

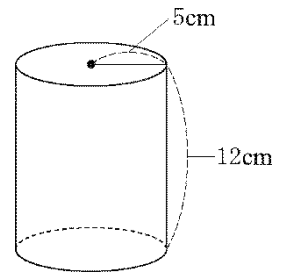
## 5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2014 年度出題】

### 【問 1】

右の図のように、底面の半径が 5 cm、高さが 12 cm の円柱があります。この円柱の体積と表面積を、次のように求めるとき、 ～  に当てはまる値を、それぞれ書きなさい。

ただし、円周率は  $\pi$  を用いなさい。

（北海道 2014 年度）



（解答）

円柱の底面の半径は 5 cm だから、1 つの底面の面積は、  $\text{cm}^2$  である。

よって、この円柱の体積は、  $\text{cm}^3$  である。

また、側面積は、  $\text{cm}^2$  であるから、この円柱の表面積は、  $\text{cm}^2$  である。

解答欄

|   |  |
|---|--|
| ア |  |
| イ |  |
| ウ |  |
| エ |  |

解答

ア  $25\pi$

イ  $300\pi$

ウ  $120\pi$

エ  $170\pi$

解説

ア 円柱の底面の半径は 5 cm だから 底面積は  $\pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$

イ 円柱の体積は 底面積  $\times$  高さより  $25\pi \times 12 = 300\pi \text{ cm}^3$

ウ 側面は長方形でその面積は 円柱の高さ  $\times$  底面の円周より側面積は  $12 \times 10\pi = 120\pi \text{ cm}^2$

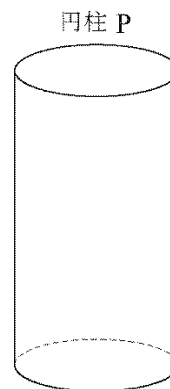
エ 表面積は 底面積  $\times 2 +$  側面積より  $25\pi \times 2 + 120\pi = 170\pi \text{ cm}^2$

【問 2】

図のような、底面の半径が  $4\text{ cm}$  で、高さが  $14\text{ cm}$  の円柱  $P$  があります。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。ただし、円周率を  $\pi$  とします。

(宮城県 2014 年度 前期)



(1) 円柱  $P$  の表面積を求めなさい。

(2) 円柱  $P$  と表面積が等しくなる球を  $O$  とします。円柱  $P$  の底面の半径と、球  $O$  の半径とでは、どちらが、どれだけ長くなりますか。

解答欄

|     |                        |
|-----|------------------------|
| (1) | $\text{cm}^2$          |
| (2) | の半径が $\text{cm}$ 長くなる。 |

解答

(1)  $144\pi\text{ cm}^2$

(2) 球  $O$  の半径が  $2\text{cm}$  長くなる。

解説

(1)

円柱の底面積は  $\pi \times 4^2 = 16\pi\text{ cm}^2$

側面積は  $14 \times 2\pi \times 4 = 112\pi\text{ cm}^2$

よって表面積は  $16\pi \times 2 + 112\pi = 144\pi\text{ cm}^2$

(2)

球  $O$  の半径を  $r\text{ cm}$  とすると円柱  $P$  と表面積が等しいので

$$4\pi r^2 = 144\pi$$

$$r^2 = 36$$

$$r > 0 \text{ より}$$

$$r = 6\text{ cm}$$

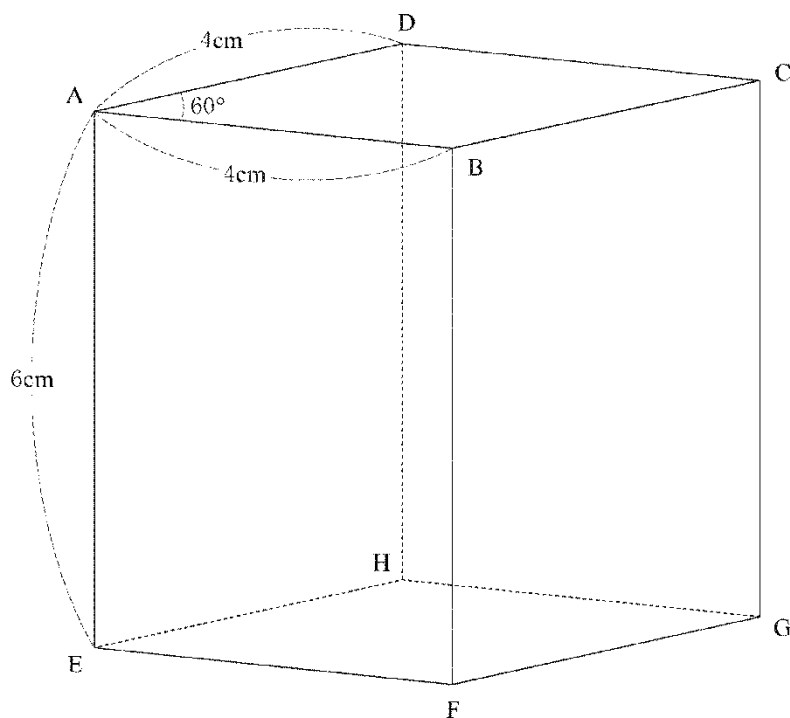
$$6 - 4 = 2 \text{ より}$$

球  $O$  の半径が  $2\text{ cm}$  長くなる。

【問 3】

下の図のような、1 辺の長さが 4 cm で  $\angle DAB=60^\circ$  のひし形 ABCD を底面とし、高さが 6 cm の四角柱がある。  
このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(福島県 2014 年度)



問1 線分 AC の長さを求めなさい。

問2 辺 BC, CD の中点をそれぞれ P, Q とし、面 PQHF と対角線 AG との交点を R とする。

(1) 線分 AR と線分 RG の長さの比を求めなさい。

(2) 線分 RF の長さを求めなさい。

解答欄

|    |     |               |
|----|-----|---------------|
| 問1 | cm  |               |
| 問2 | (1) | AR:RG=      : |
|    | (2) | cm            |

解答

問1  $4\sqrt{3}$  cm

問2

(1)  $AR:RG=3:2$

(2)  $\frac{16}{5}$  cm

解説

問1

ACとDBの交点をMとすると

$\triangle AMB$ において $\angle BAM=60^\circ \div 2=30^\circ$ ,  $\angle AMB=90^\circ$  より

$AB:AM=2:\sqrt{3}$

$4:AM=2:\sqrt{3}$

$AM=2\sqrt{3}$  cm

よって  $AC=2AM=2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  cm

問2

(1)

ひし形EFGHの対角線の交点をN, PQとACの交点をKとすると

$\triangle CBD$ において

中点連結定理より  $PQ \parallel BD$

よって  $CK:KM=CP:PB=1:1$

よって  $CK=KM=\sqrt{3}$  cm

$AC \parallel EG$  より

$AR:RG=AK:GN=(2\sqrt{3}+\sqrt{3}):2\sqrt{3}=3\sqrt{3}:2\sqrt{3}=3:2$

(2)

$\triangle KMN$ において

三平方の定理より  $KN=\sqrt{6^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{39}$  cm

$KR:RN=AR:RG=3:2$  より

$RN=\frac{2}{5}KN=\frac{2\sqrt{39}}{5}$  cm

$\triangle RNF$ において

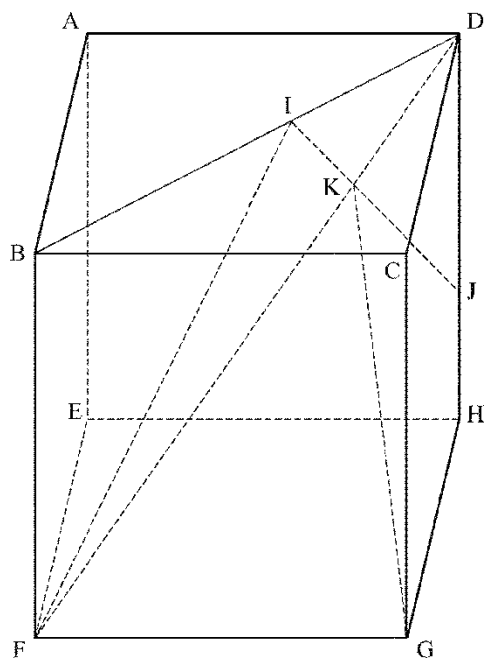
三平方の定理より  $RF=\sqrt{2^2+\left(\frac{2\sqrt{39}}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$  cm

【問 4】

下の図のように、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $BC=4\text{ cm}$ 、 $BF=3\sqrt{3}\text{ cm}$  の直方体  $ABCDEFGH$  がある。線分  $BD$  上に  $\angle BIF=60^\circ$  となる点  $I$ 、線分  $DH$  上に  $\angle DIJ=60^\circ$  となる点  $J$  をとる。線分  $FD$  と線分  $IJ$  の交点を  $K$  とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(茨城県 2014 年度)



問1 四角すい  $JEFGH$  の体積を求めなさい。

問2 線分  $GK$  の長さを求めなさい。

解答欄

|    |               |
|----|---------------|
| 問1 | $\text{cm}^3$ |
| 問2 | $\text{cm}$   |

解答

問1  $4\sqrt{3} \text{ cm}^3$

問2  $\frac{\sqrt{85}}{2} \text{ cm}$

解説

問1

$\triangle ABD$  において  $BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$

$\triangle BIF$  において  $BI:BF = 1:\sqrt{3}$  だから

$BI:3\sqrt{3} = 1:\sqrt{3}$

$BI = 3 \text{ cm}$

$ID = 5 - 3 = 2 \text{ cm}$

$\triangle DIJ$  において

$DI:DJ = 1:\sqrt{3}$  だから

$2:DJ = 1:\sqrt{3}$

$DJ = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

$JH = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}$

よって四角すい  $JEFGH$  の体積は  $\frac{1}{3} \times 3 \times 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$

問2

$IJ$ ,  $FH$  を延長し交点を  $N$  とする。

$ID \parallel FN$  より

$DI:HN = DJ:HJ$

$2:HN = 2\sqrt{3}:\sqrt{3}$

$HN = 1 \text{ cm}$

$FK:DK = FN:DI = 6:2 = 3:1$

$\triangle DHG$  において

$DG = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6 \text{ cm}$

$K$  から  $FG$  に垂線をひき交点を  $L$  とする。

$\triangle DFG$  において

$DG \parallel KL$  より

$KL:DG = FK:FD = 3:4$

よって  $KL = \frac{3}{4} DG = \frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2}$

$LG = \frac{1}{4} FG = \frac{1}{4} \times 4 = 1 \text{ cm}$

$\triangle KLG$  において

$GK = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{85}}{2} \text{ cm}$

【問 5】

右の図1に示した立体  $ABCD-EFGH$  は、 $AB=AD=8\text{ cm}$ 、 $AE=6\text{ cm}$  の直方体である。

頂点  $C$  と頂点  $F$  を結び、線分  $CF$  上にある点を  $P$  とする。頂点  $A$  と点  $P$ 、頂点  $D$  と点  $P$  をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2014 年度)

問1 点  $P$  が頂点  $F$  に一致するとき、 $\triangle APD$  の内角である  $\angle DAP$  の大きさは何度か。

図1

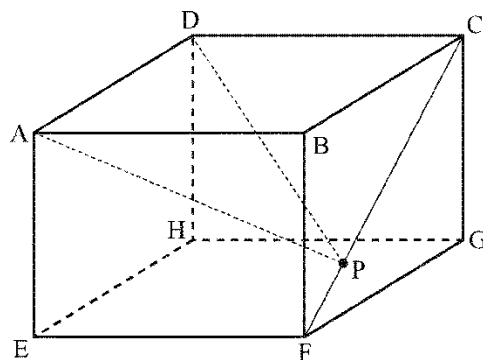
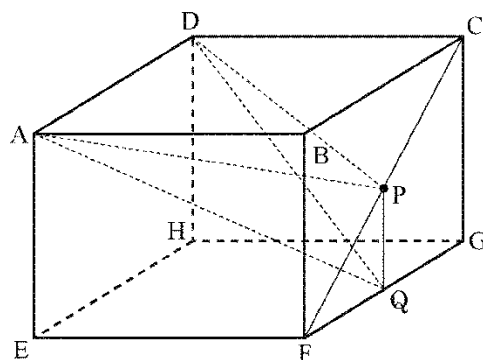


図2

問2 右の図2は、図1において、点  $P$  が線分  $CF$  の中点となるとき、点  $P$  から辺  $FG$  に引いた垂線と、辺  $FG$  との交点を  $Q$  とし、頂点  $A$  と点  $Q$ 、頂点  $D$  と点  $Q$  をそれぞれ結んだ場合を表している。立体  $P-AQD$  の体積は何  $\text{cm}^3$  か。



