

5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2006 年度出題】

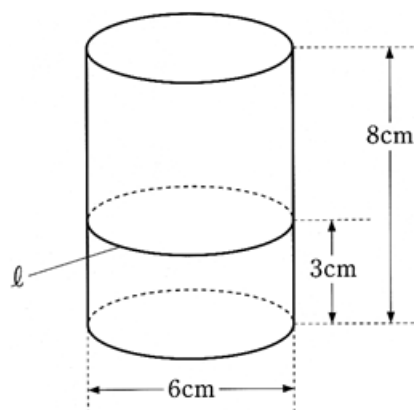
【問 1】

図Ⅰは、底面の直径が 6 cm、高さが 8 cm の円柱形の容器で、容器の側面に沿って、底面から高さ 3 cm のところを 1 周する線 ℓ がかいてあります。

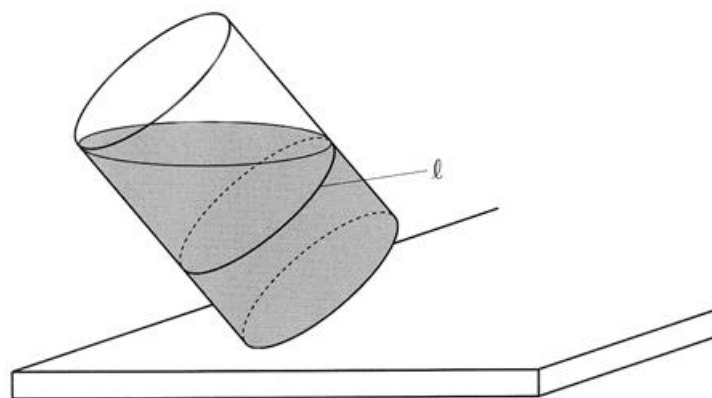
このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とし、容器の厚さは考えないものとします。

（岩手県 2006 年度）

図Ⅰ



図Ⅱ



問1 図Ⅰの容器を水平な机の上に置いて水を入れ、満水にしました。このときの水の体積を求めなさい。

問2 問1で満水にした容器を傾けて水を流していき、次の図Ⅱのように、水面が線 ℓ にとどいたところで傾けるのをやめました。このとき、容器に残った水の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm^3

解答

問1 $72\pi \text{ cm}^3$

問2 $\frac{99}{2}\pi \text{ cm}^3$

解説

問2

求める体積は

底面が半径 3cm 高さが 3cm の円柱の体積と

底面の半径が 3cm 高さが $8-3=5\text{ cm}$ の円柱の体積の半分との和になる。

よって $\pi \times 3^2 \times 3 + \frac{1}{2} \times \pi \times 3^2 \times 5 = \frac{99}{2} \pi \text{ cm}^3$

【問 2】

図 I のように、 $AB=AC$ の三角柱 $ABC-DEF$ の辺 AD 上に点 P を $PB=PF$ となるようにとり、点 P と点 B 、点 P と点 F をそれぞれ結びます。

ただし、三角柱 $ABC-DEF$ の側面はすべて長方形とします。

あとの1～3の問いに答えなさい。

(宮城県 2006 年度)

問1 三角柱 $ABC-DEF$ の辺のうち、直線 PF とねじれの位置にある辺をすべて答えなさい。

問2 $\angle APB = \angle a$ 、 $\angle APF = \angle b$ とするとき、 $\angle a + \angle b$ は何度ですか。

問3 図 II は、図 I において、 $CF=4\text{ cm}$ とし、線分 BP 、 PF 上を動く点を Q としたものです。点 Q が B から F まで動いたとき、線分 DQ の最大となる長さが 5 cm であるとする、線分 DQ の最小となる長さを求めなさい。

図 I

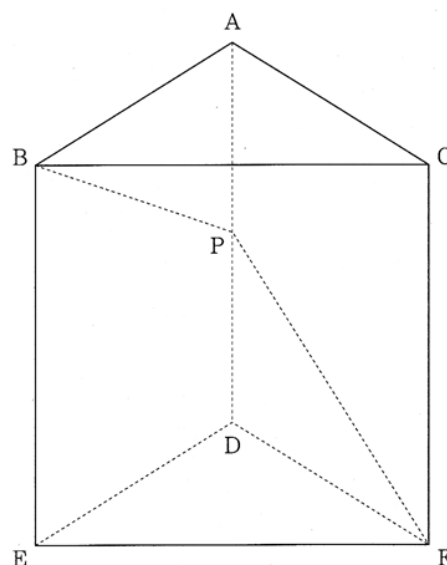
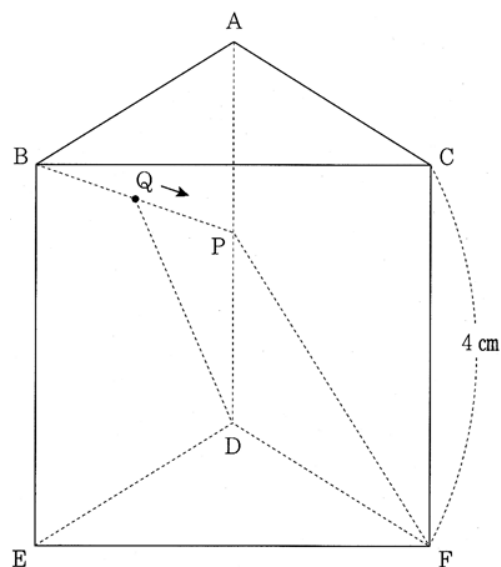


図 II



解答欄

問1	
問2	度
問3	cm

解答

問1 AB, BC, BE, DE

問2 180 度

問3 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ cm

解説

問3

DQ が最大となるのは、Q が B と一致するとき。

よって DB=5cm

△BED において

三平方の定理より $DE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm

DQ が最小となるのは $DQ \perp BF$ のとき。

$DF = DE = 3$ cm, $BF = \sqrt{4^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$ cm だから

$QF = x$ cm とおくと

$BD^2 - BQ^2 = DF^2 - QF^2$ より

$5^2 - (2\sqrt{13} - x)^2 = 3^2 - x^2$

$x = \frac{9\sqrt{13}}{13}$ cm

よって $DQ = \sqrt{3^2 - \left(\frac{9\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$ cm

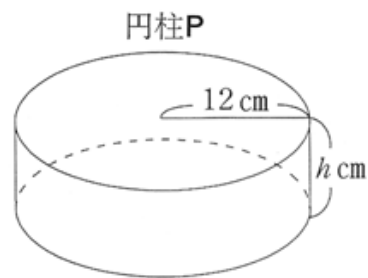
【問 3】

図 1 は、底面の半径が 12 cm 、高さが $h\text{ cm}$ の円柱 P である。

図 1

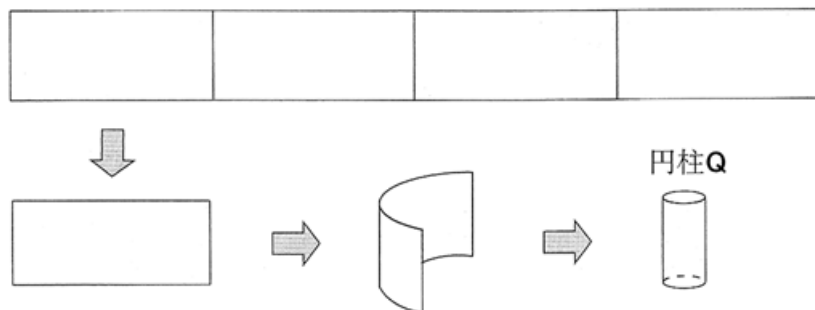
(秋田県 2006 年度)

- (1) 円柱 P において、1 つの底面の面積と側面積が等しくなるとき、円柱 P の高さ h の値を求めなさい。



- (2) 図 2 のように、円柱 P の側面を広げてできる長方形を 4 個の合同な長方形に分け、その 1 つの長方形を側面とし、高さが円柱 P と等しい円柱 Q をつくる。このとき、円柱 P の体積は円柱 Q の体積の何倍になるか、求めなさい。

図 2



解答欄

(1)	$h =$
(2)	倍

解答

(1) $h=6$

(2) 16 倍

解説

(1)

側面の長方形の横の長さは円周の長さと等しいから

$$2\pi \times 12 = 24\pi \text{ cm}$$

よって側面の長方形の面積は $24\pi h \text{ cm}^2$

これが底面積と等しいので

$$24\pi h = \pi \times 12^2$$

$$h = 6 \text{ cm}$$

(2)

円柱 P の体積は

$$\pi \times 12^2 \times h = 144\pi h \text{ cm}^3$$

円柱 Q の側面の長方形の横の長さは

$$\frac{24\pi}{4} = 6\pi \text{ cm}$$

円柱 Q の半径を r とすると

$$2\pi r = 6\pi$$

$$r = 3 \text{ cm}$$

よって円柱 Q の体積は

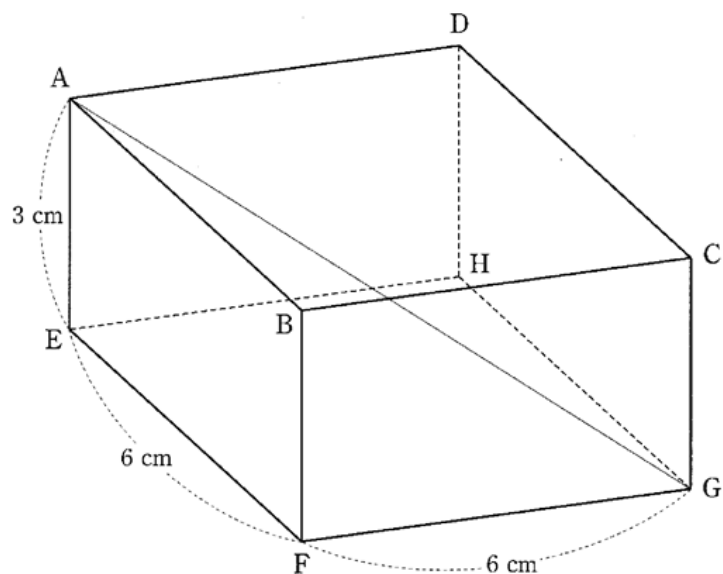
$$\pi \times 3^2 \times h = 9\pi h \text{ cm}^3$$

