

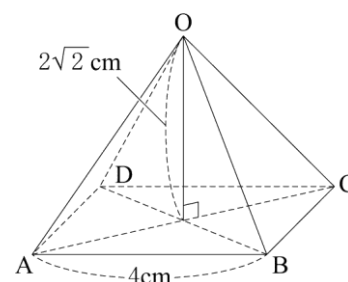
5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2018 年度出題】

【問 1】

図1のように、1 辺の長さが 4 cm の正方形 ABCD を底面とし、高さが $2\sqrt{2}$ cm の正四角錐 OABCD があります。

次の(1), (2)に答えなさい。

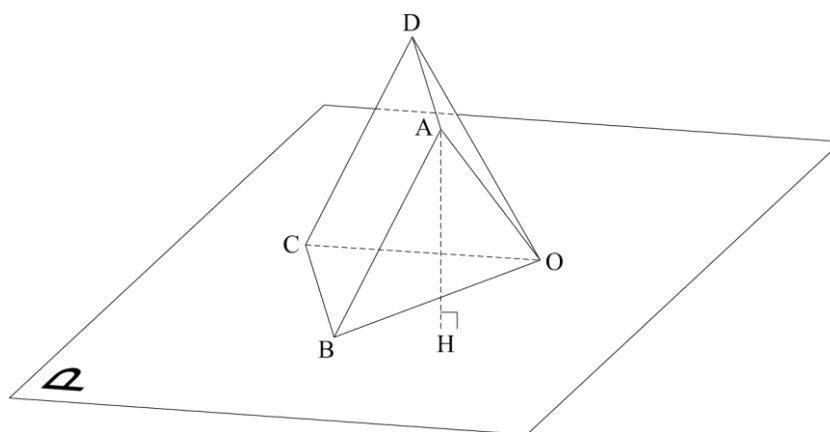
(北海道 2018 年度)



(1) 辺 OB の長さを求めなさい。

(2) 図2は、図1の正四角錐 OABCD を、 $\triangle OBC$ が平面 P 上にくるようにしたものです。点 A から平面 P に垂線をひき、平面 P との交点を H とします。線分 AH の長さを求めなさい。

図2



解答欄

(1)	cm
(2)	cm

解答

(1) 4cm

(2) $\frac{4\sqrt{6}}{3}\text{cm}$

解説

(1)

四角形 ABCD は正方形なので $\triangle ABD$ は直角二等辺三角形だから $BD = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

四角形 ABCD の対角線の交点を H とすると $HB = 4\sqrt{2} \div 2 = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

$\triangle OHB$ は $\angle OHB = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$OB = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4\text{cm}$$

(2)

辺 AD の中点を M とすると

$$\triangle BMC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8\text{cm}^2 \text{ だから}$$

$$\text{三角錐 O-BMC の体積は } \frac{1}{3} \times 8 \times 2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

ここで線分 AH の長さは

三角錐 O-BMC の底面を $\triangle BOC$ としたときの高さと等しい。

$\triangle BOC$ は 1 辺の長さが 4cm の正三角形なので

$$\triangle BOC = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{したがって } \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times AH = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ が成り立つので}$$

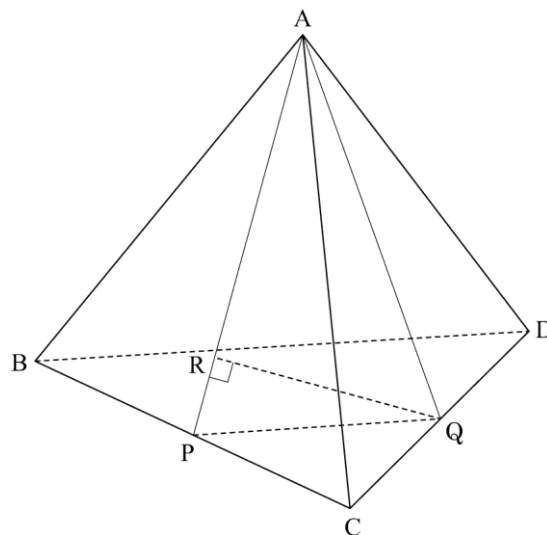
これを解いて

$$AH = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

【問 2】

右の図の正四面体は、1 辺の長さが 8 cm である。辺 BC , CD の中点をそれぞれ点 P , Q , 点 Q から AP にひいた垂線と AP との交点を R とする。次の(1)～(4)に答えなさい。

(青森県 2018 年度)



(1) AQ の長さを求めなさい。

(2) $\triangle APQ$ の面積を求めなさい。

(3) QR の長さを求めなさい。

(4) 三角すい $RBCD$ の体積は、正四面体 $ABCD$ の体積の何倍か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2
(3)	cm
(4)	倍

解答

(1) $4\sqrt{3}\text{cm}$

(2) $4\sqrt{11}\text{cm}^2$

(3) $\frac{2\sqrt{33}}{3}\text{cm}$

(4) $\frac{1}{6}$ 倍

解説

(1)

$\triangle ACQ$ は直角三角形だから

三平方の定理より $AQ = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}\text{cm}$

(2)

点 P, Q はそれぞれ辺 BC, CD の中点だから

中点連結定理より $PQ = \frac{1}{2}BD = 4\text{cm}$

$\triangle APQ$ は $AP = AQ$ の二等辺三角形だから

点 A から辺 PQ に垂線をひき辺 PQ との交点を H とすると

$PH = QH$

$\triangle APH$ について

三平方の定理より $AH = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}\text{cm}$

よって $\triangle APQ$ の面積は $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{11} = 4\sqrt{11}\text{cm}^2$

(3)

(2)より $\triangle APQ$ の面積は $4\sqrt{11}\text{cm}^2$ だから $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times QR = 4\sqrt{11}$

よって $QR = \frac{2\sqrt{33}}{3}\text{cm}$

(4)

三角すい RBCD の体積: 正四面体 ABCD の体積 = $\triangle RBC : \triangle ABC = RP : AP$

三平方の定理より $PR = \sqrt{4^2 - \left(\frac{2\sqrt{33}}{3}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{132}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}$

よって三角すい RBCD の体積: 正四面体 ABCD の体積 = $\frac{2\sqrt{3}}{3} : 4\sqrt{3} = 1 : 6$ だから

三角すい RBCD の体積は正四面体 ABCD の体積の $\frac{1}{6}$ 倍

【問 3】

次の図1は、1 辺が 6 cm の立方体 ABCD-EFGH の 4 つの頂点を結び、正四面体 ACFH をつくったものです。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(岩手県 2018 年度)

問1 正四面体 ACFH の辺の中で、面 AEFB と平行な辺を書きなさい。

図1

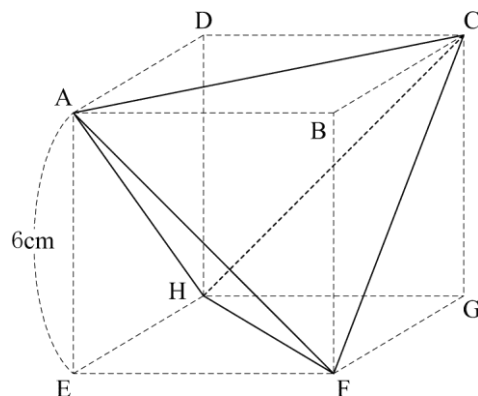
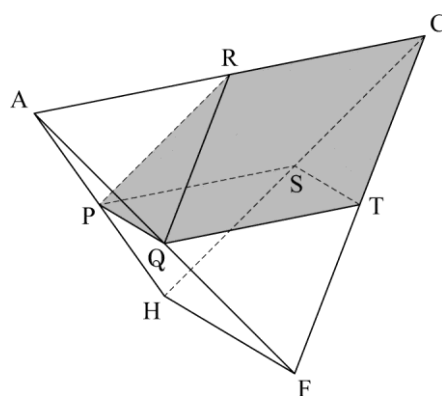


図2

問2 次の図2は、図1の正四面体 ACFH をかき出したものです。5 点 P, Q, R, S, T はそれぞれ辺 AH, AF, AC, CH, CF の中点で、これらを図のように直線で結び立体 PQR-STC をつくります。この立体の体積を求めなさい。



解答欄

問1	辺
問2	cm^3

解答

問1 辺 CH

問2 27cm^3

解説

問1

面 AEFB と面 DHGC は平行である。

辺 CH は面 DHGC に含まれるから面 AEFB と平行である。

問2

右の図で面 PQI と面 STJ は面 PQTS に垂直とすると

求める立体 PQR-STC の体積は

三角柱 PQI-STJ の体積と等しい。

点 I から PQ にひいた垂線の長さは $6 \div 2 = 3\text{cm}$

三平方の定理より $HF = \sqrt{FG^2 + GH^2} = 6\sqrt{2}\text{cm}$

$\triangle AHF$ について

中点連結定理より

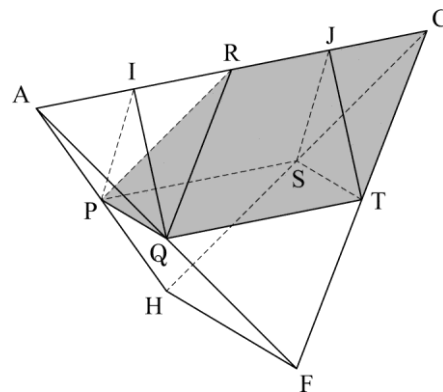
$$PQ = \frac{1}{2}HF = 3\sqrt{2}\text{cm}$$

また $\triangle FCA$ について

中点連結定理より

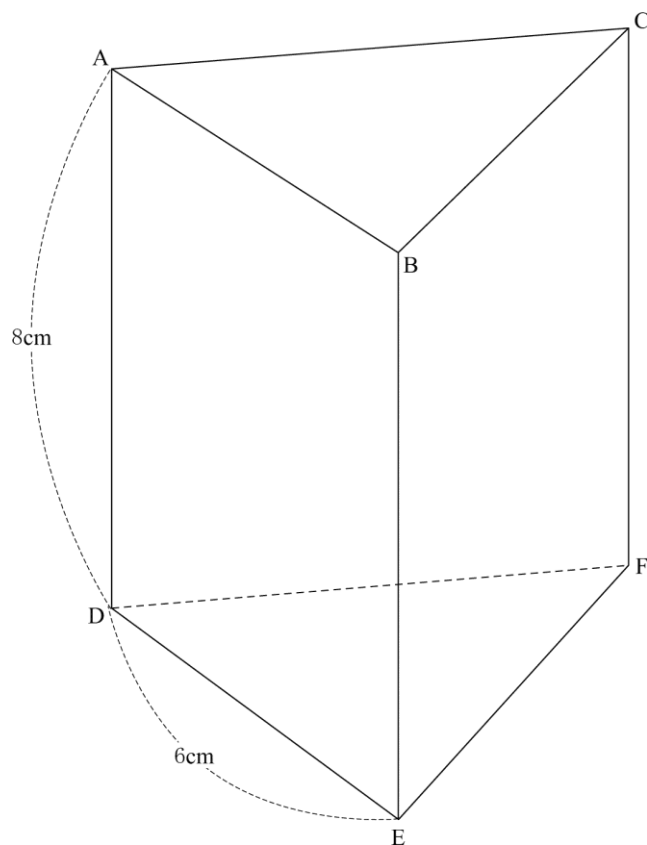
$$QT = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}\text{cm}$$

よって求める体積は $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3 \times 3\sqrt{2} = 27\text{cm}^3$



【問 4】

下の図のような、底面が 1 辺 6 cm の正三角形で、高さが 8 cm の正三角柱がある。



このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(福島県 2018 年度)

問1 $\triangle DEF$ の面積を求めなさい。

問2 線分 BD 上に点 G を、 $BG:GD=1:3$ となるようにとる。

また、辺 CF 上に点 H を、 $FH=\sqrt{3}\text{cm}$ となるようにとる。

(1) 4 点 D, E, F, G を結んでできる三角錐^{すい}の体積を求めなさい。

(2) 3 点 D, E, H を通る平面と点 G との距離を求めなさい。

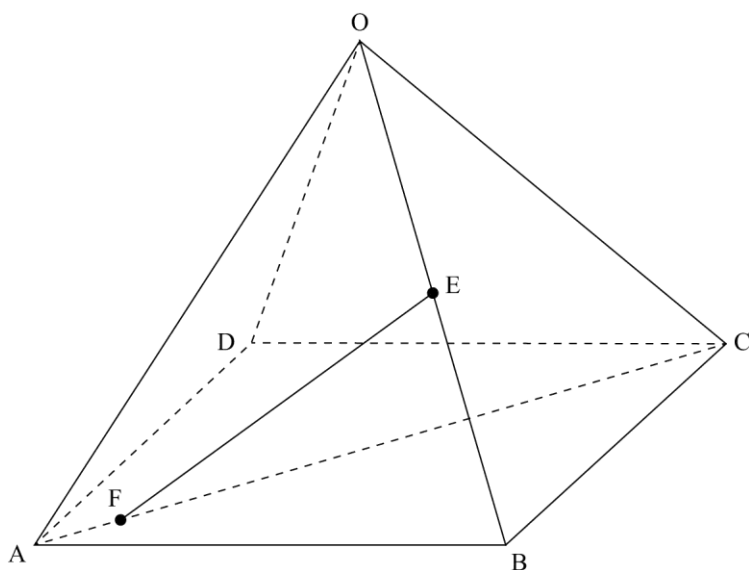
解答欄

問1	cm^2	
問2	(1)	cm^3
	(2)	cm

$$h = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \frac{18\sqrt{3} \times \sqrt{30}}{\sqrt{30} \times \sqrt{30}} = \frac{18 \times 3\sqrt{10}}{30} = \frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

【問 5】

下の図のように、1 辺の長さが 8 cm の正方形 ABCD を底面とし、側面がすべて正三角形である正四角すい OABCD がある。辺 OB の中点を E とし、線分 AC 上に $AF = \sqrt{2}\text{cm}$ となる点 F をとる。



このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(茨城県 2018 年度)

問1 正四角すい OABCD の表面積を求めなさい。

問2 線分 EF の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm

解答

問1 $64 + 64\sqrt{3}\text{cm}^2$

問2 $\sqrt{34}\text{cm}$

解説

問1

側面は1辺が8cmの正三角形。

△OABで

OからABに垂線OGをひくと

$$OA:OG=2:\sqrt{3}$$

$$\text{よって } OG = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}\text{cm}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\text{cm}^2$$

正四角すいであるから

他の側面もすべて面積は等しいので

$$\text{側面の面積は } 16\sqrt{3} \times 4 = 64\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{また底面の正方形の面積は } 8 \times 8 = 64\text{cm}^2$$

したがって表面積は

$$\text{底面の面積} + \text{側面の面積} = 64 + 64\sqrt{3}\text{cm}^2$$

問2

底面の対角線AC, BDの交点をHとする。

$$\triangle ABH \text{ は直角二等辺三角形で } AB:AH = \sqrt{2}:1$$

$$\text{よって } AH = \frac{1}{\sqrt{2}}AB = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8 = 4\sqrt{2}\text{cm}$$

$$FH = AH - AF = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\text{cm}$$

また△ODBで

2点E, Hはそれぞれ辺OB, DBの中点だから

$$\text{中点連結定理より } EH = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2} \times 8 = 4\text{cm}$$

ここで $FH \perp OH$, $FH \perp BH$ より

$FH \perp$ 面 ODB が成り立つから

$$\angle FHE = 90^\circ$$

よって△EFHで

$$\text{三平方の定理より } EF^2 = FH^2 + EH^2 = (3\sqrt{2})^2 + 4^2 = 34$$

$EF > 0$ より

$$EF = \sqrt{34}\text{cm}$$

【問 6】

ある中学校で、S さんが作った問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

(東京都 2018 年度)

[S さんが作った問題]