解答欄

|    |               |
|----|---------------|
| 問1 | 度             |
| 問2 | $\text{cm}^3$ |

解答

問1 90 度

問2  $32 \text{ cm}^3$

解説

問1

P と F が一致するとき

$$AP^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$DP^2 = 8^2 + 6^2 + 8^2 = 164$$

$$AD^2 = 8^2 = 64$$

よって  $AD^2 + AP^2 = DP^2$  だから

三平方の定理の逆より  $\angle DAP = 90^\circ$

問2

P が CF の中点のとき  $\angle PQF = \angle CGF = 90^\circ$  より

$PQ \parallel CG$

$$PQ : CG = FP : FC$$

$$PQ : 6 = 1 : 2$$

$$PQ = 3 \text{ cm}$$

PQ の延長と BC との交点を R とすると

$$PR = 6 - 3 = 3 \text{ cm}$$

求める三角すい P-AQD の体積は

三角柱 ADR-EQH の体積 - 三角すい P-ADR の体積 - 四角すい Q-ADHE

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times 6 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times 3$$

$$- \frac{1}{3} \times 8 \times 6 \times 8$$

$$= 192 - 32 - 128$$

$$= 32 \text{ cm}^3$$



【問 6】

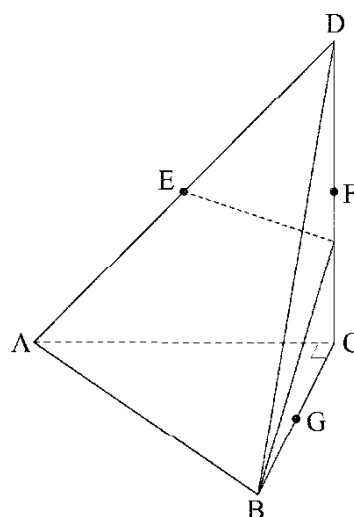
右の図1は、 $AC=BC=2\text{ cm}$ 、 $\angle ACB=90^\circ$  の直角二等辺三角形  $ABC$  を底面とし、 $CD=2\text{ cm}$  を高さとする三角すいである。また、3 点  $E$ ,  $F$ ,  $G$  はそれぞれ辺  $AD$ , 辺  $CD$ , 辺  $BC$  の中点である。

このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2014 年度)

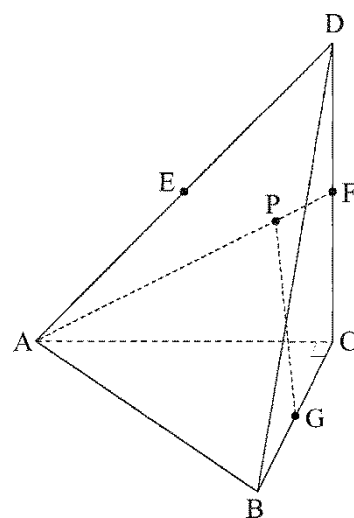
問1 この三角すいの体積を求めなさい。

図1



問2 この三角すいの表面上に、点  $B$  から辺  $CD$  と交わるように、点  $E$  まで線を引き。このような線のうち、長さが最も短くなるように引いた線の長さを求めなさい。

図2



問3 右の図2のように、この三角すいの線分  $AF$  上に点  $P$  を線分  $AF$  と線分  $GP$  が垂直となるようにとる。このとき、線分  $GP$  の長さを求めなさい。

解答欄

|    |               |
|----|---------------|
| 問1 | $\text{cm}^3$ |
| 問2 | $\text{cm}$   |
| 問3 | $\text{cm}$   |

解答

問1  $\frac{4}{3} \text{ cm}^3$

問2  $\sqrt{10} \text{ cm}$

問3  $\frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$

解説

問1

三角すいの体積は  $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3} \text{ cm}^3$

問2

$\triangle DAC$  と  $\triangle DBC$  で辺  $DC$  がつながった状態の展開図を考える。

求める長さはこの展開図における線分  $BE$  の長さになる。

点  $E$  から  $AC$  に垂線をひき交点を  $H$  とする。

$EH \parallel DC$  だから

$$AH:HC=AE:ED=1:1$$

$$HC=2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ cm}$$

また  $\triangle ACD$  において

$$\text{中点連結定理より } EH = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ cm}$$

よって展開図の  $\triangle EHB$  において

$$\text{三平方の定理より } BE = \sqrt{(2+1)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ cm}$$

問3

$\triangle ACF$  において

$$\text{三平方の定理より } AF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\text{同様に } AG = \sqrt{5} \text{ cm}$$

$\triangle CGF$  は等しい辺が  $1 \text{ cm}$  の直角二等辺三角形になるから  $FG = \sqrt{2} \text{ cm}$

$PF = x \text{ cm}$  とする。

$$\text{三平方の定理より } (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5} - x)^2 = (\sqrt{2})^2 - x^2$$

これを解いて

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって } GP^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{9}{5}$$

$GP > 0$  より

$$GP = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

【問 7】

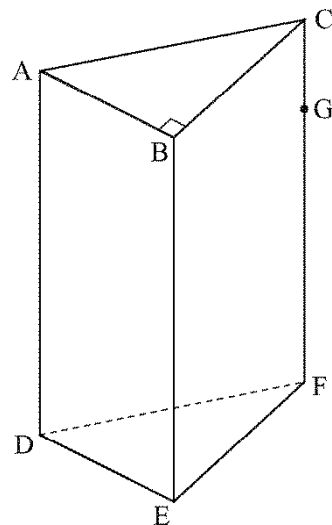
図1～図3の立体  $ABC-DEF$  はいずれも、底面  $ABC$  が  $AB=3\text{ cm}$ ,  $BC=4\text{ cm}$ ,  $AC=5\text{ cm}$  の直角三角形で、高さ  $AD=8\text{ cm}$  の三角柱である。辺  $CF$  上に  $CG=2\text{ cm}$  となる点  $G$  をとる。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(石川県 2014 年度)

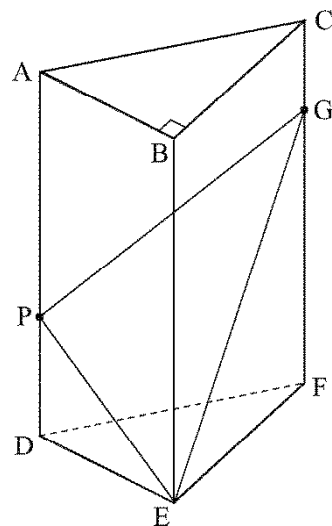
問1 図1において、辺  $CF$  と平行な辺をすべて答えなさい。

図1



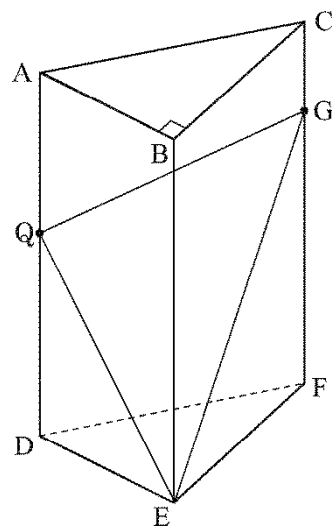
問2 図2のように、辺  $AD$  上に点  $P$  を、 $\triangle PEG$  の周の長さが最小となるようにとるとき、その周の長さを求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

図2



問3 図3のように、辺  $AD$  上に点  $Q$  を、 $QE=QG$  となるようにとり、平面  $QEG$  でこの立体を2つに分けると、点  $D$  を含むほうの立体の体積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

図3



## 解答欄

|    |                                                          |
|----|----------------------------------------------------------|
| 問1 |                                                          |
| 問2 | <p>〔計算〕</p> <p>答                      cm</p>             |
| 問3 | <p>〔計算〕</p> <p>答                      cm<sup>3</sup></p> |

解答

問1 辺 AD, 辺 BE

問2

〔計算〕

$$8^2 + 6^2 = 100$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$4^2 + 6^2 = 52$$

$$\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

したがって  $10 + 2\sqrt{13}$

〔答〕  $(10 + 2\sqrt{13})$  cm

問3

〔計算〕

QD =  $x$  cm とすると

$$x^2 + 3^2 = (6 - x)^2 + 5^2$$

$$12x = 52$$

$$x = \frac{13}{3}$$

求める体積は

三角すい QDEF の体積 + 三角すい QEFG の体積

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{13}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 3$$

$$= \frac{26}{3} + 12 = \frac{62}{3}$$

〔答〕  $\frac{62}{3} \text{ cm}^3$

解説

問1

辺 CF と平行な辺は辺 AD と辺 BE

問2

△PEG の周の長さが最小となるのは

長方形 ABED と長方形 ACFD をつなげた展開図において GE と AD の交点が P となるとき。

よってその周の長さは

$$\text{三平方の定理より } \sqrt{8^2 + 6^2} + \sqrt{4^2 + 6^2} = 10 + 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

問3

G から AD に垂線をひき交点を K とする。

QD =  $x$  cm とする。

$$\triangle QDE \text{ において } QE^2 = x^2 + 3^2$$

$$\triangle GQK \text{ において}$$

$$QG^2 = (6 - x)^2 + 5^2$$

QE = QG より

$$x^2 + 3^2 = (6 - x)^2 + 5^2$$

これを解いて

$$x = \frac{13}{3} \text{ cm}$$

よって求める体積は

三角錐 Q-DEF + 三角錐 Q-EFG

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{13}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 3$$

$$= \frac{26}{3} + 12$$

$$= \frac{62}{3} \text{ cm}^3$$

【問 8】

図1のように、 $\triangle ABC$  の辺  $AC$  上に点  $O$  があり、 $O$  を中心とし、辺  $AB$  に接する半円をかく。この半円と辺  $AB$  との接点を  $D$ 、辺  $AC$  との交点を  $E, F$  とする。 $D$  から辺  $AC$  に垂線  $DG$  をひく。

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2014 年度)

問1  $\triangle ADG \sim \triangle DOG$  を証明せよ。

問2  $EF = 5 \text{ cm}$ ,  $DG = 2 \text{ cm}$  とする。 $\triangle ADG$  を辺  $AG$  を軸として 1 回転させてできる立体  $P$  の体積を求めよ。

図1

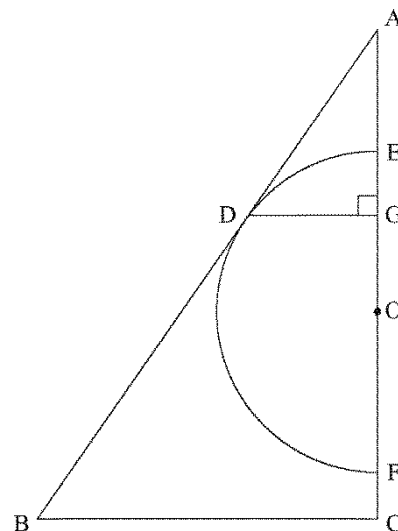
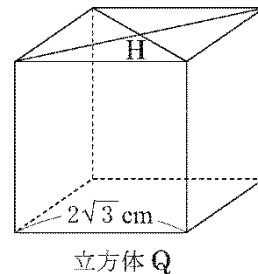
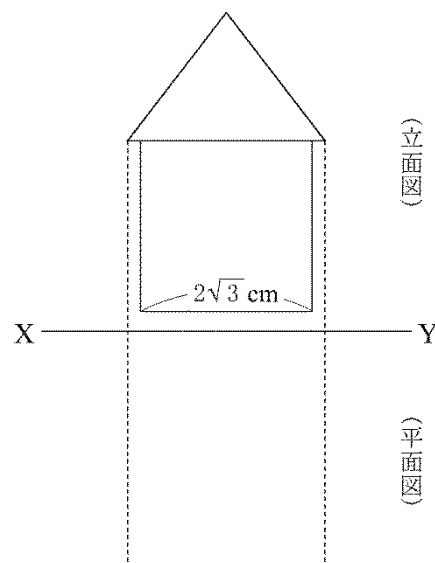


図2



問3 図2のように 1 辺が  $2\sqrt{3} \text{ cm}$  の立方体  $Q$  がある。その上の面の対角線の交点を  $H$  とする。問2の立体  $P$  を、 $G$  と  $H$  が一致するように置く。図3は、その立面図のみがかかれている投影図である。このとき、立方体  $Q$  の上の面と立体  $P$  の底面の重なった部分の面積を求めよ。必要ならば、図3を使ってもよい。

図3



解答欄

|    |      |               |
|----|------|---------------|
| 問1 | 〔証明〕 |               |
| 問2 |      | $\text{cm}^3$ |
| 問3 |      | $\text{cm}^2$ |

解答

問1

〔証明〕

△ADG と △DOG で

$$\angle AGD = \angle DGO = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

△ADG は直角三角形であるから

$$\angle ADG + \angle GAD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

辺 AB は半円 O の接線であるから

$$\angle ADG + \angle GDO = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle GAD = \angle GDO \cdots \textcircled{4}$$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