したがって $144\pi h \div 9\pi h = 16$ 倍

【問 4】

下の図のように、底面が 1 辺 6 cm の正方形で、高さが 3 cm の直方体がある。
このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(福島県 2006 年度)



問1 この直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

問2 この直方体の対角線 AG 上に、 $FP \perp AG$ となる点 P をとる。

(1) 線分 FP の長さを求めなさい。

(2) 4 点 P, F, G, H を結んでできる三角すいの体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ³

解答

問1 9cm

問2

(1) $2\sqrt{5}$ cm

(2) 8cm^3

解説

(1)

$\triangle AFP$ で

$$FP^2 = AF^2 - AP^2$$

$\triangle FGP$ で

$$FP^2 = FG^2 - GP^2 \text{ より}$$

$$AF^2 - AP^2 = FG^2 - GP^2$$

よって $GP = x$ cm とすると $AP = 9 - x$ cm だから

$$(3^2 + 6^2) - (9 - x)^2 = 6^2 - x^2$$

これを解いて

$$x = 4 \text{ cm}$$

$$\text{よって } FP = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

(2)

P から EG に垂線 PQ をひく。

$\triangle AEG$ で

$PQ \parallel AE$ より

$$PQ : AE = GP : GA$$

$$PQ : 3 = 4 : 9$$

$$9PQ = 12$$

$$PQ = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

よって三角すい PFGH の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle HGF \times PQ$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{4}{3} = 8 \text{ cm}^3$$

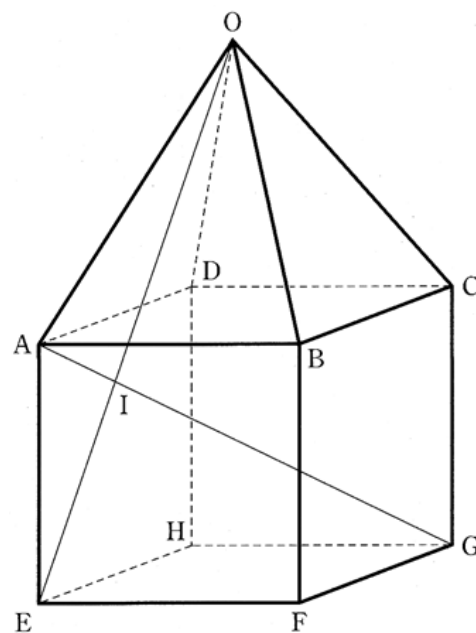
【問 5】

図のように、1 辺が $\sqrt{2}$ cm の立方体 ABCDEFGH と、 $OA=OB=OC=OD=\sqrt{3}$ cm である四角すい OABCD を合わせた立体 OABCDEFGH がある。

このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(茨城県 2006 年度)

問1 立体 OABCDEFGH の表面積を求めなさい。



問2 線分 OE と線分 AG との交点を I とする。このとき、線分 AI の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm ²
問2	cm

解答

問1 $10 + 2\sqrt{5} \text{ cm}^2$

問2 $\frac{\sqrt{6}}{5} \text{ cm}$

解説

問1

$\triangle OAB$ の高さは $\sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$

よって表面積は $4 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} + 5 \times (\sqrt{2})^2 = 10 + 2\sqrt{5} \text{ cm}^2$

問2

OE, AG は平面 OAEGC 上にある。

OE と AC の交点を P, 正方形 EFGH の対角線の交点を Q, OQ と AC の交点を R とする。

$AR = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 \text{ cm}$

$OR = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$

よって PR // EQ, OR = RQ より

$PR : EQ = OR : OQ$

$PR : 1 = 1 : 2$

$PR = \frac{1}{2} \text{ cm}$

よって $AP = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ cm}$

$AI : IG = AP : EG = \frac{1}{2} : 2 = 1 : 4$

よって $AI = \frac{1}{5} AG = \frac{1}{5} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{6}}{5} \text{ cm}$

【問 6】

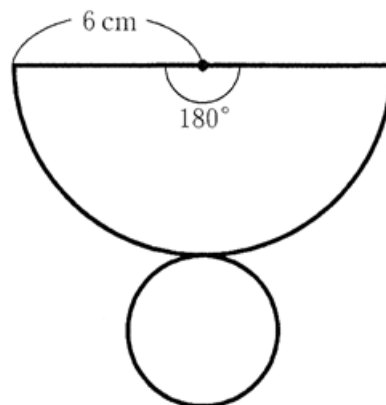
図 1 は、円錐の展開図である。側面の展開図のおうぎ形は、半径 6 cm、中心角 180° になっている。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(栃木県 2006 年度)

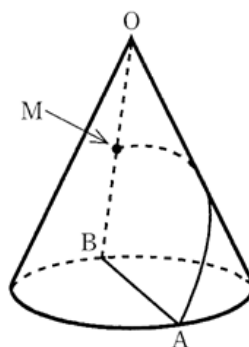
(1) 底面の円の半径を求めなさい。

図 1



(2) 図 1 の展開図を組み立てた円錐の頂点を O、底面の円の直径を AB、OB の中点を M とする。図 2 のように、側面上に A と M を最短の長さで結ぶ線をひくとき、その線の長さを求めなさい。

図 2



解答欄

(1)	cm
(2)	cm

解答

(1) 3 cm

(2) $3\sqrt{5}$ cm

解説

(1)

底面の円の半径を r cm とする。

底面の円周と側面のおうぎ形の弧の長さが等しいから

$$2\pi r = 2\pi \times 6 \times \frac{180}{360}$$

$$r = 3 \text{ cm}$$

(2)

側面のおうぎ形において AM が最短になるのは AM が直線になるとき。

$\triangle AOM$ で

$$OM = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}, OA = 6 \text{ cm}, \angle MOA = 90^\circ \text{ より}$$

$$AM = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

【問 7】

右の図は、母線の長さが 6 cm 、底面の半径が 1 cm の円すいである。 BC は底面の直径であり、 AB 、 AC は母線である。 AB 上に $AP=4\text{ cm}$ となる点 P をとり、図のように B から側面に沿って P まで糸を巻きつける。

次の1、2の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

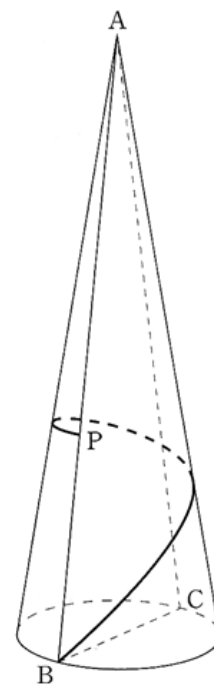
(群馬県 2006 年度)

問1 この円すいの体積と表面積を求めなさい。

問2 糸の長さが最も短くなるように糸を巻きつけたとき、

(1) 巻きつけた糸の長さを求めなさい。

(2) 巻きつけた糸と AC との交点を Q とするとき、 AQ の長さを求めなさい。



解答欄

問1	体積 cm^3	
	表面積 cm^2	
問2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問1

$$\text{体積} \quad \frac{\sqrt{35}}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{表面積} \quad 7 \pi \text{ cm}^2$$

問2

$$(1) \quad 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$(2) \quad \frac{12\sqrt{3}}{5} \text{ cm}$$

解説

問2

(1)

$$\text{側面のおうぎ形の中心角は } 360^\circ \times 2\pi \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{6} = 60^\circ$$

よって側面のおうぎ形を展開したときに B と重なる点を B' とし

B' から AB に垂線 AH をひくと

△AB' H において

$$AH:AB':B' H=1:2:\sqrt{3}$$

$$AB'=6\text{cm より } AH=3\text{cm, } B' H=3\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって巻きつけた糸の長さは

$$B' P=\sqrt{(4-3)^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7} \text{ cm}$$

(2)

BB' と AC との交点を D とすると

$$AD=\sqrt{3} \quad BD=\sqrt{3} \times \frac{6}{2}=3\sqrt{3} \text{ cm}$$

△APB' で ∠PAQ=∠B' AQ より

$$AP:PQ=AB':B' Q$$

B' Q=x cm とすると

$$4:(2\sqrt{7}-x)=6:x$$

$$6(2\sqrt{7}-x)=4x$$

$$x=\frac{6\sqrt{7}}{5}$$

$$QD=\sqrt{\left(\frac{6\sqrt{7}}{5}\right)^2-3^2}=\frac{3\sqrt{3}}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって } AQ=3\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{5}=\frac{12\sqrt{3}}{5} \text{ cm}$$

【問 8】

右の図 1 に示した立体 $ABC-DEF$ は、 $AB=8\text{ cm}$ 、 $AC=4\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$ 、 $\angle CAB=60^\circ$ 、 $\angle BAD=\angle CAD=90^\circ$ の三角柱である。点 P 、点 Q 、点 R は、それぞれ辺 AD 、辺 BE 、辺 CF 上にある点で、 $AP=BQ=CR$ である。

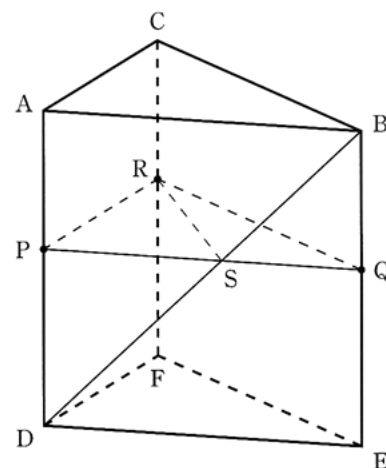
頂点 B と頂点 D 、点 P と点 Q 、点 Q と点 R 、点 R と点 P をそれぞれ結ぶ。線分 BD と線分 PQ との交点を S とし、点 R と点 S を結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2006 年度)

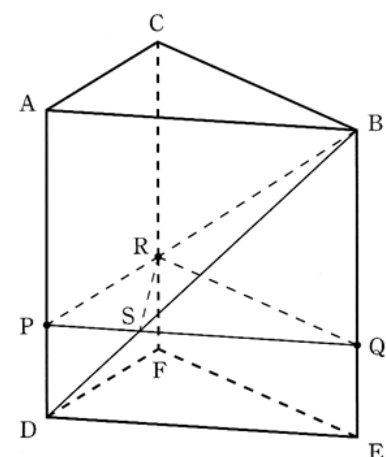
問1 点 P が辺 AD の中点となるとき、線分 RS の長さは何 cm か。

図 1



問2 右の図 2 は、図 1 において、頂点 B と点 R を結んだ場合を表している。 $QS=QR$ となるとき、立体 $B-QRS$ の体積は何 cm^3 か。ただし、答えに根号がふくまれるときは、根号をつけたままで表せ。

