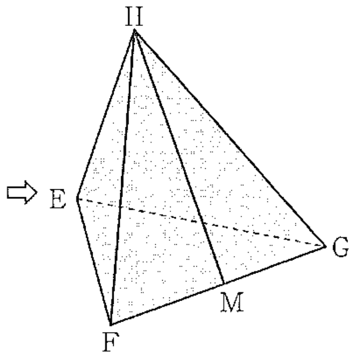


図3



問1 図3の点 H で重なるのは，図1のどの点か，すべて書きなさい。

問2 図3において，辺 HF の長さを求めなさい。

問3 三角形 HEM について，

(1) 三角形 HEM はどんな三角形か，書きなさい。

(2) 三角形 HEM の面積を求めなさい。

問4 四面体 HEFG の体積を求めなさい。

解答欄

問1		
問2		cm
問3	(1)	
	(2)	cm^2
問4		cm^3

解答

問1　点 A, D

問2　$4\sqrt{5}$ cm

問3

(1)　正三角形

(2)　$16\sqrt{3}$ cm^2

問4　$\dfrac{128\sqrt{3}}{3}$ cm^3

【問 7】

右の図1に示した立体 ABC－DEF は，AB＝BC＝CA＝AD＝6 cm，∠CAD＝∠BAD＝90° の正三角柱である。辺 AB 上にある点を P とする。点 P を通り辺 AD に平行な直線を引き，辺 DE との交点を Q とする。頂点 C と点 P，頂点 F と点 Q をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

（東京都　2012 年度）

問1　右の図2は，図1の正三角柱の展開図の1つに，頂点A，B，D，Eと点Pを示したものである。

解答欄に示した展開図をもとにして，線分 CP，PQ，QF を定規を用いて書け。ただし，点 Q の位置を示す文字 Q も書き入れること。

問2　右の図3は，図1において，辺 AD の中点を M とし，頂点 C と点 M，頂点 F と点 M，点 M と点 P，点 M と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。AP:PB＝2:1 のとき，立体 M－CPQF の体積は何 cm^3 か。ただし，答えに根号が含まれるときは，根号を付けたままで表せ。

図1

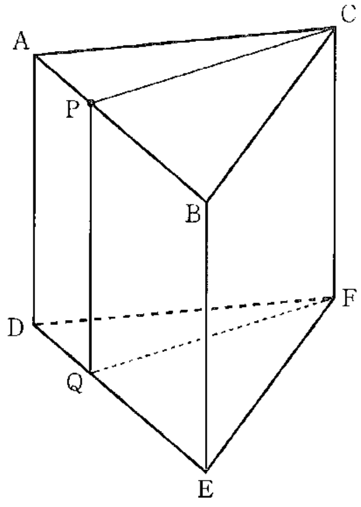


図2

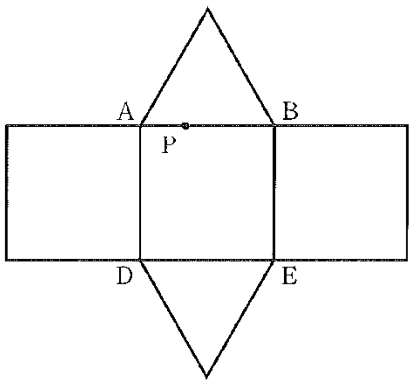
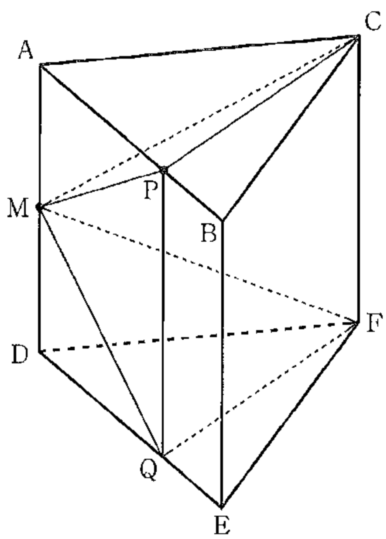
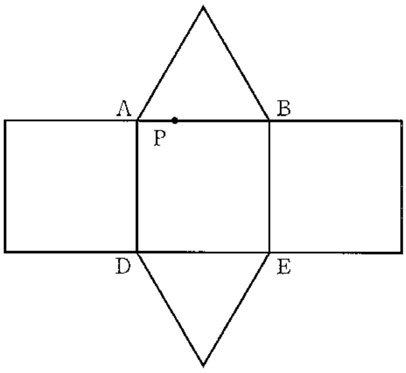


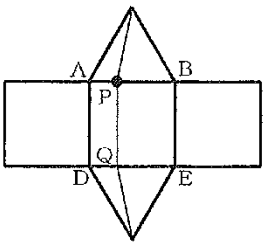
図3



解答欄

問1	
問2	cm^3

解答
問1



問2　$24\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$
解説
問2
C から AB に垂線をひき交点を H とする。

△ABC は 1 辺が 6 cm の正三角形だから AH$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$ cm

立体 M－CPQF の体積＝
正三角柱 ABC－DEF の体積－三角柱 CBP－FEQ の体積－三角錐 CAMP の体積－三角錐 FMDQ の体積

$=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{CH}\times \mathrm{AD}-\dfrac{1}{2}\times \mathrm{PB}\times \mathrm{CH}\times \mathrm{BE}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times \mathrm{AM}\times \mathrm{AP}\times \mathrm{CH}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times \mathrm{DM}\times \mathrm{DQ}\times \mathrm{CH}$

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}\times 6-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\times 6\right)\times 3\sqrt{3}\times 6-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 3\times\left(6\times\dfrac{2}{3}\right)\times 3\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 3\times\left(6\times\dfrac{2}{3}\right)\times$
$3\sqrt{3}$

$=54\sqrt{3}-18\sqrt{3}-6\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

$=24\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

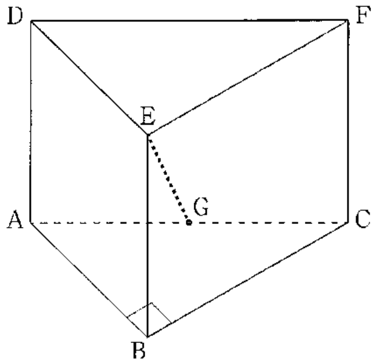
【問 8】

右の図1は，AB＝6 cm，BC＝8 cm，∠ABC＝90°の直角三角形 ABC を底面とし，AD＝BE＝CF＝6 cm を高さとする三角柱であり，点 G は辺 AC の中点である。

このとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県　2012 年度）

図1



問1　この三角柱において，2点E，G間の距離を求めなさい。

問2　この三角柱の側面に，幅が一定である紙テープを面 BCFE，面 ACFD，面 ABED の順で，しわのないように巻きつけていくことにする。このとき，図2のように，紙テープの一方の長い縁（ふち）の一点を三角柱の点 E に重ね，もう一方の長い縁が三角柱の点 B に重なるようにする。図3は，巻きつけた紙テープを三角柱の辺 BE にそって切り，平面上に広げたものであり，三角柱の点 E の位置にあった点を P，点 B の位置にあった点を R とした四角形 PQRS である。PQ＝2 cm のとき，四角形 PQRS の面積を求めなさい。

図2

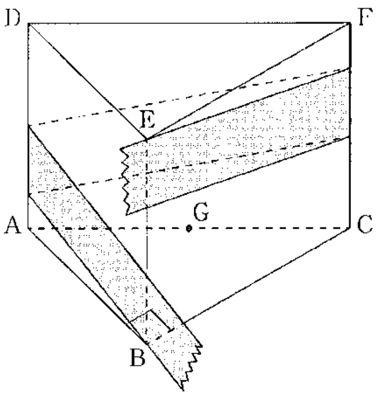
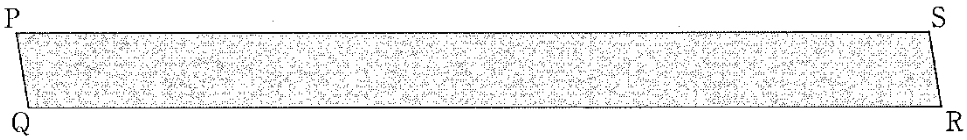


図3



解答欄

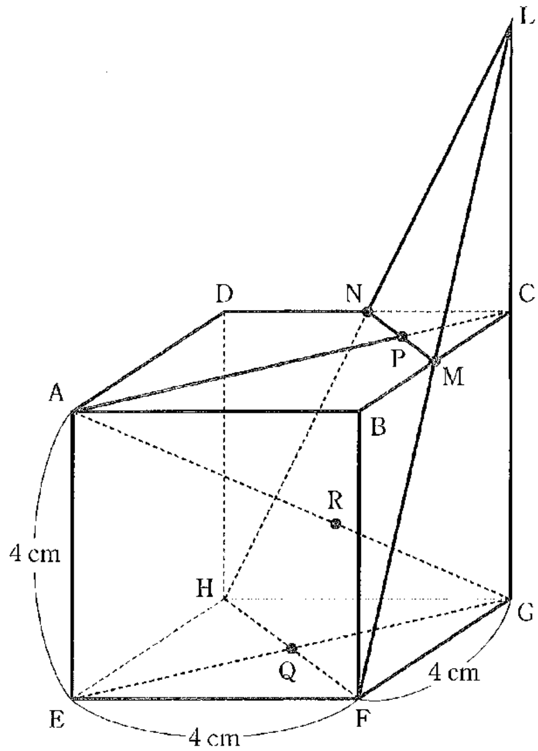
問1	cm
問2	cm^2

解答
問1　$\sqrt{61}$ cm
問2　48cm^2
解説
問1
底面の△ABC において
BC の中点を M とおくと
中点連結定理より $GM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 6=3$ cm
$GM \parallel AB$ より $\angle GMC=\angle ABC=90^\circ$
よって△GBM において
三平方の定理より $BG^2=3^2+4^2=25$
△EBG において
三平方の定理より
$EG^2=6^2+25=61$
$EG>0$ より
$EG=\sqrt{61}$ cm
問2
展開図において側面の長方形の縦 EB, 横 BC＋CA＋AB となるように展開する。
三平方の定理より $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10$ cm
求める四角形 PQRS の面積は
その側面の長方形の面積から
底辺が $8+10+6=24$ cm
高さが $6-2=4$ cm　の三角形 2 つ分を除いたものになるから
$6\times 24-\frac{1}{2}\times 24\times 4\times 2=144-96=48$ cm^2