△ADG ∽ △DOG

問2  $\frac{32}{9} \pi \text{ cm}^3$

問3  $\frac{4}{3} \pi + 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問2

円 O の半径より  $DO = \frac{5}{2} \text{ cm}$

△DOG において

$$\text{三平方の定理より } OG = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

△ADG ∽ △DOG より

$$AG : DG = DG : OG$$

$$AG : 2 = 2 : \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} AG = 4$$

$$AG = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

立体 P は底面の半径 2 cm, 高さ  $\frac{8}{3} \text{ cm}$  の円錐になるから

$$\text{求める体積は } \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times \frac{8}{3} = \frac{32}{9} \pi \text{ cm}^3$$

問3

H を対角線の交点とする正方形を正方形 PQRS とする。

$$\text{正方形の対角線より } PR = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

点 H から正方形の周までの距離は最も短いところが  $\sqrt{3} \text{ cm}$  で最も長いところは  $\sqrt{6} \text{ cm}$  である。

よって点 H を中心に半径 2 の円をかいたときにこの正方形と重なる部分の面積が求める面積となる。

点 H を中心に半径 2 の円をかき PQ と交わる点を J, K とすると

$$\triangle HJK \text{ は } HJ = HK = 2 \text{ cm}$$

H から JK にひいた垂線の長さが  $\sqrt{3} \text{ cm}$  より △HJK は正三角形である。

$$\text{よって求める面積は } \pi \times 2^2 - \pi \times 2^2 \times \frac{60}{360} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times 4 = \frac{4}{3} \pi + 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



【問 9】

半径が  $1\text{ cm}$  で中心角が  $90^\circ$  のおうぎ形  $OAB$  がある。

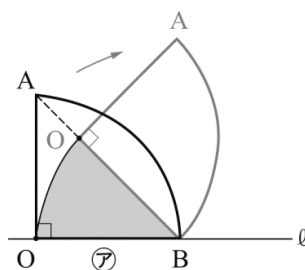
このとき、次の問1, 問2に答えなさい。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

(山梨県 2014 年度)

問1 図1, 2において、おうぎ形  $OAB$  は最初に直線  $\ell$  上に半径  $OB$  がくるような㊦の位置にあるとする。

このとき、次の (1), (2) に答えなさい。

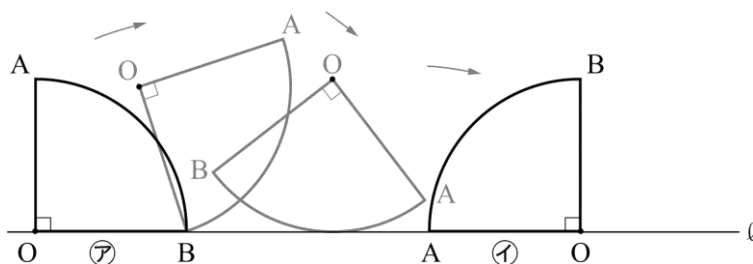
図1



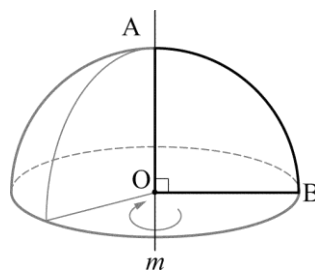
- (1) おうぎ形  $OAB$  を、点  $B$  を中心として時計回りに回転移動させる。点  $O$  が㊦の位置にあったおうぎ形  $OAB$  の弦  $AB$  上にくるまで回転させたとき、半径  $OB$  の動いたあとは図1の  で示したおうぎ形になる。この  で表されたおうぎ形の面積を求めなさい。

- (2) 図2のように、おうぎ形  $OAB$  を、直線  $\ell$  上をすべらないように回転させながら、㊦の位置から㊩の位置まで移動させる。このとき、点  $O$  がえがいた線全体の長さを求めなさい。

図2



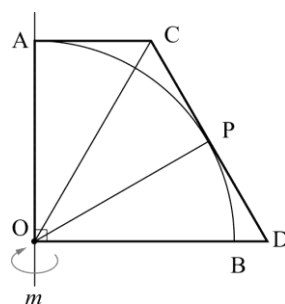
問2 図3のように、おうぎ形  $OAB$  において、半径  $OA$  を通る直線  $m$  を考える。このとき、次の (1)~(3) に答えなさい。



- (1) おうぎ形  $OAB$  を直線  $m$  を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。

- (2) 図4のように、図3のおうぎ形  $OAB$  がちょうど入る台形  $AODC$  を考える。ただし、辺  $CD$  は  $\widehat{AB}$  と点  $P$  で接し、 $AC \parallel OD$  である。 $\triangle OAC \equiv \triangle OPC$  となることを証明して、 $CA = CP$  を示しなさい。

図4



- (3) 図4において、 $\angle ODC = 60^\circ$  のとき、台形  $AODC$  を直線  $m$  を軸として1回転させてできる立体を考える。線分  $CD$  が動いてできる面の面積を求めなさい。

解答欄

|    |     |               |
|----|-----|---------------|
| 問1 | (1) | $\text{cm}^2$ |
|    | (2) | $\text{cm}$   |
| 問2 | (1) | $\text{cm}^3$ |
|    | (2) | 〔証明〕          |
|    | (3) |               |

解答

問1

(1)  $\frac{1}{8}\pi \text{ cm}^2$

(2)  $\frac{3}{2}\pi \text{ cm}$

問2

(1)  $\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3$

(2)

〔証明〕

$\triangle OAC$  と  $\triangle OPC$  において

$AC \parallel OD$  から

$\angle OAC = 90^\circ \dots (\text{ア})$

$CD$  は  $\widehat{AB}$  に点  $P$  で接しているから

$\angle OPC = 90^\circ \dots (\text{イ})$

(ア), (イ)より

$\angle OAC = \angle OPC = 90^\circ \dots \textcircled{1}$

$OA$  と  $OP$  はおうぎ形の半径だから

$OA = OP \dots \textcircled{2}$

また  $OC$  は共通  $\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ より

$\triangle OAC$  と  $\triangle OPC$  はともに直角三角形で

$\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ より

斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから

$\triangle OAC \equiv \triangle OPC$

合同な三角形の対応する辺は等しいから

$CA = CP$

(3)  $2\pi \text{ cm}^2$

解説

問1

(1)

$\triangle OAB$  は直角二等辺三角形だから  $\angle OBA = 45^\circ$

よって求める面積は  $\pi \times 1^2 \times \frac{45}{360} = \frac{1}{8} \pi \text{ cm}^2$

(2)

点  $O$  がえがいた線全体の長さは

$$2\pi \times 1 \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 1 \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 1 \times \frac{90}{360} = \frac{3}{2} \pi \text{ cm}$$

問2

(1)

できる立体は半径  $1 \text{ cm}$  の半球だからその体積は  $\frac{4}{3} \pi \times 1^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \pi \text{ cm}^3$

(2)

$\triangle OAC$  と  $\triangle OPC$  において

直角三角形の斜辺と他の  $1$  辺がそれぞれ等しいことから合同を導き  $CA = CP$  を示す。

(3)

直線  $m$  と直線  $CD$  の交点を  $Q$  とする。

$AC \parallel OD$  より  $\angle QCA = 60^\circ$

よって  $\angle OCA = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$

$\triangle OAC$  と  $\triangle OPD$  において

$OA = OP$ ,  $\angle OAC = \angle OPD = 90^\circ$ ,  $\angle COA = \angle DOP = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$  より

$1$  組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OAC \equiv \triangle OPD$

また  $\triangle OAC$  と  $\triangle QAC$  についても

$1$  組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OAC \equiv \triangle QAC$

$OA = 1 \text{ cm}$  より

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, OC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$\triangle QOD$  において

$$QD = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$\triangle QOD$  を直線  $m$  を軸として  $1$  回転させてできる立体を展開したときの中心角を  $x^\circ$  とすると

$$2\pi \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{x}{360} = 2\pi \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$x = 180^\circ$

$$\text{よって求める面積は } \pi \times \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 \times \frac{180}{360} - \pi \times \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \times \frac{180}{360} = 2\pi \text{ cm}^2$$

【問 10】

右の図のように、1 辺の長さが 2 cm の立方体がある。

(長野県 2014 年度)

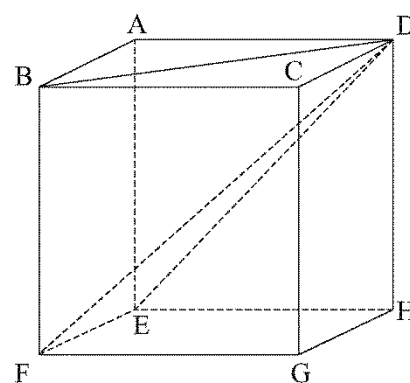
- (1) 線分 BF とねじれの位置にある線分を、次のア～エから 1 つ選び、記号を書きなさい。

ア 線分 BD

イ 線分 DF

ウ 線分 AD

エ 線分 DH



- (2) 線分 DF の長さを求めなさい。

- (3) 立体 DABFE の体積を求めなさい。

解答欄

|     |                 |
|-----|-----------------|
| (1) |                 |
| (2) | cm              |
| (3) | cm <sup>3</sup> |

解答

(1) ウ

(2)  $2\sqrt{3}$  cm

(3)  $\frac{8}{3}$  cm<sup>3</sup>

解説

(1)

線分 BF と線分 BD 線分 DF は交わり線分 DH は平行である。ねじれの位置にあるのは線分 AD なのでウ

(2)

三平方の定理より  $DF = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  cm

(3)

求める体積は  $\frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \frac{8}{3}$  cm<sup>3</sup>

【問 11】

図1のように、円柱の形をした容器 A と円すいの形をした鉄のおもり B がある。容器 A と鉄のおもり B は底面の半径が等しく、また、容器 A の容積と鉄のおもり B の体積も等しい。

容器 A を底面が水平になるように置いて水で満たし、この中に鉄のおもり B を図2のように静かに沈めた。容器 A の底面の半径が 9 cm、高さが 10 cm のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

ただし、容器 A の厚さは考えないものとする。

(愛知県 2014 年度 B)

図1

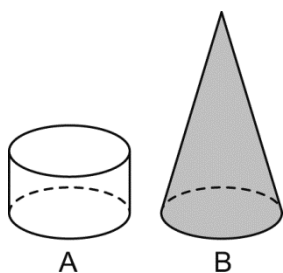
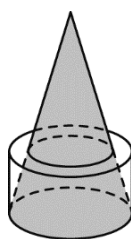


図2



(1) 鉄のおもり B の高さは何 cm か、求めなさい。

(2) あふれ出た水の体積は何  $\text{cm}^3$  か、求めなさい。

解答欄

|     |               |
|-----|---------------|
| (1) | cm            |
| (2) | $\text{cm}^3$ |

解答

(1) 30 cm

(2)  $570\pi \text{ cm}^3$

解説

(1)

鉄のおもり B の高さを  $h$  cm とすると容器 A の体積と鉄のおもり B の体積は等しいので

$$\pi \times 9^2 \times 10 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times h$$

よって  $h = 30$  cm

(2)

鉄のおもり B が容器からはみ出た分の円錐を円錐 C とするとその高さは  $30 - 10 = 20$  cm

よって円錐 C と鉄のおもり B の相似比は  $20:30 = 2:3$  体積比は  $8:27$

よって鉄のおもり B のうち容器 A の内部にある体積は

$$\text{鉄のおもり B の体積の } \frac{27-8}{27} = \frac{19}{27} \text{ 倍}$$

あふれ出た水の体積は容器 A の内部にある鉄のおもり B の体積と等しいので

$$\frac{19}{27} \times \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 30 = 570\pi \text{ cm}^3$$

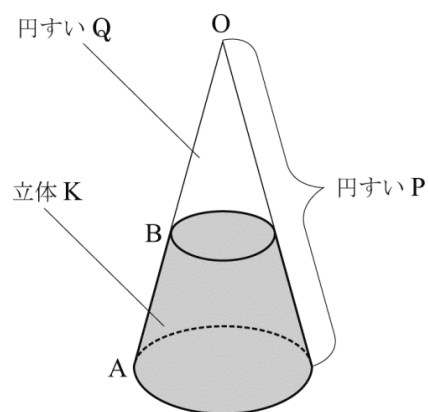
【問 12】

右の図のように、円すい P の母線 OA 上に  $OB:BA=3:2$  となる点 B がある。立体 K は、円すい P を、点 B を通り底面に平行な平面で切り、上部の小さい円すい Q を取り除いたものである。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2014 年度)

(1) 立体 K の体積は、円すい P の体積の何倍になるか、求めなさい。



(2) 点 B を通り底面に平行な平面で切った切り口の円の半径が 3 cm, 線分 AB の長さが 8 cm のとき, 立体 K の表面積を求めなさい。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