図 2



解答欄

問1	cm
問2	cm^3

解答

問1 4 cm

問2 $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$

解説

問1

四角形 ADEB は正方形で

点 P が辺 AD の中点になるとき点 Q も BE の中点となり

PQ // AB だから S も DB の中点になる。

よって△DAB において

中点連結定理より $PS = \frac{1}{2} AB = 4 \text{ cm}$

△RPS は PR=PS=4 cm, $\angle RPS = \angle CAB = 60^\circ$ だから正三角形。

よって RS=4 cm

問2

△PQR において

$\angle RPQ = 60^\circ$, RP:PQ=4:8=1:2 より

$\angle PRQ = 90^\circ$, $QR = 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

PQ // DE になるので

$\angle BQS = \angle BED = 90^\circ$

$\angle QBS = 45^\circ$

したがって△BSQ は BQ=QS の直角二等辺三角形になる。

よって BQ=QS=QR= $4\sqrt{3} \text{ cm}$

ここで S から RQ に垂線 SH をひくと $\angle SQH = 30^\circ$ より

SH:QS=1:2

SH: $4\sqrt{3} = 1:2$

SH= $2\sqrt{3} \text{ cm}$

よって立体 B-QRS の体積は

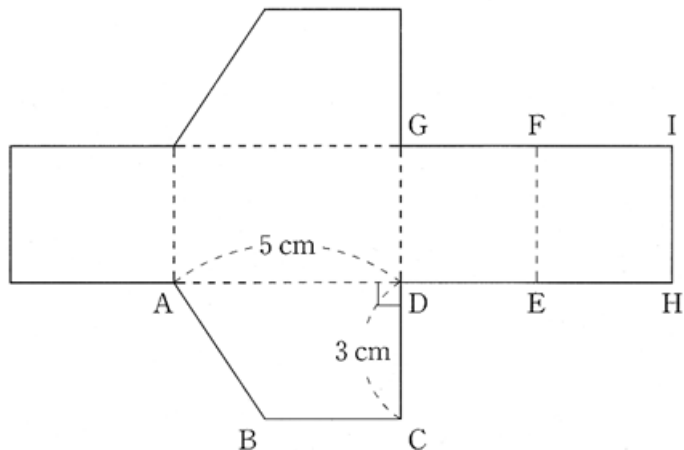
$\frac{1}{3} \times \triangle QRS \times BQ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^3$

【問 9】

下の図は、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ を底面とする四角柱の展開図であり、 $AD=5\text{ cm}$ 、 $CD=3\text{ cm}$ 、 $\angle ADC=90^\circ$ で、四角形 $DEFG$ と四角形 $EHIF$ はともに正方形である。

このとき、この展開図を点線で折り曲げてできる四角柱について、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2006 年度)



問1 この四角柱の体積を求めなさい。

問2 この四角柱において、線分 AI の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm

解答

問1 36 cm^3

問2 $\sqrt{22}\text{ cm}$

解説

問1

四角形 $DEFG$ と四角形 $EHIF$ は正方形より $BC=HE=EF=DE=3\text{ cm}$

よって求める体積は $\frac{1}{2} \times (3+5) \times 3 \times 3 = 36\text{ cm}^3$

問2

I は台形 $ABCD$ と合同なもうひとつの底面の頂点 B に対応する頂点と重なる。

よって四角柱において

$$AI = \sqrt{(5-3)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22}\text{ cm}$$

【問 10】

図のように、1 辺の長さが 9 cm の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。対角線 BH 上に $BP:PH=3:1$ となる点 P をとり、線分 GP の延長と平面 $AEHD$ との交点を Q とする。

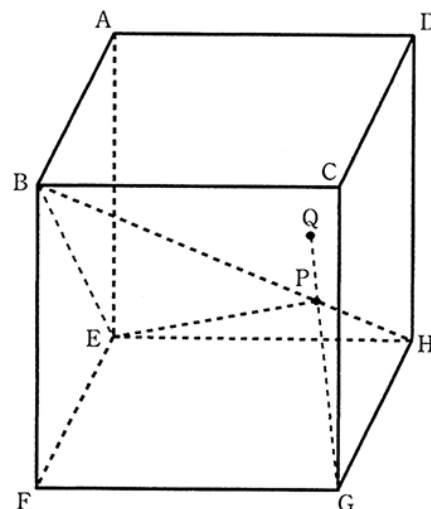
このとき、次の1～3の問いに答えなさい。

(新潟県 2006 年度)

問1 線分 BP の長さを求めなさい。

問2 $\triangle PBE$ の面積を求めなさい。

問3 線分 GQ の長さを求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm ²
問3	cm

解答

問1 $\frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}$

問2 $\frac{243\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2$

問3 $3\sqrt{11} \text{ cm}$

解説

問2

$$BE = \sqrt{2} \times 9 = 9\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle BEH = \frac{1}{2} \times 9 \times 9\sqrt{2} = \frac{81\sqrt{2}}{2}$$

ここで $BP:PH=3:1$ より

$$\triangle PBE = \frac{3}{4} \triangle BEH = \frac{3}{4} \times \frac{81\sqrt{2}}{2} = \frac{243\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2$$

問3

直線 BH , GQ をふくむ平面は平面 $ABGH$ となるから $QH \parallel BG$

よって $BG:QH=BP:PH$

$$9\sqrt{2}:QH=3:1$$

$$QH = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle QGH$ で

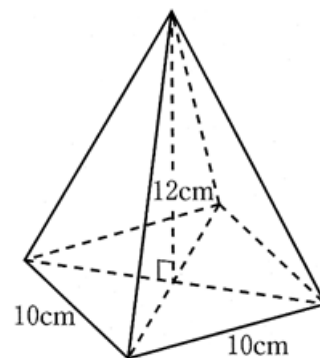
$$\text{三平方の定理より } GQ = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 9^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11} \text{ cm}$$

【問 11】

右の図は、底面が 1 辺 10 cm の正方形で、高さが 12 cm の正四角錐である。このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2006 年度)

問1 正四角錐の表面積を求めよ。



問2 底面の周の長さが 36 cm で、高さが 6 cm の直方体がある。直方体の表面積が正四角錐の表面積と同じであるとき、直方体の底面の 2 辺の長さを求めよ。

解答欄

問1	cm ²	
問2	cm と	cm

解答

問1 360 cm^2

問2 12 cm と 6 cm

解説

問1

正四角錐を $\text{O}-\text{ABCD}$ とすると $\text{AC} = \text{AB} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$

対角線の交点を H とすると対角線はそれぞれの中点で交わるので

$$\text{AH} = \frac{\text{AC}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle \text{OAH}$ で

$$\text{三平方の定理より } \text{OA} = \sqrt{12^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{194} \text{ cm}$$

O から AB に垂線 OP をひくと

$\triangle \text{OAP}$ で

$$\text{三平方の定理より } \text{OP} = \sqrt{(\sqrt{194})^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} = 13 \text{ cm}$$

$$\text{よって求める表面積は } \frac{1}{2} \times 10 \times 13 \times 4 + 10^2 = 360 \text{ cm}^2$$

問2

直方体の底面の長方形の1辺の長さを $x \text{ cm}$ とすると

もう1辺は $\frac{36}{2} - x = 18 - x \text{ cm}$ と表せる。

よってこの直方体の表面積は

$$6x \times 2 + x(18 - x) \times 2 + 6(18 - x) \times 2 = 216 + 36x - 2x^2$$

これが問1の表面積と等しいことより

$$216 + 36x - 2x^2 = 360$$

$$2x^2 - 36x + 144 = 0$$

$$2(x - 6)(x - 12) = 0$$

$$x = 6, 12$$

$x = 6 \text{ cm}$ のとき

$$\text{もう1辺は } 18 - 6 = 12 \text{ cm}$$

$x = 12 \text{ cm}$ のとき

$$\text{もう1辺は } 18 - 12 = 6 \text{ cm}$$

【問 12】

図 1 は、1 辺の長さが 4 cm の立方体の各面に、対角線 AC, AF, AH, CF, CH, FH をひいたものである。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(山梨県 2006 年度)

問1 図 2 は、図 1 の立方体の展開図に対角線 AC をかき入れたものである。図 2 に対角線 AF, AH, CF, CH, FH をかき入れなさい。ただし、頂点の記号は書かなくてもよい。

図 1

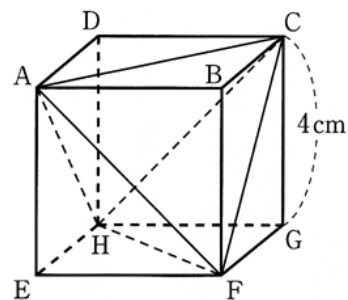
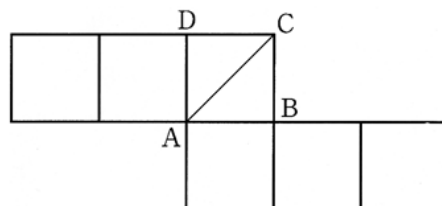


図 2



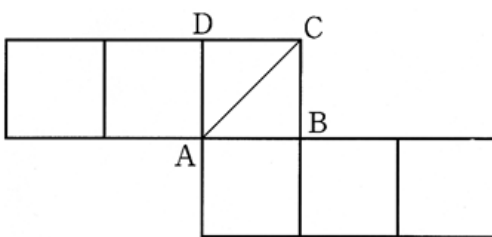
問2 図 1 を見ると、この立方体は、四面体が 5 個集まったものとみることができる。

このとき、次の(1), (2)に答えなさい。

(1) これらの四面体のうち、点 B を 1 つの頂点とする四面体の表面積を求めなさい。

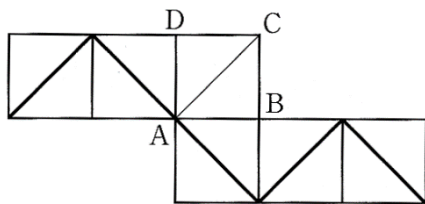
(2) この立方体の体積と、AC, AF, AH, CF, CH, FH を辺とする四面体の体積の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	cm ²
	(2)	:

解答

問1



問2

(1) $(8\sqrt{3} + 24)\text{cm}^2$

(2) 3:1

解説

問2

(1)

Bを頂点とする四面体 BAFC は合同な直角二等辺三角形 3 つと正三角形 ACF でできている。

$\triangle ACF$ の 1 辺の長さは正方形の対角線より $4\sqrt{2}\text{ cm}$

その高さは 60° の角をもつ直角三角形の辺の比を利用して

$$\frac{4\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6}\text{ cm}$$

よって求める表面積は $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 24 + 8\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(2)

立方体の体積は $4^3 = 64\text{ cm}^3$

AC, AF, AH, CF, CH, FH を辺とする四面体は

立方体から四面体 BACF と合同な四角錐 4 つをひいたものだから

その体積は $64 - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 4 = \frac{64}{3}\text{ cm}^3$

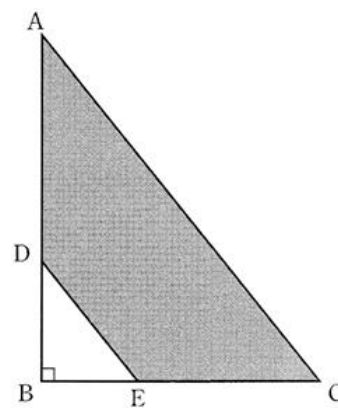
よってその比は $64 : \frac{64}{3} = 3 : 1$

【問 13】

図は、 $\angle B=90^\circ$ の直角三角形 ABC であり、点 D、E は辺 AB、BC 上の点で $DE \parallel AC$ である。BE=3 cm、EC=6 cm、AC=15 cm とする。

(長野県 2006 年度)

(1) DB の長さを求めなさい。



(2) 四角形 ADEC を、直線 AD を軸として 1 回転したときにできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π を用いなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³

解答

(1) 4 cm

(2) 312π cm³

解説

(1)

△ABC で

三平方の定理より $AB = \sqrt{15^2 - (3+6)^2} = 12$ cm

$DE \parallel AC$ より

DB:AB=EB:CB

DB:12=3:9

$DB = \frac{12 \times 3}{9} = 4$ cm

(2)

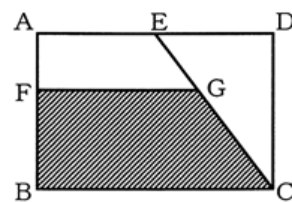
円錐から内部の円錐を除く。

体積は $\frac{1}{3} \times 9^2 \pi \times 12 - \frac{1}{3} \times 3^2 \pi \times 4 = 324\pi - 12\pi = 312\pi$ cm³

【問 14】

図で、四角形 ABCD は長方形、E は辺 AD の中点、F、G はそれぞれ線分 AB、EC 上の点で、 $FG \parallel BC$ 、 $AF = \frac{1}{2} FB$ である。四角形 FBCG を直線 AB を軸として 1 回転させて立体をつくる。

AB=6 cm、BC=9 cm のとき、次の(1)、(2)の問いに答えよ。ただし、円周率は π とする。



(愛知県 A 2006 年度)

(1) この立体の体積は何 cm^3 か。

(2) この立体の表面積は何 cm^2 か。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm^2

解答

(1) $228\pi \text{ cm}^3$

(2) $192\pi \text{ cm}^2$

解説

(1)

BA の延長と CE の延長の交点を P とする。

$\triangle PAE$ と $\triangle CDE$ で

$AE=DE$, $\angle PEA=\angle CED$, $PA \parallel DC$ より $\angle PAE=\angle CDE$ だから

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PAE \cong \triangle CDE$$

よって $PA=CD=6 \text{ cm}$

$$AF = \frac{1}{2} FB \text{ より}$$

$$AF = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ cm}$$

また $\triangle PBC$ において

$FG \parallel BC$ より

$$FG:BC=PF:PB$$

$$FG:9=(6+2):(6+6)$$

$$12FG=8 \times 9$$

$$FG=6 \text{ cm}$$

よって求める体積は

$\triangle PBC$ を回転させたものから $\triangle PFG$ を回転させたものをひけばよいから

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 12 - \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 324\pi - 96\pi = 228\pi \text{ cm}^3$$

(2)

求める表面積は

PC を半径とするおうぎ形から PG を半径とするおうぎ形をひき

半径 FG, BC の 2 つの円の面積を加えたものになる。

$$PC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm}$$

$$PG = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{おうぎ形の中心角は } 360^\circ \times 2\pi \times \frac{9}{2\pi} \times \frac{1}{15} = 216^\circ$$

$$\text{よって } \pi \times 15^2 \times \frac{216}{360} - \pi \times 10^2 \times \frac{216}{360} + \pi \times 6^2 + \pi \times 9^2 = 135\pi - 60\pi + 36\pi + 81\pi = 192\pi \text{ cm}^2$$

【問 15】

$AB=3\text{ cm}$, $AC=5\text{ cm}$, $AD=5\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$, $BD=4\text{ cm}$, $CD=4\sqrt{2}\text{ cm}$ の三角すい $ABCD$ がある。
このとき、次の問い1・2に答えよ。

(京都府 2006 年度)

問1 三角すい $ABCD$ の 4 つの面の三角形のうち、直角三角形であるものはどれか、次の(ア)～(エ)からすべて
選べ。

(ア) $\triangle ABC$

(イ) $\triangle ABD$

(ウ) $\triangle ACD$

(エ) $\triangle BCD$

問2 三角すい $ABCD$ の体積を求めよ。

解答欄

問1	
問2	cm^3

解答

問1 (ア) (イ) (エ)

問2 8 cm^3

解説

問2

$\angle CBD = \angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$ より

底面を $\triangle BCD$ とすると

高さは $AB=3\text{ cm}$

よって求める体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 3 = 8\text{ cm}^3$

【問 16】

図 I において、立体 $ABCDEF-GHIJKL$ は底面が正六角形で側面がすべて合同な長方形の六角柱であり、 $GH=8\text{ cm}$ である。 P は正六角形 $ABCDEF$ の対称の中心であり、 Q は正六角形 $GHIJKL$ の対称の中心である。このとき、直線 PQ は二つの底面に垂直になる。 O は、直線 PQ 上にあつて $OP=PQ$ となる点のうち Q と異なる点である。3 点 A, H, C 、3 点 C, J, E 、3 点 E, L, A をそれぞれ結ぶ。 $AG=a\text{ cm}$ とする。

図 I

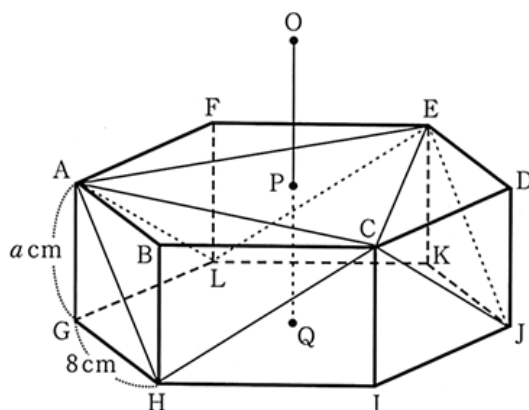


図 I 中の六角柱を使い、三つの四面体 $BAHC$ 、 $DCJE$ 、 $FELA$ をそれぞれ直線 AC 、 CE 、 EA を軸として回転させ、3 点 B, D, F を点 P に重ねるとき 3 点 H, J, L は点 O の位置で重なる。図 II は、そのときにできる立体を示しており、図 II 中の H, J, L は、三つの四面体を回転させる前の点の位置を表している。

図 II

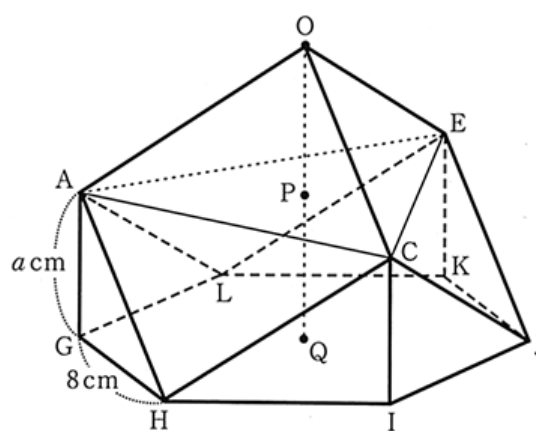


図 II において、 O は平面 AHC 、 CJE 、 ELA 上にあり、四角形 $OAHC$ 、 $OCJE$ 、 $OELA$ は合同なひし形になる。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2006 年度 前期)

問1 図 II において、 G と Q とを結んでできる四角形 $OAGQ$ は、 $AG \parallel OQ$ の台形になる。 $\triangle AGH$ の内角 $\angle GAH$ の大きさを b° とするとき、台形 $OAGQ$ の内角 $\angle OAG$ の大きさを b を用いて表しなさい。

問2 図 II において、ひし形 $OAHC$ が正方形になるときの a の値を求めなさい。求め方も書くこと。

問3 図 I 中の六角柱の体積と図 II の立体の体積とは等しい。そこで、次に、表面積について考える。図 I 中の六角柱の表面積を $S\text{ cm}^2$ とし、図 II の立体の表面積を $T\text{ cm}^2$ とするとき、 $a=3$ の場合の $S-T$ の値を求めなさい。

解答欄

問1	度
問2	
	求め方
問3	

問2

$$4\sqrt{2}$$

求め方

直線 GI と直線 HQ との交点を M とすると

$\triangle GHM$ は $GH=8\text{ cm}$, $\angle GMH=90^\circ$, $\angle GHM=60^\circ$ の直角三角形だから

$$GM = \frac{\sqrt{3}}{2} GH = 4\sqrt{3} \text{ cm だから}$$

$$GI=2GM=8\sqrt{3} \text{ cm}$$

AC=GI だから $AC=8\sqrt{3}$ cm

ひし形 $OAHC$ が正方形のとき $\triangle AHC$ は $HA=HC$ の直角二等辺三角形だから

$$AH = \frac{1}{\sqrt{2}} AC = 4\sqrt{6} \text{ cm}$$

$\triangle AGH$ は $\angle AGH = 90^\circ$ の直角三角形だから

$AH^2 = AG^2 + GH^2$ だから

$$(4\sqrt{6})^2 = a^2 + 8^2$$

これを解くと

$a > 0$ より

$$a=4\sqrt{2}$$

問3 $72 - 24\sqrt{3}$

解説

問3

$\triangle PAB$ は 1 辺が 8cm の正三角形だから P から AB に垂線 PR をひくと $PR = \sqrt{3} AR = 4\sqrt{3}$ cm