【問 9】

図のように，1 辺の長さが 4 cm の立方体 ABCD－EFGH において，辺 GC の延長上に，GC＝CL となるような点 L をとり，線分 LF と辺 BC の交点を M，線分 LH と辺 CD の交点を N とする。また，線分 AC と MN の交点を P，線分 EG と FH の交点を Q，線分 AG と平面 MNHF との交点を R とする。このとき，次の問1～問4に答えなさい。

（新潟県　2012年度）



問1　△LNM と△LHF の面積の比を答えなさい。

問2　三角すい LFGH の体積を求めなさい。

問3　線分 CP と線分 AG の長さを，それぞれ求めなさい。

問4　線分 GR の長さを求めなさい。

解答欄

問1	:	
問2		cm^3
問3	CP＝	cm
	AG＝	cm
問4		cm

解答
問1　1:4
問2　$\dfrac{64}{3}$ cm^3
問3
CP＝$\sqrt{2}$ cm
AG＝$4\sqrt{3}$ cm
問4　$\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$ cm
解説
問1
△LFG において
MC // FG より LM:MF＝LC:CG＝1:1
同様に LN:NH＝1:1
よって △LHF で
中点連結定理より NM // HF, NM:HF＝1:2
△LNM∽△LHF だから
面積比は $1^2:2^2$＝1:4
問3
AB の延長線と NM の延長線の交点を K とする。
△LFG で
中点連結定理より MC＝$\dfrac{1}{2}$FG＝$\dfrac{1}{2}\times 4$＝2 cm
同様に CN＝2 cm
CN // BK より
CN:BK＝CM:BM
2:BK＝2:2 より
BK＝2 cm
また CP:AP＝CN:AK＝2:6＝1:3
また三平方の定理より AC＝$\sqrt{2}$ AB＝$4\sqrt{2}$ cm
よって CP＝$\dfrac{1}{4}$AC＝$\dfrac{1}{4}\times 4\sqrt{2}$ ＝$\sqrt{2}$ cm
AG＝$\sqrt{4^2+4^2+4^2}$ ＝$4\sqrt{3}$ cm
問4
R は PQ と AG の交点であるから AP // GQ より
GR:AR＝GQ:AP＝$\dfrac{4\sqrt{2}}{2}:\dfrac{3}{4}\times 4\sqrt{2}$ ＝2:3
よって GR＝$\dfrac{2}{5}$AG＝$\dfrac{2}{5}\times 4\sqrt{3}$ ＝$\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$ cm

【問 10】

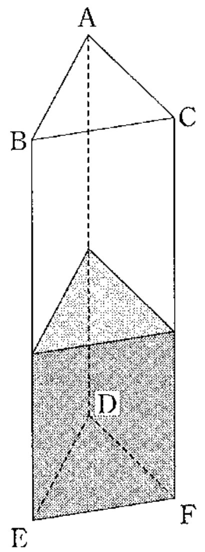
AB＝AC＝5 cm，BC＝6 cm，BE＝16 cm の三角柱 ABC－DEF の容器に水を入れ，密閉した。

図1のように，面 DEF が水平になるようにおいたとき，水の深さが 7 cm になった。

容器の厚さは考えないものとして，次の問いに答えなさい。

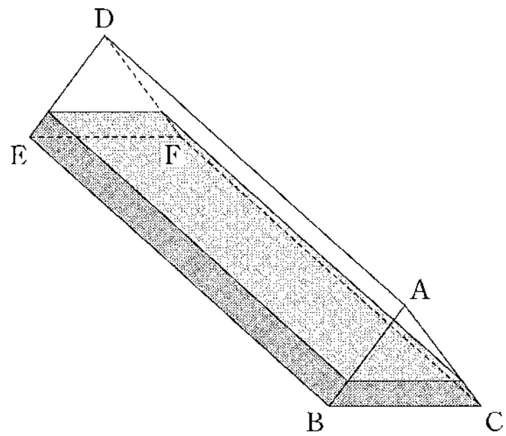
（富山県　2012 年度）

図1



問1　水の体積と容器の容積の比を求めなさい。

図2



問2　図1の水の入った容器を図2のように，面 BCFE が水平になるようにおいた。このときの水の深さを求めなさい。

解答欄

問1	：
問2	cm

解答
問1 $7:16$
問2 1 cm
解説
問2
A から BC に垂線をひき交点を H とする。
また AB, AC, AH と水面との交点を I, J, K とする。
△AIJ と△ABC の面積比は
$(16-7):16=9:16=3^2:4^2$
よって相似な三角形△AIJ と△ABC の相似比は $3:4$
$AJ:AH=3:4$
ここで AB＝AC より $BH=CH=\dfrac{6}{2}=3$ cm
△ABH において
三平方の定理より $AH=\sqrt{5^2-3^2}=4$ cm
よって $AJ:4=3:4$ より $AJ=3$ cm
したがって水の深さ $KH=4-3=1$ cm

【問 11】

一辺の長さが 6 cm の立方体 ABCD－EFGH がある。
このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（山梨県　2012年度）

問1 図1のような，立方体の面 ABCD 上の線分 BD と面 AEFB 上の線分 BE の長さについて，次のア～エの中から正しいものを 1 つ選び，その記号を書きなさい。また，そのように考えた理由を答えなさい。

ア 線分 BD の方が長い。

イ 線分 BE の方が長い。

ウ 線分 BD と BE の長さは等しい。

エ どちらが長いかは問題の条件だけでは決まらない。

図1

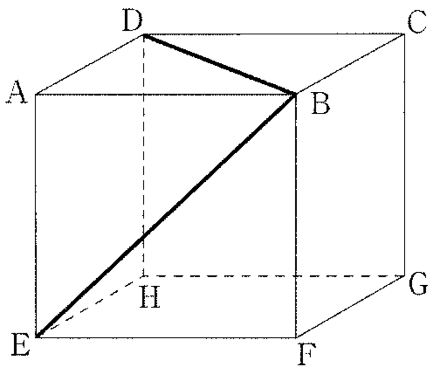
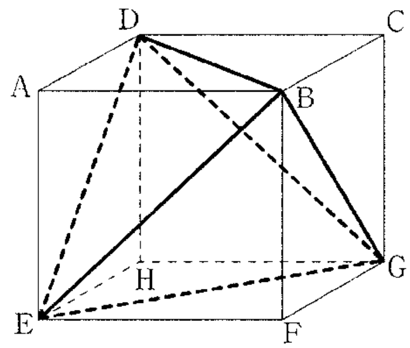


図2

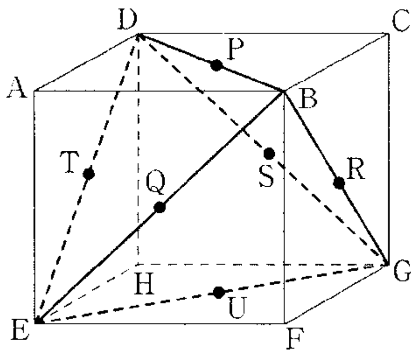


問2 図2のような，立方体の各面の対角線 BD, BE, BG, DG, DE, EG を辺とする立体 BDEG を考える。
このとき，次の(1), (2)に答えなさい。

(1) この立体の辺 DE の長さを求めなさい。

(2) この立体の表面積を求めなさい。

図3



問3 図3のように立方体の各面の対角線 BD, BE, BG, DG, DE, EG の中点をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とする。次に，これらの点のうち，PQ, PR, PS, PT のように，立方体の隣り合う面上の点をすべて結び，できる立体 PQRSTU を考える。
このとき，次の(1), (2)に答えなさい。

(1) この立体において，面 PQR と平行な面はあるか。ある場合は平行な面を答え，無い場合は「無い」と答えなさい。

(2) この立体の体積を求めなさい。

解答欄

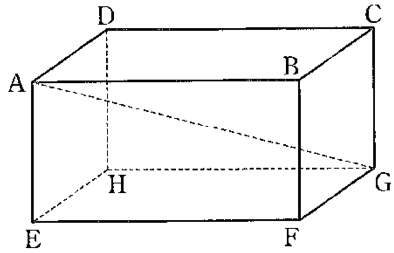
<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>記号</td><td></td></tr>
<tr><td>理由</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^3</td></tr>
</table>

解答
問1
記号 ウ
理由 どちらも，一辺の長さが 6 cm の正方形の対角線だから等しい。
問2
(1) $6\sqrt{2}$ cm
(2) $72\sqrt{3}$ cm^2
問3
(1) 面 STU
(2) 36 cm^3
解説
問2
(2)
この立体の表面は合同な正三角形 4 面でできておりその 1 辺は $6\sqrt{2}$ cm である。
△EBD において E から BD に垂線をひき交点を K とする。
$BK＝DK＝3\sqrt{2}$ cm，$EK＝\sqrt{3}\ BK＝3\sqrt{6}$ cm より
$△EBD＝\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 3\sqrt{6}＝18\sqrt{3}\ cm^2$
よって求める面積は $4\times 18\sqrt{3}＝72\sqrt{3}\ cm^2$
問3
(2)
△EBD において
中点連結定理より $TQ＝\frac{1}{2}DB＝\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}＝3\sqrt{2}$ cm
立体 PQRSTU は正八面体だから求める体積は正四角すい P－TQRS の 2 倍になる。
面 TQRS の対角線の交点を N とおく。
求める体積は $\frac{1}{3}\times(3\sqrt{2})^2\times 3\times 2＝36\ cm^3$

【問 12】

右の図の直方体で，AD＝2 cm，AE＝3 cm，対角線AG＝7 cmである。

（長野県　2012 年度）



(1) 点 P を，辺 EF 上に，AP＋PG の長さが最小になるようにとるとき，AP＋PG の長さを求めなさい。

(2) 点 Q を，対角線 AG 上に BQ⊥AG となるようにとるとき，BQ の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm

解答

(1) $\sqrt{61}$ cm

(2) $\dfrac{6\sqrt{13}}{7}$ cm

解説

(1)

AG は直方体の対角線より

$AG^2＝AD^2＋AE^2＋EF^2$

$7^2＝2^2＋3^2＋EF^2$

$EF^2＝36$

EF＞0 より

EF＝6 cm

P は長方形 AEFB と長方形 EFGH を辺 EF を切り離さずに展開した図において

長方形 AHGB の対角線と EF との交点となる。

展開図の△AHG において

AH＝3＋2＝5 cm，HG＝EF＝6 cm より

$AP＋PG＝AG＝\sqrt{5^2+6^2}＝\sqrt{61}$ cm

(2)