解答欄

|     |               |
|-----|---------------|
| (1) | 倍             |
| (2) | $\text{cm}^2$ |



解答

(1)  $\frac{98}{125}$  倍

(2)  $98\pi \text{ cm}^2$

解説

(1)

円すい **Q** と円すい **P** は相似だから体積比は  $3^3:5^3=27:125$

よって立体 **K** の体積は円すい **P** の体積の  $(125-27)\div 125=\frac{98}{125}$  倍

(2)

OB:BA=3:2 より

OB:8=3:2

OB=12 cm

円すい **Q** の側面積は  $\pi \times 12^2 \times \frac{2\pi \times 3}{2\pi \times 12} = 36\pi \text{ cm}^2$

円すい **Q** と円すい **P** の側面積の比は  $3^2:5^2=9:25$

よって円すい **P** の側面積は  $36\pi \times \frac{25}{9} = 100\pi \text{ cm}^2$

また側面積と同様に円すい **Q** の底面積は  $\pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$  より

円すい **P** の底面積は  $9\pi \times \frac{25}{9} = 25\pi \text{ cm}^2$

したがって立体 **K** の表面積は  $100\pi - 36\pi + 9\pi + 25\pi = 98\pi \text{ cm}^2$

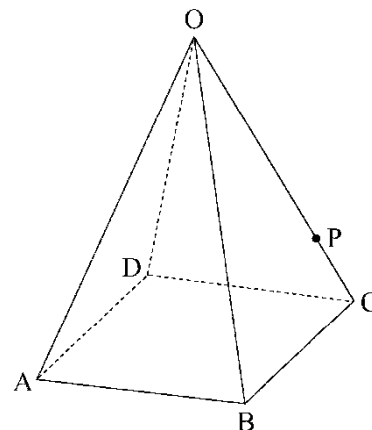
【問 13】

右の図のように、底面が 1 辺  $4\sqrt{2}$  cm の正方形で、高さ 8 cm の正四角錐  $O-ABCD$  がある。辺  $OC$  上に、 $OP:PC=3:1$  となるように点  $P$  をとる。点  $P$  を通り、平面  $ABCD$  に平行な平面で正四角錐  $O-ABCD$  を切り、2 つの立体に分ける。分けられた 2 つの立体のうち、正方形  $ABCD$  を含む立体を立体  $X$  とする。

このとき、次の問1～問3に答えよ。

(京都府 2014 年度 前期)

問1 正四角錐  $O-ABCD$  の体積を求めよ。



問2 正四角錐  $O-ABCD$  と立体  $X$  の体積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

問3 正四角錐  $O-ABCD$  について、線分  $AP$  の長さを求めよ。

解答欄

|    |                                 |
|----|---------------------------------|
| 問1 | cm <sup>3</sup>                 |
| 問2 | 正四角錐 $O-ABCD$ の体積:立体 $X$ の体積＝ : |
| 問3 | cm                              |

解答

問1  $\frac{256}{3} \text{ cm}^3$

問2 正四角錐 O-ABCD の体積: 立体 X の体積 = 64:37

問3  $\sqrt{53} \text{ cm}$

解説

問1

正四角錐 O-ABCD の体積は  $\frac{1}{3} \times (4\sqrt{2})^2 \times 8 = \frac{256}{3} \text{ cm}^3$

問2

点 P を通り平面 ABCD に平行な平面で正四角錐 O-ABCD を切断したとき

点 O を含む立体を立体 Y とすると立体 Y と正四角錐 O-ABCD は相似で

OP:PC = 3:1 より

OP:OC = 3:4 だから

その体積比は  $3^3:4^3 = 27:64$

よって正四角錐 O-ABCD の体積: 立体 X の体積 = 64:(64-27) = 64:37

問3

O から対角線 AC に垂線をひき交点を H とし P から AC に垂線をひき交点を K とする。

△ABC において

$AC = \sqrt{2} AB = \sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8 \text{ cm}$

$CH = 8 \div 2 = 4 \text{ cm}$

△OCH において PK // OH より

PK:OH = CP:CO

PK:8 = 1:4

PK = 2 cm

CK:KH = CP:PO = 1:3

$KH = \frac{3}{4} CH = \frac{3}{4} \times 4 = 3 \text{ cm}$

$AK = 4 + 3 = 7 \text{ cm}$

△APK において

$AP = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} \text{ cm}$

【問 14】

右の図1のように、1 辺が 6 cm の立方体  $ABCD-EFGH$  がある。  
このとき、次の問1・問2に答えよ。

(京都府 2014 年度 中期)

問1 図1の立方体  $ABCD-EFGH$  の 3 つの頂点  $A, F, C$  を結んでできる右  
の図2のような  $\triangle AFC$  の面積を求めよ。

図1

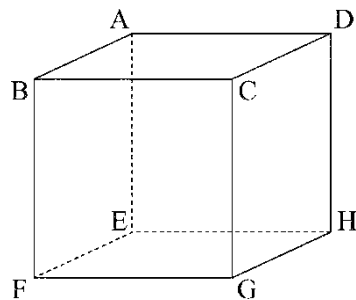
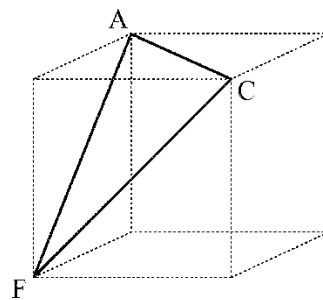
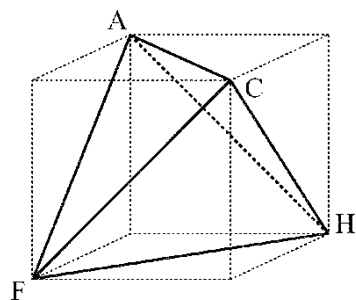


図2



問2 図1の立方体  $ABCD-EFGH$  の 4 つの頂点  $A, F, C, H$  を結んででき  
る右の図3のような三角錐  $AFCH$  の体積を求めよ。また、図3の三角錐  
 $AFCH$  において、 $\triangle AFC$  を底面としたときの高さを求めよ。

図3



解答欄

|    |    |               |
|----|----|---------------|
| 問1 |    | $\text{cm}^2$ |
| 問2 | 体積 | $\text{cm}^3$ |
|    | 高さ | cm            |

解答

問1  $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

問2

体積  $72 \text{ cm}^3$

高さ  $4\sqrt{3} \text{ cm}$

解説

問1

AC, AF, FC は 1 辺が 6 cm の正方形の対角線だから

$$AC=AF=FC=6\sqrt{2} \text{ cm}$$

△AFC は正三角形だから

F から AC に垂線をひき交点を H とすると

$$FH=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\text{よって} \triangle AFC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

問2

$$\text{三角錐 AFCH の体積は } 6^3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 \times 4 = 216 - 144 = 72 \text{ cm}^3$$

$$\triangle AFC \text{ を底面としたときの高さを } h \text{ cm とすると } \frac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times h = 72 \quad h = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

【問 15】

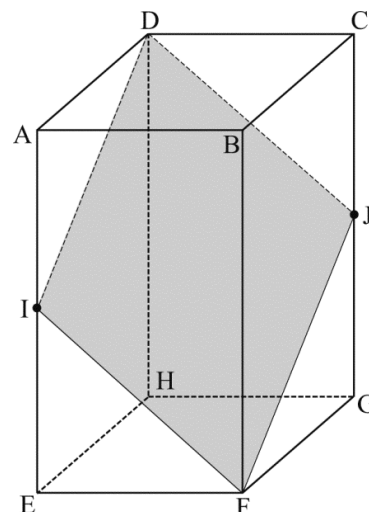
右図において、立体  $ABCD-EFGH$  は  $AB=AD=4\text{ cm}$ ,  $AE=7\text{ cm}$  の直方体である。 $I$ ,  $J$  は、それぞれ辺  $AE$ ,  $CG$  の中点である。このとき、 $A$  と  $C$  とを結んでできる線分  $AC$  の長さと、 $I$  と  $J$  とを結んでできる線分  $IJ$  の長さとは等しい。また、4 点  $D$ ,  $I$ ,  $F$ ,  $J$  は同じ平面上にあり、この 4 点を結んでできる四角形  $DIFJ$  はひし形である。

(大阪府 2014 年度 前期)

- (1) 次のア～オのうち、辺  $AB$  とねじれの位置にある辺はどれですか。すべて選び、記号を書きなさい。

- ア 辺  $AD$   
 イ 辺  $AE$   
 ウ 辺  $CG$   
 エ 辺  $FG$   
 オ 辺  $HG$

- (2) ひし形  $DIFJ$  の面積を求めなさい。



解答欄

|     |               |
|-----|---------------|
| (1) |               |
| (2) | $\text{cm}^2$ |

解答

(1) ウ, エ

(2)  $18\sqrt{2}\text{ cm}^2$

解説

(1)

ア 辺  $AB$  と辺  $AD$  は交わる。

イ 辺  $AB$  と辺  $AE$  は交わる。

ウ 辺  $AB$  と辺  $CG$  はねじれの位置にある。

エ 辺  $AB$  と辺  $FG$  はねじれの位置にある。

オ 辺  $AB$  と辺  $HG$  は平行である。

よってねじれの位置にあるのはウとエ

(2)

三平方の定理より  $IJ=AC=4\sqrt{2}\text{ cm}$

$DF=\sqrt{4^2+4^2+7^2}=9\text{ cm}$

よってひし形  $DIFJ$  の面積は  $4\sqrt{2} \times 9 \div 2 = 18\sqrt{2}\text{ cm}^2$

【問 16】

図1～図3において、立体  $ABCDE-FGHIJ$  は五角柱である。四角形  $AFGB$ ,  $AEJF$ ,  $EJID$  は長方形であり、四角形  $BGHC$ ,  $CDIH$  は正方形である。 $BC=CD=5\text{ cm}$ ,  $ED=10\text{ cm}$ ,  $AE=3\text{ cm}$ ,  $\angle BCD=\angle CDE=\angle DEA=90^\circ$  である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2014 年度 後期)

問1 図1において、

- (1) 次のア～オのうち、面  $CDIH$  と垂直な辺はどれですか。すべて選び、記号を書きなさい。

ア 辺  $BC$

イ 辺  $BG$

ウ 辺  $FG$

エ 辺  $FJ$

オ 辺  $JI$

- (2) 長方形  $AFGB$  の面積を求めなさい。

問2 図2において、 $K$  は、直線  $CD$  上にあって  $C$  について  $D$  と反対側にある点である。 $J$  と  $K$  とを結んでできる線分  $JK$  の長さが  $14\text{ cm}$  であるときの線分  $KC$  の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

問3 図3において、 $L$  は、直線  $AB$  と直線  $CD$  との交点である。 $M$  は、 $L$  を通り直線  $CH$  に平行な直線と直線  $HI$  との交点である。 $E$  と  $L$ ,  $J$  と  $M$  とをそれぞれ結ぶ。 $N$  は線分  $EL$  と辺  $BC$  との交点であり、 $O$  は線分  $JM$  と辺  $GH$  との交点である。このとき、4 点  $E, J, O, N$  は同じ平面上にあって、この 4 点を結んでできる四角形  $EJON$  は長方形である。四角柱  $ABNE-FGOJ$  の体積を求めなさい。

図1

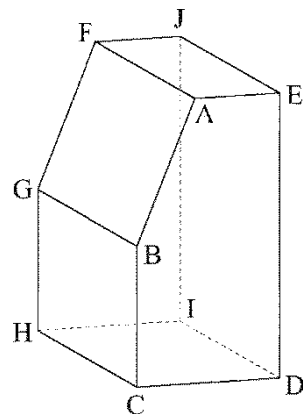


図2

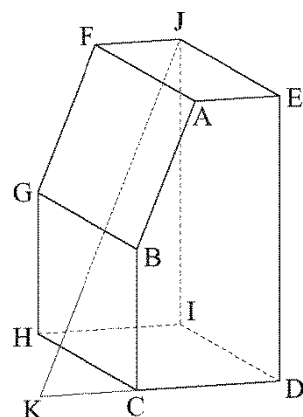
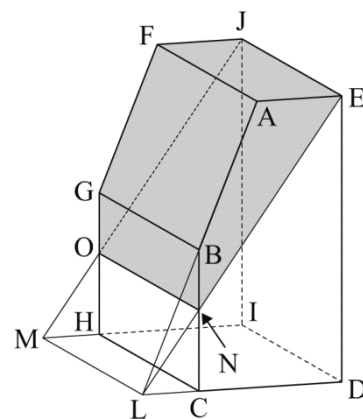


図3



## 解答欄

[illegible]