よって正六角形 ABCDEF の面積は $6 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2$

したがって $S = 96\sqrt{3} \times 2 + 8 \times 3 \times 6 = 192\sqrt{3} + 144 \text{ cm}^2 \cdots \textcircled{1}$

 $\triangle BAC$ において

B から AC に垂線 BN をひくと

$\triangle ABN$ は $\angle ABN = 60^\circ$ の直角三角形だから

$$AN = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$AC=2AN=2\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}\text{ cm}$$

$\triangle AGH$ は直角三角形だから $AH = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$ cm

 ΔH_{AC} は

HA=HC の二等辺三角形だから H と N を結ぶと $\angle ANH=90^\circ$

三平方の定理より $\text{HN} = \sqrt{(\sqrt{73})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 5 \text{ cm}$

よって $T = 6 \times 16\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times 6 + \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 5 \times 6 = 96\sqrt{3} + 72 + 120\sqrt{3} = 216\sqrt{3} + 72 \text{ cm}^2 \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

$$S-T=192\sqrt{3}+144-(216\sqrt{3}+72)=72-24\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

【問 17】

図Ⅰ～図Ⅲにおいて、立体 $ABCD=EFGH$ は直方体である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2006 年度 後期)

問1 図Ⅰにおいて、次のア～エのうち、辺 AB とねじれの位置にある辺はどれですか。一つ選び、記号を書きなさい。

- | |
|----------|
| ア 辺 BC |
| イ 辺 CG |
| ウ 辺 EF |
| エ 辺 HG |

問2 図Ⅱ，図Ⅲにおいて、 $AB=7\text{ cm}$ ， $AD=9\text{ cm}$ ， $AE=5\text{ cm}$ である。

I ， J はそれぞれ辺 AE ， BF 上の点であり、 $AI=BJ=4\text{ cm}$ である。

P は辺 AD 上にあつて A ， D と異なる点であり、 Q は辺 BC 上にあつて B ， C と異なる点である。 $AP=BQ$ である。 P と I ， I と J ， J と Q ， Q と P とをそれぞれ結ぶ。このとき、四角形 $PIJQ$ は長方形になる。

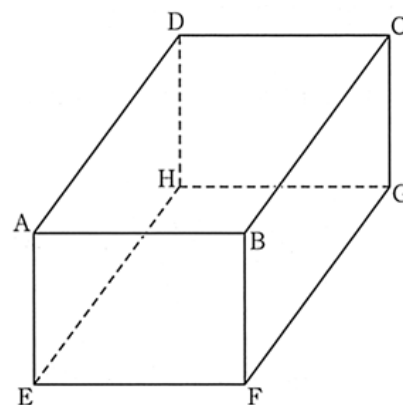
(1) 図Ⅱは、 $AP=AI$ ， $BQ=BJ$ であるときの状態を示している。図Ⅱにおいて、

① 長方形 $PIJQ$ の面積を求めなさい。

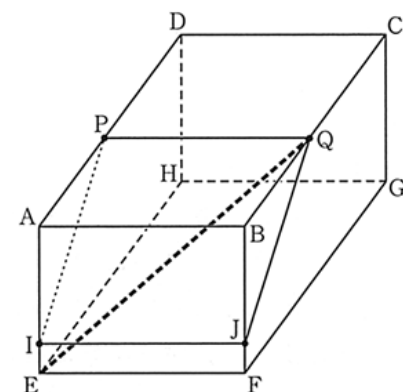
② E と Q とを結んでできる線分 EQ の長さを求めなさい。

(2) 直方体 $ABCD-EFGH$ は、平面 $PIJQ$ によって三角柱と五角柱とに分けられる。図Ⅲは、五角柱 $PIEHD-QJFGC$ の体積が三角柱 $AIP-BJQ$ の体積の 2 倍であるときの状態を示している。図Ⅲにおいて、線分 BQ の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

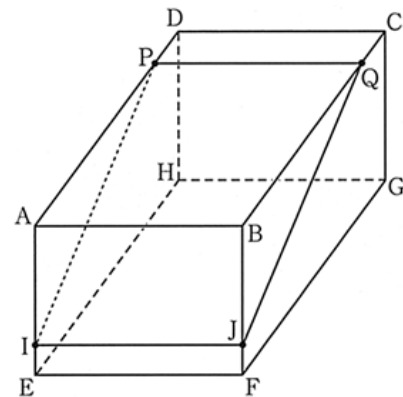
図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅲ



解答欄

問1			
問2	(1)	①	cm ²
		②	cm
	(2)	cm	
		求め方	

解答

問1 イ

問2

(1)

① $28\sqrt{2} \text{ cm}^2$

② $3\sqrt{10} \text{ cm}$

(2)

$\frac{15}{2} \text{ cm}$

求め方

五角柱 $\text{PIEHD}-\text{QJFGC}$ の体積が三角柱 $\text{AIP}-\text{BJQ}$ の体積の 2 倍であり

この二つの角柱の高さが等しいから

五角形 QJFGC の面積が $\triangle \text{BJQ}$ の面積の 2 倍である。

$\text{BQ} = x \text{ cm}$ とすると

$$\triangle \text{BJQ} = \frac{1}{2} \times \text{BJ} \times \text{BQ} = 2x \text{ cm}^2$$

よって五角形 QJFGC の面積は

$$4x \text{ cm}^2$$

また長方形 BFGC の面積は

$$\text{BF} \times \text{BC} = 45 \text{ cm}^2$$

$$\text{よって } 2x + 4x = 45$$

これを解くと

$$x = \frac{15}{2}$$

解説

問2

(1)

①

$\text{AP} = \text{AI}$, $\angle \text{PAI} = 90^\circ$ より

$\triangle \text{API}$ は直角二等辺三角形だから

$$\text{PI} = \sqrt{2} \times \text{AI} = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{長方形 PIJQ} = \text{PI} \times \text{IJ} = 4\sqrt{2} \times 7 = 28\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

②

Q から FG に垂線 QK をひく。

$\triangle \text{EFK}$ において

$$\text{三平方の定理より } \text{EK} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} \text{ cm}$$

$\triangle \text{QKE}$ で

$$\text{三平方の定理より } \text{EQ} = \sqrt{(\sqrt{65})^2 + 5^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ cm}$$

【問 18】

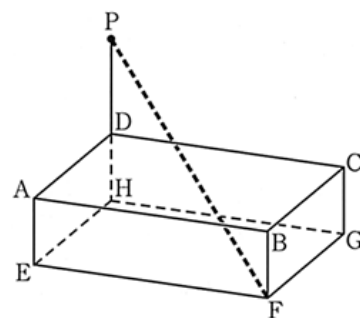
図Ⅰ～図Ⅲにおいて、立体 $ABCD-EFGH$ は $AB=7\text{ cm}$, $AD=3\text{ cm}$, $AE=2\text{ cm}$ の直方体である。P は、直線 DH 上にあつて D について H と反対側にある点である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2006 年度 後期)

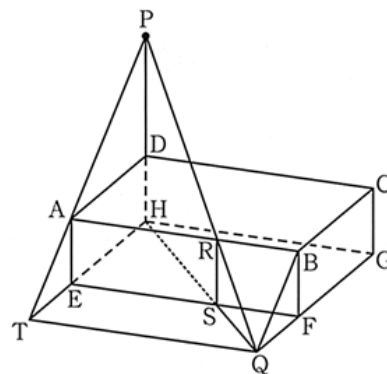
問1 図Ⅰにおいて、P と F とを結んでできる線分 PF の長さが 9 cm であるときの線分 PH の長さを求めなさい。

図Ⅰ



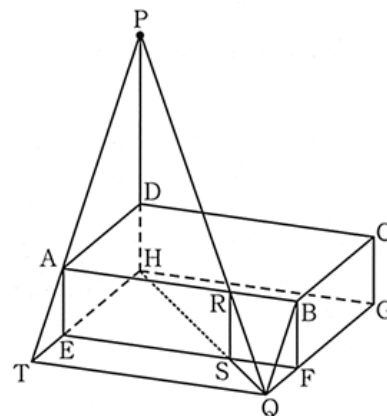
問2 図Ⅱ, 図Ⅲにおいて、Q は直線 FG 上にあつて F について G と反対側にある点である。P と Q とを結んでできる線分 PQ は辺 AB と交わっている。R は線分 PQ と辺 AB との交点である。S は H と Q とを結んでできる線分 HQ と辺 EF との交点である。R と S とを結ぶ。このとき、 $RS \parallel DH$ となり、四角形 $RSFB$ は長方形となる。T は直線 PA と直線 HE との交点である。B と Q, T と Q とをそれぞれ結ぶ。このとき、四角形 $ETQF$ は長方形となる。また、 $AB \parallel TQ$ となり、四角形 $ATQB$ は長方形となる。

図Ⅱ



(1) 図Ⅱにおいて、 $RB=x\text{ cm}$ とし、そのときの線分 PH の長さを $y\text{ cm}$ とする。 $0 < x < 7$ として、 y を x の式で表しなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

図Ⅲ



(2) 図Ⅲは、 $RB=2\text{ cm}$ であるときの状態を示している。図Ⅲにおいて、

① 線分 QF の長さを求めなさい。

② 三角柱 $ATE-BQF$ は平面 PHQ によって二つの立体に分けられる。その二つの立体のうち、点 T をふくむ方の立体の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm		
問2	(1)		
		求め方	
	(2)	①	cm
		②	cm ³

解答

問1 $\sqrt{23}$ cm

問2

(1)

$$y = \frac{14}{x}$$

求め方

立体 ABCD-EFGH は直方体だから SF // HG だから

$$QS:QH = SF:HG \cdots \textcircled{1}$$

また RS // DH だから

$$QS:QH = RS:PH \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$SF:HG = RS:PH \cdots \textcircled{3}$$