△ABG の面積の関係より $\dfrac{1}{2}\times AG\times BQ＝\dfrac{1}{2}\times AB\times BG$

これに AG＝7，AB＝6

三平方の定理より $BG＝\sqrt{2^2+3^2}＝\sqrt{13}$ を代入して

$\dfrac{1}{2}\times 7\times BQ＝\dfrac{1}{2}\times 6\times \sqrt{13}$

$BQ＝\dfrac{6\sqrt{13}}{7}$ cm

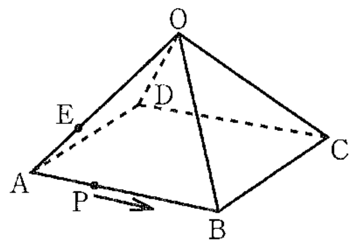
【問 13】

図6の立体は，点 O を頂点とする四角すいである。この四角すいにおいて，底面の四角形 ABCD は 1 辺の長さが 6 cm の正方形で，4 つの側面はすべて正三角形である。この立体において，点 E は辺 OA 上にあり，OE＝4 cm である。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（静岡県　2012年度）

図6



問1 点 P は，点 A を出発し，毎秒 1 cm の速さで底面の正方形 ABCD の辺上を，点 B, C を通って点 D まで移動する。

(1) 点 P が点 A を出発してから 2 秒後のとき，△EAP の面積は，△OAB の面積の何倍であるか，答えなさい。

図7

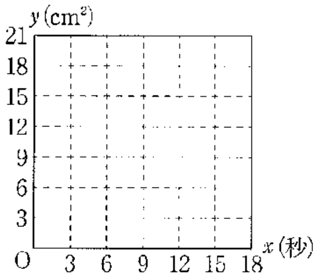
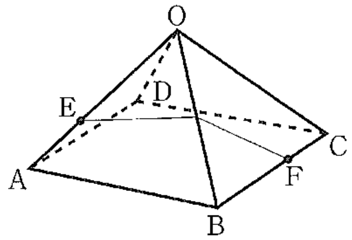
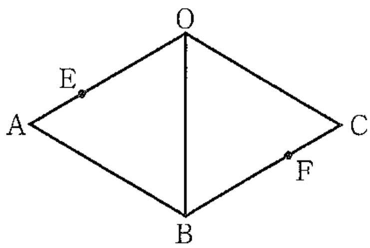


図8



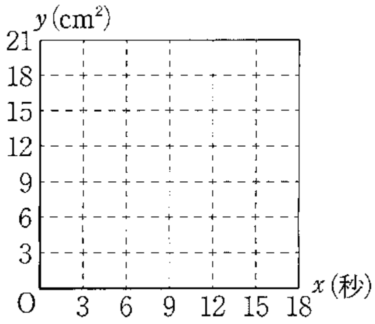
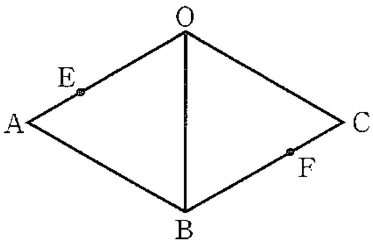
(2) 点 P が点 A を出発してから x 秒後の△PDA の面積を y cm^2 とする。このとき，x と y の関係を表すグラフを，図7にかきなさい。ただし，x の変域を $0 \leqq x \leqq 18$ とする。

図9



問2 この立体において，BF＝4 cm となる辺 BC 上の点を F とする。図8のように，点 E から辺 OB 上を通って点 F まで，立体の側面に糸をかける。図9は，図8の立体の展開図の一部を示したものである。かける糸の長さがもっとも短くなるときの糸のようすを，図9に線でかきなさい。また，そのときの糸の長さを求めなさい。

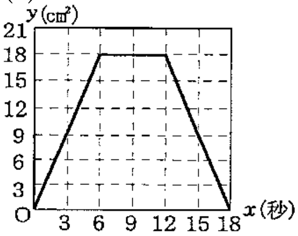
解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(1)</td><td>倍</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">糸の長さ　　　　　　cm</td></tr>
</table>

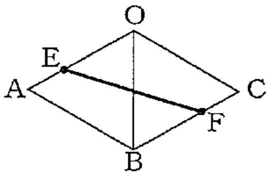
解答
問1

(1) $\dfrac{1}{9}$倍

(2)



問2



糸の長さ　$2\sqrt{13}$ cm

解説
問1
(1)
点 P が A を出発してから 2 秒後のとき AP＝2 cm
このとき△EAP は 1 辺が 2 cm の正三角形になる。
よって△EAP∽△OAB
EA:OA＝2:6＝1:3 より
$\triangle EAP : \triangle OAB = 1^2 : 3^2 = 1 : 9$
これより$\triangle EAP = \dfrac{1}{9}\triangle OAB$

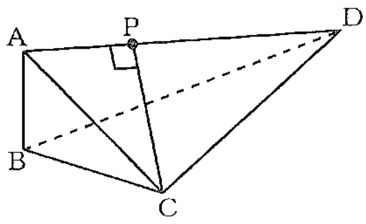
問2
糸の長さがもっとも短くなるのは展開図において E と F が直線で結ばれるとき。
BA の延長線と FE の延長線の交点を P とし F から AB の延長線に垂線をひき交点を H とする。
△PBF において
AE // BF より
平行線と線分の比の定理から
PA:PB＝PE:PF＝AE:BF＝2:4＝1:2
よって PA＝AB＝6 cm, PE＝EF
ここで△FBH は∠FBH＝60° の直角三角形より
$BH = \dfrac{1}{2}FB = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$ cm
$FH = \sqrt{3}\,BH = 2\sqrt{3}$ cm
△FPH において
三平方の定理より$PF = \sqrt{(6+6+2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{13}$ cm
よって$EF = \dfrac{1}{2}PF = \dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$ cm

【問 14】

図は，∠ABC＝∠ABD＝∠BCD＝90°の三角すい ABCD である。また，P は辺 AD 上の点で，AD⊥PC である。

AB＝2 cm，BC＝3 cm，CD＝6 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（愛知県 2012年度 A）



(1) 三角すい ABCD の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

(2) 線分 PC の長さは何 cm か，求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1) 6 cm^3

(2) $\dfrac{6\sqrt{13}}{7}$ cm

解説

(1)

三角すいの体積は $\dfrac{1}{3}\times\triangle BCD\times AB=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\times 2=6$ cm^3

(2)

$\triangle$ABC で三平方の定理より $AC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ cm

$\triangle$BCD で三平方の定理より $BD=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$ cm

$\triangle$ABD で三平方の定理より $AD=\sqrt{2^2+(3\sqrt{5})^2}=7$ cm

$\triangle$ACD の面積の関係より $\dfrac{1}{2}\times AD\times PC=\dfrac{1}{2}\times CD\times AC$　$\dfrac{1}{2}\times 7\times PC=\dfrac{1}{2}\times 6\times\sqrt{13}$

$PC=\dfrac{6\sqrt{13}}{7}$ cm

【問 15】

図1で，A は水が入った円柱の容器，B は円すい形の空の容器で，A，B ともに底面が水平になるように置いてある。容器 A の水を容器 B にすべて入れ，その中に球の形をしたおもりを入れたところ，図2のように，ちょうど球が水面にかくれた。

容器 A の底面の半径が 5 cm，容器 B の底面の半径が 9 cm，高さがともに 12 cm，球の半径が 3 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，容器の厚さは考えないものとする。

（愛知県 B 2012 年度）

図1

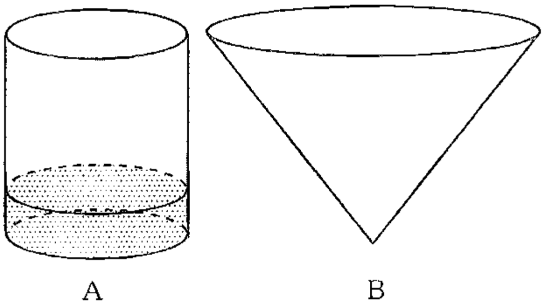
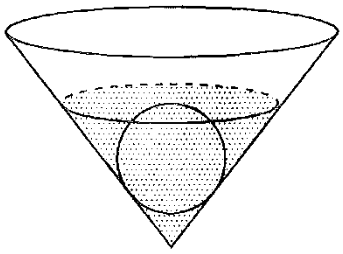


図2



(1) 球の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

(2) 図1の容器 A の水面の高さは何 cm か，求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1)　36π　cm^3

(2)　$\dfrac{12}{5}$ cm

解説

(1)

球の体積は$\dfrac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$　cm^3

(2)

問題の図2において球の中心と円すいの頂点を通る面で切断する。

その切断面において球の中心をO，円すいの頂点をP，球と円すいの側面との交点のうち1つをQとする。

△OPQは容器の底面の半径と高さでできる直角三角形と相似になるから

PQ : OQ $= 12 : 9 = 4 : 3$

OQ $= 3$ cmより

PQ : $3 = 4 : 3$

PQ $= 4$ cm

△OPQにおいて

三平方の定理よりOP $= \sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm

よって図2に入っている水の高さは$5+3=8$ cm

底面の半径 : $8 = 3 : 4$

底面の半径 $= 6$ cm

体積は$\dfrac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$　cm^3

容器Aに入っている水の水面までの高さをx cmとすると

水の体積の関係より

$\pi \times 5^2 \times x = 96\pi - 36\pi$

$25\pi x = 60\pi$

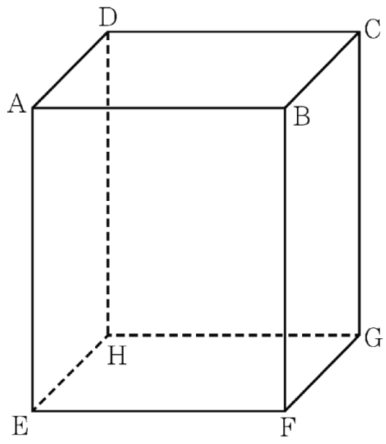
$x = \dfrac{12}{5}$ cm

【問 16】

図1，図2において，立体 ABCD－EFGH は直方体である。
次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府　2012年度　前期）

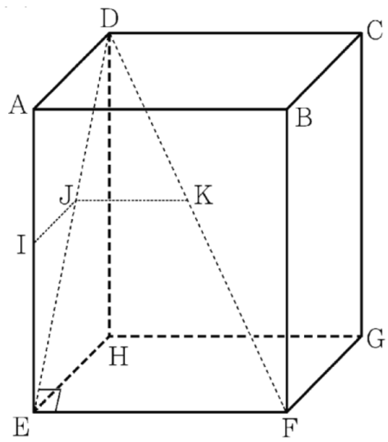
図1



問1　図1において，次のア～カのうち，面 BFGC と垂直な辺はどれですか。すべて選び，記号を書きなさい。

ア　辺 AB
イ　辺 AD
ウ　辺 AE
エ　辺 BF
オ　辺 FG
カ　辺 GH

図2



問2　図2において，AB＝5 cm，AD＝4 cm，AE＝6 cm である。D と E，D と F とをそれぞれ結ぶ。I は辺 AE 上にあって，A，E と異なる点である。J は I を通り辺 AD に平行な直線と線分 DE との交点である。K は J を通り辺 EF に平行な直線と線分 DF との交点である。このとき，△DEF は∠DEF＝90° の直角三角形である。AI＝x cm とし，$0<x<6$ とする。

