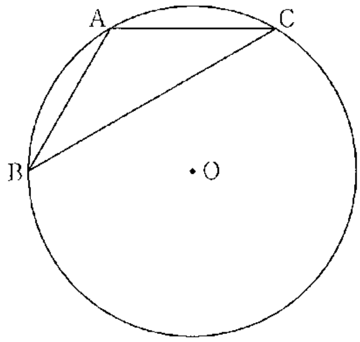
5. 合同･相似以外の証明･その他複合問題 【2011 年度出題】

【問 1】

図のように，半径 6 cm の円 O の円周上に 3 点 A, B, C があります。AB＝AC，∠ABC＝30° とします。点 D は，点 B を出発して，点 A をふくまない弧 BC 上を，点 C まで移動します。

2 点 C, D 間の距離が最大となるとき，四角形 ABDC の面積は $27\sqrt{3}$ cm^2 であることを説明しなさい。ただし，四角形 ABDC の面積を求める式も書きなさい。

（北海道　2011 年度）



解答欄

〔説明〕

解答
2 点 C, D 間の距離が最大となるのは
線分 CD が円 O の直径のときである。
四角形 ABDC を△AOC, △AOB, △BOD の 3 つに分けて考える。
∠ABC＝30°より∠AOC＝60°であるから
△AOC は正三角形である。…①
また AB＝AC より, △AOB は正三角形である。…②
①, ②より
△BOD は正三角形である。
正三角形 AOC, AOB, BOD の一辺の長さは 6 cm であるから
四角形 ABDC の面積を求める式は $3\times\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=27\sqrt{3}$
よって $27\sqrt{3}$ cm^2

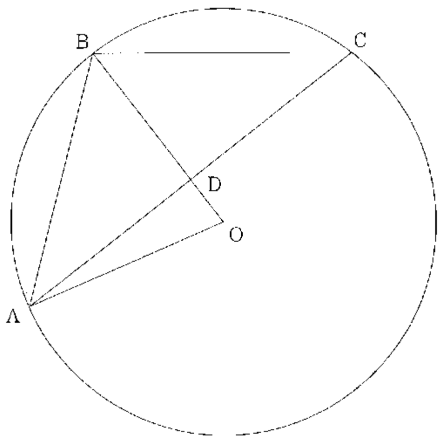
【問 2】

図1のような，線分 OA を半径とする円 O があります。円 O の周上に 2 点 B，C を AB＝BC，∠ABC＞90° となるようにとり，三角形 ABC をつくります。また，点 O と点 B を結び，線分 OB と辺 AC との交点を D とします。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（宮城県　2011 年度）

図1

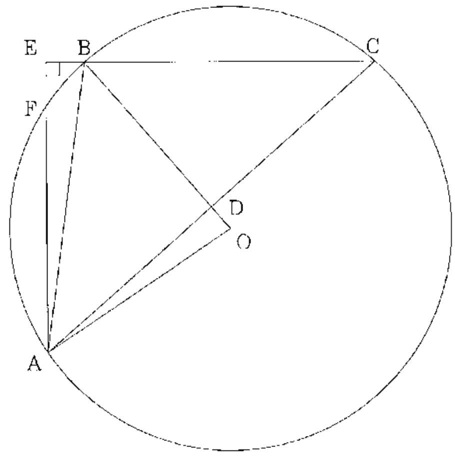


(1) ∠OBA＝∠OBC であることを証明しなさい。

(2) AB＝4 cm，AC＝6 cm とします。図2は，図1において，辺 BC を B の方へ延長した直線上に，点 E を CE⊥AE となるようにとり，点 A と点 E を結んだものです。また，線分 AE と円 O との交点のうち，点 A 以外の点を F とします。