四角形 RSFB は長方形だから

$$RS = BF = 2 \text{ cm} \quad SF = RB = x \text{ cm} \cdots \textcircled{4}$$

立体 ABCD-EFGH は直方体だから

$$HG = AB = 7 \text{ cm} \cdots \textcircled{5}$$

③, ④, ⑤より

$$x:7 = 2:y \text{ だから}$$

$$xy = 14$$

$x > 0$ だから

これを y について解くと

$$y = \frac{14}{x}$$

(2)

$$\textcircled{1} \quad \frac{6}{5} \text{ cm}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{34}{5} \text{ cm}^3$$

解説

問1

$$\triangle EHF \text{ で三平方の定理より } HF = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} \text{ cm}$$

$$\triangle PHF \text{ で三平方の定理より } PH = \sqrt{9^2 - (\sqrt{58})^2} = \sqrt{23} \text{ cm}$$

問2

(2)

①

AE // PH より TE:TH = AE:PH

$$TE = QF$$

$$EH = 3 \text{ cm}$$

$$AE = 2 \text{ cm}$$

$$PH = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm より}$$

$$QF:(QF+3) = 2:7$$

$$2(QF+3) = 7QF$$

$$5QF = 6$$

$$QF = \frac{6}{5} \text{ cm}$$

②

求める体積は

三角柱 ATE-BQF-四角すい Q-RSFB

$$= \frac{1}{2} \times BF \times QF \times AB - \frac{1}{3} \times BR \times BF \times QF$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{6}{5} \times 7 - \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \frac{6}{5} = \frac{42}{5} - \frac{8}{5} = \frac{34}{5} \text{ cm}^3$$

【問 19】

高さ 8 cm の容器を、口が水平になるように固定して、その中に水を入れるとき、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。なお、容器の厚さは考えないものとする。

(兵庫県 2006 年度)

問1 図 1 の容器 A は円柱、B は円すい、C は図 2 の半径 5 cm の半円をその直径を軸として回転させてできた球を平面で切った形である。また、3 つの容器の口は円で、その半径はすべて等しい。これらの容器にそれぞれ毎秒 $8\pi \text{ cm}^3$ の割合で水を入れたとき、入れ始めてからの時間と水面の高さの関係をグラフに表すと図 3 のようになった。

図 1

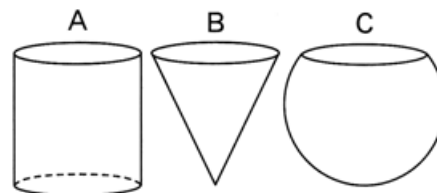


図 2

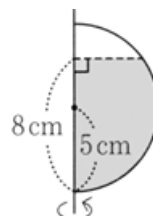
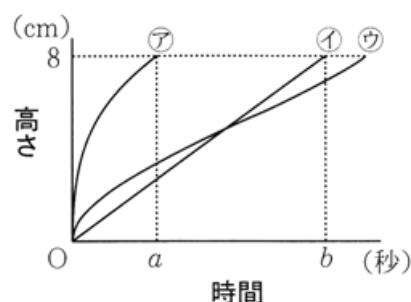


図 3



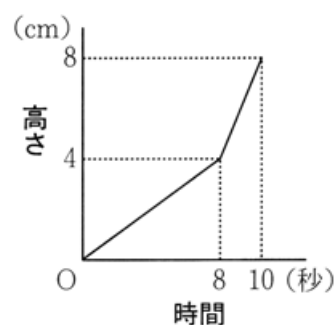
(1) 図 3 の㉞, ㉟, ㊱は、それぞれ容器 A, B, C のどれに水を入れたときのグラフか、記号で答えなさい。

(2) 容器の口の半径を、図 2 を参考に求めなさい。

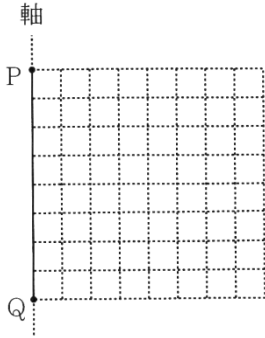
(3) 図 3 のグラフ㉞, ㉟において、高さが 8 cm になったときの時間 a, b の値を求めなさい。

問2 図 4 は、ある回転体の容器に、毎秒 $8\pi \text{ cm}^3$ の割合で水を入れたときの、入れ始めてからの時間と水面の高さの関係を表した折れ線グラフである。この容器は、どんな平面図形を回転させてできた形か。解答欄の PQ を 1 辺とするような図形を、斜線で表しなさい。ただし、辺 PQ を回転の軸とし、P の側を口とする。なお、解答欄の 1 目盛りは 1 cm とする。

図 4



問1	(1)		
			
			
	(2)	cm	
	(3)	$a=$	
$b=$			

問2	軸 P Q 
----	---

解答

問1

(1)

㊦ B

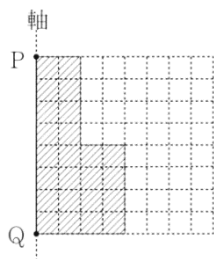
㊤ A

㊵ C

(2) 4cm

(3) $a = \frac{16}{3}$, $b = 16$

問2



解説

問1

(2)

三平方の定理より半径は $\sqrt{5^2 - (8-5)^2} = \sqrt{16} = 4$ cm

(3)

A の円柱に水を入れるのにかかる時間は $b = \pi \times 4^2 \times 8 \div 8\pi = 16$ 秒

B の円すいの体積はその $\frac{1}{3}$ の体積だからかかる時間も $\frac{1}{3}$

よって $a = \frac{16}{3}$ 秒

問2

増え方が一定なので容器は 2 種類の円柱を組み合わせたものとわかる。

最初の 8 秒間に水が入る容器の半径を x cm とすると

$$\pi \times x^2 \times 4 = 8\pi \times 8$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ cm}$$

8 秒後から 10 秒後までに水が入る容器の半径を y cm とすると

$$\pi \times y^2 \times (8-4) = 8\pi \times (10-8)$$

$$y^2 = 4$$

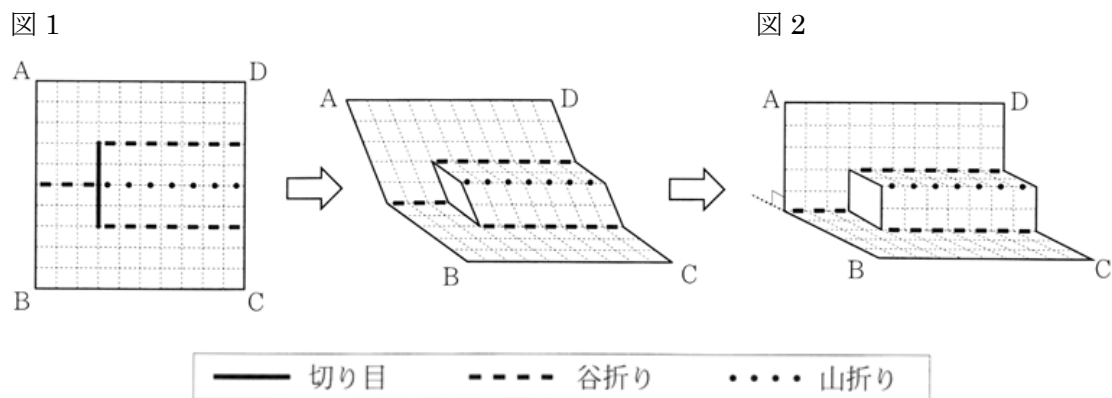
$$y = 2 \text{ cm}$$

【問 20】

1 辺 10 cm の正方形の方眼紙 ABCD がある。図 1 のように切り目と折り目の線分を入れた方眼紙 ABCD を折り曲げ、折り目を境とする 2 面が垂直で、BC を含む面が底面になるように置くと、図 2 のような図形になった。

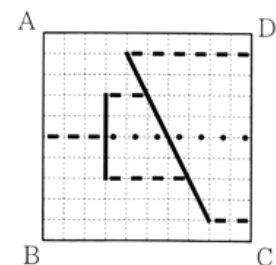
次の問いに答えなさい。ただし、できた図形の面はすべて平面とする。なお、方眼紙の 1 目盛りは 1 cm とし、方眼紙の厚さは考えないものとする。

(兵庫県 2006 年度)



問1 図 2 の図形において、底面と垂直な面をすべて、解答欄の図に斜線で表しなさい。

問2 図 3 のように切り目と折り目の線分を入れた方眼紙 ABCD を、上と同じように折り曲げ、折り目を境とする 2 面が垂直で、BC を含む面が底面になるように置く。
この図形を真上から見ると、見える辺を解答欄の図に実線でかき加えなさい。



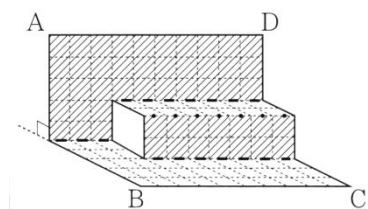
問3 問2で作った図形において、底面と垂直な面の面積の和を求めなさい。

解答欄

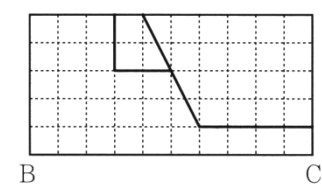
問1	
問2	
問3	cm^2

解答

問1



問2



問3 44 cm^2

解説

問3

$$\begin{aligned}
 \text{求める面積は } & 5 \times 10 - \left\{ \frac{1}{2} (2+3) \times 2 + \frac{1}{2} (4+6) \times 4 \right\} + \frac{1}{2} (3+4) \times 2 + \frac{1}{2} (2+4) \times 4 \\
 & = 50 - 25 + 7 + 12 \\
 & = 44 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

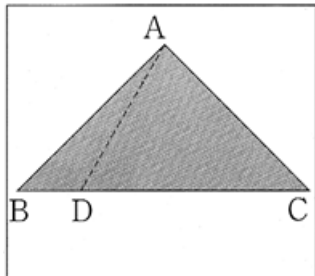
【問 21】

写真①のような $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 4\sqrt{2}$ cm の直角二等辺三角形の紙がある。