(1)　△DEF の面積を求めなさい。

(2) IJ＝JK となるときの x の値を求めなさい。求め方も書くこと。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>〔求め方〕

xの値</td></tr>
</table>

解答
問1　ア, カ
問2
(1)　$5\sqrt{13}$ cm^2
(2)
〔求め方〕
IJ // AD だから
IJ : AD＝EI : EA
よって $IJ=\frac{2}{3}EI=\frac{2}{3}(6-x)$ cm
また ED : DJ＝EA : AI＝6 : x…㋐
JK // EF だから
㋐より
EF : JK＝DE : DJ＝6 : x
よって $JK=\frac{5}{6}x$ cm
IJ＝JK だから
$\frac{2}{3}(6-x)=\frac{5}{6}x$
これを解くと
$x=\frac{8}{3}$
x の値　$\frac{8}{3}$
解説
問2
(1)
△ADE において
三平方の定理より $DE=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$ cm
よって $\triangle DEF=\frac{1}{2}\times EF\times DE=\frac{1}{2}\times 5\times 2\sqrt{13}=5\sqrt{13}$ cm^2
(2)
△AED において
IJ // AD より
IJ : AD＝EI : EA
IJ : 4＝$(6-x)$: 6
$6IJ=4(6-x)$
$IJ=\frac{2(6-x)}{3}$
△DEF において JK // EF より
JK : EF＝DJ : DE＝AI : AE
JK : 5＝x : 6
$6JK=5x$
$JK=\frac{5}{6}x$
IJ＝JK より
$\frac{2(6-x)}{3}=\frac{5}{6}x$
$4(6-x)=5x$
$24-4x=5x$
$9x=24$
$x=\frac{8}{3}$

【問 17】

T さんは，図1のように長方形の厚紙から直方体の箱を作るため，図2のような模式図をかいて考えてみた。

図1

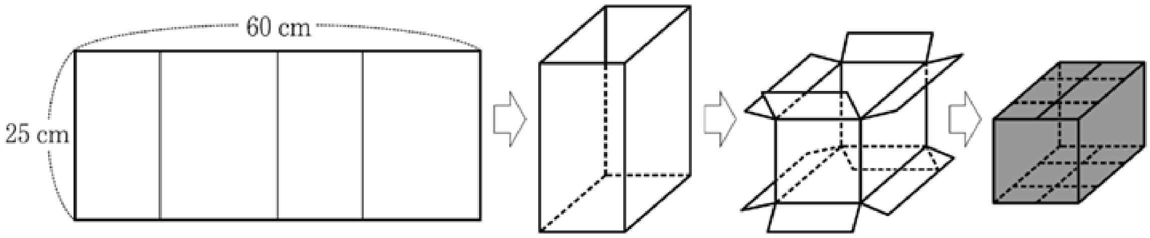


図2

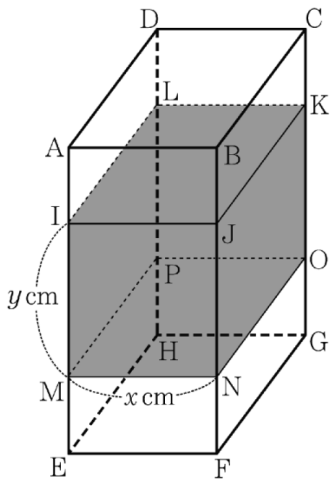


図2において，立体 ABCD－EFGH は，直方体である。底面 ABCD の周の長さは 60 cm であり，AE＝25 cm である。I, M は辺 AE 上にあって，M は I について A と反対側にあり，AI＝ME＝$\frac{1}{2}$AB である。J, K, L はそれぞれ辺 BF, CG, DH 上にあって，BJ＝CK＝DL＝AI となる点である。このとき，4 点 I, J, K, L は同じ平面上にあって，4 点 I, J, K, L を結んでできる四角形 IJKL は長方形である。N, O, P はそれぞれ辺 BF, CG, DH 上にあって，NF＝OG＝PH＝ME となる点である。このとき，4 点 M, N, O, P は同じ平面上にあって，4 点 M, N, O, P を結んでできる四角形 MNOP は長方形である。また，立体 IJKL－MNOP は直方体である。辺 MN の長さを x cm とし，そのときの辺 IM の長さを y cm とする。$0 < x < 15$ として，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府　2012年度　後期）

問1　図2において，辺 AD の長さを x を用いて表しなさい。

問2　T さんは，x と y との関係について調べてみた。

(1)　次の表は，T さんのかいた表の一部である。表中の(ア)，(イ)に当てはまる数をそれぞれ書きなさい。

x	…	2	…	8	…	(イ)	…
y	…	23	…	(ア)	…	12	…

(2)　y を x の式で表しなさい。

問3　図2において，直方体 IJKL－MNOP の表面積が 1200 cm^2 となるときの x の値を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="3">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td rowspan="2">(1)</td><td>(ア)</td><td></td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">$y=$</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

解答
問1　$30-x$ cm
問2
(1)
(ア)　17
(イ)　13
(2)　$y=-x+25$
問3　$5\sqrt{6}$
解説
問1
$AD=BC$, $AB=DC=x$ cm より
$AD=(60-2x)\div 2=30-x$ cm
問2
(2)
$AI=ME=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}x$
$AI+IM+ME=25$ より
$\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}x=25$
$y=-x+25$
問3
直方体の表面積は
底面積×2＋側面積より
$x(30-x)\times 2+(-x+25)\times 60=1200$
整理して
$x^2=150$
$x>0$ より
$x=5\sqrt{6}$ cm

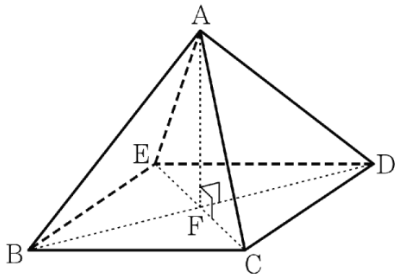
【問 18】

図1～図3において，立体 A－BCDE は正四角すいである。底面 BCDE は 1 辺の長さが 4 cm の正方形であり，F は底面 BCDE の対角線の交点である。このとき，直線 AF は底面 BCDE と垂直である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府　2012年度　後期）

図1

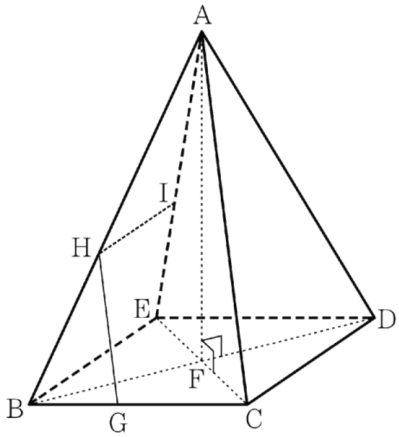


問1　図1において，△ABC の内角∠BAC の大きさを $a°$ とする。

(1)　△ACD の内角∠ADC の大きさを a を用いて表しなさい。

(2) $a=60$ のときの正四角すい A－BCDE の体積を求めなさい。

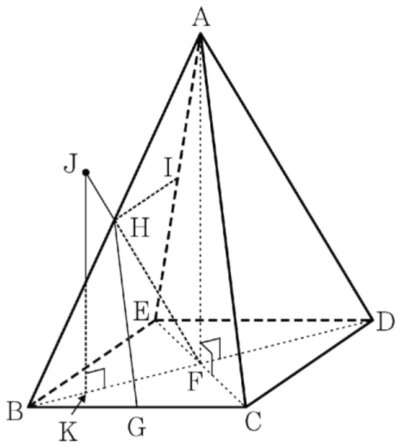
図2



問2　図2，図3において，AB＝6 cm である。G は，辺 BC 上にあって B，C と異なる点である。H は G を通り辺 AC に平行な直線と辺 AB との交点であり，I は H を通り辺 BE に平行な直線と辺 AE との交点である。

(1)　図2において，CG＝HI であることを証明しなさい。

図3



(2)　図3は，G が辺 BC の中点であるときの状態を示している。図3において，J は，直線 FH 上にあって H について F と反対側にある点であり，HJ＝1 cm である。K は，J から線分 BF にひいた垂線と線分 BF との交点である。このとき，4 点 J，K，F，A は同じ平面上にあって，直線 JK と辺 AB は交わり，JK // AF である。線分 JK の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	度
	(2)	cm^3
問2	(1)	〔証明〕
	(2)	cm

解答
問1

(1) $90-\dfrac{1}{2}a$ 度

(2) $\dfrac{32}{3}\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

問2
(1)
〔証明〕
HG // AC だから
BC:CG＝BA:AH

よって $\mathrm{CG}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AH}$…㋐

HI // BE だから
AH:AB＝HI:BE

よって $\mathrm{HI}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AH}$…㋑

㋐, ㋑より
CG＝HI

(2) $\dfrac{4}{3}\sqrt{7}\ \mathrm{cm}$

解説
問1
(2)
$a=60$ のとき側面の三角形は正三角形になるから AB＝4 cm
底面は正方形より対角線 $\mathrm{BD}=\sqrt{2}\ \mathrm{BC}=4\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$
△ABF において

三平方の定理より $\mathrm{AF}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

よって正四角すいの体積は $\dfrac{1}{3}\times 4^2\times 2\sqrt{2}=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\ \mathrm{cm}^3$

問2
(2)
H から BF に垂線をひき交点を L とする。
△ABF において

三平方の定理より $\mathrm{AF}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{7}\ \mathrm{cm}$

G は BC の中点で GH // CA より
BH:HA＝BG:GC＝1:1
HL // AF より
HL:AF＝BH:BA＝1:2

よって $\mathrm{HL}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AF}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{7}=\sqrt{7}\ \mathrm{cm}$

また HL // AF より
BL:LF＝BH:HA＝1:1

よって $\mathrm{LF}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BF}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

△HLF において

三平方の定理より $\mathrm{HF}=\sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})^2}=3\ \mathrm{cm}$