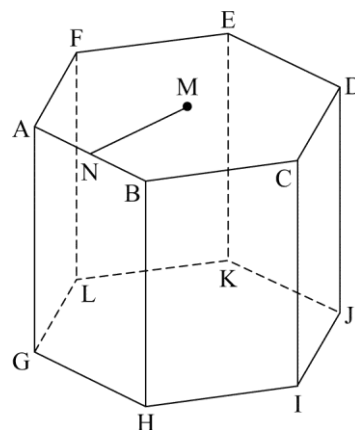
a, b, h を正の数とする。

右の図1に示した立体 $ABCDEF-GHIJKL$ は、底面が 1 辺 a cm の正六角形、高さが h cm、6 つの側面が全て合同な長方形の正六角柱である。

正六角形 $ABCDEF$ において、対角線 AD と対角線 CF の交点を M 、点 M から辺 AB に垂線を引き、辺 AB との交点を N とし、線分 MN の長さを b cm とする。

立体 $ABCDEF-GHIJKL$ の表面積を P cm² とするとき、 P を a, b, h を用いて表してみよう。

図1



T さんは、[S さんが作った問題]の答えを次の形の式で表した。T さんの答えは正しかった。

〈T さんの答え〉 $P = 6a(\quad)$

問1 〈T さんの答え〉の $\quad$ に当てはまる式を、次のア～エのうちから選び、記号で答えよ。

ア $\frac{1}{2}b+h$ イ $b+h$ ウ $b+2h$ エ $2b+h$

先生は、[S さんが作った問題]をもとにして、次の問題を作った。

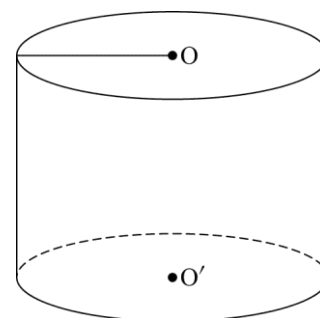
[先生が作った問題]

h, ℓ, r を正の数とする。

右の図2に示した立体は、底面が半径 r cm の円、高さが h cm の円柱であり、2 つの底面の中心 O, O' を結んでできる線分は、2 つの底面に垂直である。

この立体について、底面の円周を ℓ cm、表面積を Q cm² とするとき、 $Q = \ell(h+r)$ となることを確かめなさい。

図2



問2 [先生が作った問題]で、 ℓ を r を用いて表し、 $Q = \ell(h+r)$ となることを証明せよ。

ただし、円周率は π とする。

[illegible]

(1), (2)より $Q = \ell(h+r)$

【問 7】

右の図1に示した立体 $ABC-DEF$ は、 $AB=AC=AD=9\text{ cm}$ 、 $\angle BAC=\angle BAD=\angle CAD=90^\circ$ の三角柱である。

辺 EF の中点を M とする。

頂点 C と点 M を結び、線分 CM 上にある点を P とする。

頂点 B と点 P 、頂点 D と点 P をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2018 年度)

問1 次の 中の「く」「け」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図1において、点 P が頂点 C に一致するとき、 $\angle BPD$ の大きさは、

度である。

問2 次の 中の「こ」「さ」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の図2は、図1において、頂点 A と点 P 、頂点 B と頂点 D をそれぞれ結んだ場合を表している。

$CP:PM=2:1$ のとき、立体 $P-ABD$ の体積は、 cm^3 である。

図1

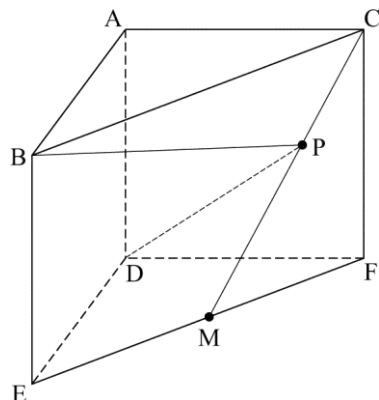
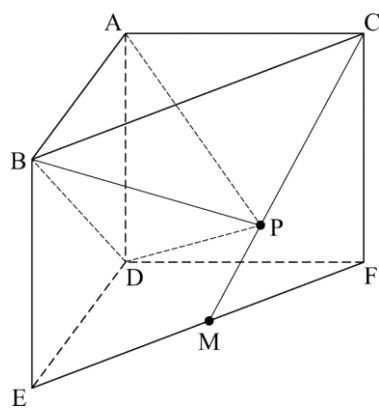
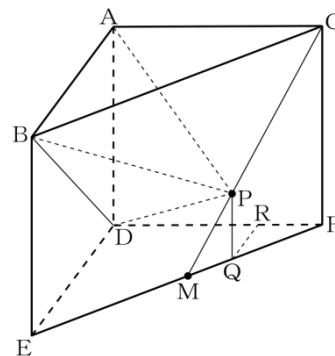


図2



解答欄

問1	
問2	



【問 8】

右の図は、線分 AB を直径とする円 O を底面とし、線分 AC を母線とする円すいである。

$AB=8\text{ cm}$, $AC=6\text{ cm}$ のとき、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(神奈川県 2018 年度)

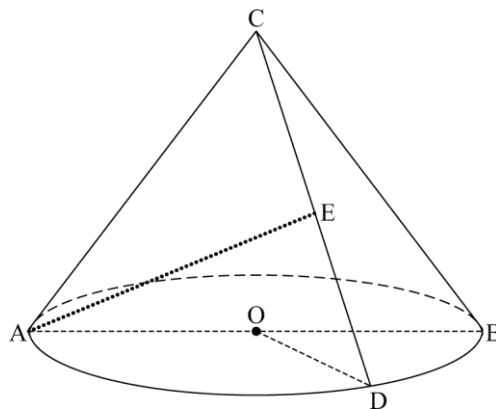
問1 この円すいの体積として正しいものを次の1～6の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- 1 $\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi\text{ cm}^3$ 2 $\frac{40}{3}\pi\text{ cm}^3$ 3 $8\sqrt{5}\pi\text{ cm}^3$
 4 $\frac{32\sqrt{5}}{3}\pi\text{ cm}^3$ 5 $540\pi\text{ cm}^3$ 6 $32\sqrt{5}\pi\text{ cm}^3$

問2 この円すいの表面積として正しいものを次の1～6の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- 1 $24\pi\text{ cm}^2$ 2 $40\pi\text{ cm}^2$ 3 $64\pi\text{ cm}^2$
 4 $70\pi\text{ cm}^2$ 5 $88\pi\text{ cm}^2$ 6 $120\pi\text{ cm}^2$

問3 この円すいにおいて、円 O の周上に点 D を $\angle AOD=120^\circ$ となるようにとり、線分 CD の中点を E とする。
 このとき、2 点 A, E 間の距離を求めなさい。



解答欄

問1	
問2	
問3	cm

解答

問1 4

問2 2

問3 $\sqrt{33}\text{cm}$

解説

問1

円 O の半径は $8 \div 2 = 4\text{cm}$

OC ⊥ 円 O だから $\angle AOC = 90^\circ$

よって $\triangle AOC$ で

三平方の定理より $OC = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$

したがって円すいの体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 2\sqrt{5} = \frac{32\sqrt{5}}{3} \pi \text{ cm}^3$

問2

円すいの展開図において

側面になるおうぎ形の弧の長さは底面の円周の長さに等しいから

側面のおうぎ形の中心角の大きさを a° とすると

$$2\pi \times 6 \times \frac{a}{360} = 2\pi \times 4$$

整理すると $a = 240$

よって側面になるおうぎ形の面積は $\pi \times 6^2 \times \frac{240}{360} = 24\pi \text{ cm}^2$

底面の円の面積は $\pi \times 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$ だから

円すいの表面積は $24\pi + 16\pi = 40\pi \text{ cm}^2$

問3

円すいにおいて線分 BD を引く。

$\angle AOD = 120^\circ$ より $\angle BOD = 60^\circ$

また $OB = OD = 4\text{cm}$ より $\triangle OBD$ は正三角形である。

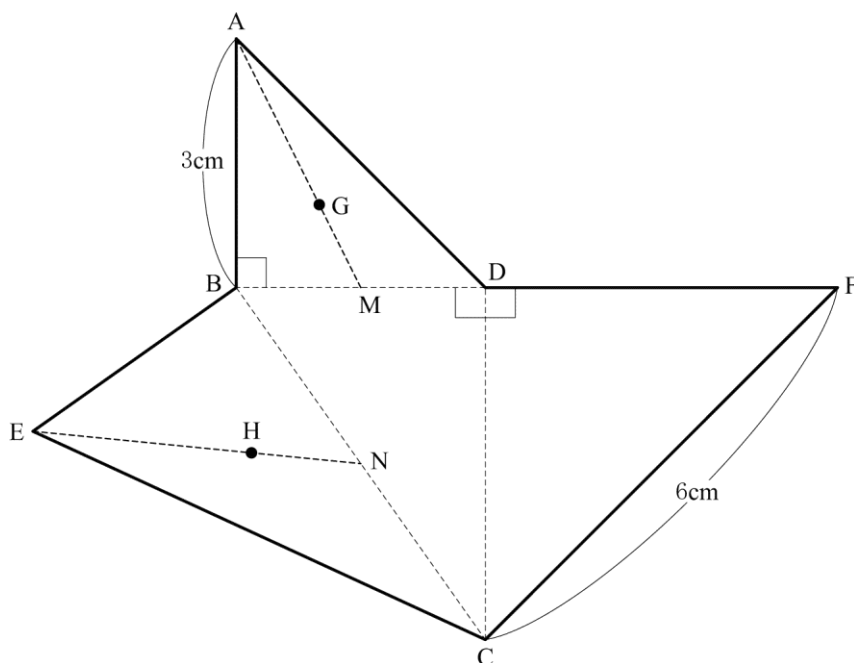
よって $BD = 4\text{cm}$ 。

AB は直径なので $\angle AOB = 90^\circ$ となり $\triangle ADB$ は直角三角形である。

よって $AD = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

【問 9】

下の図は、四面体 $ABCD$ の展開図であり、展開図を組み立てると、点 E, F は点 A と重なる。 $\triangle ABD$ は $AB=BD=3\text{ cm}$ の直角二等辺三角形、 $\triangle BCD$ は $\angle BDC=90^\circ$ の直角三角形、 $\triangle CFD$ は $CD=DF$, $CF=6\text{ cm}$ の直角二等辺三角形である。また、 $\triangle ABD$ の頂点 A と辺 BD の中点 M を結んだ線分 AM を 3 等分した点のうち、点 M に近い方を G 、 $\triangle BEC$ の頂点 E と辺 BC の中点 N を結んだ線分 EN を 3 等分した点のうち、点 N に近い方を H とする。



このとき、次の問1～問4に答えなさい。

(新潟県 2018 年度)

問1 展開図を組み立てるとき、辺と面が垂直である組合せを、次のア～カから二つ選び、その符号を書きなさい。

- ア 辺 AB と面 BCD イ 辺 AC と面 ABD ウ 辺 AD と面 BCD
 エ 辺 BD と面 BEC オ 辺 CD と面 ABD カ 辺 BC と面 CFD

問2 四面体 $ABCD$ の体積を求めなさい。

問3 展開図を組み立てるとき、線分 GH の長さを求めなさい。

問4 展開図を組み立てるとき、2 点 G, H を通り、平面 BCD と平行な平面と線分 AB との交点を I とする。立体 $AIHG$ の体積は、四面体 $ABCD$ の体積の何倍か。求めなさい。

解答欄

問1		
問2	〔求め方〕	
	答 cm^3	
問3	〔求め方〕	
	答 cm	
問4	〔求め方〕	
	答 倍	

解答

問1 アオ

問2

〔求め方〕

底面を△BCD とすると四面体 ABCD の高さは AB となる。

$AB=BD=3\text{ cm}$ で $AD=3\sqrt{2}\text{ cm}$ だから

$DC=3\sqrt{2}\text{ cm}$

よって体積は $\frac{1}{3} \times 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{2} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

答 $\frac{9\sqrt{2}}{2}\text{ cm}^3$

問3

〔求め方〕

$CD=3\sqrt{2}\text{ cm}$ であり

△BCD で

中点連結定理により $MN=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ である。

△AMN において

$AG:AM=2:3$, $AH:AN=2:3$ だから

$AG:AM=AH:AN$

これより $GH:MN=2:3$

よって $GH=\frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

答 $\sqrt{2}\text{ cm}$

問4

〔求め方〕

四面体 ABCD, 立体 AIHG の底面をそれぞれ△BCD, △IHG とすると
高さはそれぞれ AB, AI である。

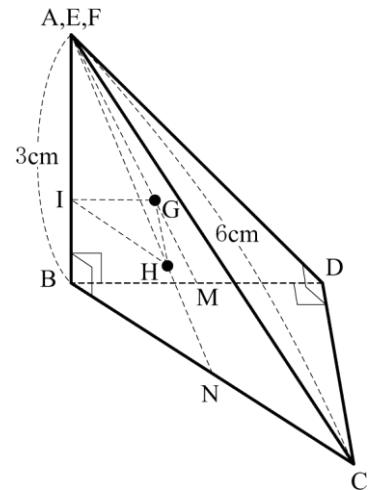
底面の相似比は 3:1 だから

底面積の比は $3^2:1^2=9:1$ で

高さの比は 3:2 である。

よって立体 AIHG の体積は四面体 ABCD の体積の $\frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ 倍である。

答 $\frac{2}{27}$ 倍



【問 10】

右の図のように、正四角すいと正四角柱を合わせた立体 $OABCDEFGH$ がある。

正四角すい $OABCD$ の高さは 4 cm であり、正四角柱 $ABCDEFGH$ は底面の 1 辺の長さが 4 cm で、高さが 2 cm である。

また、線分 OE , OG と正方形 $ABCD$ との交点をそれぞれ点 P , Q とする。

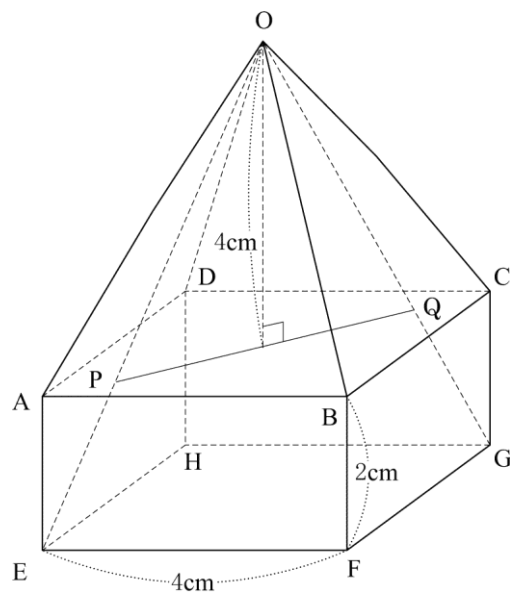
このとき、次の問いに答えなさい。

(富山県 2018 年度)

問1 線分 OE の長さを求めなさい。

問2 線分 PQ の長さを求めなさい。

問3 三角すい $BFPQ$ の体積を求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm ³

解答

問1 $2\sqrt{11}\text{cm}$

問2 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\text{cm}$

問3 $\frac{32}{9}\text{cm}^3$

解説

問1

点 O から正方形 EFGH に垂線 OR をひくと点 R は線分 EG の中点になる。

$\triangle OER$ は $\angle ORE = 90^\circ$ の直角三角形だから

三平方の定理より $OE^2 = OR^2 + ER^2$

ここで $OR = 4 + 2 = 6\text{cm}$, $ER = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\text{cm}$ より

$$OE^2 = 6^2 + (2\sqrt{2})^2 = 44$$

$OE > 0$ だから

$$OE = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}\text{cm}$$

問2

線分 PQ と線分 OR の交点を S とする。

$\triangle OPQ$ と $\triangle OEG$ は相似で

相似比は $OS : OR = 4 : 6 = 2 : 3$

よって $PQ : EG = 2 : 3$

$$PQ : 4\sqrt{2} = 2 : 3$$

$$3PQ = 4\sqrt{2} \times 2$$

$$PQ = \frac{4\sqrt{2} \times 2}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\text{cm}$$