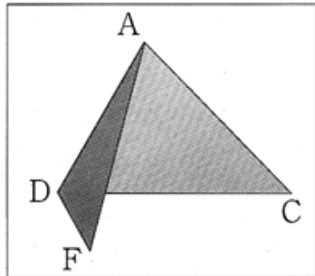
まず、辺 BC 上に点 D をとり、AD を折り目として折り返し、点 B が移動した点を F とする (写真②)。

次に、辺 AC が、AF と重なるように折り返し、その折り目を AE とする (写真③)。

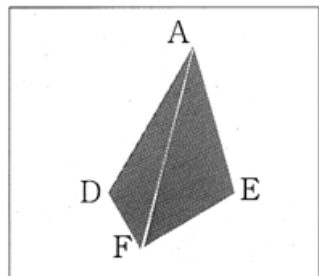
写真① (折る前)



写真② (折り目で AD で折り返す)



写真③ (AC を AF に重ねる)



図は、上の写真①～③を模式的に表したものである。この図をもとにして、次の各問いに答えなさい。また、点 A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を H とする。

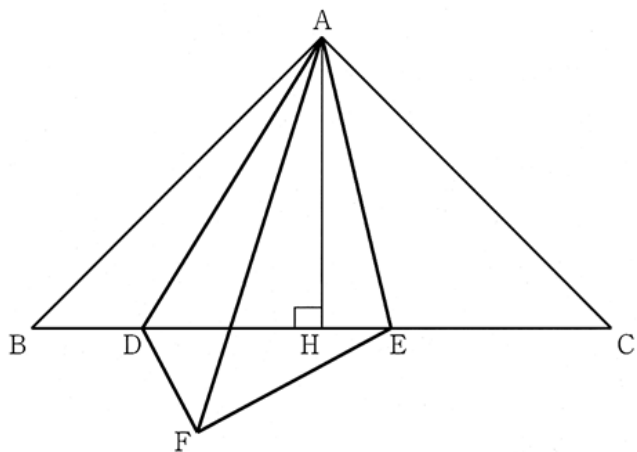
(鳥取県 2006 年度)

問1 図において、DE の長さを x cm とするとき、次の 図

三角形の面積を x を用いて表しなさい。

(1) $\triangle ADE$

(2) $\triangle DEF$



問2 図において、 $BD = 1$ cm とする。

(1) DE の長さを求めなさい。

(2) AD を折り目として、 $\triangle AFD$ を元の $\triangle ABD$ の位置に戻すとき、 $\triangle AFD$ の通過した部分の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

解答欄

問1	(1)	$\triangle ADE =$ cm^2
	(2)	$\triangle DEF =$ cm^2
問2	(1)	$DE =$ cm
	(2)	cm^3

解答

問1

(1) $\triangle ADE = 2x \text{ cm}^2$

(2) $\triangle DEF = 16 - 4x \text{ cm}^2$

問2

(1) $DE = \frac{25}{7} \text{ cm}$

(2) $\frac{8}{15} \pi \text{ cm}^3$

解説

問2

(2)

$$AD = \sqrt{4^2 + (4-1)^2} = 5 \text{ cm}$$

AD の延長上に $\angle APB = 90^\circ$ となる点 P をとる。

$DP = a \text{ cm}$ とすると三平方の定理より

$$BP^2 = AB^2 - AP^2 = BD^2 - DP^2$$

$$(4\sqrt{2})^2 - (5+a)^2 = 1^2 - a^2$$

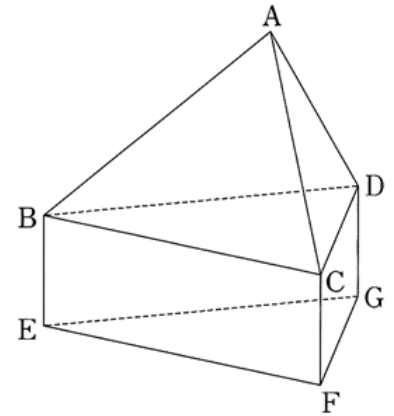
$$a = \frac{3}{5} \text{ cm}$$

$$BP = \sqrt{1^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって求める体積は } \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(5 + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} \right\} = \frac{8}{15} \pi \text{ cm}^3$$

【問 22】

図は、三角すいと三角柱を合わせた形で、点 A, B, C, D, E, F, G を頂点とする立体を表している。三角すい ABCD は、 $AB=AC=5\text{ cm}$, $AD=4\text{ cm}$, $BD=CD=5\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$ である。三角柱 BCDEFG は、側面がすべて長方形で、 $BE=2\text{ cm}$ である。



次の問1～問3の の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2006 年度)

問1 図に示す立体で、辺 BC とねじれの位置にある辺は、全部で 本 ある。

問2 図に示す立体において、三角柱 BCDEFG の体積は cm^3 である。

問3 図に示す立体において、辺 AD 上に点 P を、 $\triangle EPF$ の面積が最も小さくなるようにとる。このとき、 $\triangle EPF$ の面積は cm^2 である。

解答欄

問1	
問2	
問3	

解答

問1 4

問2 24

問3 $6\sqrt{3} + 3$ または $3 + 6\sqrt{3}$

解説

問2

D から BC に垂線 DH をひく。

$\triangle DBC$ は $DB=DC$ の二等辺三角形だから $BH = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

$\triangle DBH$ において

三平方の定理より $DH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$

よって求める体積は

$\triangle DBC \times BE$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 2 = 24 \text{ cm}^3$$

問3

$\triangle EPF$ は $PE=PF$ になるから面積が最も小さくなるのは

EF の中点を K とすると $AD \perp KP$ のとき。

また $\triangle AHD$ は $AH=DH=AD=4 \text{ cm}$ より正三角形なので

$\angle ADH = 60^\circ$

KP と HD の交点を Q とすると

$\triangle PDQ \sim \triangle HKQ$

よって $\triangle HKQ$ において

$\angle HKQ = \angle PDQ = 60^\circ$, $\angle KHQ = 90^\circ$ より

$HK : KQ : HQ = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$HK = 2 \text{ cm}$ だから $KQ = 4 \text{ cm}$, $HQ = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

よって $QD = 4 - 2\sqrt{3} \text{ cm}$

$\triangle PDQ$ において

同様に $PD : QD : QP = 1 : 2 : \sqrt{3}$ だから

$QP = 2\sqrt{3} - 3 \text{ cm}$

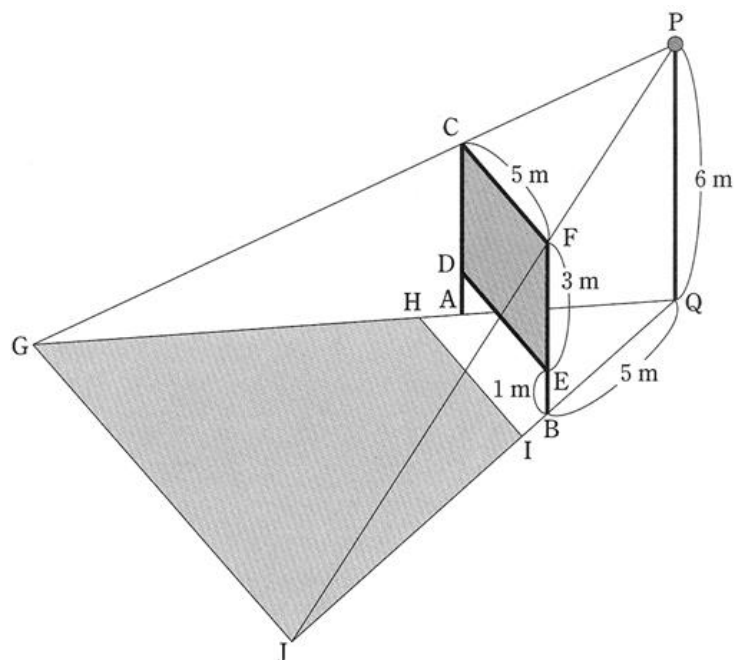
よって $\triangle EPF = \frac{1}{2} \times 6 \times (4 + 2\sqrt{3} - 3) = 3 + 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$

【問 23】

下の図のように、平面上の点 Q から平面に垂直で高さ 6 m の点 P の位置に電灯がある。点 Q から 5 m 離れた 2 点 A, B があり、2 点 A, B から平面に垂直に柱を立て、その柱に縦 3 m 、横 5 m の看板 $CDEF$ を、看板の下端が平面から 1 m の高さになるように取り付けると、点 P の位置にある電灯の光で看板の影 $GHIJ$ ができた。

このとき、次の(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(佐賀県 2006 年度 後期)



(1) 線分 AG の長さを求めなさい。

(2) 線分 GJ の長さを求めなさい。

(3) 看板の影 $GHIJ$ の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	m
(2)	m
(3)	m ²

解答

(1) 10 m

(2) 15 m

(3) $\frac{189\sqrt{3}}{4}$ m²

解説

(2)

△QAB は 3 辺が等しいので正三角形。

また△QGJ で

AB // GJ より ∠QGJ = ∠QJG = 60°

よって△QJG も正三角形。

GJ = QG = 5 + 10 = 15 m

(3)

△IPQ で

EB // PQ より

IB : IQ = EB : PQ

IB : (IB + 5) = 1 : 6

6IB = IB + 5

IB = 1 m

IJ = HG = 10 - 1 = 9 m

△PHI で

DE : HI = PE : PI = QB : QI だから

5 : HI = 5 : (5 + 1)

5HI = 30

HI = 6 m

また I から GJ に垂線 IK をひく。

△IJK で

∠J = 60° より

IK = $\sqrt{3}$ KJ

$= \sqrt{3} \times \frac{15-6}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

よって四角形 GHIJ = $\frac{1}{2} \times (6+15) \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{189\sqrt{3}}{4}$ m²

【問 24】

図 1, 図 2 のように, 8 つの点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とする直方体 ABCDEFGH があり, $AB=AD=3\sqrt{2}$ cm, $AE=8$ cm である。辺 AE の中点を M とするとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2006 年度)

問1 直方体 ABCDEFGH の体積は何 cm^3 か。

問2 線分 BM の長さは何 cm か。

問3 三角形 BDM はどんな形の三角形か。その名称を答えよ。

問4 三角形 BDM の面積は何 cm^2 か。

問5 図 2 のように、頂点 A から 3 点 B, D, M をふくむ平面にひいた垂線とこの平面との交点を P とする。このとき、線分 AP の長さは何 cm か。