HL // JK より
FH:FJ＝HL:JK
$3:4=\sqrt{7}:\mathrm{JK}$
$3\mathrm{JK}=4\sqrt{7}$

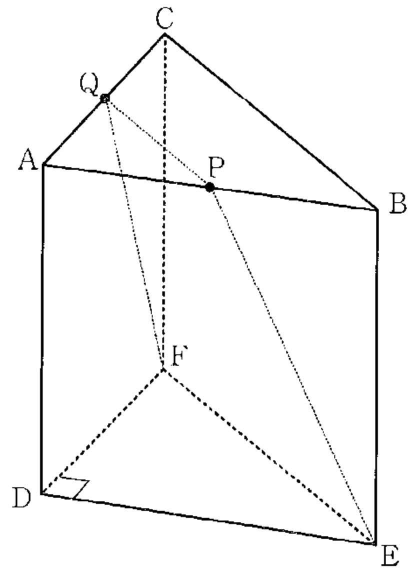
$\mathrm{JK}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3}\ \mathrm{cm}$

【問 19】

底面が DE＝DF＝6 cm，∠EDF＝90° である直角二等辺三角形で，側面 ADEB と側面 ACFD がともに正方形である三角柱 ABC－DEF において，辺 AB，AC の中点をそれぞれ P，Q とする。この三角柱 ABC－DEF を図のように 4 点 P，Q，F，E を通る平面で切断し，頂点 A を含む立体を X，頂点 B を含む立体を Y とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（鳥取県　2012年度）



問1　辺 EF の長さを求めなさい。

問2　立体 X において，線分 EP を延長した直線と線分 DA を延長した直線との交点を R とする。
このとき，次の(1)，(2)について答えなさい。

(1)　線分 AR の長さを求めなさい。

(2)　立体 R－APQ の体積を求めなさい。

問3　立体 X と立体 Y の体積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm³</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">X の体積：Y の体積＝　　：</td></tr>
</table>

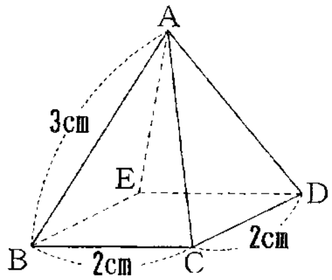
解答
問1　$6\sqrt{2}$ cm
問2
(1)　6 cm
(2)　9 cm^3
問3　X の体積:Y の体積＝7:5
解説
問1
△DEF は DE＝DF＝6 cm，∠EDF＝90° の直角二等辺三角形なので EF＝$\sqrt{2}$ DE＝$6\sqrt{2}$ cm
問2
(1)
△RDE において
AP:DE＝1:2　AP // DE より
平行線と線分の比の定理より
AP:DE＝RA:RD
RA:(RA＋6)＝1:2
2RA＝RA＋6
RA＝AR＝6 cm
(2)
△APQ＝$\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$ cm^2
立体 R－APQ の体積は $\dfrac{1}{3}\times$△APQ×AR＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{2}\times6=9$ cm^3
問3
立体 X の体積は
立体 R－DEF－立体 R－APQ
$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times6\times12-9=72-9=63$ cm^3
立体 Y の体積は
立体 ABC－DEF－立体 X
$=\dfrac{1}{2}\times6\times6\times6-63=108-63=45$ cm^3
よって求める体積の比は 63:45＝7:5

【問 20】

右の図のような正四角すいがあり，底面は 1 辺が 2 cm の正方形で，側面は等しい辺が 3 cm の二等辺三角形である。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。

（香川県　2012年度）



(1) この正四角すいの辺のうち，辺 AB とねじれの位置にある辺はどれか。すべて書け。

(2) 点 B と点 D を結ぶとき，△ABD の面積は何 cm^2 か。

解答欄

(1)	
(2)	cm^2

解答

(1) 辺 CD，辺 DE

(2) $\sqrt{14}$ cm^2

解説

(2)

BD は正方形 BCDE の対角線なので $BD = \sqrt{2}\ BC = 2\sqrt{2}$ cm

△ABD は AB＝AD の二等辺三角形だから BD の中点を M とすると

$AM \perp BD \quad BM = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ cm

△ABM において

三平方の定理より $AM = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$ cm

よって $\triangle ABD = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$ cm^2

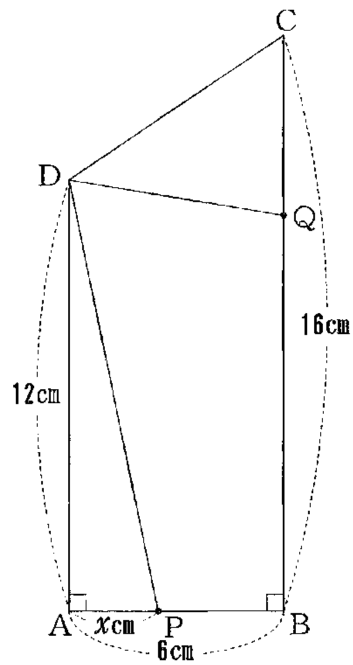
【問 21】

右の図のような，AD // BC の台形 ABCD があり，∠ABC＝∠BAD＝90°，AB＝6 cm，BC＝16 cm，AD＝12 cm である。

辺 AB 上に，2 点 A, B と異なる点 P をとる。また，辺 BC 上に，△QCD の面積が△PAD の面積と等しくなるように点 Q をとる。

AP＝x cm として，次の(1)～(3)の問いに答えよ。

（香川県　2012 年度）



(1) 辺 CD の長さは何 cm か。

(2) 線分 BQ の長さは何 cm か。x を使った式で表せ。

(3) 点 P と点 Q を結ぶ。△BPQ の面積が，△PAD の面積の $\frac{1}{3}$ 倍になるのは，x の値がいくらのときか。x の値を求める過程も，式と計算を含めて書け。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm
(3)	x の値を求める過程 答　x の値

解答

(1)　$2\sqrt{13}$ cm

(2)　$16-2x$ cm

(3)

x の値を求める過程

AP＝x cm より

△PAD＝$\frac{1}{2}\times x\times 12=6x$ cm^2 である。

BP＝$(6-x)$ cm

(2)の結果より BQ＝$(16-2x)$ cm だから

△BPQ＝$\frac{1}{2}(6-x)(16-2x)$ cm^2 となる。

したがって $\frac{1}{2}(6-x)(16-2x)=\frac{1}{3}\times 6x$

整理すると

$x^2-16x+48=0$

$(x-4)(x-12)=0$

よって $x=4,\ x=12$

点 P は 2 点 A, B と異なる点なので

$0<x<6$ だから

$x=4$ は問題にあうが $x=12$ は問題にあわない。

答　x の値　4

解説

(1)

D から BC に垂線をひき交点を H とする。

DH＝AB＝6 cm，CH＝16－12＝4 cm

△CDH で

三平方の定理より CD＝$\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$ cm

(2)

△QCD＝$\frac{1}{2}\times$QC$\times 6=3$QC

△PAD＝$\frac{1}{2}\times x\times 12=6x$

△QCD＝△PAD より

3QC＝$6x$

QC＝$2x$

よって BQ＝$16-2x$ cm

(3)

△BPQ＝$\frac{1}{2}\times(6-x)\times(16-2x)=(6-x)(8-x)$

△PAD＝$6x$

△BPQ＝$\frac{1}{3}$△PAD より

$(6-x)(8-x)=\frac{1}{3}\times 6x$

$48-14x+x^2=2x$

$x^2-16x+48=0$

$(x-12)(x-4)=0$

$x=4,\ 12$

$0<x<6$ より

$x=4$

【問 22】

AB＝9 cm，BC＝6 cm，∠ACB＝90°の直角三角形 ABC がある。

図1は，△ABC において，辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とし，点 M と点 N を結んだものである。

図2は，△ABC を辺 AC を軸として 1 回転させてできた円すいを表しており，線分 AB 上で AD＝3 cm となる点を D，底面の円の直径のうち直線 BC に垂直なものを PQ とする。

次の問1～問3の $\boxed{}$ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし，根号を使う場合は $\sqrt{}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県　2012年度）

図1

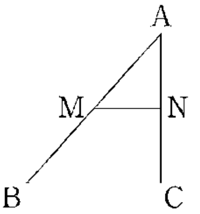
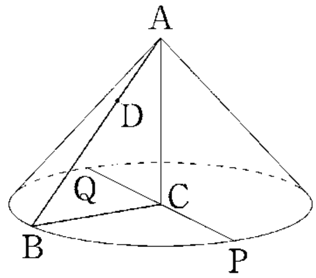


図2



問1　図2に示す円すいの体積は，図1の△AMN を辺 AN を軸として 1 回転させてできた立体の体積の $\boxed{\quad 倍}$ である。

問2　図2に示す円すいにおいて，△DCP の辺 DP の長さは $\boxed{\quad\quad cm}$ である。

問3　図2に示す円すいの側面を，母線 AQ で切って開いた展開図において，線分 DP の長さは $\boxed{\quad\quad cm}$ である。

解答欄

問1	倍
問2	cm
問3	cm

解答
問1　8倍
問2　$2\sqrt{15}$ cm
問3　$3\sqrt{7}$ cm
解説
問2
△ABCにおいて
三平方の定理より $AC^2=9^2-6^2=45$
CからABに垂線をひき交点をHとする。
$BH=x$ cmとすると$AC^2-AH^2=BC^2-BH^2$より
$45-(9-x)^2=6^2-x^2$
$x=4$
$CH^2=6^2-4^2=20$
$DH=9-3-4=2$ cm
$CD^2=DH^2+CH^2=2^2+20=24$
$DP^2=CD^2+CP^2=24+6^2=60$
$DP>0$より
$DP=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$ cm
問3
側面のおうぎ形の中心角は $360^\circ\times\dfrac{2\pi\times6}{2\pi\times9}=240^\circ$
展開図においてPからABに垂線をひき交点をKとする。
△PAKは∠PAK$=60^\circ$の直角三角形だから
$AK=\dfrac{AP}{2}=\dfrac{9}{2}$ cm
$PK=\sqrt{3}\,AK=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm
$DK=\dfrac{9}{2}-3=\dfrac{3}{2}$ cm
△DPKにおいて
三平方の定理より$DP^2=DK^2+PK^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2=63$
よって$DP=3\sqrt{7}$ cm

【問 23】

図1のように，AB＝6 cm，AE＝2 cm，EH＝4 cm の直方体があり，頂点 A から頂点 G まで，黒いひもを辺 EF に交わるようにかける。黒いひもの長さが最も短くなるとき，黒いひもと辺 EF が交わる点を P とする。