問3

三角すい BFPQ は底面が $\triangle BPQ$ で高さが BF の三角すいとみることができる。

$\triangle BPQ$ は

底辺を PQ とみると

高さが $BS = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\text{cm}$ だから

$$\triangle BPQ = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{16}{3}\text{cm}^2$$

よって三角錐 BFPQ の体積は $\frac{1}{3} \times \frac{16}{3} \times 2 = \frac{32}{9}\text{cm}^3$

【問 11】

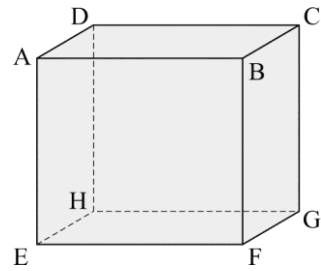
図1～図3のように、すべての面が板でできた直方体の箱 $ABCD-EFGH$ があり、 $AB=12\text{ cm}$, $AD=4\text{ cm}$, $AE=11\text{ cm}$ である。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。ただし、板の厚さは考えないものとする。

(石川県 2018 年度)

問1 図1において、面 $AEHD$ と垂直な辺をすべて書きなさい。

図1



問2 図2のように、面 $AEFB$ を、辺 EF を軸として矢印の方向に 90° 回転させたとき、面 $AEFB$ が動いてできた部分の立体の体積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。ただし、円周率は π とする。

図2

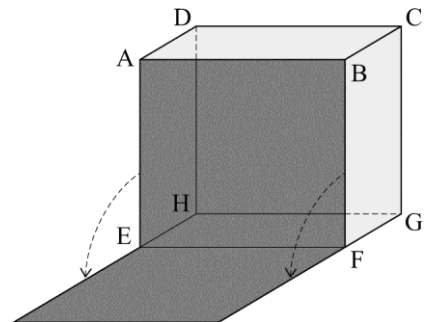
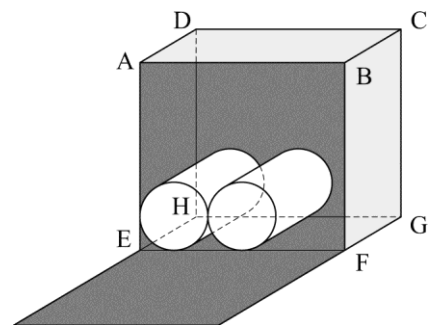


図3

問3 底面の直径と高さがともに 4 cm の円柱を、図3のような向きで箱の中にできるだけ多く入れたい。箱の中に最大で何個の円柱を入れることができるか、円柱の総数を求めなさい。

また、このとき、面 $EFGH$ から、積み上げた円柱の最も高いところまでの高さを小数第2位まで求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。必要であれば、 $\sqrt{2}=1.41$, $\sqrt{3}=1.73$ として計算すること。



解答欄

問1		
問2	〔計算〕	
	答 cm³	
問3	〔円柱の総数〕	個
	〔計算〕 答 cm	

解答

問1 辺 AB, 辺 DC, 辺 EF, 辺 HG

問2

〔計算〕

$$11 \times 11 \times \pi \times 12 \times \frac{1}{4} = 363\pi$$

答 $363\pi \text{ cm}^3$

問3

〔円柱の総数〕 8 個

〔計算〕

箱を正面から見ると右の図のように

円が上段に 3 個, 中段に 2 個, 下段に 3 個並んで見える。

上段の真ん中の円の中心と下段の両端の円の中心をそれぞれ結ぶと
1 辺が 8 cm の正三角形ができる。

それを利用して

$$2 + 4\sqrt{3} + 2 = 4(1 + \sqrt{3}) = 10.92$$

答 10.92cm

解説

問1

辺 AB は 2 つの辺 AD, AE と

辺 EF は 2 つの辺 EA, EH と

辺 HG は 2 つの辺 HD, HE と

辺 DC は 2 つの辺 DA, DH と

それぞれ垂直だから

この 4 つの辺は面 AEHD と垂直である。

問2

できる立体は

底面が半径 11cm, 中心角 90° のおうぎ形で高さが 12cm の柱体だから

$$\text{求める立体の体積は } \pi \times 11^2 \times \frac{90}{360} \times 12 = 363\pi \text{ cm}^3$$

問3

右の図より

箱の中には最大で 8 個の円柱を入れることができる。

点 A, B, C はそれぞれ円柱の底面の中心を表す。

点 A, B, C をそれぞれ直線で結ぶと,

$\triangle ABC$ は 1 辺の長さが 8cm の正三角形である。

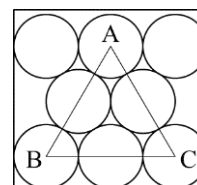
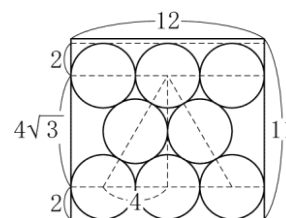
点 A から辺 BC に垂線を下ろしその垂線と辺 BC との交点を H とする。

$\triangle ABH$ は 3 つの角が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形だから

$$AH = 4\sqrt{3}\text{cm}$$

よって面 EFGH から積み上げた円柱の最も高いところまでの高さは

$$2 + 4\sqrt{3} + 2 = 4(1 + \sqrt{3}) = 4 \times 2.73 = 10.92\text{cm}$$



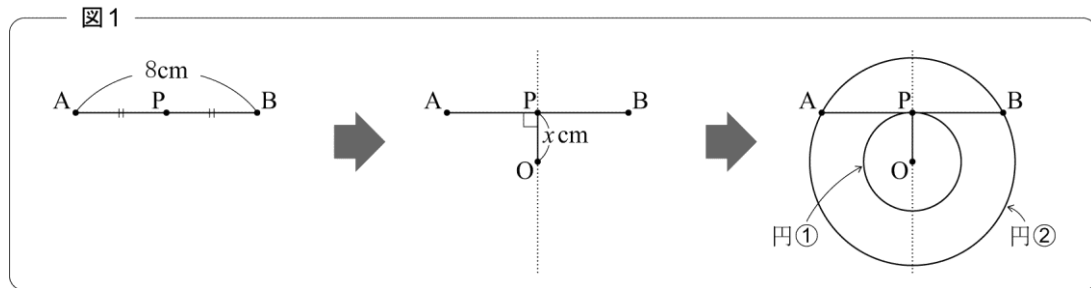
【問 12】

次の問いに答えなさい。

問1 図1のように、長さが 8 cm の線分 AB の中点を P とし、直線 AB の下側に、線分 AB の垂直二等分線上の点 O をとり、線分 OP の長さを $x\text{ cm}$ とする。点 O を中心として、点 P を通る円を円①、2点 A, B を通る円を円②とする。

このとき、次の(1)～(4)に答えなさい。

(山梨県 2018 年度)



(1) $x=3$ のとき、円①の面積を求めなさい。

(2) 円②の面積が $20\pi\text{ cm}^2$ であるとき、 x の値を求めなさい。

(3) 解答欄の図において、 $OP=AP$ となるように円②を作図しなさい。

ただし、作図には定規とコンパスを用い、作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

(4) 線分 AB の長さ 8 cm は変えずに x の値を変えると、それに伴って円①と円②の大きさも変わる。図2の斜線部分は、円②から円①を除いた部分である。その面積を $S\text{ cm}^2$ とするとき、 S と x の関係について正しく述べているものを、次のア～エから1つ選び、その記号を書きなさい。

ア S は x の1次関数である。

イ S は x の2乗に比例する。

ウ S は x に反比例する。

エ S は x の値に関わらず、一定である。

図2

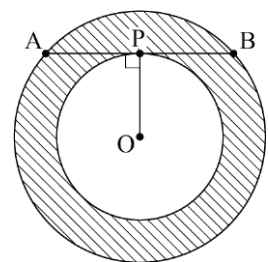
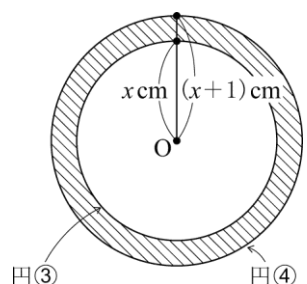
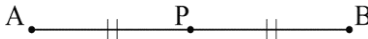


図3



問2 図3において、点 O を中心として、半径が $x\text{ cm}$ の円を円③、半径が $(x+1)\text{ cm}$ の円を円④とする。図3の斜線部分は、円④から円③を除いた部分である。その面積を $T\text{ cm}^2$ とするとき、 T は x の関数である。 T を x の式で表しなさい。また、 T と x の関係は、どのような関数であるといえるか書きなさい。

解答欄

問1	(1)	cm^2
	(2)	$x =$
	(3)	
	(4)	
問2	式 $T =$	
	関数	

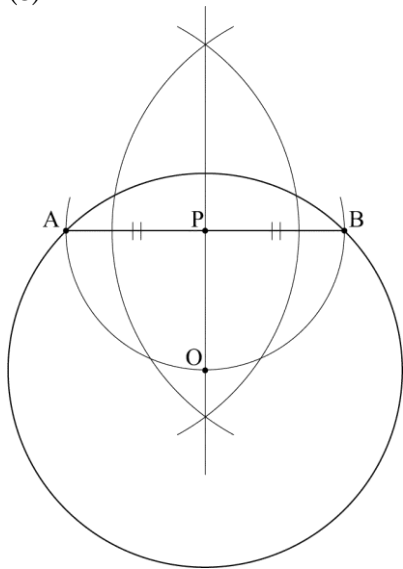
解答

問1

(1) $9\pi \text{ cm}^2$

(2) $x=2$

(3)



(4) エ

問2

式 $T=2\pi x+\pi$

関数 T は x の 1 次関数である

解説

問1

(1)

$\pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

(2)

円②の半径は OA だから

$OA=r\text{cm}$ とすると

$\pi r^2 = 20\pi$

$r^2 = 20$

$\triangle OPA$ で $\angle OPA = 90^\circ$ だから

三平方の定理より $AP^2 + OP^2 = OA^2$

よって $4^2 + x^2 = 20$

$x^2 = 4$

$x > 0$ だから

$x = 2$

(3)

Pを中心とする半径 PA の円と AB の垂直二等分線との交点を O とし O を中心とする半径 OA の円をかく。

(4)

(2)と同様に $OA=r\text{ cm}$ とする。

$S = \text{円②} - \text{円①} = \pi r^2 - \pi x^2 = \pi (r^2 - x^2)$

$\triangle OPA$ で

三平方の定理より $OA^2 = AP^2 + OP^2$

よって $r^2 = 4^2 + x^2$

これを S の式に代入すると $S = \pi (4^2 + x^2 - x^2) = 16\pi$

よって面積は $16\pi \text{ cm}^2$ で一定だから正しいのはエ

問2

$T = \pi (x+1)^2 - \pi x^2 = \pi (x^2 + 2x + 1) - \pi x^2 = \pi x^2 + 2\pi x + \pi - \pi x^2 = 2\pi x + \pi$

これは x の 1 次式だから, T は x の 1 次関数である。

【問 13】

みほさんの学級では、文化祭の展示用に、図2のような正四角錐の案内表示を作るようになった。図3は、その展開図である。

(長野県 2018 年度)

- (1) 図3の展開図を組み立てた正四角錐について、辺 AE とねじれの位置にある辺をすべて選び、記号を用いて書きなさい。

図2

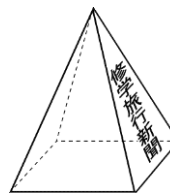
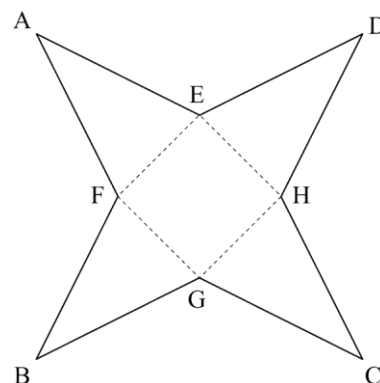


図3



- (2) 図2の正四角錐の高さが 18 cm になるようにしたい。底面の正方形の 1 辺の長さが 15 cm のとき、その 1 辺を底辺とする側面の三角形の高さ h cm を求めるための方程式として正しいものを、次のア～エから 1 つ選び、記号を書きなさい。

ア $18^2 = h^2 + 15^2$

イ $h^2 = 18^2 + 15^2$

ウ $18^2 = h^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$

エ $h^2 = 18^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$

解答欄

(1)	
(2)	

解答

(1) 辺 FG, 辺 GH

(2) エ

解説

(1)

展開図を組み立てると点 A と点 B, C, D は重なるから辺 AE と辺 BF, BG, CG, CH, DE, DH は点 A で交わる。また辺 AE と辺 EF, EH は点 E で交わる。

よって辺 AE と平行でなく交わらないのは辺 FG, GH の 2 本である。

(2)

展開図で線分 EG と線分 FH との交点を I とし線分 EF と線分 AI との交点を J とする。

点 I は正方形 EFGH の対角線の交点なので $\angle EIF = 90^\circ$, $IE = IF \cdots \text{①}$ であり

$\triangle EFI$ は直角二等辺三角形である。

また $AE = AF$ と①より線分 AI は線分 EF の垂直二等分線と一致するから $AI \perp EF$, $EJ = FJ$ だから

$$IJ = EJ = 15 \div 2 = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

組み立てたときに正四角錐の高さ(18cm)と側面の三角形の高さ(h cm)の両方を含む三角形は $\triangle AJI$ であり

$\angle AIJ = 90^\circ$ だから三平方の定理より $h^2 = 18^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$ で求められる。

【問 14】

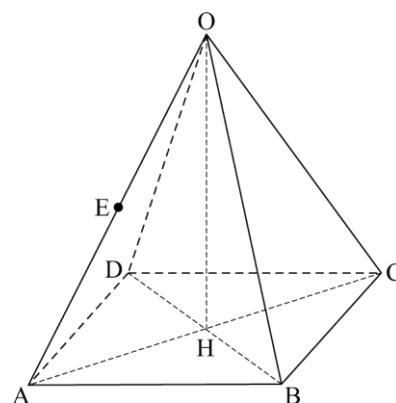
図3の立体は、点 O を頂点とし、正方形 $ABCD$ を底面とする四角すいである。この四角すいにおいて、 $AB=6$ cm 、 $OA=OB=OC=OD=9$ cm である。また、底面の対角線の交点を H とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(静岡県 2018 年度)

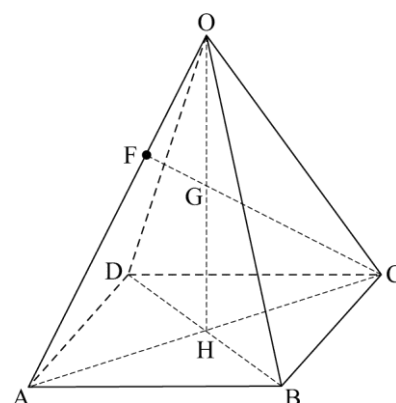
問1 辺 OA の中点を E とする。 $\triangle ODB$ の面積は、 $\triangle EAH$ の面積の何
倍か、答えなさい。

図3



問2 この四角すいにおいて、図4のように、 $OF=3$ cm となる辺 OA 上の
点を F とし、 FC と OH の交点を G とする。四角すい $GABCD$ の体
積を求めなさい。

図4



解答欄

問1	倍
問2	cm^3

解答

問1 4倍

問2 $18\sqrt{7}\text{cm}^3$

解説

問1

$AE=OE$, $AH=CH$ より

$$\triangle EAH = \frac{1}{2}\triangle OAH = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\triangle OAC = \frac{1}{4}\triangle ODB \text{ だから}$$

$$\triangle ODB = 4\triangle EAH$$

よって $\triangle ODB$ の面積は $\triangle EAH$ の面積の4倍である。

問2

$$AC=\sqrt{2} \quad AB=6\sqrt{2}\text{cm}$$

$$AH=\frac{1}{2}AC=3\sqrt{2}\text{cm}$$

$\triangle OAH$ で

$$\text{三平方の定理より } OH^2 = OA^2 - AH^2 = 9^2 - (3\sqrt{2})^2 = 63$$

$OH > 0$ より

$$OH = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}\text{cm}$$

点FからACに垂線を引きACとの交点をIとする。

$FI \parallel OH$, $OF=3\text{cm}$ より

$$FI:OH = AF:AO = 6:9 = 2:3 \text{ だから } FI = \frac{2}{3}OH = 2\sqrt{7}\text{cm}$$

$$\text{さらに } GH:FI = CH:CI = 3:4 \text{ だから } GH = \frac{3}{4}FI = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{7} = \frac{3\sqrt{7}}{2}\text{cm}$$

$$\text{よって四角すいGABCDの体積は } \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \frac{3\sqrt{7}}{2} = 18\sqrt{7}\text{cm}^3$$