解答

問1

(1) ア, オ

(2)  $5\sqrt{29} \text{ cm}^2$

問2

〔求め方〕

I と K とを結ぶ。

$\angle JIK = 90^\circ$  だから  $JK^2 = JI^2 + IK^2 \dots \textcircled{ア}$

$\angle IDK = 90^\circ$  だから  $IK^2 = ID^2 + KD^2 \dots \textcircled{イ}$

$\textcircled{ア}$ ,  $\textcircled{イ}$ より

$$JK^2 = JI^2 + ID^2 + KD^2$$

四角形 CDIH は正方形だから

$$ID = CD = 5 \text{ cm}$$

$KC = x \text{ cm}$  とすると

$$KD = x + 5 \text{ cm}$$

$$\text{よって } 14^2 = 10^2 + 5^2 + (x + 5)^2$$

これを解くと  $x > 0$  より

$$x = -5 + \sqrt{71}$$

$$-5 + \sqrt{71} \text{ cm}$$

問3  $\frac{450}{7} \text{ cm}^3$

解説

問1

(1)

平面 CDIH について

ア 辺 BC とは垂直に交わる。

イ 辺 BG とは平行である。

ウ 辺 FG とは交わる。

エ 辺 FJ とは平行である。

オ 辺 JI とは垂直に交わる。

よって選択肢はアとオ

(2)

三平方の定理を利用して  $AB = \sqrt{(5-3)^2 + (10-5)^2} = \sqrt{29}$  cm

長方形 AFGB の面積は  $\sqrt{29} \times 5 = 5\sqrt{29}$  cm<sup>2</sup>

問2

KC =  $x$  cm とすると

$\triangle KDI$  において  $KI^2 = 5^2 + (x+5)^2$

$\triangle JKI$  において  $JK^2 = KI^2 + JI^2$  より

$$14^2 = 10^2 + 5^2 + (x+5)^2$$

これを解いて

$$x = -5 \pm \sqrt{71}$$

$x > 0$  より

$$x = -5 + \sqrt{71} \text{ cm}$$

問3

A から LD に垂線をひき交点を P とする。

$\triangle ALP$  において

BC // AP より LC : LP = BC : AP

LC =  $x$  cm とすると

$$x : (x+2) = 5 : 10$$

これを解いて

$$x = 2$$

$\triangle LED$  において

NC // ED より

$$NC : ED = LC : LD = 2 : 7$$

よって  $\triangle NLC$  と  $\triangle ELD$  の面積比は 4 : 49

$$\text{四角形 ENCD の面積は } \frac{45}{49} \times \frac{1}{2} \times 7 \times 10 = \frac{225}{7} \text{ cm}^2$$

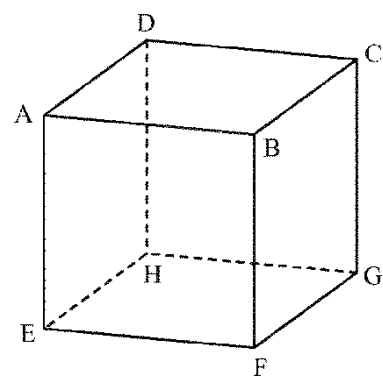
$$\text{四角形 ABNE の面積は } \frac{1}{2} \times (5+10) \times 2 + 3 \times 10 - \frac{225}{7} = \frac{90}{7} \text{ cm}^2$$

$$\text{よって求める体積は } \frac{90}{7} \times 5 = \frac{450}{7} \text{ cm}^3$$

【問 17】

右の図1のように 1 辺の長さが 6 cm の立方体がある。このとき、  
次の各問いに答えなさい。

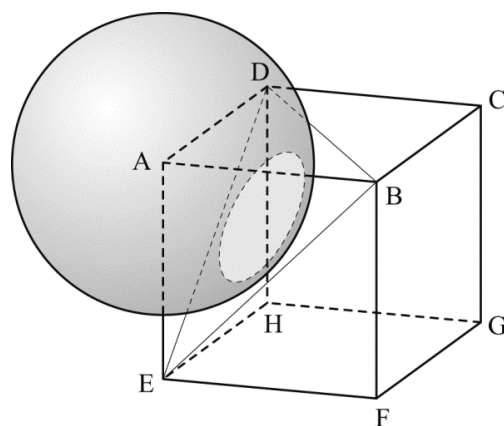
図1



(鳥取県 2014 年度)

問1 線分 BD の長さを求めなさい。

図2



問2 三角錐 ABDE の体積を求めなさい。

問3 右の図2のように、この立方体の頂点 A を中心とする半径 4 cm の球がある。この球を、3 点 B, D, E を通る平面で切ったとき、切り口の図形は円になる。この円の半径を求めなさい。

解答欄

|    |                 |
|----|-----------------|
| 問1 | cm              |
| 問2 | cm <sup>3</sup> |
| 問3 | cm              |

解答

問1  $6\sqrt{2}$  cm

問2  $36\text{ cm}^3$

問3 2 cm

解説

問1

BD は正方形 ABCD の対角線だから  $BD = AB \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$  cm

問2

三角錐 ABDE の体積は  $\frac{1}{3} \times \triangle ABD \times AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 = 36\text{ cm}^3$

問3

切り口の円の中心を O 円周上の点を P とする。

AO は三角錐 ABDE において  $\triangle BDE$  を底面としたときの高さでもある。

$\triangle BDE$  は 1 辺が  $6\sqrt{2}$  cm の正三角形だから高さは  $3\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$  cm

その面積は  $\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

よって  $\frac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times AO = 36$

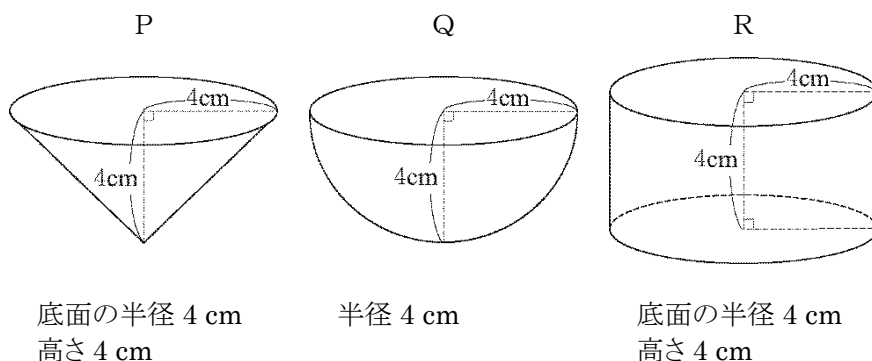
$AO = 2\sqrt{3}$  cm

$\triangle APO$  において  $PO = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$  cm

【問 18】

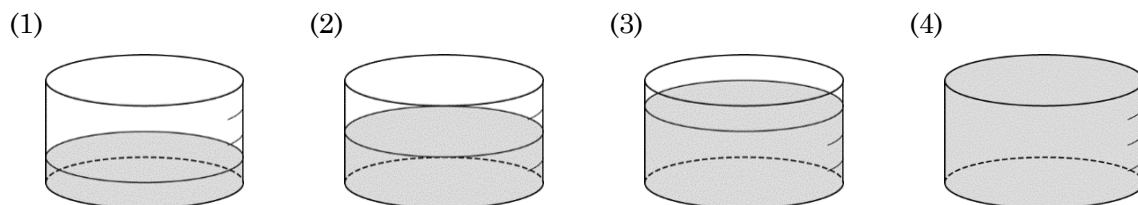
次の図のような、円錐の容器P、半球の容器Q、円柱の容器Rがある。問1～問4に答えなさい。ただし、容器は傾けないこととし、容器の厚さは考えないものとする。

(岡山県 2014 年度 一般)



問1 Pの容器いっぱいに入れた水の体積を求めなさい。

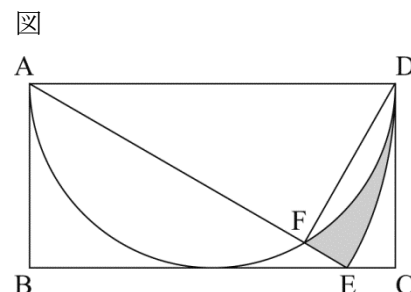
問2 PとQそれぞれの容器いっぱいに入れた水を、Rにすべて移したときの水の量を表した図として最も適当なのは、(1)～(4)のうちではどれですか。一つ答えなさい。ただし、図の目盛りは、Rの高さを4等分したものである。



問3 PとQそれぞれの容器の深さの半分まで水を入れた。それぞれの容器を真上から見た水面は円になる。

このとき、PとQの水面の面積の比は、1: (ア) であり、Pに入っている水の体積は、Pの容器いっぱいに入れた水の体積の (イ) 倍である。  
(ア) , (イ) に適当な数を書き入れなさい。

問4 右の図は、QをRに入れて正面から見た模式図である。四角形 ABCD は、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$  の長方形であり、点 A を中心とし、線分 AD を半径とする円と線分 BC との交点を E とし、点 A と点 E を結ぶ。線分 AD を直径とする円と線分 AE との交点のうち、点 A と異なる点を F とし、点 D と点 F を結ぶ。このとき、  
 (I) は指示に従って答え、(II) は (ウ) , (エ) に適当な数を書き入れなさい。



(I)  $\triangle ABE \equiv \triangle DFA$  を証明しなさい。

(II)  $\angle DAE =$  (ウ)  $^{\circ}$  であり、弧 DE, 弧 DF, 線分 EF で囲まれた色のついた部分の面積は (エ)  $\text{cm}^2$  である。

解答欄

|    |                 |      |                 |
|----|-----------------|------|-----------------|
| 問1 | cm <sup>3</sup> |      |                 |
| 問2 |                 |      |                 |
| 問3 | (ア)             |      |                 |
|    | (イ)             | 倍    |                 |
| 問4 | (I)             | 〔証明〕 |                 |
|    |                 |      |                 |
|    | (II)            | (ウ)  |                 |
|    |                 | (エ)  | cm <sup>2</sup> |

解答

問1  $\frac{64}{3}\pi \text{ cm}^3$

問2 4

問3

(ア) 3

(イ)  $\frac{1}{8}$  倍

問4

(I)

〔証明〕

$\triangle ABE$  と  $\triangle DFA$  において

$AD$  と  $AE$  は点  $A$  を中心とする円の半径だから

$$AE = DA \cdots (1)$$

四角形  $ABCD$  は長方形だから

$$\angle ABE = 90^\circ$$

点  $F$  は  $AD$  を直径とする円周上にあるから

$$\angle DFA = 90^\circ$$

よって、 $\angle ABE = \angle DFA = 90^\circ \cdots (2)$

$AD \parallel BC$  なので錯角は等しいから

$$\angle AEB = \angle DAF \cdots (3)$$

(1), (2), (3)から

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABE \equiv \triangle DFA$$

(II)

(ウ)  $30^\circ$

(エ)  $\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問1

$$P \text{ の体積は } \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 4 = \frac{64}{3} \pi \text{ cm}^3$$

問2

$$Q \text{ の体積は } \frac{4}{3} \pi \times 4^3 \times \frac{1}{2} = \frac{128}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{よって } P+Q \text{ の体積は } \frac{64}{3} \pi + \frac{128}{3} \pi = 64 \pi \text{ cm}^3$$

よって容器 R に入れたときの水面の高さは  $64 \pi \div (16 \pi) = 4 \text{ cm}$

したがって選択肢は(4)

問3

P の水面の半径を  $r \text{ cm}$  とすると平行線と線分の比の定理より

$$r:4=1:2$$

$$r=2 \text{ cm}$$

Q の水面の半径を  $t \text{ cm}$  とすると水面の半径は 1 辺を 4 cm とする正三角形の高さになるから

$$t:4=\sqrt{3}:2$$

$$t=2\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって求める水面の面積の比は  $\pi \times 2^2 : \pi \times (2\sqrt{3})^2 = 4\pi : 12\pi = 1:3$

また P において P にはいつている水がつくる円すいと容器 P は相似で相似比は 1:2 より

体積比は  $1:2^3=1:8$

よって水の体積は容器 P の体積の  $\frac{1}{8}$

問4

(1)

$\triangle ABE$  と  $\triangle DFA$  において直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいことを示し合同を導く。

(2)

$\triangle ABE$  において  $\angle ABE=90^\circ$ ,  $AB:AE=4:8=1:2$  より  $\angle EAB=60^\circ$

よって  $\angle DAE=90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

AD の中点を O とすると  $\angle DOF=2\angle DAF=2 \times 30^\circ = 60^\circ$

$$FD=4 \text{ cm}, AF=\sqrt{3} DF=4\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって色のついた部分の面積は

おうぎ形 ADE - おうぎ形 ODF -  $\triangle OAF$

$$= \pi \times 8^2 \times \frac{30}{360} - \pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = \frac{16}{3} \pi - \frac{8}{3} \pi - 4\sqrt{3} = \frac{8}{3} \pi - 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