このとき，問1～問3に答えなさい。

（佐賀県　2012 年度　一般）

図1

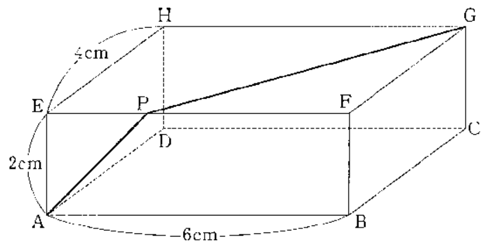
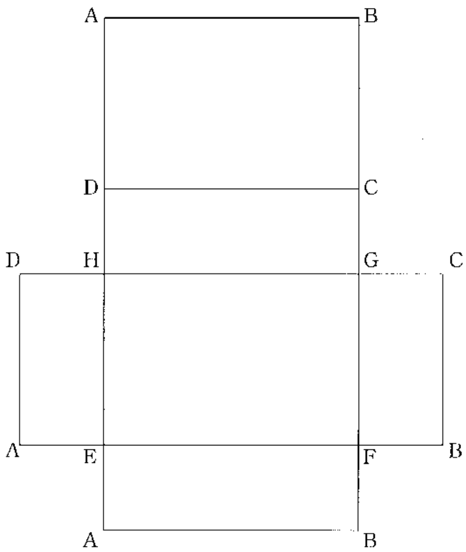


図2



問1 黒いひもが通る線を，直方体の展開図図2に図示しなさい。

問2 黒いひもの長さを求めなさい。

問3 図1の直方体に，頂点 B から頂点 D まで赤いひもを辺 EF，辺 HG の順に交わるようにかける。赤いひもの長さが最も短くなるとき，赤いひもと辺 EF が交わる点を Q，赤いひもと辺 HG が交わる点を R，赤いひもと黒いひもが交わる点を S とする。このとき，(1)～(4)の各問いに答えなさい。

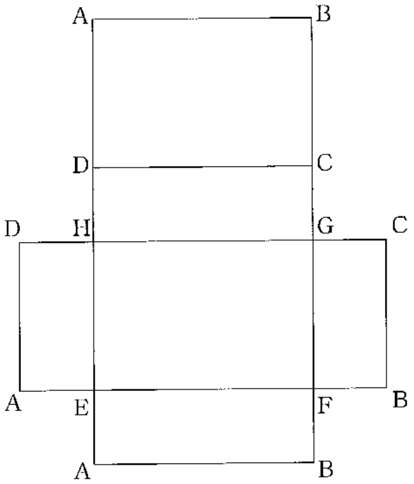
(1) △SPQ∽△SGR であることを証明しなさい。

(2) HR の長さを求めなさい。

(3) RQ の長さを求めなさい。

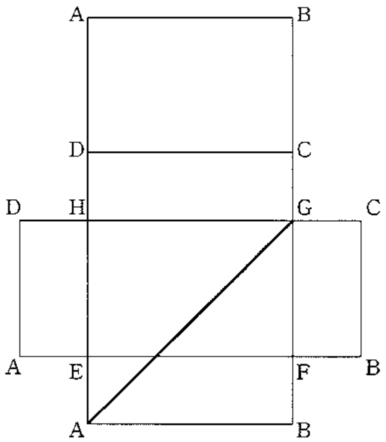
(4) RS の長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="4">問3</td><td>(1)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答

問1



問2　$6\sqrt{2}$ cm

問3

(1)

△SPQ と△SGR において

対頂角は等しいので

∠PSQ＝∠GSR…①

PQ // GR より

錯角は等しいので

∠SPQ＝∠SGR…②

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいので

△SPQ∽△SGR

(2)　$\dfrac{3}{2}$ cm

(3)　5 cm

(4)　$\dfrac{45}{14}$ cm

解説

問3

(3)

△DAB において

三平方の定理より DB＝$\sqrt{8^2+6^2}$ ＝10 cm

HR // EQ // AB より

DR : RQ : QR＝DH : HE : EA＝2 : 4 : 2＝1 : 2 : 1

よって RQ＝$\dfrac{2}{4}$DB＝$\dfrac{2}{4}$×10＝5 cm

(4)

RG＝6－$\dfrac{3}{2}$＝$\dfrac{9}{2}$ cm

EP // HG より

EP : 6＝2 : 6

EP＝2 cm

BF // AD より

FQ : QE＝FB : DE＝2 : 6＝1 : 3

よって FQ＝$\dfrac{1}{4}$EF＝$\dfrac{1}{4}$×6＝$\dfrac{3}{2}$ cm　PQ＝6－2－$\dfrac{3}{2}$＝$\dfrac{5}{2}$ cm

RG // PQ より

RS : SQ＝RG : PQ＝$\dfrac{9}{2}$: $\dfrac{5}{2}$ ＝9 : 5

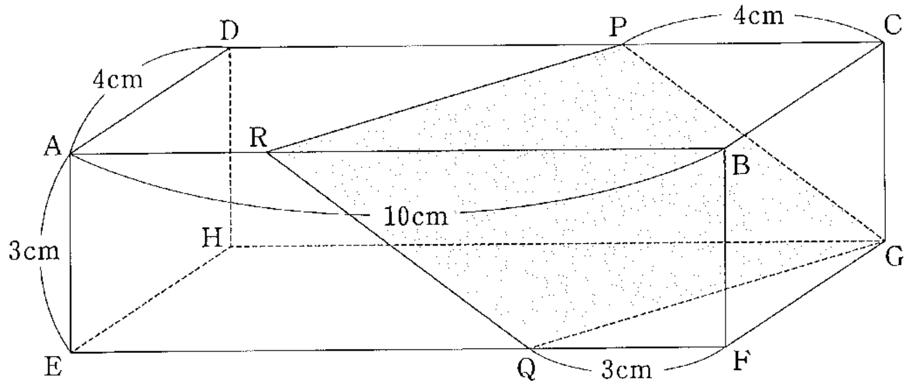
よって RS＝$\dfrac{9}{14}$RQ＝$\dfrac{9}{14}$×5＝$\dfrac{45}{14}$ cm

【問 24】

下の図のように，AB＝10 cm，AD＝4 cm，AE＝3 cm の直方体がある。辺 CD 上に CP＝4 cm となる点 P，辺 EF 上に FQ＝3 cm となる点 Q をとる。さらに，辺 AB 上に点 R を 4 点 P，R，Q，G が同じ平面上にあるようにとると，四角形 PRQG は平行四辺形となる。

このとき，問1～問3に答えなさい。

（佐賀県　2012 年度　一般）



問1　RQ の長さを求めなさい。

問2　RB の長さを求めなさい。

問3　直方体を平面 PRQG で 2 つの立体に分ける。その 2 つの立体のうち，頂点 A を含む立体の体積を V_1，頂点 B を含む立体の体積を V_2 とするとき，$V_1 : V_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	$V_1 : V_2 =$　　　：

解答

問1 5 cm

問2 7 cm

問3 $V_1 : V_2 = 13 : 7$

解説

問3

直方体ABCD－EFGHを面AEHDに平行な平面で分け

頂点Aを含む直方体を立体A, 頂点Bを含む直方体を立体Bとすると

$V_1 =$ 立体Aの体積$+\dfrac{1}{2}$立体Bの体積

$= 3 \times 4 \times (10 - 7) + \dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 7$

$= 78\ \text{cm}^3$

$V_2 = \dfrac{1}{2}$立体Bの体積

$= \dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 7 = 42\ \text{cm}^3$

よって$V_1 : V_2 = 78 : 42 = 13 : 7$

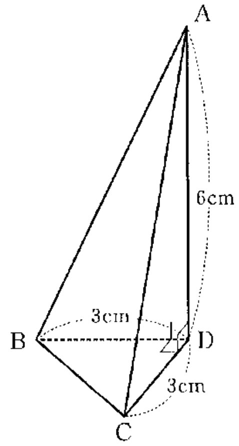
【問 25】

図1，図3のように，三角すい ABCD があり，∠ADB＝∠ADC＝∠BDC＝ 90°，AD＝6 cm，BD＝CD＝3 cm である。このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県　2012 年度）

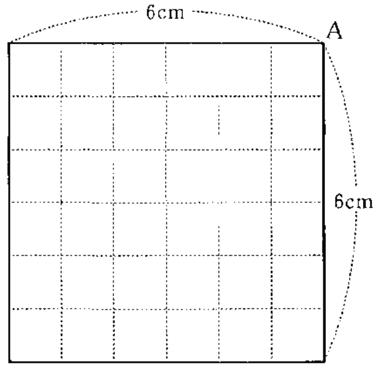
問1　図1において，辺 AD とねじれの位置にある辺を答えよ。

図1



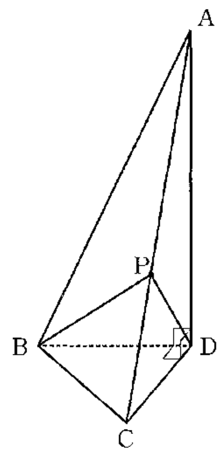
問2　三角すい ABCD の体積は何 cm^3 か。

図2



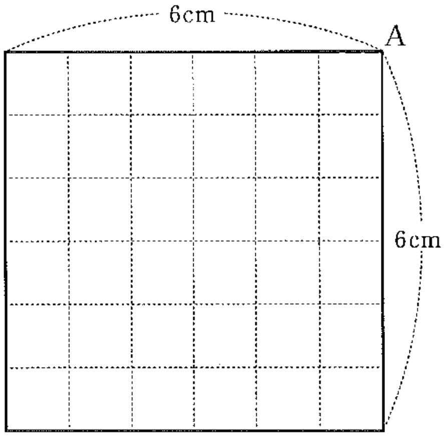
問3　三角すい ABCD を辺にそって切り開くと，図2のような 1 辺が 6 cm の正方形になった。このとき，図1の 3 つの辺 AB，BC，CA を解答用紙の図2に実線でかき入れよ。なお，作図の参考となるように，図2には頂点 A と 1 目もりが縦横それぞれ 1 cm の方眼をかき入れている。

図3

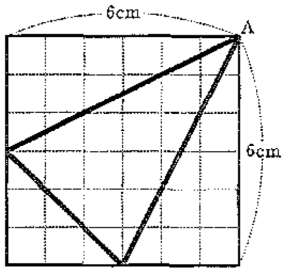


問4　図3において，辺 AC 上を動く点を P とする。2 つの線分 BP，PD の長さの和 BP＋PD が最小となるとき，BP＋PD の長さは何 cm か。

解答欄

問1	
問2	cm^3
問3	
問4	cm

解答
問1 辺 BC
問2 9 cm^3
問3



問4 $3\sqrt{5}$ cm
解説
問4
展開図において B と D を結ぶ線分のうち AC と交わるものの長さが BP＋PD が最小となるときの長さである。
よって三平方の定理より$\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$ cm

【問 26】

図1，図3のように，三角すい ABCD があり，∠ADB＝∠ADC＝∠BDC＝90°，AD＝6 cm，BD＝CD＝3 cm である。このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県　2012年度）