【問 15】

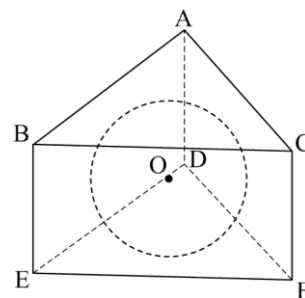
図で、A, B, C, D, E, F を頂点とする立体は底面の $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ が正三角形の正三角柱である。また、球 O は正三角柱 ABCDEF にちょうどはいっている。

球 O の半径が 2 cm のとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(愛知県 2018 年度 B)

(1) 球 O の表面積は何 cm^2 か、求めなさい。

(2) 正三角柱 ABCDEF の体積は何 cm^3 か、求めなさい。



解答欄

(1)	cm^2
(2)	cm^3

解答

(1) $16\pi \text{ cm}^2$

(2) $48\sqrt{3}\text{cm}^3$

解説

(1)

半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ で求められるので $4\pi \times 2^2 = 16\pi \text{ cm}^2$

(2)

右の図は正三角柱を真上から見た平面図である。

平面図において

円 O は半径 2cm の円であり

$\triangle ABC$ の 3 辺すべてに接しており

円 O と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ D, E, F とする。

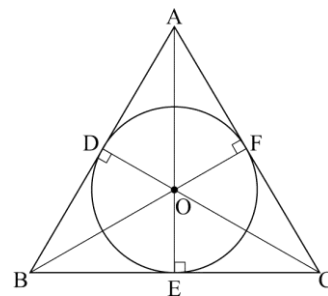
$\triangle OBE$, $\triangle OAD$ は 30° , 60° , 90° の直角三角形であり $OE = OD = 2\text{cm}$

よって $BE = \sqrt{3}$ $OE = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ で $BE = CE$ だから $BC = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

また $AO = 2OD = 4\text{cm}$ だから $AE = AO + OE = 4 + 2 = 6\text{cm}$

三角柱の高さは球 O の直径と等しく 4cm だから

求める体積は $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 \times 4 = 48\sqrt{3} \text{ cm}^3$



【問 16】

右の図のように、点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とし、1 辺の長さが 6 cm の立方体がある。辺 BF の中点を I, 辺 DH の中点を J とし、4 点 A, E, I, J を結んで三角すい P をつくる。

このとき、次の各問いに答えなさい。

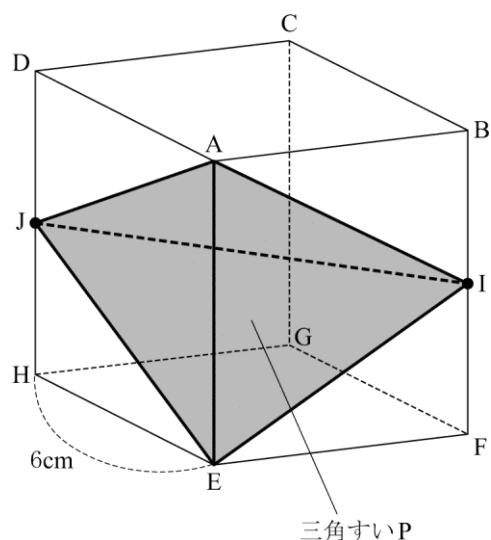
なお、各問いにおいて、答えの分母に $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、分母を有理化しなさい。また、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。

(三重県 2018 年度)

(1) 辺 EJ の長さを求めなさい。

(2) $\triangle EIJ$ の面積を求めなさい。

(3) 面 EIJ を底面としたときの三角すい P の高さを求めなさい。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm ²
(3)	cm

解答

(1) $3\sqrt{5}\text{cm}$

(2) $9\sqrt{6}\text{cm}^2$

(3) $2\sqrt{6}\text{cm}$

解説

(1)

三平方の定理より $EJ = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\text{cm}$

(2)

三平方の定理より $IJ = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\text{cm}$

$\triangle EIJ$ は二等辺三角形だから

点 E から辺 IJ に垂線をひくと

その垂線は辺 IJ を垂直に二等分する。

垂線と辺 IJ の交点を K とする。

$\triangle EKJ$ について

三平方の定理より $EK = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\text{cm}$

よって $\triangle EIJ = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{6}\text{cm}^2$

(3)

底面を $\triangle AEK$ と考えたとき

三角すい $JAEK$ と三角すい $IAEK$ の体積の和は

三角すい P の体積と等しくなる。

よって三角すい P の高さを h とすると

$$\frac{1}{3} \times \triangle EIJ \times h = \frac{1}{3} \times \triangle AEK \times 3\sqrt{2} \times 2$$

$$9\sqrt{6}h = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times 2$$

$$\sqrt{6}h = 12$$

$$h = 2\sqrt{6}\text{cm}$$

【問 17】

右の図のように、底面が 1 辺 6 cm の正方形で、ほかの辺がすべて $6\sqrt{3}$ cm の正四角錐^{すい}OABCD がある。底面の正方形 ABCD の対角線の交点を H とする。また、2 辺 OA, OD の中点をそれぞれ P, Q とする。

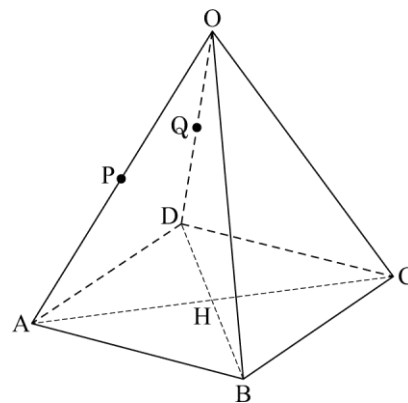
このとき、次の問1～問3に答えよ。

(京都府 2018 年度 前期)

問1 線分 AH の長さを求めよ。また、正四角錐 OABCD の体積を求めよ。

問2 三角錐 OPBQ の体積を求めよ。

問3 2 点 O, H を通る直線と平面 PBCQ との交点を E とするとき、線分 OE の長さを求めよ。



解答欄

問1	AH =	cm
	体積	cm ³
問2		cm ³
問3		cm

解答

問1

$$AH=3\sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{体積 } 36\sqrt{10}\text{cm}^3$$

$$\text{問2 } \frac{9\sqrt{10}}{2}\text{cm}^3$$

$$\text{問3 } 2\sqrt{10}\text{cm}$$

解説

問1

$\triangle ABH$ は $AH=BH$, $\angle AHB=90^\circ$ の直角二等辺三角形なので

$$AH=AB\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\text{ cm}$$

$OH\perp$ 面 $ABCD$ より $\angle OHA=90^\circ$ だから

$\triangle OAH$ において

$$\text{三平方の定理より } OH=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{10}\text{ cm}$$

$$\text{よって正四角錐 } OABCD \text{ の体積は } \frac{1}{3}\times 6^2\times 3\sqrt{10}=36\sqrt{10}\text{ cm}^3$$

問2

正四角錐 $OABCD$ の体積:三角錐 $OABD$ の体積=四角形 $ABCD$ の面積: $\triangle ABD=2:1$ だから

$$\text{三角錐 } OABD \text{ の体積は } 36\sqrt{10}\div 2=18\sqrt{10}\text{ cm}^3$$

三角錐 $OABD$ の体積:三角錐 $OPBD$ の体積= $\triangle OAD:\triangle OPD=2:1$ だから

$$\text{三角錐 } OPBD \text{ の体積は } 18\sqrt{10}\div 2=9\sqrt{10}\text{ cm}^3$$

三角錐 $OPBD$ の体積:三角錐 $OPBQ$ の体積= $\triangle OPD:\triangle OPQ=2:1$ だから

$$\text{三角錐 } OPBQ \text{ の体積は } 9\sqrt{10}\div 2=\frac{9\sqrt{10}}{2}\text{ cm}^3$$

問3

線分 OH と線分 CP との交点が E となる。

点 P から線分 AC に引いた垂線と線分 AC との交点を I とすると

三角形と比の定理より

$$PI:OH=AP:AO=1:2$$

$$PI=3\sqrt{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}\text{ cm}$$

$\triangle OAC$ は $OA=OC$ の二等辺三角形だから

$AH=CH$ であり $AI:IH=AP:PO=1:1$ だから $CH:CI=2:3$

よって $EH:PI=2:3$ だから

$$EH=\frac{3\sqrt{10}}{2}\times\frac{2}{3}=\sqrt{10}\text{ cm}$$

$$\text{したがって } OE=3\sqrt{10}-\sqrt{10}=2\sqrt{10}\text{ cm}$$

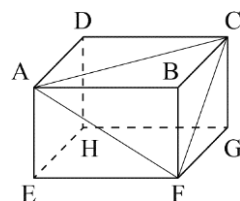
【問 18】

直方体 $ABCD-EFGH$ があり, $AB=6\text{ cm}$, $AD=AE=4\text{ cm}$ である。右の図1は, この直方体に 3 つの線分 AC , AF , CF を示したものである。

このとき, 次の問1・問2に答えよ。

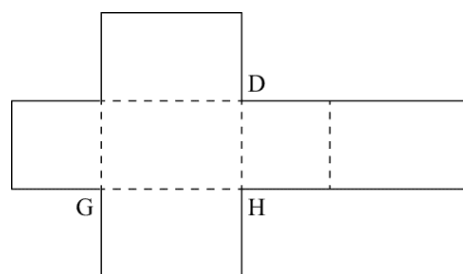
(京都府 2018 年度 中)

図1



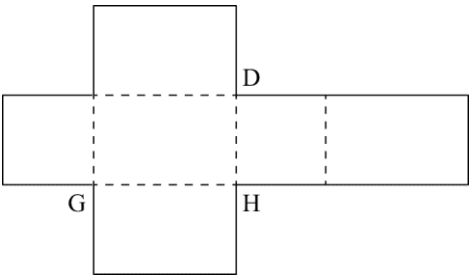
問1 右の図2は, 直方体 $ABCD-EFGH$ の展開図の 1 つに, 3 つの頂点 D , G , H を示したものである。図1中に示した, 3 つの線分 AC , AF , CF を, 答案用紙の図にかき入れよ。ただし, 答案用紙に, 文字 A , C , F を書く必要はない。

図2



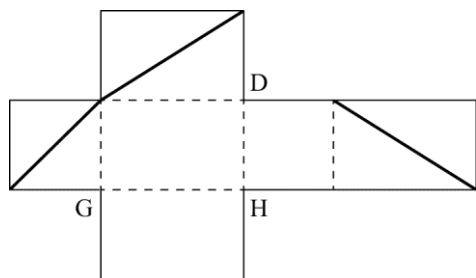
問2 直方体 $ABCD-EFGH$ を, 3 つの頂点 A , C , F を通る平面で切ってできる, 三角錐^{すい} $ABCF$ の体積を求めよ。

解答欄

問1	図1中に示した, 3 つの線分 AC, AF, CF をかき入れよ。ただし, 文字 A, C, F を書く必要はない。 
問2	cm^3

解答

問1 図1中に示した, 3つの線分 AC, AF, CF をかき入れよ。ただし, 文字 A, C, F を書く必要はない。



問2 16cm^3

解説

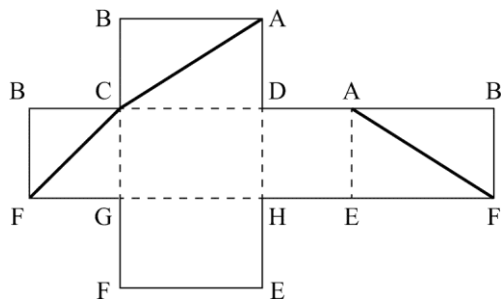
問1

あらかじめ書きこまれた頂点 D, G, H を手がかりに

展開図に頂点を書きこみ

点 A と点 F, 点 A と点 C, 点 C と点 F をそれぞれ結ぶと
右の図のようになる。

問2 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \right) \times 4 = 16\text{cm}^3$



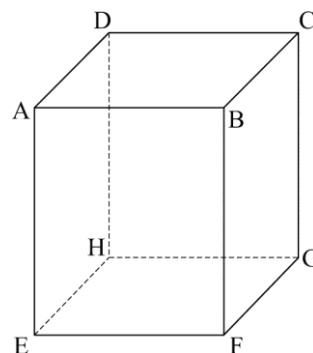
【問 19】

右図において，立体 $ABCD-EFGH$ は直方体であり， $AE=4\text{ cm}$ である。底面 $EFGH$ は，1 辺の長さが $a\text{ cm}$ の正方形である。

(大阪府 2018 年度 A)

- (1) 次のア～エのうち，辺 AB と平行な辺はどれですか。一つ選び，記号を○で囲みなさい。

ア 辺 AD イ 辺 AE ウ 辺 EH エ 辺 HG



- (2) 直方体 $ABCD-EFGH$ の体積を a を用いて表しなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

問9

(1) エ

(2) $4a^2\text{ cm}^3$

解説

(1)

辺 AB と平行な辺は辺 DC ，辺 HG ，辺 EF である。
よってエである。

(2)

直方体 $ABCD-EFGH$ の体積は

底面積 $\times$ 高さで表されるから $a^2 \times 4 = 4a^2\text{ cm}^3$

【問 20】

図1, 図2において, 立体 $A-BCD$ は三角すいである。△BCD は 1 辺の長さが 6 cm の正三角形であり, $AB=AC=AD=9$ cm である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は, 根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2018 年度 B)

問1 図1において, E は辺 AD 上の点であり, $AE:ED=2:3$ である。F は, E を通り辺 CD に平行な直線と辺 AC との交点である。G は, F を通り辺 AB に平行な直線と辺 BC との交点である。

- (1) 次のア～オのうち, 辺 CD とねじれの位置にある辺はどれですか。一つ選び, 記号を○で囲みなさい。

ア 辺 AB イ 辺 AC ウ 辺 AD

エ 辺 BC オ 辺 BD

- (2) △ACD の内角 $\angle CAD$ の大きさを α° とするとき, △ACD の内角 $\angle ACD$ の大きさを α を用いて表しなさい。

- (3) 線分 GC の長さを求めなさい。

図1

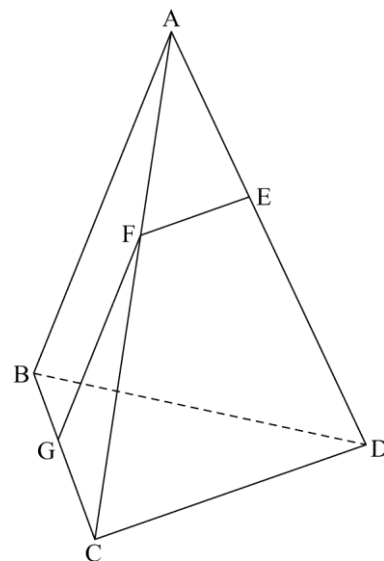
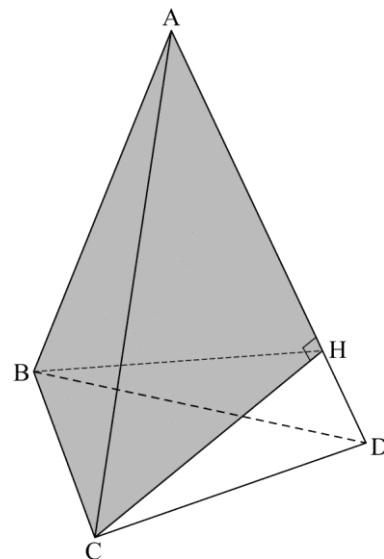