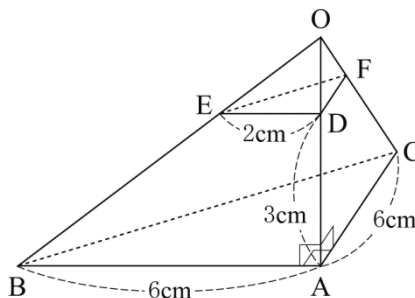


【問 19】

右の図のような、 $\angle OAB = \angle OAC = \angle BAC = 90^\circ$  の三角すい  $OABC$  がある。3 点  $D, E, F$  はそれぞれ辺  $OA, OB, OC$  上の点で、三角すい  $OABC$  と三角すい  $ODEF$  は相似である。

$AB = AC = 6 \text{ cm}$ ,  $AD = 3 \text{ cm}$ ,  $DE = 2 \text{ cm}$  であるとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(香川県 2014 年度)



(1) 線分  $BE$  の長さは何  $\text{cm}$  か。

(2) 三角すい  $OABC$  を 3 点  $D, E, F$  を通る平面で切って、2 つの立体に分けたとき、点  $A$  を含む立体の体積は何  $\text{cm}^3$  か。

解答欄

|     |               |
|-----|---------------|
| (1) | $\text{cm}$   |
| (2) | $\text{cm}^3$ |

解答

(1)  $5 \text{ cm}$

(2)  $26 \text{ cm}^3$

解説

(1)

$E$  から  $BA$  に垂線をひき、交点を  $H$  とする。

$EH = 3 \text{ cm}$   $BH = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$

$\triangle BEH$  において

三平方の定理より  $BE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$

(2)

$OD = x \text{ cm}$  とすると  $OD : OA = ED : BA$

$x : (x + 3) = 2 : 6$

$x = \frac{3}{2} \text{ cm}$

三角すい  $OABC$  の体積は  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \left(3 + \frac{3}{2}\right) = 27 \text{ cm}^3$

三角すい  $OABC$  と三角すい  $ODEF$  の相似比は  $6 : 2 = 3 : 1$  より体積比は  $27 : 1$

よって三角すい  $ODEF$  の体積は  $27 \times \frac{1}{27} = 1 \text{ cm}^3$

したがって求める体積は  $27 - 1 = 26 \text{ cm}^3$

【問 20】

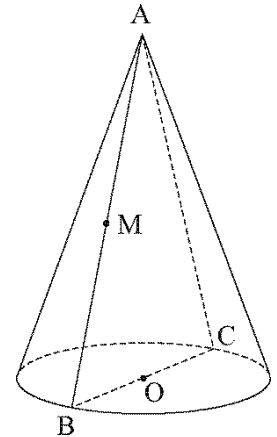
下の図は、半径  $6\text{ cm}$  の円  $O$  を底面とし、母線の長さが  $18\text{ cm}$  の円すいを表しており、線分  $BC$  は底面の直径、点  $M$  は母線  $AB$  の中点である。

次の問1～問3の  の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし、根号を使う場合は  $\sqrt{\quad}$  の中を最も小さい整数にし、円周率は  $\pi$  を用いて表すこと。

(福岡県 2014 年度)

問1 図に示す円すいにおいて、線分  $OM$  の長さは   $\text{cm}$  である。

問2 図に示す円すいを、点  $M$  を通り底面に平行な平面で分けたときにできる立体のうち、頂点  $A$  をふくむ立体の体積は   $\text{cm}^3$  である。



問3 図に示す円すいの側面を、母線  $AB$  で切って開いた展開図において、線分  $AC$  上に点  $P$  を、 $BP+PM$  の長さが最も短くなるようにとる。このとき、線分  $AP$  の長さは   $\text{cm}$  である。

解答欄

|    |                                    |
|----|------------------------------------|
| 問1 | <input type="text"/> $\text{cm}$   |
| 問2 | <input type="text"/> $\text{cm}^3$ |
| 問3 | <input type="text"/> $\text{cm}$   |

解答

問1 9 cm

問2  $18\sqrt{2} \pi \text{ cm}^3$

問3 6 cm

解説

問1

△ABO において

三平方の定理より  $AO = \sqrt{18^2 - 6^2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$

△ABC において M から BO に垂線をひき交点を H とする。

MH // AO より BH:HO=BM:MA=1:1

よって  $HO = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$

$MH = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$

△MOH において  $OM = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 3^2} = 9 \text{ cm}$

問2

求める立体ともとの円錐は相似で

その相似比は AM:AB=1:2 より

体積比は 1:8

よって求める体積は  $\frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 12\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \pi \text{ cm}^3$

問3

側面の展開図のおうぎ形をおうぎ形 ABB' とする。

中心角  $\angle BAB' = x^\circ$  とする。

$$2\pi \times 18 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 6$$

$$x = 120^\circ$$

よって  $\angle BAC = \angle MAP = 60^\circ$

△ABC は正三角形になるので  $\angle ACB = 60^\circ$

よって  $\angle ACB = \angle MAC$  より

BC // AM

CP:AP=BC:MA=2:1

よって  $AP = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \times 18 = 6 \text{ cm}$

【問 21】

図のように、 $\angle ACB=90^\circ$ 、 $BC=4\text{ cm}$  の直角三角形  $ABC$  があり、辺  $AB$  上に点  $D$  をとると、 $\triangle DBC$  が正三角形となった。

このとき、問1～問4に答えなさい。

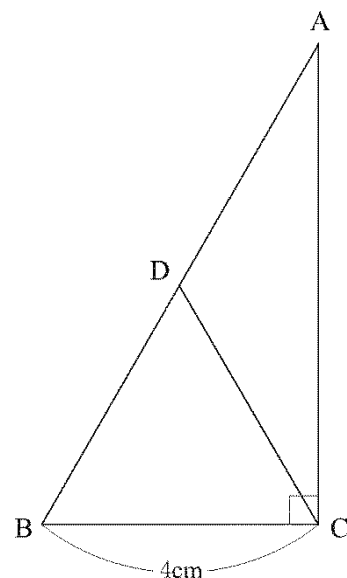
(佐賀県 2014 年度 一般)

問1  $AD$  の長さを求めなさい。

問2  $\triangle ADC$  の面積を求めなさい。

問3  $\triangle ADC$  を、辺  $DC$  を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

問4  $\triangle ABC$  を、辺  $DC$  を折り目として折り曲げて、 $A$  を頂点とする三角すい  $ABCD$  を考える。三角すい  $ABCD$  の体積が最も大きくなるとき、その体積を求めなさい。



解答欄

|    |               |
|----|---------------|
| 問1 | cm            |
| 問2 | $\text{cm}^2$ |
| 問3 | $\text{cm}^3$ |
| 問4 | $\text{cm}^3$ |

解答

問1  $4\text{ cm}$

問2  $4\sqrt{3}\text{ cm}^2$

問3  $16\pi\text{ cm}^3$

問4  $8\text{ cm}^3$

解説

問1

$\triangle DBC$  は正三角形より

$BD=BC=4\text{ cm}$ ,  $\angle ABC=60^\circ$

$AB=2BC=2\times 4=8\text{ cm}$

よって  $AD=8-4=4\text{ cm}$

問2

$AC=\sqrt{3}\text{ }BC=\sqrt{3}\times 4=4\sqrt{3}\text{ cm}$

$AD=DB=4\text{ cm}$  より

$$\triangle ADC=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times \frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=4\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

問3

A から  $CD$  の延長線に垂線をひき交点を  $H$  とする。

$$\angle ACH=30^\circ \text{ だから } AH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$CH=\sqrt{3}\text{ }AH=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=6\text{ cm}$$

$$DH=6-4=2\text{ cm}$$

$$\text{求める体積は}\frac{1}{3}\times \pi \times (2\sqrt{3})^2\times 6-\frac{1}{3}\times \pi \times (2\sqrt{3})^2\times 2=24\pi -8\pi =16\pi\text{ cm}^3$$

問4

三角すい  $ABCD$  の体積が最も大きくなるのは面  $ACD$  が底面の  $\triangle BCD$  に垂直であるとき。

$$\text{このとき高さは問3の }AH\text{ と一致するから求める体積は}\frac{1}{3}\times 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=8\text{ cm}^3$$

【問 22】

図1～図3のように、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $AD=4\text{ cm}$ 、 $AE=6\text{ cm}$  の直方体  $ABCDEFGH$  がある。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2014 年度)

問1 図1において、線分  $AC$  の長さは何  $\text{cm}$  か。

問2 直方体  $ABCDEFGH$  の表面積は何  $\text{cm}^2$  か。

問3 図2において、 $\triangle AEG$  を辺  $AE$  を軸として1回転させてできる円すいの体積は何  $\text{cm}^3$  か。

問4 図3のように、辺  $FG$  の中点を  $M$  とし、直方体  $ABCDEFGH$  に、頂点  $A$  から辺  $BF$  と交わるように点  $M$  まで糸をかける。かける糸の長さが最も短くなるときの、糸と辺  $BF$  との交点を  $P$  とする。このとき、次の(1)、(2)に答えよ。

(1) 線分  $AP$  と線分  $PM$  の長さの比を最も簡単な整数の比で表せ。

(2) 台形  $AEFP$  の面積は何  $\text{cm}^2$  か。

図1

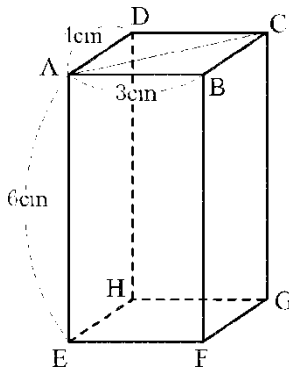


図2

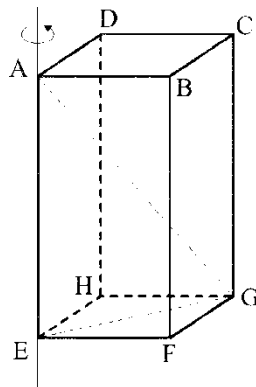
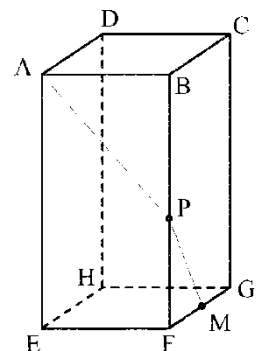


図3



解答欄

|    |                 |                  |
|----|-----------------|------------------|
| 問1 | cm              |                  |
| 問2 | cm <sup>2</sup> |                  |
| 問3 | cm <sup>3</sup> |                  |
| 問4 | (1)             | AP:PM =        : |
|    | (2)             | cm <sup>2</sup>  |

解答

問1  $5\text{ cm}$

問2  $108\text{ cm}^2$

問3  $50\pi\text{ cm}^3$

問4

(1)  $AP:PM=3:2$

(2)  $\frac{63}{5}\text{ cm}^2$

解説

問1

三平方の定理より  $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{ cm}$

問2

表面積は  $4\times 3\times 2+6\times (3\times 2+4\times 2)=24+84=108\text{ cm}^2$

問3

円すいの体積は  $\frac{1}{3}\times \pi \times 5^2\times 6=50\pi\text{ cm}^3$

問4

(1)

側面を  $AE$  で切り開いた展開図において点  $P$  は直線  $AM$  と  $BF$  との交点となる。

$AB\parallel FM$  より

$AP:PM=AB:MF=3:2$

(2)

$BP:PF=AP:PM=3:2$   $PF=6\times \frac{2}{5}=\frac{12}{5}\text{ cm}$

台形  $AEFP$  の面積は  $\left(\frac{12}{5}+6\right)\times 3\times \frac{1}{2}=\frac{63}{5}\text{ cm}^2$

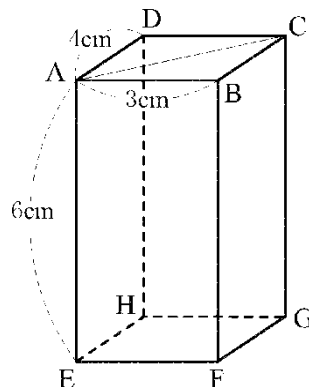
【問 23】

図1～図4のように、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $AD=4\text{ cm}$ 、 $AE=6\text{ cm}$  の直方体  $ABCDEFGH$  がある。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2014 年度)

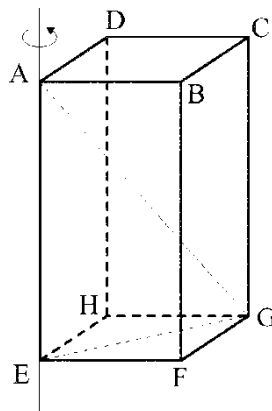
問1 図1において、線分  $AC$  の長さは何  $\text{cm}$  か。