問1　図1において，辺 AD とねじれの位置にある辺を答えよ。

問2　三角すい ABCD の体積は何 cm^3 か。

問3　三角すい ABCD を辺にそって切り開くと，図2のような 1 辺が 6 cm の正方形になった。このとき，図1の 3 つの辺 AB，BC，CA を解答用紙の図2に実線でかき入れよ。なお，作図の参考となるように，図2には頂点 A と 1 目もりが縦横それぞれ 1 cm の方眼をかき入れている。

問4　図3において，辺 AC 上を動く点を P とする。2 つの線分 BP，PD の長さの和 BP＋PD が最小となるとき，次の(1)，(2)に答えよ。

(1) BP＋PD の長さは何 cm か。

(2) 三角すい PBCD の体積は何 cm^3 か。

図1

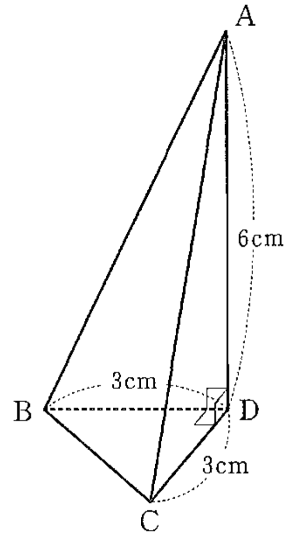


図2

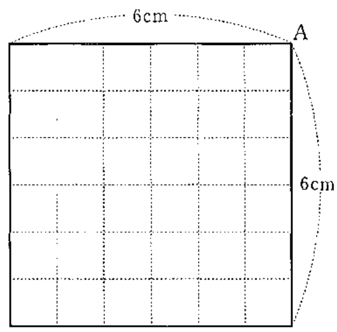
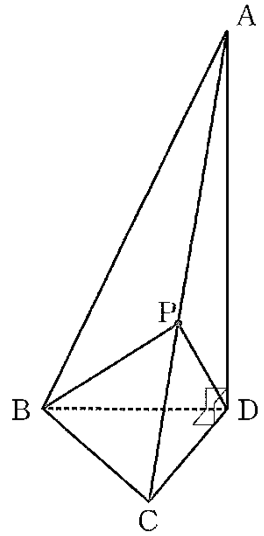
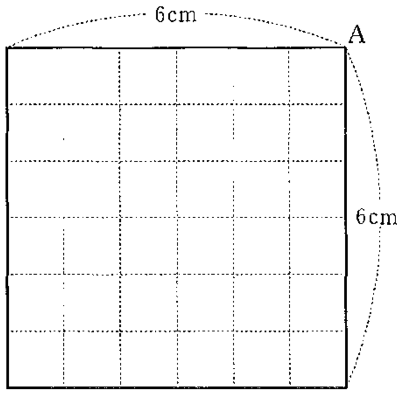


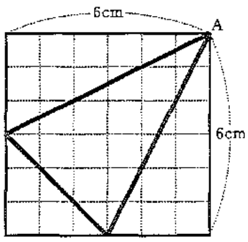
図3



解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">cm^3</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問4</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^3</td></tr>
</table>

解答
問1　辺 BC
問2　9 cm^3
問3



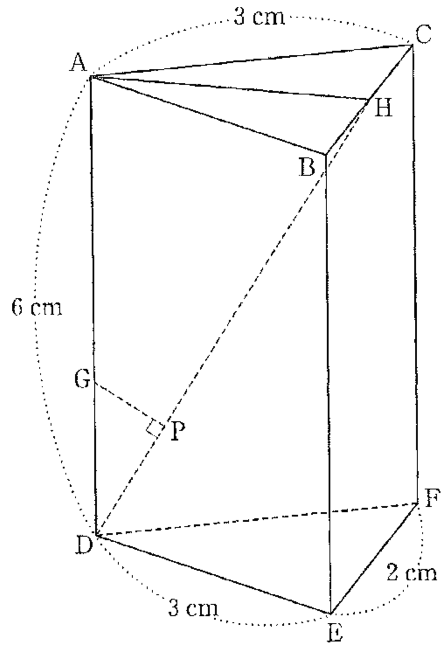
問4
(1)　$3\sqrt{5}$ cm
(2)　$\frac{9}{5}$ cm^3
解説
問4 (2)
P から CD に垂線をひき交点を H とする。
また展開図において AC と交わる線分 BD を延長し AD の延長線との交点を P とする。
平行線と線分の比の定理より
PD:PA＝DB:AD＝3:6＝1:2 より PA＝12 cm
CP:PA＝CD:AP＝3:12＝1:4
PH:AD＝CP:CA＝1:5
PH＝$\frac{1}{5}$AD＝$\frac{6}{5}$ cm
したがって三角すい PBCD の体積は$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{6}{5}=\frac{9}{5}$ cm^3

【問 27】

右の図は，点 A, B, C, D, E, F を頂点とし，3 つの側面がそれぞれ長方形である三角柱で，AC＝3 cm，AD＝6 cm，DE＝3 cm，EF＝2 cm である。点 G は辺 AD 上にあって，AG＝4 cm である。また，点 H は辺 BC の中点であり，点 P は線分 DH 上にあって，∠GPD＝90° である。

このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

（熊本県　2012年度）



問1　線分 AH の長さを求めなさい。

問2　線分 DP の長さを求めなさい。

問3　三角すい PEFH の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm^3

解答

問1　$2\sqrt{2}$ cm

問2　$\dfrac{6\sqrt{11}}{11}$ cm

問3　$\dfrac{32\sqrt{2}}{11}$ cm^3

解説

問3

EF の中点を M とし P から DM に垂線をひき交点を K とする。

PK // HM だから

PK:HM＝DP:DH＝$\dfrac{6\sqrt{11}}{11} : 2\sqrt{11}$ ＝3:11

PK:6＝3:11

11PK＝18

PK＝$\dfrac{18}{11}$ cm

三角すい PEFH の体積＝三角すい HDEF－三角すい PDEF

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times 6-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{18}{11}$

$=4\sqrt{2}-\dfrac{12\sqrt{2}}{11}$

$=\dfrac{32\sqrt{2}}{11}$ cm^3

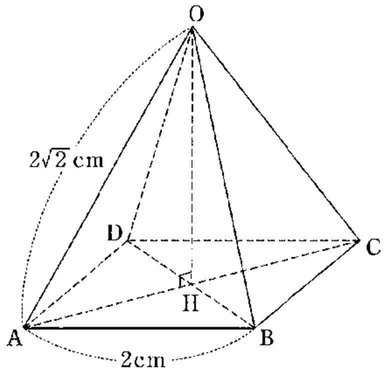
【問 28】

図のように，底面は 1 辺の長さが 2 cm の正方形で，他の辺の長さが $2\sqrt{2}$ cm の正四角すい OABCD がある。

次の問1，問2に答えなさい。

（大分県　2012年度）

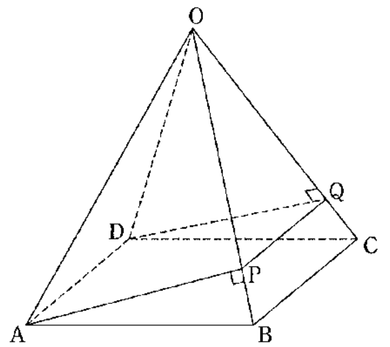
問1　右の図のように，底面の正方形 ABCD の対角線の交点を H とするとき，線分 OH の長さと正四角すい OABCD の体積をそれぞれ求めなさい。



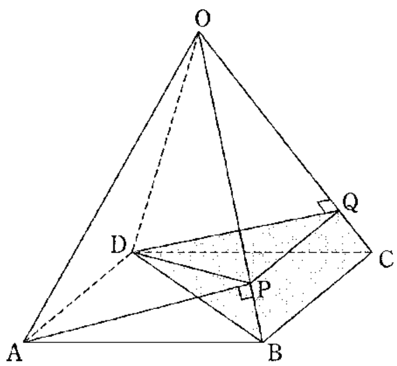
問2　右の図のように，点 A から辺 OB にひいた垂線と辺 OB との交点を P，点 D から辺 OC にひいた垂線と辺 OC との交点を Q とする。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　線分 PQ の長さを求めなさい。



(2)　四角すい DPBCQ の体積を求めなさい。



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td colspan="2">OH＝　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">体積＝　　　　　　cm^3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^3</td></tr>
</table>

解答
問1
OH＝$\sqrt{6}$ cm
体積＝$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ cm^3
問2
(1)　$\dfrac{3}{2}$ cm
(2)　$\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$ cm^3
解説
問1
H は底面の正方形の対角線の交点である。
AC＝$\sqrt{2}$ AB＝$2\sqrt{2}$ cm より AH＝$\dfrac{1}{2}$ AC＝$\sqrt{2}$ cm
△OAH で
三平方の定理より OH＝$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}$ ＝$\sqrt{6}$ cm
正四角すい OABCD の体積は $\dfrac{1}{3}$ ×正方形 ABCD の面積×OH＝$\dfrac{1}{3}\times 2^2\times\sqrt{6}$ ＝$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ cm^3
問2
(1)
AB の中点を M とし OM を結ぶ。
△OAB は OA＝OB の二等辺三角形だから∠OMA＝90°
△OAM で
三平方の定理より OM＝$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}$ ＝$\sqrt{7}$ cm
よって△OAB の面積について
$\dfrac{1}{2}$ ×OB×AP＝$\dfrac{1}{2}$ ×AB×OM より
$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}$ ×AP＝$\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}$
AP＝$\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ cm
よって OP＝$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2}$ ＝$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm
△OPQ∽△OPQ となるから
PQ : BC＝OP : OB
PQ : 2＝$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$: $2\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$ PQ＝$3\sqrt{2}$
PQ＝$\dfrac{3}{2}$ cm
(2)
△OPQ∽△OBC で
PQ : BC＝$\dfrac{3}{2}$: 2＝3 : 4 より△OPQ : △OBC＝3^2 : 4^2＝9 : 16
三角すい ODPQ と三角すい ODBC は底面をそれぞれ△OPQ，△OBC とした場合高さが共通なので
三角すい ODPQ の体積 : 三角すい ODBC の体積＝9 : 16
よって四角すい DPBCQ の体積＝$\dfrac{16-9}{16}$ ×三角すい ODBC の体積
＝$\dfrac{7}{16}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sqrt{6}$
＝$\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$ cm^3