図2



問2 図2において, H は C から辺 AD にひいた垂線と辺 AD との交点である。B と H とを結ぶ。このとき, $BH=CH$ であり, 直線 AD は平面 BCH と垂直である。

- (1) 線分 CH の長さを求めなさい。

- (2) 立体 $A-BCH$ の体積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	度
	(3)	cm
問2	(1)	cm
	(2)	cm ³

解答

問1

(1) ア

(2) $90 - \frac{1}{2}a$ 度

(3) $\frac{18}{5}$ cm

問2

(1) $4\sqrt{2}$ cm

(2) $7\sqrt{23}$ cm³

解説

問1

(1)

辺 AC, 辺 AD, 辺 BC, 辺 BD はいずれも辺 CD と交わっているから辺 CD とねじれの位置にない。

辺 AB は辺 CD と交わらず平行でもないからねじれの位置にある。

(2)

ACD は二等辺三角形だから $\angle ACD = \angle ADC$

よって $\angle ACD = (180^\circ - a^\circ) \div 2 = 90^\circ - \frac{1}{2}a^\circ$

(3)

FE // CD, AE:ED=2:3 より AF:FC=2:3

また FG // AB, CF:FA=3:2 より CG:GB=3:2

よって $GC = \frac{3}{5} \times 6 = \frac{18}{5}$ cm

問2

(1)

△ACD は二等辺三角形だから

頂点 A から辺 CD に垂線をひき

その垂線と辺 CD との交点を I とすると CI=DI

よって△ACI において

三平方の定理より $AI^2 = AC^2 - CI^2 = 81 - 9 = 72$

AI>0 より

$AI = 6\sqrt{2}$ cm

$\triangle ACD = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ cm²

また辺 AD を底辺として考えると $\triangle ACD = \frac{1}{2} \times 9 \times CH = \frac{9}{2} CH$ cm²

したがって $\frac{9}{2} CH = 18\sqrt{2}$

$CH = 4\sqrt{2}$ cm

(2)

△BCH は二等辺三角形だから

頂点 H から辺 BC に垂線をひき

その垂線と辺 BC との交点を J とすると CJ=BJ

よって△HBJ において

三平方の定理より $HJ^2 = HB^2 - BJ^2 = 32 - 9 = 23$

HJ>0 より

$HJ = \sqrt{23}$ cm

△ACH において

三平方の定理より $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 81 - 32 = 49$

AH>0 より

$AH = 7$ cm

したがって求める体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{23} \times 7 = 7\sqrt{23}$ cm³

【問 21】

図1, 図2において, 立体 $ABC-DEF$ は五つの平面で囲まれてできた立体である。四角形 $BCFE$ は $BC=6$ cm, $CF=8$ cm の長方形であり, $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ は正三角形である。平面 ABC と平面 DEF は平行である。このとき, $AD \parallel BE$, $AD \parallel CF$ であり, 四角形 $ABED \equiv$ 四角形 $ACFD$ である。D と B, D と C とをそれぞれ結ぶ。G は辺 AD 上の点であり, $AG=2$ cm である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は, 根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

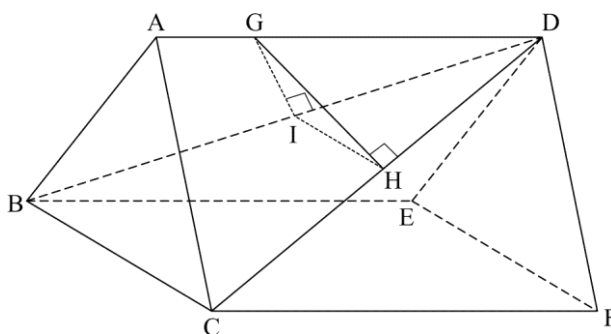
(大阪府 2018 年度 C)

問1 図1において, 四角形 $ACFD$ は長方形である。

H は, G から線分 DC にひいた垂線と線分 DC との交点である。I は, G から線分 DB にひいた垂線と線分 DB との交点である。H と I とを結ぶ。

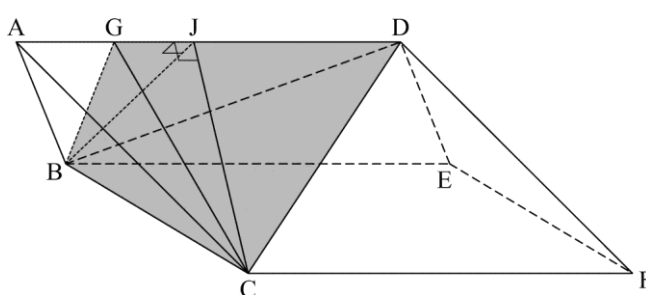
- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

図1



- (2) 線分 GH の長さを求めなさい。

図2



- (3) 線分 HI の長さを求めなさい。

問2 図2において, 四角形 $ACFD$ は内角 $\angle DAC$ が鋭角の平行四辺形である。G と C, G と B とをそれぞれ結ぶ。 $\triangle ACG$ の内角 $\angle AGC$ は鈍角であり, $GC=5$ cm である。J は, C から辺 AD にひいた垂線と辺 AD との交点である。B と J とを結ぶ。このとき, $BJ \perp AD$ である。

- (1) 線分 GJ の長さを求めなさい。

- (2) 立体 $GBCD$ の体積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm^2
	(2)	cm
	(3)	cm
問2	(1)	cm
	(2)	cm^3

解答

問1

(1) $9\sqrt{3}\text{cm}^2$

(2) $\frac{18}{5}\text{cm}$

(3) $\frac{72}{25}\text{cm}$

問2

(1) $\frac{7}{4}\text{cm}$

(2) $\frac{9\sqrt{23}}{2}\text{cm}^3$

解説

問1

(1)

三点 A から辺 BC に垂線をひきその垂線と辺 BC の交点を K とする。

$\triangle ABK$ において

三平方の定理より $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 36 - 9 = 27$

$AK > 0$ より $AK = 3\sqrt{3}\text{cm}$

よって $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\text{cm}^2$

(2)

$\triangle ACD$ において

三平方の定理より $DC^2 = DA^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100$

$DC > 0$ より $DC = 10\text{cm}$

$\triangle ACD \sim \triangle HGD$ より $CD:GD = CA:GH = 10:6 = 6:GH$ $GH = \frac{18}{5}\text{cm}$

(3)

$\triangle ACD \sim \triangle HGD$ より $DA:DH = DC:DG$ $8:DH = 10:6$ $DH = \frac{24}{5}\text{cm}$

$\triangle DGH \equiv \triangle DGI$ より合同な図形の対応する辺は等しいから $DH = DI$

よって $\triangle DIH \sim \triangle DBC$ だから $DH:DC = HI:CB$ $\frac{24}{5}:10 = HI:6$ $HI = \frac{72}{25}\text{cm}$

問2

(1)

$GJ = x\text{cm}$ とおくと $\triangle CGJ$ において

三平方の定理より $CJ^2 = CG^2 - GJ^2 = 25 - x^2$

また $\triangle CAJ$ において

三平方の定理より $CJ^2 = CA^2 - AJ^2 = 36 - (2+x)^2 = 32 - 4x - x^2$ だから

$25 - x^2 = 32 - 4x - x^2$

$x = \frac{7}{4}\text{cm}$

(2)

$\triangle CGJ$ において

三平方の定理より $CJ^2 = CG^2 - GJ^2 = 25 - \frac{49}{16} = \frac{351}{16}$

$\triangle JBC$ で頂点 J から辺 BC に垂線をひきその垂線と辺 BC の交点を L とする。

$\triangle JCL$ において

三平方の定理より $JL^2 = JC^2 - BL^2 = JC^2 - 9 = \frac{351}{16} - 9 = \frac{9 \times 23}{16}$

$JL > 0$ より $JL = \frac{3\sqrt{23}}{4}\text{cm}$

立体 GBCD の体積は立体 GBCJ の体積と立体 DBCJ の体積の和だから

求める体積は $\frac{1}{3} \times \triangle JBC \times GJ + \frac{1}{3} \times \triangle JBC \times DJ = \frac{1}{3} \times \triangle JBC \times GD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3\sqrt{23}}{4} \times 6 = \frac{9\sqrt{23}}{2}\text{cm}^3$

【問 22】

ひろみさんは、立方体に光を当てたとき、立方体の位置を変えると、影の形とその面積が変化することに興味を持ち、次のようなことを考えた。

図1のような1目盛り1 cmの方眼紙を用意して、左から a 番目、下から b 番目のます目を $[a, b]$ と表す。例えば、○印のあるます目は $[2, 3]$ である。ここで、図2のような1辺の長さが1 cmの光を通さない立方体を用意する。そして、図3のように、先端に光源がついた長さ2 cmの棒を、 $[1, 1]$ の左下の角に方眼紙と垂直になるように設置し、立方体の面EFGHの方眼紙のます目に重ね、頂点Bが光源に最も近くなるように立方体を置いて、光源からの光によってできる影の面積を考える。ここでは、光源の大きさは考えず、光は直進するものとする。

図1

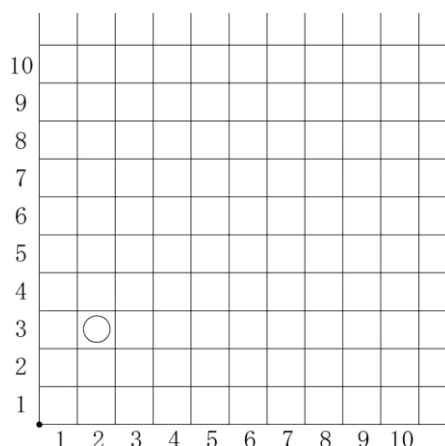


図2

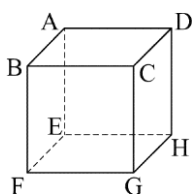
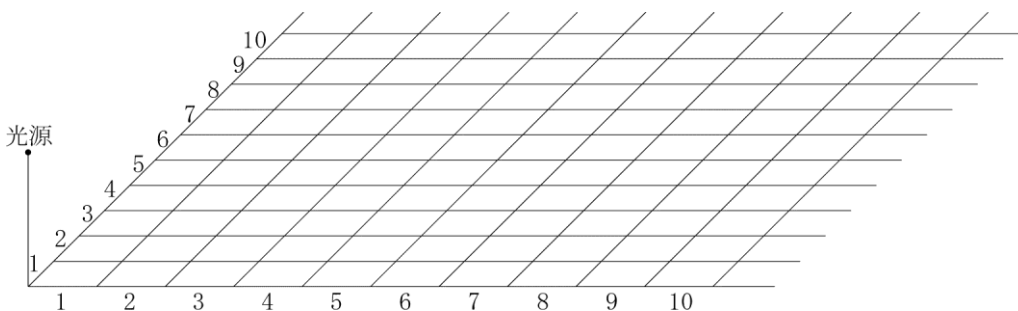


図3



ひろみさんは、立方体の影の形が次のようにできていることに気がついた。

光源と頂点A, C, Dを通る直線をひき、方眼紙と交わる点をそれぞれ A' , C' , D' とすると、6つの線分 $A'E$, EH , HG , GC' , $C'D'$, $D'A'$ で囲まれた図形が影である。例えば、立方体を $[1, 1]$ に置くと、図4のようになり、これを真上から見ると、その影は図5のようになる。

図4

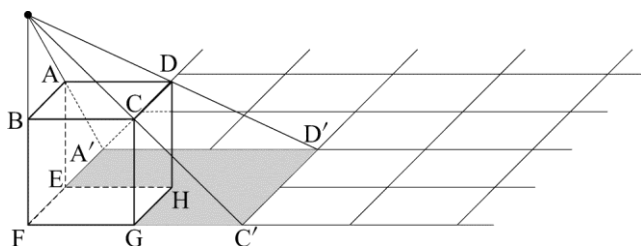
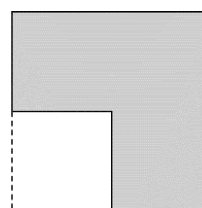


図5

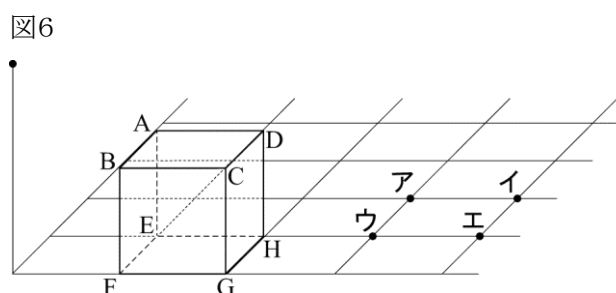


次の問いに答えなさい。

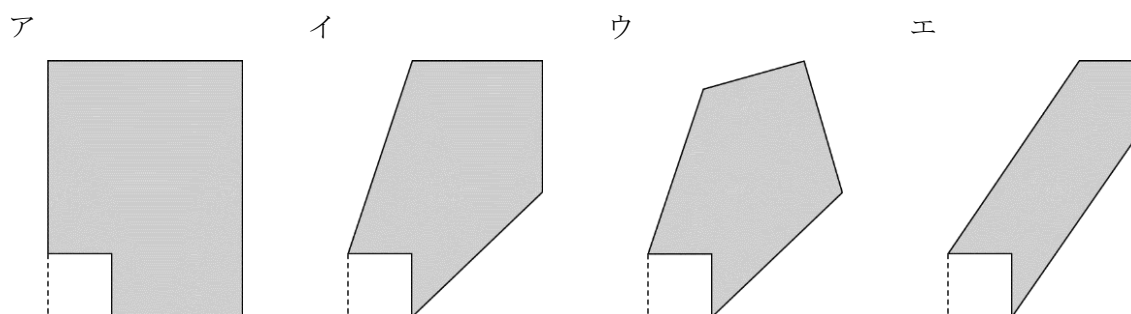
(兵庫県 2018 年度)

問1 図6のように、 $[2, 1]$ にこの立方体を置いた。

- (1) 点 D' の位置はどこか、図6のア～エから 1 つ選んで、その符号を書きなさい。
- (2) 線分 $D'A'$ の長さは何 cm か、求めなさい。



問2 [2, 3]にこの立方体を置いたとき, 真上から見た影はどの形か, 次のア～エから 1 つ選んで, その符号を書きなさい。



問3 ひろみさんは、立方体を置きます目によって光源からの光が当たる面に違いがあることがわかり、それぞれの影の面積について、次の表にまとめた。

置いた目	影の面積
正面	$2a^2$
右面	$2a^2$
上面	$2a^2$
左面	$2a^2$
後面	$2a^2$
底面	$2a^2$

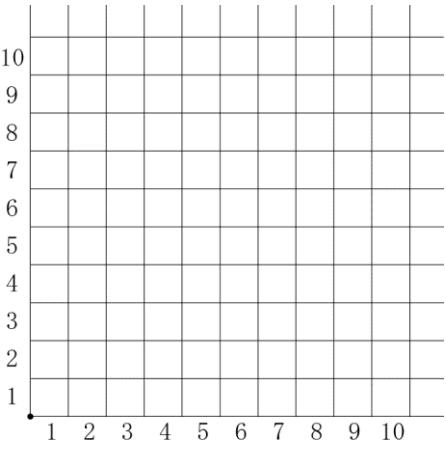
□(i)□，□(ii)□ にあてはまる式の組み合わせを、あとのア～エから1つ選んで、その符号を書きなさい。

立方体を置きます目	$[1, 1]$	$[a, 1]$ a は 2 以上の自然数	$[1, b]$ b は 2 以上の自然数	$[a, b]$ a, b はともに 2 以上の自然数
光が当たる面	面 ABCD	面 ABCD 面 ABFE	面 ABCD 面 BCGF	面 ABCD 面 ABFE 面 BCGF
影の面積	3 cm^2	(i) cm^2	(ii) cm^2	cm^2

$$\begin{array}{llll} \text{ア (i)} & 2a^2 - \frac{7}{2} & \text{(ii)} & 2b^2 - \frac{7}{2} \qquad \text{イ (i)} & \frac{1}{8}a^2 + 4 & \text{(ii)} & \frac{1}{8}b^2 + 4 \\ \text{ウ (i)} & \frac{3}{2}a + \frac{3}{2} & \text{(ii)} & \frac{3}{2}b + \frac{3}{2} & \text{エ (i)} & 4a - 1 & \text{(ii)} & 4b - 1 \end{array}$$