図1



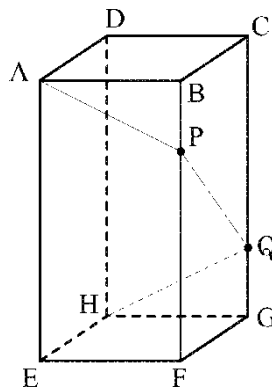
問2 直方体  $ABCDEFGH$  の表面積は何  $\text{cm}^2$  か。

図2



問3 図2において、 $\triangle AEG$  を辺  $AE$  を軸として 1 回転させてできる円すいの体積は何  $\text{cm}^3$  か。

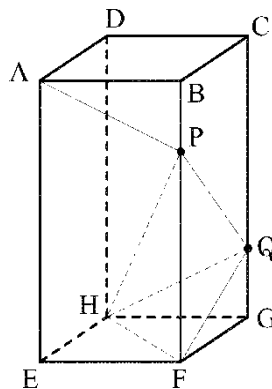
図3



問4 図3、図4のように、直方体  $ABCDEFGH$  に、頂点  $A$  から 2 辺  $BF$ 、 $CG$  と交わるように頂点  $H$  まで糸をかける。かける糸の長さが最も短くなるときの、糸と 2 辺  $BF$ 、 $CG$  との交点をそれぞれ  $P$ 、 $Q$  とする。このとき、次の(1)、(2)に答えよ。

(1) 図3において、線分  $AP$  と線分  $PQ$  の長さの比を最も簡単な整数の比で表せ。

図4



(2) 図4において、三角すい  $HFPQ$  の体積は何  $\text{cm}^3$  か。



解答欄

|    |                 |                 |
|----|-----------------|-----------------|
| 問1 | cm              |                 |
| 問2 | cm <sup>2</sup> |                 |
| 問3 | cm <sup>3</sup> |                 |
| 問4 | (1)             | AP:PQ=        : |
|    | (2)             | cm <sup>3</sup> |

解答

問1 5 cm

問2 108 cm<sup>2</sup>

問3  $50\pi$  cm<sup>3</sup>

問4

(1) AP:PQ=3:4

(2)  $\frac{42}{5}$  cm<sup>3</sup>

解説

問1

三平方の定理より  $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  cm

問2

表面積は  $4 \times 3 \times 2 + 6 \times (3 \times 2 + 4 \times 2) = 24 + 84 = 108$  cm<sup>2</sup>

問3

円すいの体積は  $\frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 6 = 50\pi$  cm<sup>3</sup>

問4

(1)

側面を AE で切り開いた展開図において点 P, Q はそれぞれ AH と BF, CG との交点になる。

△ACQ で BP // CQ より AP:PQ=AB:BC=3:4

(2)

側面を AE で切り開いた展開図において AD // EH BP:PF=AB:FH=3:7

よって  $PF = 6 \times \frac{7}{10} = \frac{21}{5}$  cm

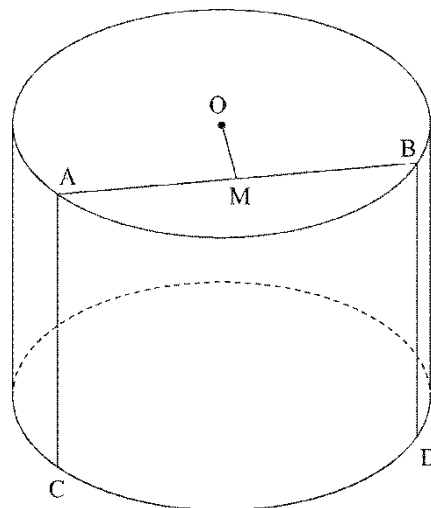
よって三角すい HFPQ の体積は  $\frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{21}{5} \times 4 \right) \times 3 = \frac{42}{5}$  cm<sup>3</sup>

【問 24】

図のように、底面の半径が 4 cm、高さが 6 cm の円柱があり、1 つの底面の円の中心を  $O$  とする。2 点  $A, B$  は  $O$  を含む底面の円周上にあり、2 点  $C, D$  は  $O$  を含まない底面の円周上にあつて、線分  $AC, BD$  はそれぞれ底面に垂直である。また、点  $M$  は線分  $AB$  の中点であり、 $OM=2$  cm である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、円周率は  $\pi$  とする。また、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2014 年度)



(1) 円柱の体積を求めなさい。

(2) 線分  $AB$  の長さを求めなさい。

(3)  $\triangle OCD$  の面積を求めなさい。

解答欄

|     |                 |
|-----|-----------------|
| (1) | cm <sup>3</sup> |
| (2) | cm              |
| (3) | cm <sup>2</sup> |

解答

(1)  $96\pi \text{ cm}^3$

(2)  $4\sqrt{3} \text{ cm}$

(3)  $4\sqrt{30} \text{ cm}^2$

解説

(1)

円柱の体積は  $\pi \times 4^2 \times 6 = 96\pi \text{ cm}^3$

(2)

AB は円の弦で M は AB の中点より  $\angle OMA = 90^\circ$

よって  $\triangle OAM$  において

三平方の定理より  $AM = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

$AB = 2AM = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

(3)

$OC = OD = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$

CD の中点を N とすると  $ON \perp CD$  だから

$ON = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$

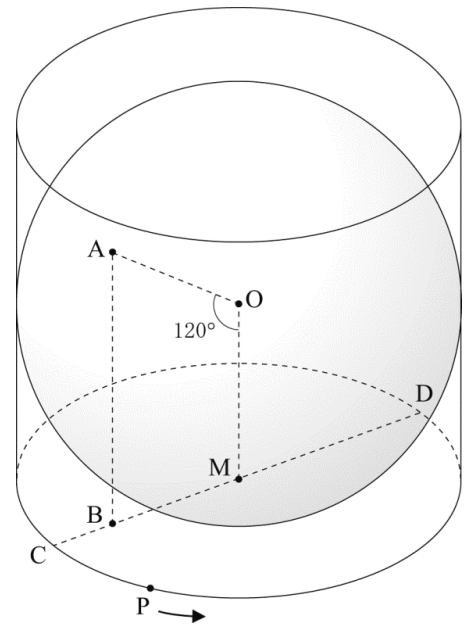
よって  $\triangle OCD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{10} = 4\sqrt{30} \text{ cm}^2$

【問 25】

図のように、底面の直径が 12 cm、高さが 12 cm の円柱と、この円柱の中にぴったり入った球があり、球の中心を  $O$  とし、円柱の 1 つの底面の円の中心を  $M$  とする。球の表面上に点  $A$  を、 $\angle AOM = 120^\circ$  となるようにとり、 $A$  を通り底面に垂直な直線と  $M$  を含む底面の円周との交点を  $B$  とする。直線  $BM$  と  $M$  を含む底面の円周との交点のうち、 $B$  に近い方を  $C$ 、 $B$  から遠い方を  $D$  とする。また、点  $P$  は、 $M$  を含む底面の円周上を  $C$  から  $D$  まで、矢印の向きに動く点である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2014 年度)



(1) 線分  $AB$  の長さを求めなさい。

(2) 三角すい  $ABPM$  の体積が最も大きくなるとき、

① 三角すい  $ABPM$  の体積を求めなさい。

② 線分  $BP$  の中点を  $Q$  とする。点  $Q$  と  $\triangle APM$  を含む平面との距離を求めなさい。

解答欄

|     |    |               |
|-----|----|---------------|
| (1) | cm |               |
| (2) | ①  | $\text{cm}^3$ |
|     | ②  | cm            |

解答

(1) 9 cm

(2)

①  $27\sqrt{3} \text{ cm}^3$

②  $\frac{9}{4} \text{ cm}$

解説

(1)

O から AB に垂線をひき交点を H とすると

$\triangle OAH$  において  $\angle AOH = 30^\circ$ ,  $\angle AHO = 90^\circ$  より

$$AH = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$$

$$HB = OM = 6 \text{ cm より}$$

$$AB = 3 + 6 = 9 \text{ cm}$$

(2)

①

$\triangle OAH$  において

$$OH = \sqrt{3} AH = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BM = OH = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

底面を  $\triangle ABM$  と考えると P から CD にひいた垂線の長さが三角すいの高さとなるから

三角すい ABPM の体積が最も大きくなるのは  $PM \perp CD$  のときで高さが 6 cm になるとき。

$$\text{よって求める体積は } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{3} \times 6 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

②

$\triangle ABM$  において

$$AM = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

点 B から  $\triangle APM$  にひいた垂線の長さを  $h$  cm とすると

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6 \times h = 27\sqrt{3}$$

$$6\sqrt{3}h = 27\sqrt{3}$$

$$h = \frac{9}{2}$$

Q は BP の中点より Q から  $\triangle APM$  にひいた垂線の長さを  $k$  とすると

$$h : k = 2 : 1$$

$$\frac{9}{2} : k = 2 : 1$$

$$k = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

【問 26】

図1の四角形 ABCD は、 $AB=8\text{ cm}$ 、 $BC=2\text{ cm}$ 、 $AD=4\text{ cm}$ 、 $CD=h\text{ cm}$ 、 $\angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$  の台形である。

図2は、図1の台形 ABCD を辺 CD を軸として 1 回転させてできる立体の形をした容器 X を表しており、容器 X の高さは、 $h\text{ cm}$  である。

次の問1～問4の問いに答えなさい。

ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(大分県 2014 年度)

図1

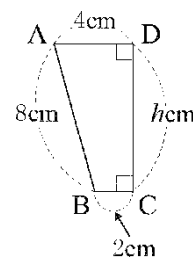


図2

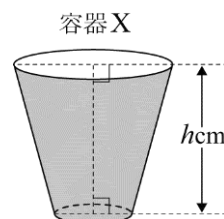
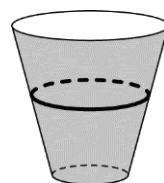
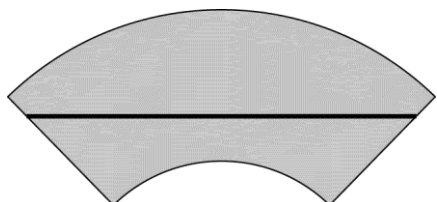


図3

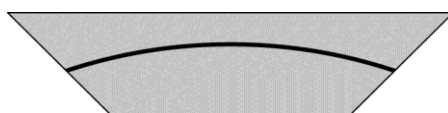


問1 図3のように、容器 X の側面にサインペンで円形の模様をかいた。このときの容器 X の側面の展開図として適切なものを下のア～エから 1 つ選び、記号で答えなさい。

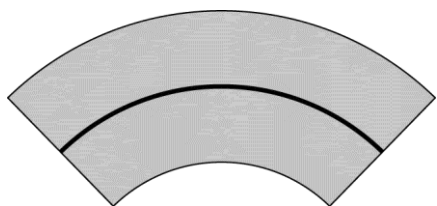
ア



イ



ウ



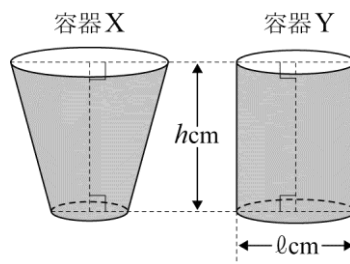
エ



問2  $h$  の値を求めなさい。

問3 図4のような円柱の形をした容器 Y があり、容器 Y の高さと側面積は、容器 X の高さと側面積とそれぞれ等しい。容器 Y の底面の円の直径の長さを  $l\text{ cm}$  として、 $l$  の値を求めなさい。

図4



問4 問3のとき、容器 X と容器 Y のそれぞれに水をいっぱいに入れる。容器 X の中に入っている水の体積を  $a\text{ cm}^3$ 、容器 Y の中に入っている水の体積を  $b\text{ cm}^3$  とするとき、 $a$  と  $b$  の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

|    |             |
|----|-------------|
| 問1 |             |
| 問2 | $h =$ cm    |
| 問3 | $\ell =$ cm |
| 問4 | $a:b =$ :   |

解答

問1 ウ

問2  $h = 2\sqrt{15}$  cm

問3  $\ell = \frac{8\sqrt{15}}{5}$  cm

問4  $a:b = 35:36$

解説

問1

側面はおうぎ形から中心部分のおうぎ形をとりのぞいたものになる。

また模様はおうぎ形の弧になるので選択肢はウ

問2

B から AD に垂線をひき交点を H とする。

$$AH = 4 - 2 = 2 \text{ cm}$$

△ABH で

$$\text{三平方の定理より } BH = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15} \text{ cm}$$

$$\text{よって } h = 2\sqrt{15} \text{ cm}$$

問3

AB と DC の延長線の交点を O とする。

$$BC \parallel AD \text{ より } OC:OD = OB:OA = 2:4 = 1:2$$

$$\text{よって } OC = 2\sqrt{15} \text{ cm, } OB = 8 \text{ cm}$$

△OBC を OC を軸として 1 回転させてできる円すいの側面のおうぎ形の中心角を  $\alpha^\circ$  とすると

$$2\pi \times 8 \times \frac{\alpha}{360} = 4\pi \quad \alpha = 90^\circ$$

$$\text{よって容器 X の側面の面積は } \pi \times 16^2 \times \frac{90}{360} - \pi \times 8^2 \times \frac{90}{360} = 48\pi \text{ cm}^2$$