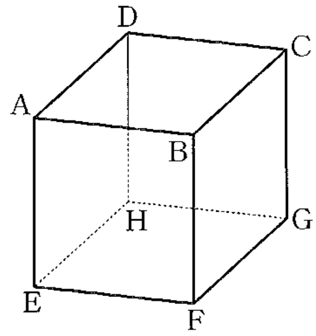
【問 29】

図1のような，1辺の長さが4 cmの立方体の形をした紙の箱がある。この箱の面ABCDは切り取られている。

次の問1～問4に答えなさい。ただし，紙の厚さは考えないものとする。

（宮崎県　2012年度）

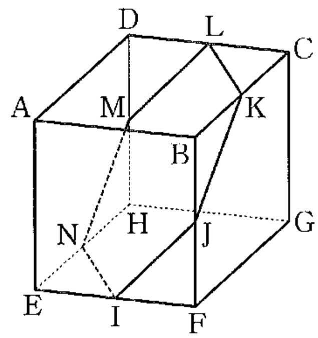
図1



問1　図1において，辺を直線，面を平面とみたとき，平面EFGHと垂直に交わる直線は何本ありますか。

問2　図2は，図1において，辺 EF，BF，BC，CD，DH，EH の中点をそれぞれ I，J，K，L，M，N とし，これらの点を結び，正六角形 IJKLMN をつくったものである。このとき，∠IJK の大きさを求めなさい。

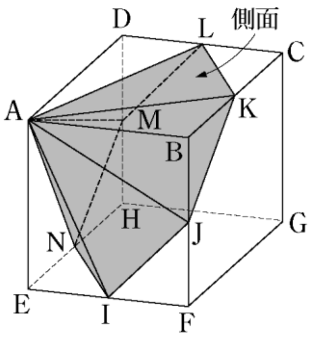
図2



問3　図3は，図2において，点 I，J，K，L，M，N と点 A を結び，正六角錐の形をした傘のモデルをつくったものである。このとき，箱の上から面 EFGH に対して垂直に光を当てると，箱の中に，傘のモデルの側面でさえぎられて光の当たらない空間ができる。この空間を立体とみたとき，その体積を求めなさい。

ただし，傘のモデルは，正六角錐において，二等辺三角形の形をした 6 つの側面に紙をはり付けたものとし，正六角錐の内部は光の当たらない空間とする

図3



問4 図3の傘のモデルをもとに，次の①～③の手順にしたがって，図6のような立体をつくるとき，この立体の体積を求めなさい。

① 図4のように，線分 AI と同じ長さの線分を 6 本追加し，正十二角錐をつくる。

② 図5のように，線分 AI を I の方向に 6 cm 伸ばした線分を AI′ とし，他の 11 本の線分も同じように伸ばす。

③ 伸ばした線分 AI′ を点 I で上側に折り曲げる。他の 11 本の線分も同じように折り曲げ，∠II′L′＝45° となるようにして，図6のような底面が正十二角形の立体をつくる。

図4

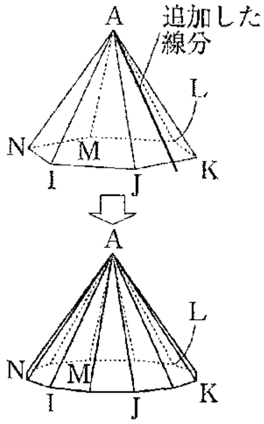


図5

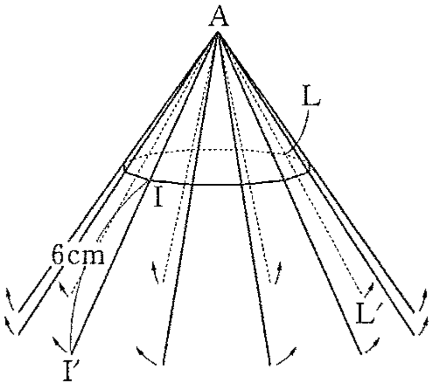
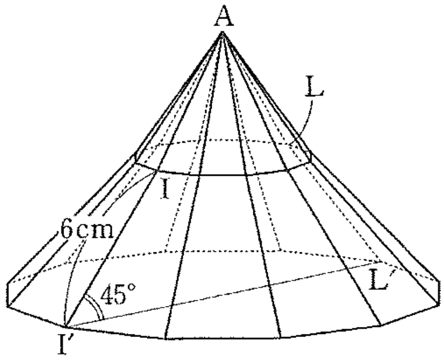


図6



解答欄

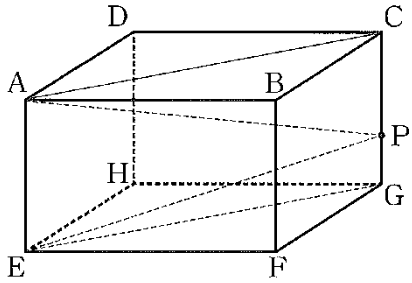
問1	本
問2	∠IJK＝　　　　度
問3	cm^3
問4	cm^3

解答
問1　4本
問2　∠IJK＝120度
問3　$\dfrac{152}{3}$ cm^3
問4　$234\sqrt{2}+16\sqrt{3}$ cm^3
解説
問3
光の当たらない空間の体積は立方体ABCD－EFGHから
合同な三角錐A－DMLと三角錐A－BJKさらに底面を△CLK，高さをCGとする三角柱を除いたものになる。
よって $4^3-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times4\times2-\dfrac{1}{2}\times2\times2\times4=64-\dfrac{16}{3}-8=\dfrac{152}{3}$ cm^3
問4
台形II′L′LにおいてII′，LL′を延長した交点をPとする。
またP，IからI′L′に垂線をひき交点をQ，Rとする。
さらにPRとILの交点をHとする。
$\angle \mathrm{II'Q}=45^\circ$ より $\mathrm{IQ}=\mathrm{I'Q}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ cm
ILは正方形の側面の対角線の長さと一致するから $4\sqrt{2}$ cm
よって $\mathrm{QR}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ cm
$\mathrm{PH}=\mathrm{IH}=\mathrm{QR}=2\sqrt{2}$ cm
底面にI′，L′を含む高さPRの正十二角錐の体積は
$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\times6\right)\times5\sqrt{2}=250\sqrt{2}$ cm^3
底面にI，Lを含む高さPHの正十二角錐は底面にI′，L′を含む高さPRの正十二角錐と相似である。
相似比は $2\sqrt{2}:5\sqrt{2}=2:5$
体積比は $2^3:5^3=8:125$
よって台形IQ // PRだから平行線と線分の比の定理より
$\mathrm{II'}:\mathrm{IP}=\mathrm{I'Q}:\mathrm{QR}=3\sqrt{2}:2\sqrt{2}=3:2$
$6:\mathrm{IP}=3:2$
$\mathrm{IP}=4$ cm
よってII′L′Lを含む土台部分の体積は $250\sqrt{2}-\dfrac{8}{125}\times250\sqrt{2}=234\sqrt{2}$ cm^3
△AEIにおいて
三平方の定理より $\mathrm{AI}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ cm
△AIHにおいて
$\mathrm{AH}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$ cm
よって上部の正十二角錐の体積は $\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times6\right)\times2\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ cm^3
したがって求める体積は $234\sqrt{2}+16\sqrt{3}$ cm^3

【問 30】

　図は，直方体 ABCD－EFGH であり，辺 CG 上に点 P をとったものである。∠CAP＝25°，∠EPG＝78° のとき，∠APE の大きさは何度か。

（鹿児島県　2012年度）



解答欄

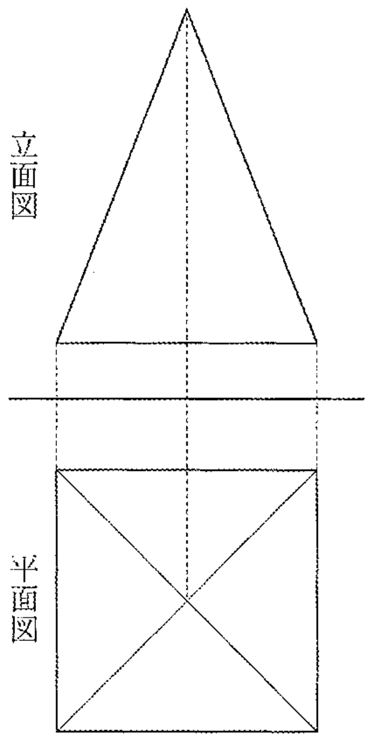
度

解答
37 度
解説
長方形 AEGC において
P から AE に垂線をひき交点を K とする。
AC // KP より錯角は等しいので
∠APK＝∠CAP＝25°
∠EPK＝90°－∠EPG＝90°－78°＝12°
よって∠APE＝25°＋12°＝37°

【問 31】

図はある立体の投影図である。

（沖縄県　2012年度）



問1　この立体を次のア～カより１つ選びなさい。

ア　三角柱

イ　三角すい

ウ　四角柱

エ　四角すい

オ　円柱

カ　円すい

問2　この立体は，高さが 6 cm で，底面は 1 辺の長さが 4 cm の正方形である。また，すべての側面は合同な図形である。このとき，次の各問いに答えなさい。

(1)　立体の体積を求めなさい。

(2)　この立体の頂点のうち，底面の各点を A, B, C, D, その他の点を O とする。2 辺 OA, OB の各中点と，頂点 C, D を通る平面でこの立体を切り取ったとき，その切り口の面積を求めなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	cm^3
	(2)	cm^2

解答
問1　エ
問2
(1)　$32\ \mathrm{cm}^3$
(2)　$9\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$
解説
問2
(2)
OA，OB の中点をそれぞれ M，N とする。
中点連結定理より $MN \parallel AB$，$MN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 4=2\ \mathrm{cm}$
O から底面に垂線をひき交点を H とする。
底面の正方形の対角線より $BD=4\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$，$HD=2\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$
△OHB において
三平方の定理より $OB=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+6^2}=2\sqrt{11}\ \mathrm{cm}$
△OBC において
O，N から BC に垂線をひき交点をそれぞれ P，Q とする。
$OB=OC$ より $BP=CP=\frac{4}{2}=2\ \mathrm{cm}$
$NQ \parallel OP$ より $BQ:QP=BN:NO=1:1$
よって $BQ=\frac{2}{2}=1\ \mathrm{cm}$
△BQN において
三平方の定理より $NQ=\sqrt{(\sqrt{11})^2-1^2}=\sqrt{10}\ \mathrm{cm}$
△CNQ において $CN=\sqrt{(\sqrt{10})^2+3^2}=\sqrt{19}\ \mathrm{cm}$
N から CD に垂線をひき交点を K とする。
△NCK において
$CK=(4-2)\div 2=1\ \mathrm{cm}$
$NK=\sqrt{(\sqrt{19})^2-1^2}=3\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$
よって求める台形 MCDN の面積は $\frac{1}{2}\times(2+4)\times 3\sqrt{2}=9\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$