問4 ひろみさんは、立方体を置きます目が異なっても影の面積が等しくなる場合があることを見つけた。影の面積が 9 cm^2 となる立方体を置きます目はどこか、解答欄の図のあてはまるます目全てに○印を記入しなさい。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	cm
問2		
問3		
問4		

解答

問1

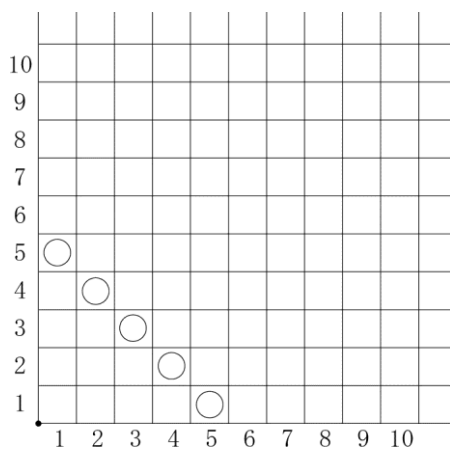
(1) イ

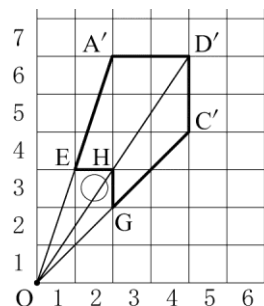
(2) 2cm

問2 イ

問3 ウ

問4



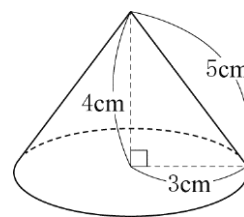


【問 23】

右の図のように、底面の半径が 3 cm 、高さ 4 cm 、母線の長さが 5 cm の円錐がある。

次の(1)、(2)に答えなさい。

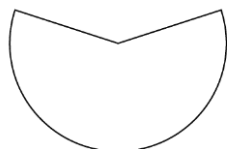
(和歌山県 2018 年度)



(1) この円錐の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

(2) この円錐の展開図を作図したとき、側面のおうぎ形の形として最も近いものを、次のア～エの中から 1 つ選び、その記号をかきなさい。

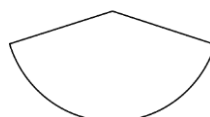
ア



イ



ウ



エ



解答欄

(1)	cm^3
(2)	

解答

(1) $12\pi\text{ cm}^3$

(2) ア

解説

(1)

$$\frac{1}{3} \times (\pi \times 3^2) \times 4 = 12\pi\text{ cm}^3$$

(2)

側面のおうぎ形の中心角は $360^\circ \times \frac{2\pi \times 3}{2\pi \times 5} = 216^\circ$ であり

イ～エは中心角の大きさが 180° 以下であるから
形が最も近いものはアと考えられる。

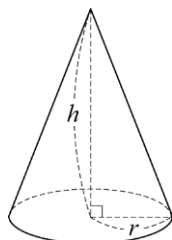
【問 24】

由美さんは、立体の性質について考えた。次の 5 つの立体A～Eについて、問1～問5に答えなさい。ただし、それぞれの立体において、 r は底面や球の半径であり、 h 、 a は図に示した線分の長さを表す。また、 $h > a$ である。

(岡山県 2018 年度 特別)

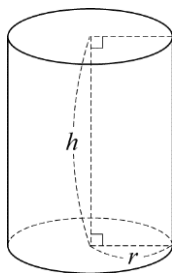
A

円錐



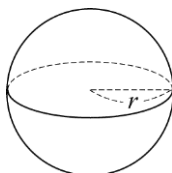
B

円柱



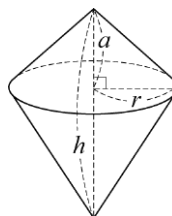
C

球



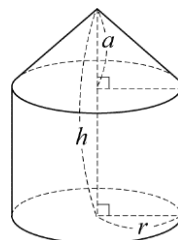
D

2 つの円錐の底面を合わせてできる立体



E

円錐と円柱の底面を合わせてできる立体



問1 立体A～Eのすべてに共通していることについて、正しく述べられている文は、ア～エのうちではどれですか。一つ答えなさい。

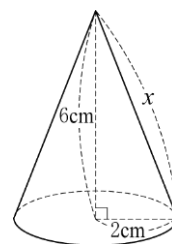
ア 平面図形を、その面と垂直な方向に一定の距離だけ平行に動かしてできる立体である。

イ 平面図形を、ある直線を軸に 1 回転させてできる立体 (回転体) である。

ウ 立体を真上から見た図 (平面図) が正三角形である。

エ 平面だけで囲まれた立体 (多面体) である。

問2 立体Aについて、図1のように $r = 2 \text{ cm}$ 、 $h = 6 \text{ cm}$ のとき、母線の長さ x を求めなさい。



問3 立体Aの体積と立体Dの体積が等しいかどうかについて疑問をもった由美さんは、次のように説明した。

(1) には適当な式を書き入れなさい。また、(2) には下線部の考えに従って立体Dの体積を求め、＜説明＞を完成させなさい。ただし、(2) は答えを求めるまでの過程も書きなさい。

＜説明＞

立体Aの体積は (1) である。立体Dの体積を 2 つの円錐の体積の和として考えると、

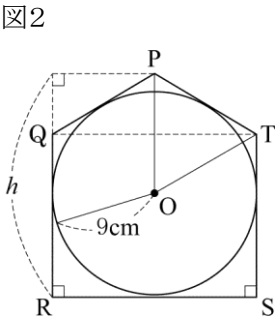
(2)

となるので、立体Aの体積と立体Dの体積は等しい。

問4 $h=2r$, $a=r$ のとき, 立体A～Eの面積や体積の関係について, 正しく述べられている文は, ア～エのうちではどれですか。当てはまるものをすべて答えなさい。

- ア最も体積が大きいのは, 立体Cである。
- イ立体Bの表面積は, 立体Cの表面積に等しい。
- ウ立体Aの体積と立体Cの体積の和は, 立体Bの体積に等しい。
- エ立体Eの体積は, 立体Dの体積の 2 倍に等しい。

問5 バレーボール部に所属する由美さんは, 先輩への卒業記念品として半径 9 cm の記念ボールを贈ることになり, ボールを入れる箱を手作りすることにした。箱を立体Eのような形とし, 箱にはボールがちょうど入るようにする。図2は, ボールが入った箱を正面から見た模式図である。OP=OT とするとき, 箱の高さ h を求めなさい。



【図2の説明】

- ・円Oはボール
- ・五角形PQRSTは箱
- ・辺PQ, QR, RS, ST, TPは, すべて円Oの接線

解答欄

問1		
問2	cm	
問3	(1)	
	(2)	
問4		
問5	cm	

解答

問1 イ

問2 $2\sqrt{10}\text{cm}$

問3

$$(1) \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(2)

$$\frac{1}{3}\pi r^2 a + \frac{1}{3}\pi r^2 (h-a)$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 a + \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 a$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

問4 ウ エ

問5 $9+6\sqrt{3}\text{cm}$

解説

問1

ア あてはまるのはBの円柱のみ。

イ それぞれ次の図形を1回転させてできるから正しい。

A 直角三角形 B 長方形 C 半円 D 三角形 E 台形

ウ A～Eのどの立体も真上から見ると円である。

エ A～Eのどの立体にも平面でない部分がある。

よってあてはまるのはイ

問2

三平方の定理より $x^2 = 6^2 + 2^2$ $x^2 = 40$ $x > 0$ だから $x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

問3

円錐の体積 $= \frac{1}{3} \pi \times \text{半径}^2 \times \text{高さ}$

問4

ア 各立体の体積は次のようになる。

A $\frac{1}{3} \pi r^2 \times 2r = \frac{2}{3} \pi r^3$

B $\pi r^2 \times 2r = 2 \pi r^3$

C $\frac{4}{3} \pi r^3$

D $\frac{2}{3} \pi r^3$

E $\pi r^2 \times r + \frac{1}{3} \pi r^2 \times r = \frac{4}{3} \pi r^3$

よって体積が最も大きいのは立体Bだから正しくない。

イ 立体Bの表面積は $\pi r^2 \times 2 + 2r \times 2 \pi r = 6 \pi r^2$ 立体Cの表面積は $4 \pi r^2$ よって正しくない。

ウ $\frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{4}{3} \pi r^3 = 2 \pi r^3$ より正しい。

エ $\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3 \times 2$ だから正しい。

よって正しいのはウとエ

問5

円とST, TPとの接点をそれぞれU, Vとする。

△OUTと△OVTで

円の接線は接点を通る半径に垂直だから

$\angle OUT = \angle OVT = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$OU = OV$ (半径) $\cdots \textcircled{2}$

OTは共通 $\cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから

$\triangle OUT \cong \triangle OVT \cdots \textcircled{4}$

同様に△OVTと△OVPで

$\angle OVT = \angle OVP = 90^\circ$, $OT = OP$ (仮定), OV は共通だから

$\triangle OVT \cong \triangle OVP \cdots \textcircled{5}$

④, ⑤より△OUT, △OVT, △OVPは合同だから

$\angle UOT = \angle VOT = \angle VOP$

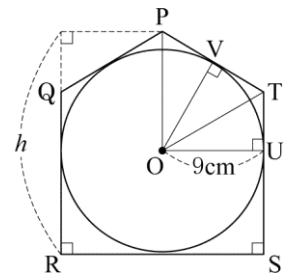
ここで $\angle POU = 90^\circ$ だから $\angle UOT = \angle VOT = \angle VOP = 30^\circ$

したがって△OUTは 30° の角をもつ直角三角形だから

$OU : OT = \sqrt{3} : 2$

$OT = \frac{2}{\sqrt{3}} OU = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 9 = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

よって $h = SU + OP = SU + OT = 9 + 6\sqrt{3} \text{ cm}$



【問 25】

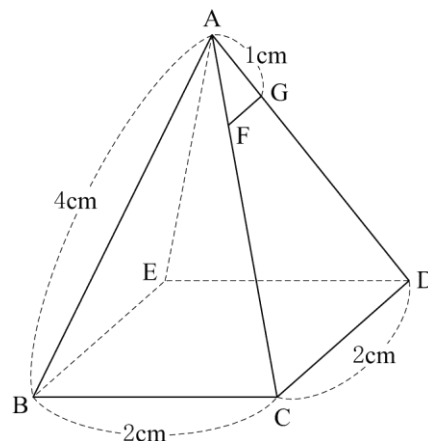
右の図のような正四角すいがあり、底面は 1 辺が 2 cm の正方形で、側面は等しい辺が 4 cm の二等辺三角形である。辺 AC 上に 2 点 A, C と異なる点 F をとる。点 F を通り辺 CD に平行な直線と、辺 AD との交点を G とする。

AG = 1 cm であるとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(香川県 2018 年度)

(1) 線分 FG の長さは何 cm か。

(2) この正四角すいの体積は何 cm^3 か。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) $\frac{1}{2}\text{cm}$

(2) $\frac{4\sqrt{14}}{3}\text{cm}^3$

解説

(1)

$\triangle ACD$ において $CD \parallel FG$ だから

三角形と比の定理より $AG:AD = FG:CD$ $1:4 = FG:2$ $4FG = 2$ $FG = \frac{1}{2}\text{cm}$

(2)

線分 BD と線分 CE との交点を O とする。

四角形 BCDE は正方形だから $\triangle BCO$ は $\angle BOC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

よって $BO = BC \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\text{cm}$

$\triangle ABO$ において

三平方の定理より $AO = \sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{14}\text{cm}$ だから

求める体積は $\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{14} = \frac{4\sqrt{14}}{3}\text{cm}^3$

【問 26】

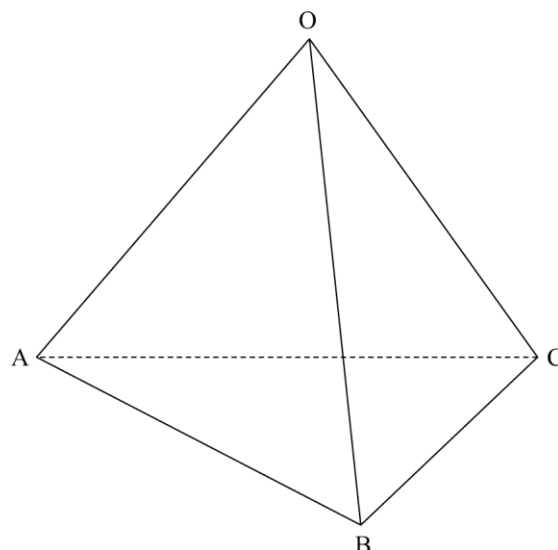
図は、1 辺の長さが 8 cm の正四面体 OABC を表している。

次の問1, 問2に答えよ。

(福岡県 2018 年度)

問1 図に示す立体において、辺 OA, OB, OC 上にそれぞれ点 D, E, F を、 $OD:DA=1:2$, $OE:EB=1:2$, $OF:FC=1:2$ となるようにとる。

このとき、正四面体 OABC を 3 点 D, E, F を通る平面で分けたときにできる 2 つの立体のうち、頂点 A を含む立体の体積は、正四面体 OABC の体積の何倍か求めよ。



問2 図に示す立体において、辺 BC の中点を G とし、辺 OA 上に点 H を $OH=GH$ となるようにとる。点 A と点 G を結び、点 H から線分 AG に垂線をひき、線分 AG との交点を I とする。

このとき、線分 HI の長さを求めよ。

解答欄

問1	倍
問2	cm

解答

問1 $\frac{26}{27}$ 倍

問2 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{cm}$

解説

問1

$OA=3OD$, $OB=3OE$, $OC=3OF$ だから

正四面体 $OABC$ は立体 $ODEF$ を O を中心として 3 倍に拡大した図形だといえるから

正四面体 $OABC$ と立体 $ODEF$ は相似であり相似比は $1:3$ である。

よって体積比は, $1^3:3^3=1:27$ なので

正四面体 $OABC$ を 3 点 D, E, F を通る平面で分けたときにできる 2 つの立体のうち

頂点 A を含む立体の体積は正四面体 $OABC$ の体積の $\frac{27-1}{27} = \frac{26}{27}$ 倍である。

問2

$\triangle ABC$ は正三角形で

点 G は辺 BC の中点だから $AG \perp BC$ である。

よって $\triangle ABG$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形だから

$$AG = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

同じように考えて $OG = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ だから

$\triangle OAG$ は $AG=OG$ の二等辺三角形なので

$\angle OAG = \angle AOG \cdots ①$

仮定より $OH=GH$ だから

$\triangle OGH$ は二等辺三角形なので $\angle OGH = \angle GOH \cdots ②$

①, ②より $\angle OAG = \angle OGH$

また $\angle AOG = \angle GOH$

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OAG \sim \triangle OGH$

したがって $OA:OG=OG:OH$ $8:4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}:OH$

$OH=6\text{cm}$ だから $AH=8-6=2\text{cm}$

ここで $\triangle OAG$ で点 G から辺 OA に引いた垂線と辺 OA との交点を J とすると

$AG=OG$ より点 J は辺 OA の中点だから $AJ=4\text{cm}$

$\triangle AGJ$ において

三平方の定理より $GJ = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$ だから

$$\triangle AGH = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

また $\triangle AGH = \frac{1}{2} \times AG \times HI \text{ cm}^2$ だから

$$4\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times HI$$

$$HI = 4\sqrt{2} \times 2 \div 4\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

(別解)