容器 Y の側面積は

$$\ell \pi \times 2\sqrt{15} = 48\pi$$

$$\ell = \frac{8\sqrt{15}}{5} \text{ cm}$$

問4

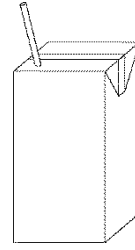
$$a = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 4\sqrt{15} - \frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 2\sqrt{15} = \frac{56\sqrt{15}}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$b = \pi \times \left( \frac{4\sqrt{15}}{5} \right)^2 \times 2\sqrt{15} = \frac{96\sqrt{15}}{5} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{よって } a:b = \frac{56\sqrt{15}}{3} \pi : \frac{96\sqrt{15}}{5} \pi = 35:36$$

【問 27】

次のような、ストローをさしたジュースの紙パックがある。  
図1は、この紙パックを参考にしてつくった、ジュース入りの直方体の容器とストローである。



直方体の容器は、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $BC=4\text{ cm}$ 、 $BF=12\text{ cm}$  であり、ストローは、点  $P$ 、 $Q$  を両端とする線分で、 $PQ=15\text{ cm}$  である。また、ストローをさす穴の位置は、線分  $BD$  上の点  $W$  である。

このとき、下の問1～問4に答えなさい。ただし、容器の面の厚さや変形、ストローの太さやストローをさす穴の大きさは考えないものとする。

(宮崎県 2014 年度)

図1

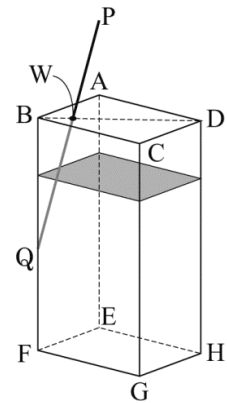


図2

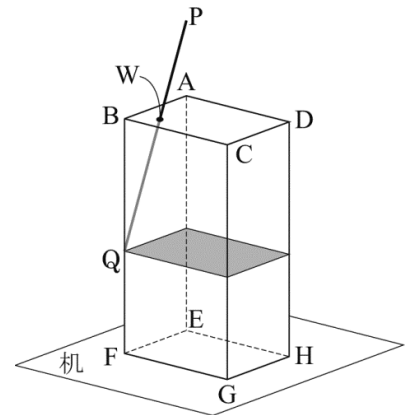


図3

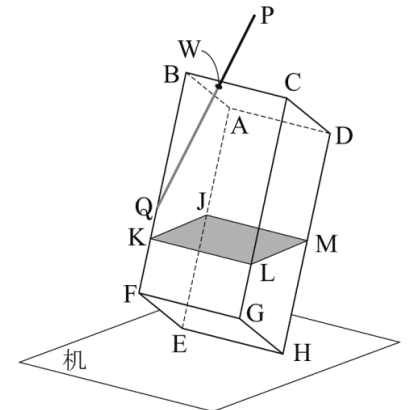
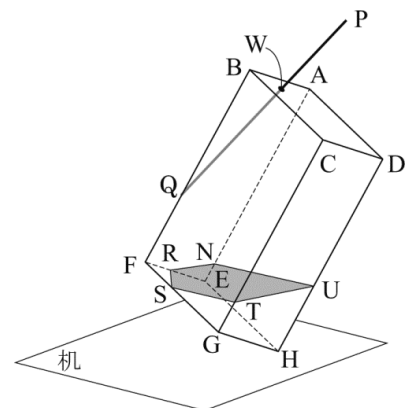


図4



問1 図1において、面  $EFGH$  を底面としたとき、この容器の側面積を求めなさい。

問2 図1において、ストローの先端の点  $Q$  は、辺  $BF$  上にある。 $QF=5\text{ cm}$ 、 $BW:WD=1:4$  のとき、ストローの一部  $PW$  の長さを求めなさい。

問3 図2は、図1の容器の底面  $EFGH$  が水平になるように机の上に置き、 $QF=5\text{ cm}$  となるまでジュースを飲んだものである。この容器を、図3のように辺  $EH$  を机の面につけたまま、水面の長方形  $JKLM$  の点  $M$  が辺  $DH$  の中点となるまで傾ける。  
このとき、机の面から水面  $JKLM$  までの高さを求めなさい。

問4 図4は、図3において、さらにジュースを飲んだ後、頂点  $H$  だけを机の面につけたまま頂点  $E$  を机の面からはなし、水面が五角形  $NRSTU$  となるように傾けたものである。その五角形の頂点  $N$ 、 $R$ 、 $S$ 、 $T$ 、 $U$  は、それぞれ辺  $AE$ 、 $EF$ 、 $FG$ 、 $GC$ 、 $HD$  上にある。  
 $GS=3\text{ cm}$ 、 $GT=2\text{ cm}$ 、 $HU=4\text{ cm}$  のとき、容器の中に残っているジュースの体積を求めなさい。



解答欄

|    |               |
|----|---------------|
| 問1 | $\text{cm}^2$ |
| 問2 | $\text{cm}$   |
| 問3 | $\text{cm}$   |
| 問4 | $\text{cm}^3$ |

解答

問1  $168 \text{ cm}^2$

問2  $(15 - 5\sqrt{2}) \text{ cm}$

問3  $\frac{18\sqrt{13}}{13} \text{ cm}$

問4  $\frac{181}{9} \text{ cm}^3$

解説

問1

側面積は  $12 \times (3 \times 2 + 4 \times 2) = 12 \times 14 = 168 \text{ cm}^2$

問2

$\triangle BCD$  において  $BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$

$BW:WD = 1:4$  より  $BW = \frac{1}{5} BD = \frac{1}{5} \times 5 = 1 \text{ cm}$   $BQ = 12 - 5 = 7 \text{ cm}$

$\triangle BQW$  において  $QW = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$

よって  $PW = 15 - 5\sqrt{2} \text{ cm}$

問3

M から机の面に垂線をひき机の面との交点を X とする。

また L から MH に垂線をひき交点を Y とする。

ジュースの体積, 高さが変わらないので  $\frac{1}{2} (LG + 6) \times 3 = 3 \times 5$

これより  $LG = 4 \text{ cm}$

$MY = 6 - 4 = 2 \text{ cm}$

$\triangle LMY$  において

$LM = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$

$\triangle MHX \sim \triangle LMY$  になるから  $MX:LY = MH:LM$

$MX:3 = 6:\sqrt{13}$

$\sqrt{13} \text{ MX} = 18$

$MX = \frac{18\sqrt{13}}{13} \text{ cm}$

問4

RS, NU, EH を延長した線の交点を O, UT, HG, RS を延長した線の交点を Z とする。

$\triangle ZHU$  において  $ZG:ZH = GT:HU$

$ZG:(ZG + 3) = 2:4$

$4ZG = 2(ZG + 3)$

$ZG = 3 \text{ cm}$

$\triangle ZHO$  において  $SG:OH = ZG:ZH$

$3:OH = 3:6$

$OH = 6 \text{ cm}$

三角錐 O-ZUH の体積は  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 6 = 24 \text{ cm}^3$

三角錐 O-REN と三角錐 O-ZHU は相似で

相似比は  $OE:OH = (6-4):6 = 1:3$  より

体積比は  $1:27$

よって三角錐 O-REN の体積は  $\frac{1}{27} \times 24 = \frac{8}{9} \text{ cm}^3$

同様に三角錐 S-ZGT と三角錐 O-ZHU は相似で

相似比は  $GT:HU = 2:4 = 1:2$  より

体積比は  $1:8$

よって三角錐 S-ZGT の体積は  $\frac{1}{8} \times 24 = 3 \text{ cm}^3$

求める体積は  $24 - \frac{8}{9} - 3 = \frac{181}{9} \text{ cm}^3$

【問 28】

右の図1のように、 $GH=2\text{ cm}$ 、 $FG=4\text{ cm}$ 、 $BF=7\text{ cm}$ とする直方体を  $X$  とする。辺  $CG$  上に点  $R$  をとり、線分  $DR$  と  $RF$  の長さの和が最小となるようにする。さらに、点  $R$  を通り、面  $ABCD$  と平行な平面と辺  $AE$ 、 $BF$ 、 $DH$  との交点をそれぞれ  $P$ 、 $Q$ 、 $S$  とする。このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2014 年度)

問1  $DR+RF$  を求めなさい。

問2  $\triangle PQR$  を底面とし、高さが  $BQ$  の三角柱の体積は、直方体  $X$  の体積の何倍であるか答えなさい。

問3 図1の直方体  $X$  を頂点  $D$  から、線分  $DP$ 、 $DR$  を含む面、および頂点  $F$  から線分  $FP$ 、 $FR$  を含む面でそれぞれ線分  $PR$  まで切ると図2のように 2 つの立体に分かれた。頂点  $B$  を含む立体の体積を  $V_1$ 、頂点  $H$  を含む立体の体積を  $V_2$  とするとき、 $V_1:V_2$  を最も簡単な整数の比で表しなさい。

図1

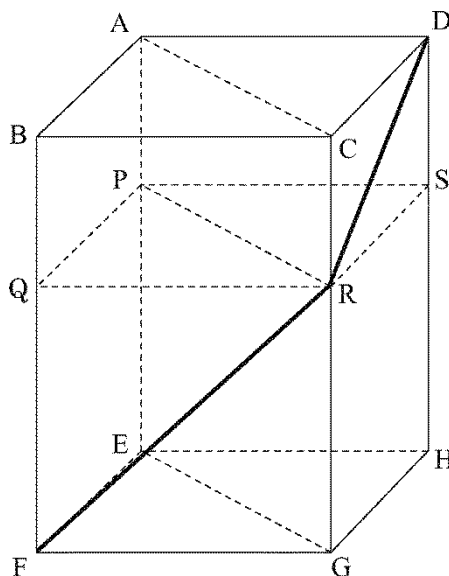
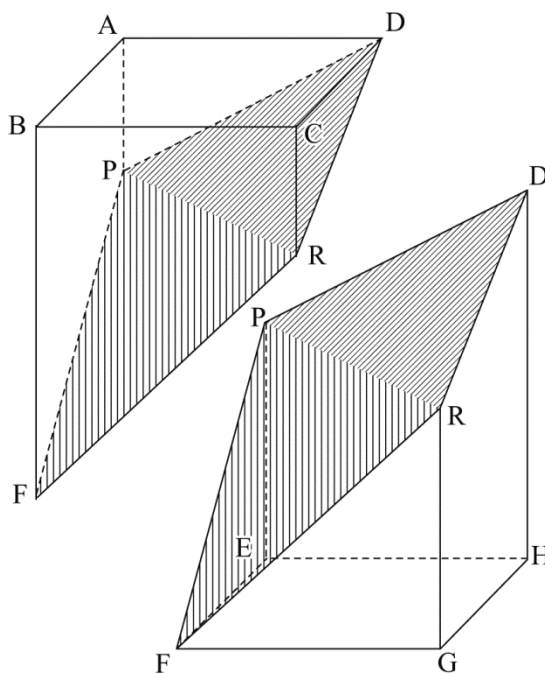


図2



解答欄

|    |              |
|----|--------------|
| 問1 | cm           |
| 問2 | 倍            |
| 問3 | $V_1:V_2=$ : |

解答

問1  $\sqrt{85}$  cm

問2  $\frac{1}{6}$  倍

問3  $V_1:V_2=7:11$

解説

問1

側面の長方形 BFGC と長方形 CGHD を辺 CG がつながった状態で展開した図において線分 FD と CG の交点が点 R の位置になる。

よってこのとき  $DR+RF=DF=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85}$  cm

問2

$CR:RG=CD:FG=2:4=1:2$

よって三角柱 ABC-PQR の体積

$=\frac{1}{2}$  四角柱 ABCD-PQRS の体積

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$  直方体 X の体積

$=\frac{1}{6}$  直方体 X の体積

よって  $\frac{1}{6}$  倍

問3

$CR=7\times\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$  cm

$RG=\frac{14}{3}$  cm

$V_1=4\times2\times\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{7}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{14}{3}=\frac{196}{9}\text{cm}^3$

$V_2=4\times2\times\frac{14}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{14}{3}=\frac{308}{9}\text{cm}^3$

よって  $V_1:V_2=\frac{196}{9}:\frac{308}{9}=7:11$