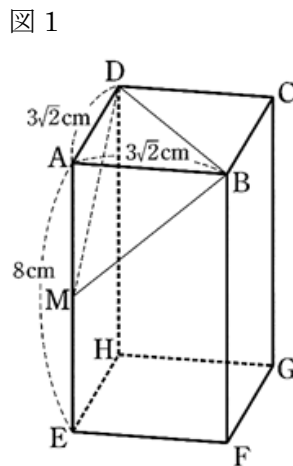
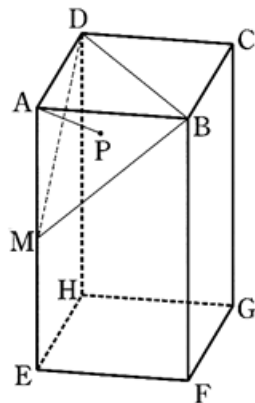


图 2



解答欄

問1	cm^3
問2	cm
問3	三角形
問4	cm^2
問5	cm

解答

問1 144 cm^3

問2 $\sqrt{34} \text{ cm}$

問3 二等辺 三角形

問4 15 cm^2

問5 $\frac{12}{5} \text{ cm}$

解説

問5

三角すい MABD の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle ABD \times AM = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times 4 = 12 \text{ cm}^3$$

またこの体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle BDM \times AP = \frac{1}{3} \times 15 \times AP = 5AP \text{ cm}^3$$

$$\text{よって } 5AP = 12 \quad AP = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

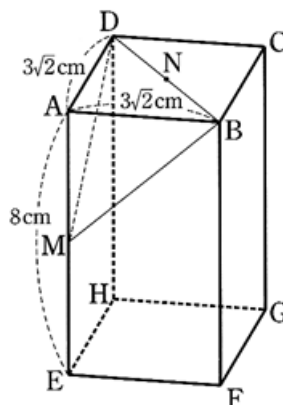
【問 25】

図 1, 図 2 のように, 8 つの点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とする直方体 ABCDEFGH があり, $AB=AD=3\sqrt{2}$ cm, $AE=8$ cm である。辺 AE の中点を M, 線分 BD の中点を N とするとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2006 年度)

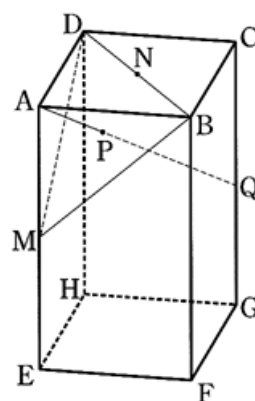
問1 4 つの点 A, B, D, M を頂点とする三角すい ABDM の体積は何 cm^3 か。

図 1



問2 三角形 BDM はどんな形の三角形か。その名称を答えよ。

図 2



問3 線分 MN の長さは何 cm か。

問4 図 2 のように, 頂点 A から 3 点 B, D, M をふくむ平面にひいた垂線とこの平面との交点を P とすると, 直線 AP は, 辺 CG と交わっている。直線 AP と辺 CG との交点を Q とするとき, 次の(1), (2)に答えよ。

(1) 線分 CQ の長さは何 cm か。

(2) 線分 AP と線分 PQ の長さの比を最も簡単な整数の比で表せ。

解答欄

問1	cm ³	
問2	三角形	
問3	cm	
問4	(1)	cm
	(2)	AP:PQ= :

解答

問1 12 cm³

問2 二等辺 三角形

問3 5 cm

問4

(1) $\frac{2}{9}$ cm

(2) AP:PQ=8:17

解説

問4

(2)

PN:CQ=AN:AQ

$$\frac{9}{5} : \frac{9}{2} = 3:AQ$$

$$\frac{9}{5} AQ = \frac{27}{2}$$

$$AQ = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } AP:PQ = \frac{12}{5} : \left(\frac{15}{2} - \frac{12}{5} \right) = \frac{12}{5} : \frac{51}{10} = 8:17$$

【問 26】

図 I のような、紙でつくった半径 25 cm 、中心角 108° のおうぎ形 OAB がある。 $\widehat{AB}$ を 6 等分した点を、点 A に近い方から、順に C, D, E, F, G とする。

このとき、次の 1～4 の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とし、紙の厚さは考えないものとする。

(宮崎県 2006 年度)

問1 図 I において、 $\widehat{AB}$ の長さを求めなさい。

図 I

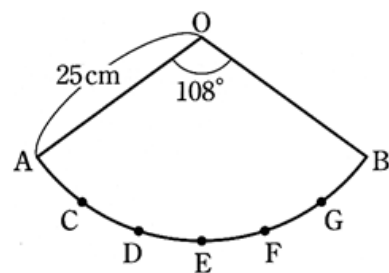
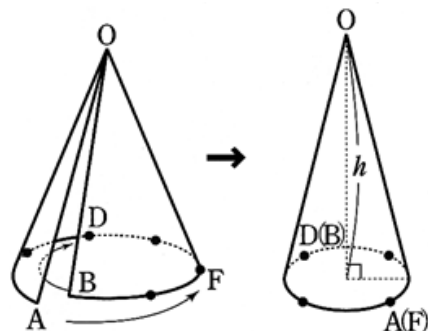


図 II

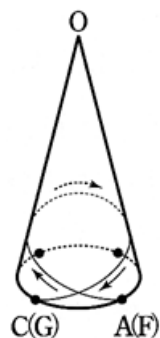
図 III

問2 図 I のおうぎ形 OAB から、図 II のように、線分 OA と OF 、線分 OB と OD が重なるようにはりあわせて、図 III のような円錐の形をした帽子をつくる。このとき、帽子の高さ h を求めなさい。



問3 図 IV のように、点 $A(F)$ から帽子の側面にそって、矢印の方向にリボンを、1 回交わるように点 $C(G)$ まで巻く。このように巻いたリボンの長さが、最も短くなる時のリボンの長さを求めなさい。ただし、リボンの幅や厚さは考えないものとする。

図 IV

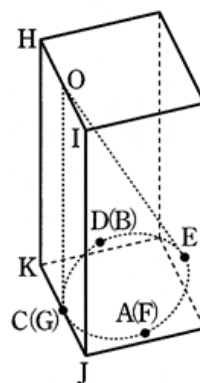


問4 図 V のように、図 IV の帽子がぴったりとはいる直方体の箱を、次の ①、② の条件をみたすように紙でつくる。

図 V

- ① 帽子の点 $O, C(G)$ は、それぞれ直方体の辺 HI, KJ の中点と重なっている。
- ② 帽子の点 $A(F), E, D(B)$ は、直方体の内側の面にくっついている。

このとき、直方体の箱の体積を求めなさい。ただし、紙の厚さは考えないものとする。



解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm
問4	cm ³

解答

問1 $\widehat{AB} = 15\pi$ cm

問2 $h = 10\sqrt{6}$ cm

問3 $25\sqrt{2}$ cm

問4 $1000\sqrt{6}$ cm³

解説

問1

$$2\pi \times 25 \times \frac{108}{360} = 15\pi \text{ cm}$$

問2

できた円錐の底面の半径を r とすると円周の関係より

$$2\pi r = \frac{4}{6} \times 15\pi$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$\text{よって } h = \sqrt{25^2 - 5^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6} \text{ cm}$$

問3

最短のリボンの長さは展開図のおうぎ形の弦 AG になる。

$$\text{中心角 } 108^\circ \times \frac{5}{6} = 90^\circ \text{ より}$$

$$AG = 25 \times \sqrt{2} = 25\sqrt{2} \text{ cm}$$

問4

面 HIJK と向かい合う面を XYZW とおき XY, ZW の中点をそれぞれ P, Q とする。

PE = x cm とおくと EQ = $25 - x$ cm となる。

PO = CQ だから三平方の定理より

$$25^2 - x^2 = 10^2 - (25 - x)^2$$

これを解いて

$$x = 23 \text{ cm}$$

$$\text{よって } JZ = CQ = \sqrt{10^2 - (25 - 23)^2} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{したがって立体の体積は } 4\sqrt{6} \times 10 \times 25 = 1000\sqrt{6} \text{ cm}^3$$

【問 27】

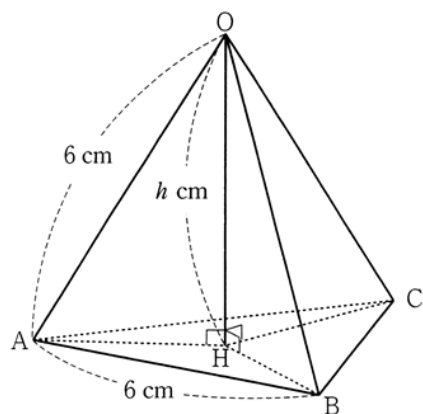
下の図Ⅰは、4つの面が1辺の長さ6 cm の正三角形からなる三角すいOABCであり、三角すいの高さを h cm とし、 $h=OH$ とする。

図Ⅱは、底面の正三角形ABCを表したものであり、 $AH=BH=CH$ となっている。

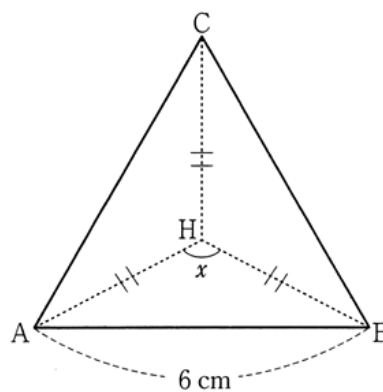
このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2006 年度)

図Ⅰ



図Ⅱ



問1 図Ⅱの $\angle x$ の大きさを求めなさい。

問2 高さ h を求めなさい。

問3 三角すいOABCの体積を求めなさい。

解答欄

問1	$\angle x =$ °
問2	$h =$ cm
問3	cm^3

解答

問1 $\angle x = 120^\circ$

問2 $h = 2\sqrt{6} \text{ cm}$

問3 $18\sqrt{2} \text{ cm}^3$

解説

問2

H から AB に垂線 HD をひく。

$\angle AHD = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$ より

$$AH = \frac{2}{\sqrt{3}} AD = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 3 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって $h = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$

問3

$$DH = \frac{1}{2} AH = \sqrt{3} \text{ cm}$$

よって求める体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times CD \times OH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times (2\sqrt{3} + \sqrt{3}) \times 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$