$OH=6\text{cm}$ を求めたあとは次のようにも求められる。

$AI=x \text{ cm}$ とすると $\triangle HAI$ で $HI^2 = AH^2 - AI^2 = 2^2 - x^2$

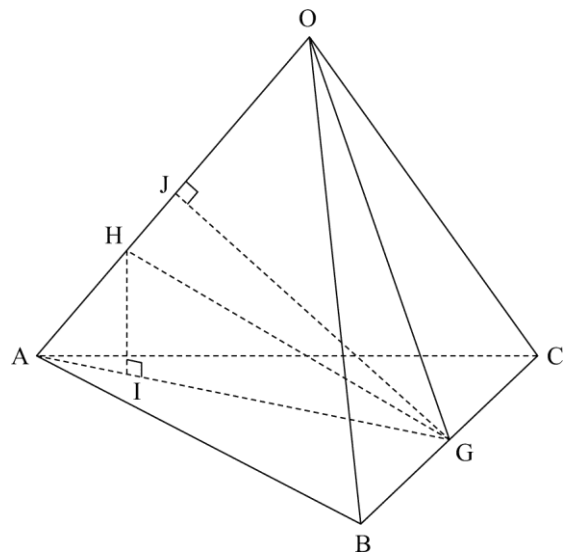
$GH=OH=6\text{cm}$ だから $\triangle GHI$ で $HI^2 = GH^2 - GI^2 = 6^2 - (4\sqrt{3} - x)^2$

よって $2^2 - x^2 = 6^2 - (4\sqrt{3} - x)^2$ $4 - x^2 = 36 - 48 + 8\sqrt{3}x - x^2$ $8\sqrt{3}x = 16$ $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

したがって $HI^2 = 2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

$HI > 0$ より

$$HI = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$



【問 27】

図1のように縦 6 cm、横 10 cm、高さ 3 cm の直方体の容器いっぱい
に水が入っている。この水を三角柱の容器にすべて移したところ、図2
のように水が容器いっぱいになった。この三角柱 ABCDEF は、 $\angle FDE = 90^\circ$ 、 $BE = 5\text{ cm}$ であり、辺 DF の長さは辺 DE の長さより 1 cm 長
い。

このとき、(1)～(3)の各問いに答えなさい。ただし、容器の壁の厚さは
考えないものとし、それぞれの容器は水平な場所に置かれているものと
する。

(佐賀県 2018 年度 特色)

図1

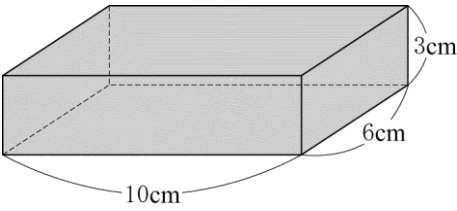
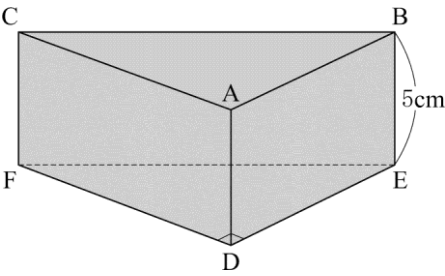


図2



- (1) 図1で容器に入っている水の体積を求めなさい。
- (2) 図2で DE の長さを $x\text{ cm}$ とするとき、DF の長さを x を用いて表しなさい。
- (3) DE の長さを求めなさい。

ただし、DE の長さを $x\text{ cm}$ とし、 x についての方程式をつくり、答えを求めるまでの過程も書きなさい。

解答欄

(1)	cm³
(2)	cm
(3)	DE の長さは cm

解答

(1) 180 cm^3

(2) $x+1 \text{ cm}$

(3)

三角柱の体積は 180 cm^3 となるので

$$\frac{1}{2}x(x+1) \times 5 = 180$$

$$x(x+1) = 72$$

$$x^2 + x - 72 = 0$$

$$(x+9)(x-8) = 0$$

$$x = -9, 8$$

$x > 0$ だから

$x = -9$ は問題にあわない。

$x = 8$ のときこれは問題にあっている。

DE の長さは 8 cm

解説

(1)

図1の直方体の容器には水がいっぱいに入っているから水の体積は $6 \times 10 \times 3 = 180 \text{ cm}^3$

(2)

辺 DF の長さは辺 DE の長さより 1 cm 長いから辺 DF の長さは $(x+1) \text{ cm}$

(3)

直方体と三角柱の体積は等しいから $\frac{1}{2} \times x \times (x+1) \times 5 = 180$ $x^2 + x = 72$ $x^2 + x - 72 = 0$

$$(x+9)(x-8) = 0$$

$x > 0$ より

$$x = 8$$

これは問題にあっている。

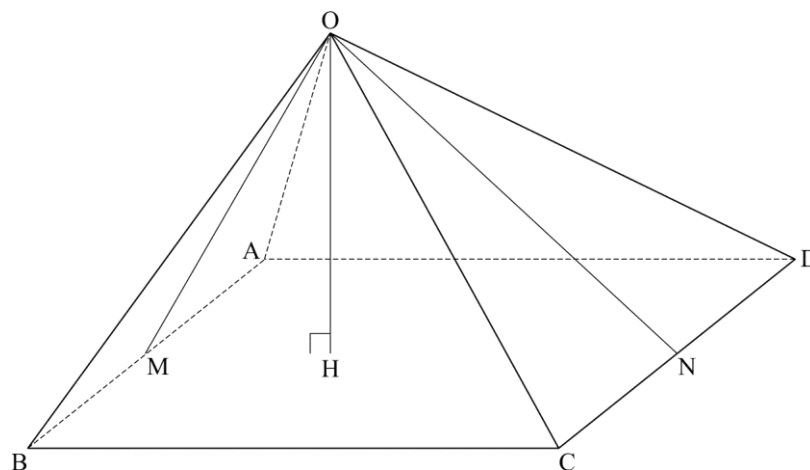
よって辺 DE の長さは 8 cm

【問 28】

図のように、1 辺の長さが 4 cm の正方形を底面とし、 $OA=OB=2\sqrt{3}\text{cm}$ 、 $OC=OD=4\text{cm}$ の四角錐 $OABCD$ がある。頂点 O から底面に垂線をひき、底面との交点を H とする。また、辺 AB の中点を M 、辺 CD の中点を N とする。

このとき、次の問1～問4に答えなさい。

(佐賀県 2018 年度 一般)



問1 線分 OM と線分 ON の長さをそれぞれ求めなさい。

問2 $MH=x\text{ cm}$ とするとき、 $\triangle OMH$ に注目して OH^2 を x を用いて表しなさい。

問3 線分 MH の長さを求めなさい。

問4 三角錐 $OHCD$ の体積を求めなさい。

解答欄

問1	$OM=$ cm
	$ON=$ cm
問2	$OH^2=$
問3	$MH=$ cm
問4	cm^3

解答

問1

$$OM=2\sqrt{2}\text{cm}$$

$$ON=2\sqrt{3}\text{cm}$$

問2 $OH^2=8-x^2$

問3 $MH=\frac{3}{2}\text{cm}$

問4 $\frac{5\sqrt{23}}{6}\text{cm}^3$

解説

問1

$\triangle OAM$ で $\angle OMA=90^\circ$ だから

三平方の定理より $OM^2+AM^2=OA^2$

$$OM^2=OA^2-AM^2=(2\sqrt{3})^2-2^2=12-4=8$$

$OM>0$ より

$$OM=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\text{cm}$$

また $\triangle OCN$ で $\angle ONC=90^\circ$ だから

三平方の定理より $ON^2+CN^2=OC^2$

$$ON^2=OC^2-CN^2=4^2-2^2=16-4=12$$

$ON>0$ より

$$ON=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\text{cm}$$

問2

$\triangle OMH$ で $\angle OHM=90^\circ$ だから

三平方の定理より $OH^2+MH^2=OM^2$

$$\text{よって } OH^2=OM^2-MH^2=(2\sqrt{2})^2-x^2=8-x^2$$

問3

$\triangle OHN$ で $\angle OHN=90^\circ$ だから

三平方の定理より $OH^2+HN^2=ON^2$

問2の x を使って表すと

$$OH^2=ON^2-HN^2=(2\sqrt{3})^2-(4-x)^2=12-(16-8x+x^2)=-x^2+8x-4$$

これと問2で表した OH^2 の式から

$$8-x^2=-x^2+8x-4$$

$$-8x=-12$$

$$x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$$\text{よって } MH=\frac{3}{2}\text{cm}$$

問4

$OH^2=8-x^2$ に $x=\frac{3}{2}$ を代入して

$$OH^2=8-\left(\frac{3}{2}\right)^2=8-\frac{9}{4}=\frac{23}{4}$$

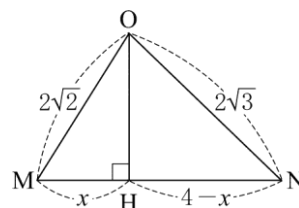
$OH>0$ より

$$OH=\sqrt{\frac{23}{4}}=\frac{\sqrt{23}}{2}\text{cm}$$

また $HN=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\text{cm}$ だから

$$\triangle HCD=\frac{1}{2}\times 4\times \frac{5}{2}=5\text{cm}^2$$

$$\text{よって三角錐 } OHCD \text{ の体積は } \frac{1}{3}\times 5\times \frac{\sqrt{23}}{2}=\frac{5\sqrt{23}}{6}\text{cm}^3$$



【問 29】

図1～図3のように、 $AB=AD=4\text{ cm}$ 、 $AE=8\text{ cm}$ の直方体 $ABCDEFGH$ がある。3 辺 AE 、 BF 、 CG 上にそれぞれ点 P 、 Q 、 R があり、 $AP=2\text{ cm}$ 、 $BQ=5\text{ cm}$ 、 $CR=3\text{ cm}$ である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2018 年度)

問1 直方体 $ABCDEFGH$ の体積は何 cm^3 か。

問2 図2において、線分 DP 、線分 PQ の長さはそれぞれ何 cm か。

問3 図2において、四角形 $DPQR$ はどのような四角形か。次の①～④の中から 1 つ選び、その番号を書け。

- ① ひし形
- ② 長方形
- ③ 平行四辺形
- ④ 正方形

図1

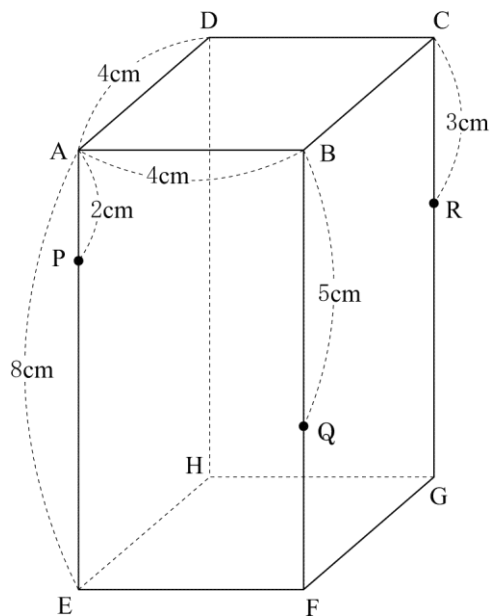
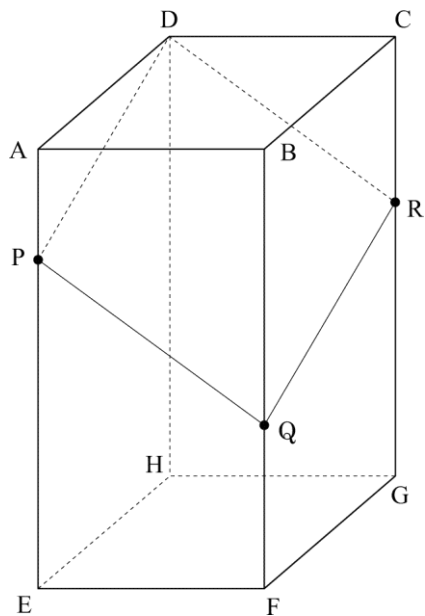


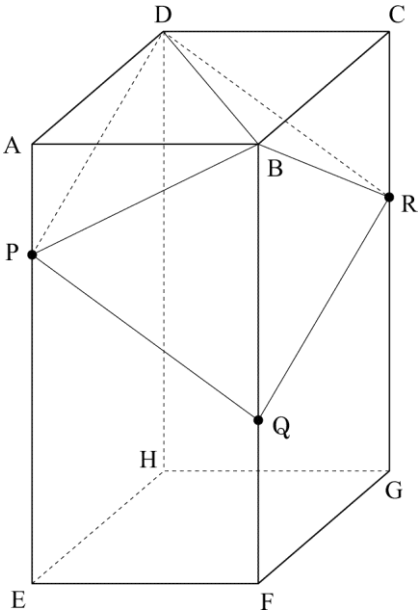
図2



問4 図3のように、5点 B, D, P, Q, R を頂点とする立体 BDPQR について、次の(1), (2)に答えよ。

(1) $\triangle BPQ$ の面積は何 cm^2 か。

(2) 立体 BDPQR の体積は何 cm^3 か。



解答欄

問1	cm^3	
問2	DP=	cm
	PQ=	cm
問3		
問4	(1)	cm^2
	(2)	cm^3

解答

問1 128cm^3

問2

$$DP=2\sqrt{5}\text{cm}$$

$$PQ=5\text{cm}$$

問3 ③

問4

$$(1) 10\text{cm}^2$$

$$(2) \frac{80}{3}\text{cm}^3$$

解説

問1

求める体積は $4 \times 4 \times 8 = 128\text{cm}^3$

問2

$\triangle ADP$ について

$$\text{三平方の定理より } DP = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\text{cm}$$

点 P から辺 BF に垂線を下ろし辺 BF との交点を S とすると

$$QS = 5 - 2 = 3\text{cm}$$

$\triangle PQS$ について

$$\text{三平方の定理より } PQ = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\text{cm}$$

問3

問2と同様に計算すると $DR = 5\text{cm}$, $QR = 2\sqrt{5}\text{cm}$ だから $DP = QR$, $PQ = DR$

よって 2 組の向かいあう辺がそれぞれ等しいから

四角形 DPQR は平行四辺形である。

問4

(1)

$$\triangle BPQ = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10\text{cm}^2$$

(2)

正方形 ABCD の対角線の交点を T とする。

$\triangle ABD$ について

$$\text{三平方の定理より } BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{また } AT = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\text{cm}$$

立体 BDPQR を点 B, D, Q を含む面で切断すると

底面が $\triangle BDQ$ で高さが $AT (= CT)$ の体積の等しい 2 つの四面体に分けることができる。

$$\text{よって求める体積は } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 5 \times 2\sqrt{2} \times 2 = \frac{80}{3}\text{cm}^3$$

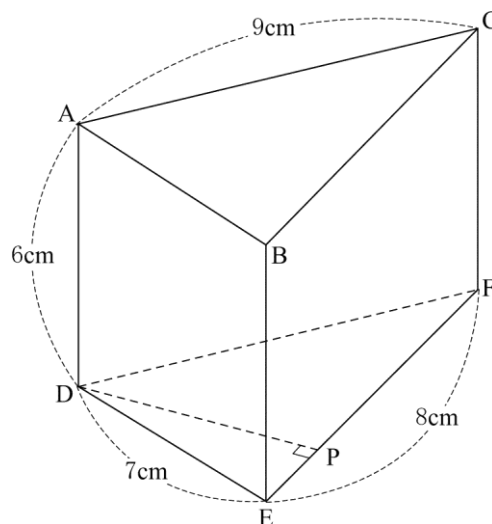
【問 30】

右の図は、点 A, B, C, D, E, F を頂点とし、3 つの側面がそれぞれ長方形である三角柱で、 $AC=9\text{ cm}$, $AD=6\text{ cm}$, $DE=7\text{ cm}$, $EF=8\text{ cm}$ である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2018 年度)

問1 三角柱の辺のうち、辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて答えなさい。



問2 辺 EF 上に点 P を、 $DP \perp EF$ となるようにとり、 $EP=x\text{ cm}$ とする。

このとき、 x の値の求め方について、次の ア には式を、イ には数を入れて、文章を完成しなさい。

DP^2 を x の式で表すと、 $DP^2=7^2-x^2$, $DP^2=$ ア という 2 通りの二次式で表される。この 2 通りの二次式から、 x についての方程式を導き、その方程式を解くと、 $x=$ イ である。

問3 $\triangle ADP$ を、辺 AP を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

解答欄

問1		
問2	ア	
	イ	
問3	cm^3	

解答

問1 辺 CF, 辺 DF, 辺 EF

問2

ア $9^2 - (8-x)^2$

イ 2

問3 $60\pi \text{ cm}^3$

解説

問1

辺 AB と平行な辺は辺 DE

辺 AB と交わる辺は辺 AC, BC, AD, BE

それ以外の辺が AB とねじれの位置にある。

あてはまるのは辺 CF, DF, EF

問2

ア

$\triangle DEP$ で

$$DP^2 = DE^2 - EP^2 = 7^2 - x^2$$

$\triangle DFP$ で

$$DP^2 = DF^2 - PF^2 = 9^2 - (8-x)^2$$

よってアは $9^2 - (8-x)^2$

イ

$$7^2 - x^2 = 9^2 - (8-x)^2$$

$$49 - x^2 = 81 - (64 - 16x + x^2)$$

$$-16x = -32$$

$$x = 2$$

よってイは 2

問3

問2より

$$DP^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$$

$DP > 0$ だから

$$DP = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

$\triangle ADP$ で $\angle ADP = 90^\circ$ だから

$$AP^2 = AD^2 + DP^2 = 6^2 + 45 = 36 + 45 = 81$$

$AP > 0$ だから

$$AP = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$$

また点 D から線分 AP に垂線 DH をひき $DH = h \text{ cm}$ とする。

$\triangle ADP$ の面積について

$$\frac{1}{2} \times DP \times AD = \frac{1}{2} \times AP \times DH$$

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 6 = \frac{1}{2} \times 9 \times h$$

$$h = 2\sqrt{5}$$

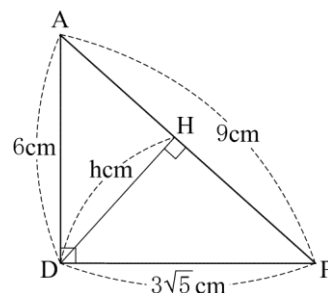
$\triangle ADP$ を AP を軸として 1 回転させてできる立体は 2 つの円錐を合わせた形になる。

円錐の 1 つは底面の半径が DH で高さが AH

もう 1 つは底面の半径が DH で高さが PH だから

求める立体の体積は

$$\frac{1}{3}\pi \times DH^2 \times AH + \frac{1}{3}\pi \times DH^2 \times PH = \frac{1}{3}\pi \times DH^2 \times (AH + PH) = \frac{1}{3}\pi \times DH^2 \times AP = \frac{1}{3}\pi \times (2\sqrt{5})^2$$



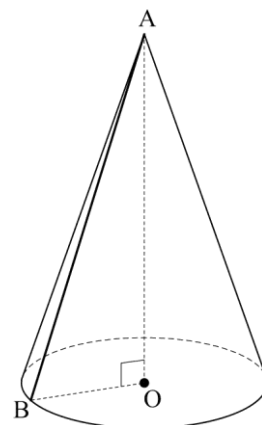
【問 31】

右の図のように、底面が点 O を中心とする円で、点 A を頂点とする円すいがある。底面の円の周上に点 B があり、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $OB=1\text{ cm}$ である。

次の問1、問2に答えなさい。

(大分県 2018 年度)

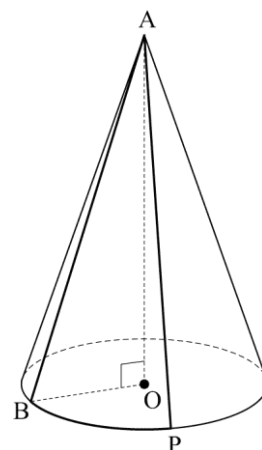
問1 線分 OA の長さを求めなさい。



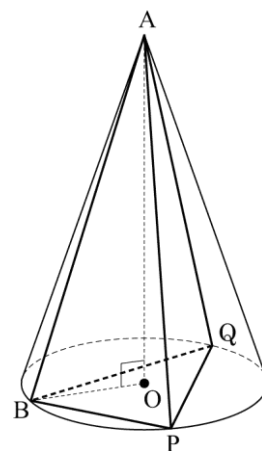
問2 底面の円の周上に点 B と異なる点 P をとる。

次の(1)、(2)の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

- (1) 円すいの側面の展開図において、おうぎ形 BAP の中心角が 30° であるとき、弧 BP の長さを求めなさい。



- (2) (1)のとき、底面の円の周上に2点 B 、 P と異なる点 Q をとる。三角すい $ABPQ$ の体積がもっとも大きくなるとき、三角すい $ABPQ$ の体積を求めなさい。



解答欄

問1	cm	
問2	(1)	cm
	(2)	cm^3

解答

問1 $2\sqrt{2}\text{cm}$

問2

(1) $\frac{\pi}{2}\text{cm}$

(2) $\frac{2+\sqrt{2}}{3}\text{cm}^3$

解説

問1

三平方の定理より $OA=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}\text{cm}$

問2

(1)

円すいの側面の展開図のおうぎ形の弧の長さは $2\pi\text{cm}$ で中心角は $360^\circ \times \frac{2\pi}{6\pi} = 120^\circ$

おうぎ形 BAP の中心角は 30° だから

弧 BP の長さは $2\pi \times \frac{30}{120} = \frac{\pi}{2}\text{cm}$

(2)

三角すい ABPQ の体積がもっとも大きくなるのは

辺 BP の垂直二等分線と円 O との交点のうち

辺 BP に対して点 O と同じ側にある点が Q となるときである。

弧 BP のは円 O の円周の $\frac{\pi}{2} \div 2\pi = \frac{1}{4}$ だから

弧 BP に対する中心角である $\angle BOP$ は 90°

よって $\triangle OBP$ は直角二等辺三角形だから $BP=\sqrt{2}OB=\sqrt{2} \times 1=\sqrt{2}\text{cm}$

BP の垂直二等分線と BP との交点を H とすると

$$QH=OQ+OH=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{cm}$$

$$\text{したがって求める体積は } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2\sqrt{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}\text{cm}^3$$

【問 32】

図1は、1 辺の長さが 10 cm の立方体である。

このとき、次の問1～問4に答えなさい。

(宮崎県 2018 年度)

問1 図2は、図1の立方体から、三角錐^{すい}ABDE を切り取った立体である。

このとき、三角形 BDE の図形の名称を答えなさい。

問2 図3は、図2の立体から、3 つの三角錐 CBDG, FBEG, HDEG を切り取った立体である。

このとき、4 点 B, D, E, G を頂点とする立体の表面積を求めなさい。

問3 図4は、図3の立体において、辺 BD, DE, BE, BG, DG, EG のそれぞれの中点を I, J, K, L, M, N とし、この立体から4 つの三角錐 BIKL, DIJM, EJKN, GLMN を切り取った立体である。

このとき、6 点 I, J, K, L, M, N を頂点とする立体の体積を求めなさい。

問4 図5は、図1の立方体において、辺 AD, CG, EF のそれぞれの中点 P, Q, R を示した図である。この立方体の側面に、点 P から 2 点 Q, R を順に通る点 P に戻るまで、1 本の糸を巻きつける。糸の長さが最も短くなるように巻きつけたとき、この糸が通っている部分を、解答用紙の展開図にかき入れなさい。

ただし、解答用紙の展開図にある辺上の印「・」は、それぞれの辺の中点を表している。

図1

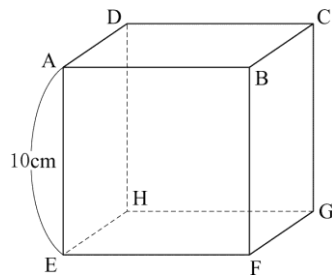


図2

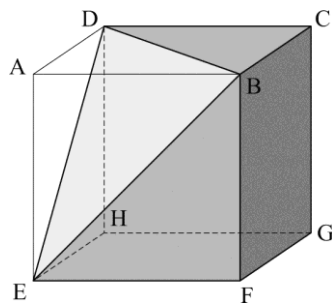


図3

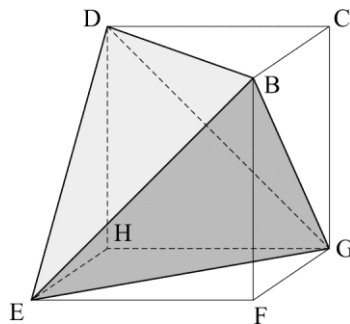


図4

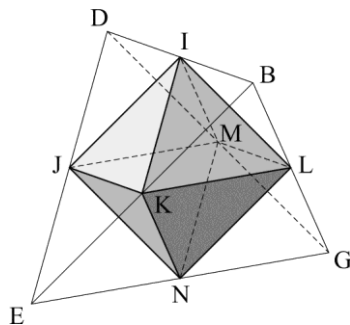
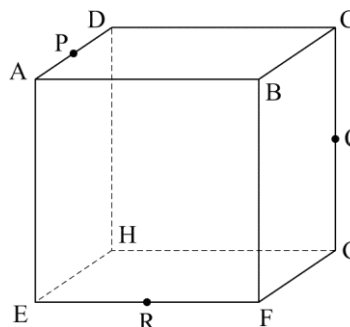


図5



解答欄

問1	
問2	cm^2
問3	cm^3
問4	

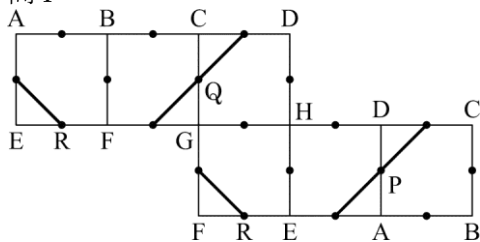
解答

問1 正三角形

問2 $200\sqrt{3}\text{cm}^2$

問3 $\frac{500}{3}\text{cm}^3$

問4



解説

問1

$\triangle BDE$ の3辺は1辺が 10cm の正方形の対角線になっているからすべて等しい。
よって $\triangle BDE$ は正三角形である。

問2

図3の立体の4つの面の面積はすべて $\triangle BDE$ の面積と等しい。

三平方の定理より $BD = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}\text{cm}$

点 E から辺 BD に垂線をひき BD との交点を S とする。

$\triangle EBS$ は3つの内角が 90° , 30° , 60° の直角三角形だから

$$ES = \sqrt{3}BS = \sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 5\sqrt{6}\text{cm}$$

$$\text{よって } \triangle BDE = \frac{1}{2} \times BD \times ES = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times 5\sqrt{6} = 50\sqrt{3}\text{cm}^2$$

したがって図3の立体の表面積は $50\sqrt{3} \times 4 = 200\sqrt{3}\text{cm}^2$

問3

図4の立体は底面が正方形 $JKLM$ で高さが 5cm の正四角錐を2つ合わせたものである。

$$\text{中点連結定理より } JK = \frac{1}{2} BD = 5\sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{よって図4の立体の体積は } \left(\frac{1}{3} \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times 5 \right) \times 2 = \frac{500}{3}\text{cm}^3$$

問4

点 P と点 Q

点 Q と点 R

点 R と点 P

をそれぞれ最短距離で結ぶことを図を用いて考える。

それぞれの点を結ぶ方法は2通りある。

最初に点 P と点 Q を最短距離で結ぶ方法は三平方の定理を用いてそれぞれの長さを比べると

図1の○をつけた方が短いことが分かる。

同様に点 Q と点 R を最短距離で結ぶ方法は

図2の○をつけた方で

点 Q と点 R を最短距離で結ぶ方法は

図3の○をつけた方である。

これらの図をもとに展開図に線を入れればよい。

図1

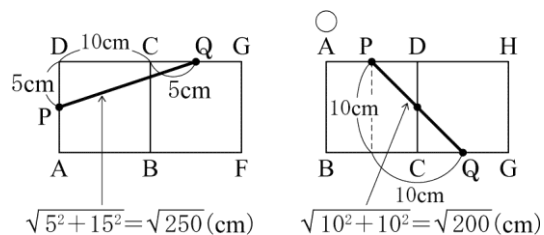


図2

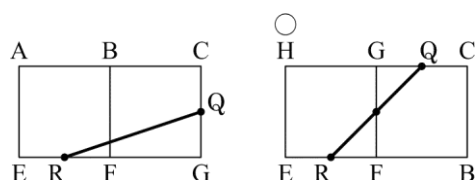
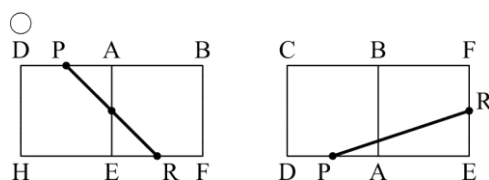


図3



【問 33】

図1のような1辺の長さが8 cm の立方体がある。辺 BC の中点を点 M とし、辺 CD 上に $CN=3$ cm となる点 N をとる。図1の立方体を3点 F, M, N を通る平面で切ると、図2のように2つの立体に分かれた。点 P は、3点 F, M, N を通る平面と辺 GH の交点である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2018 年度)

図1

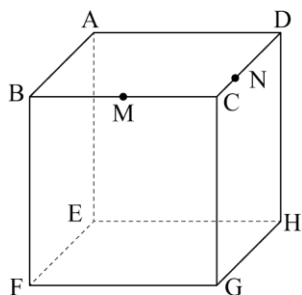
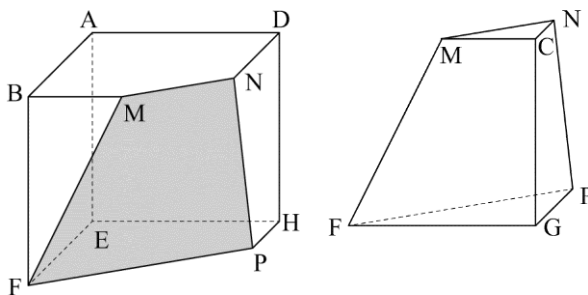


図2



問1 図2の線分 GP の長さを求めなさい。

問2 図2の点 C を含む立体を V_1 として、図3のように、 V_1 の辺 GC, 線分 PN, 線分

FM をそれぞれ延長すると点 Q で交わる。

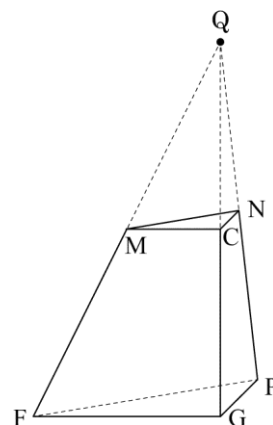
このとき、点 Q を頂点とし、三角形 MCN を底面とする三角錐を V_2 とする。

V_1 と V_2 の体積比を求めなさい。

問3 図3において、辺 CG 上に点 R をとる。

このとき、点 F を頂点とし、三角形 GPR を底面とする三角錐を V_3 とする。

この V_3 と問2の V_2 の体積が等しくなるときの線分 GR の長さを求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	$V_1:V_2=$:
問3	cm

解答

問1 6cm

問2 $V_1:V_2=7:1$

問3 2cm

解説

問1

$\triangle CNM \sim \triangle GPF$ より

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$$CN:GP=CM:GF$$

$$3:GP=4:8$$

$$GP=6\text{cm}$$

問2

$$QC:QG=CM:GF=1:2$$

三角錐 QMCN と三角錐 QFGP は相似だから

$$\text{その体積比は } 1^3:2^3=1:8$$

$$\text{よって } V_1:V_2=(8-1):1=7:1$$

問3

$$V_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times GR\times 8=8GR\text{cm}^3$$

$$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 8=16\text{cm}^3 \text{ で}$$

$$\text{さらに } V_3=V_2 \text{ より}$$

$$8GR=16$$

$$GR=2\text{cm}$$