次の①，②の問いに答えなさい。

図2



① 円 O の半径を求めなさい。

② 線分 AF の長さを求めなさい。

解答欄

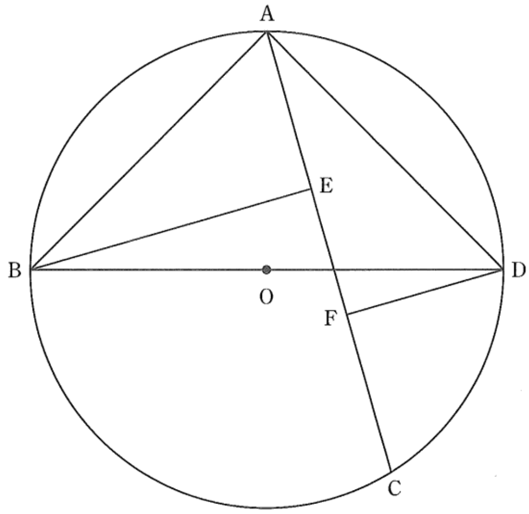
(1)	〔証明〕	
(2)	①	cm
	②	cm

解答
(1)
〔証明〕
点 O と点 C を結ぶ。
△OAB と△OCB において
OB＝OB (共通)…①
仮定から BA＝BC…②
同じ円の半径だから
OA＝OC…③
①, ②, ③より
3 辺の長さがそれぞれ等しいから
△OAB≡△OCB
よって∠OBA＝∠OBC
(2)
① $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$ cm
② $\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$ cm
解説
問2
(2)
①
BA＝BC, ∠OBA＝∠OBC より BO⊥AC, CD＝AD＝$\dfrac{6}{2}$＝3 cm
三平方の定理より BD＝$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ cm
円の半径を r cm とすると△OCD で三平方の定理より
$(r-\sqrt{7})^2+3^2=r^2$
$r^2-2\sqrt{7}r+7+9=r^2$
$2\sqrt{7}r=16$
$r=\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$ cm
②
△ABD∽△CAE になるので
AD:CE＝AB:CA
3:CE＝4:6
4CE＝3×6
CE＝$\dfrac{9}{2}$ cm
BE＝$\dfrac{9}{2}-4=\dfrac{1}{2}$ cm
DB:EA＝AB:CA
$\sqrt{7}$:EA＝4:6
EA＝$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ cm
△ABE∽△CFE になるので BE:FE＝AE:CE
$\dfrac{1}{2}$:FE＝$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}:\dfrac{9}{2}$
$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ FE＝$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2}$
FE＝$\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ cm
よって AF＝$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}-\dfrac{3\sqrt{7}}{14}=\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$ cm

【問 3】

図において，4 点 A，B，C，D は円 O の周上の点で，AB＝AD であり，線分 BD は円 O の直径である。また，2 点 B，D から線分 AC に垂線をひき，AC との交点をそれぞれ E，F とする。このとき，AE＝DF となることを証明しなさい。

（福島県　2011 年度）



解答欄

〔証明〕

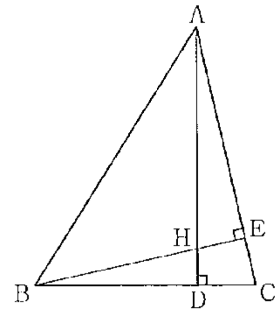
解答
〔証明〕
例 1
△ABE と△DAF において
仮定より∠AEB＝∠DFA＝90° … ①
AB＝DA…②
三角形の内角の和は 180° であるから
△ABE において①より
∠ABE＋∠BAE＝90°…③
半円の弧に対する円周角は 90° であるから
∠DAF＋∠BAE＝90°…④
③, ④より∠ABE＝∠DAF…⑤
①, ②, ⑤より
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△DAF
したがって AE＝DF
例 2
△ABE と△DAF において
仮定より∠AEB＝∠DFA＝90°…①
AB＝DA…②
また仮定より∠BEF＝∠DFE であり
錯角が等しいから BE // FD
平行線の錯角は等しいから∠EBD＝∠FDB…③
半円の弧に対する円周角は 90° であるから∠BAD＝90°
②より△ABD は直角二等辺三角形であるから
∠ABD＝∠ADB＝45°…④
④より∠ABE＝45° －∠EBD…⑤
三角形の内角の和は 180° であるから
△DAF において①, ④より
∠DAF＝180° －(90° ＋45° ＋∠FDB)
＝45° －∠FDB
③より∠DAF＝45° －∠EBD…⑥
⑤, ⑥より∠ABE＝∠DAF…⑦
①, ②, ⑦より
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△DAF
したがって AE＝DF
解説
△ABE と△DAF において
仮定より AB＝DA…①
∠BEA＝∠AFD＝90°…②
△ABE において
∠ABE＝180° －∠AEB－∠BAE＝180° －90° －∠BAE＝90° －∠BAE
BD は円 O の直径より円周角の定理から∠BAD＝90°
∠DAF＝∠BAD－∠BAE＝90° －∠BAE
よって∠ABE＝∠DAF…③
①, ②, ③より
直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので
△ABE≡△DAF
よって AE＝DF

【問 4】

$\angle A=45^\circ$ である三角形 ABC がある。右の図のように，頂点 A，B からそれぞれ辺 BC，AC に垂線をひき，辺 BC，AC との交点をそれぞれ D，E としたところ，BD＝3 cm，DC＝1 cm となった。

このとき，裕太さんは，合同な三角形や相似な三角形に着目して，三角形 ABC の面積を求めることにした。垂線 AD，BE の交点を H として，次の問1～問3に答えなさい。

（群馬県　2011 年度）



問1　三角形 AEH と三角形 BEC は合同で，AH＝BC である。このことを，裕太さんは次のように証明した。

$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ には適する記号や数値を，〔 ㋐ 〕，〔 ㋑ 〕には適する言葉を，それぞれ入れなさい。

また，$\boxed{}$ には，∠EAH と∠EBC が等しいことの説明を書き，証明を完成させなさい。

証明

△AEH と△BEC において

仮定より，∠AEH＝ $\boxed{ア}$ ＝90°　…①

また，仮定より，∠BAE＝45°，∠AEB＝90°

だから，∠ABE＝ $\boxed{イ}$ °

よって，△EAB は〔 ㋐ 〕である。

したがって，AE＝ $\boxed{ウ}$ …②

したがって，∠EAH＝∠EBC…③

①～③より，

〔 ㋑ 〕ので，△AEH≡△BEC

対応する辺の長さは等しいから，

AH＝BC

問2　三角形 BDH と相似な三角形をすべて書きなさい。

問3　相似な三角形を利用して，線分 HD の長さを求めなさい。また，三角形 ABC の面積を求めなさい。

解答欄

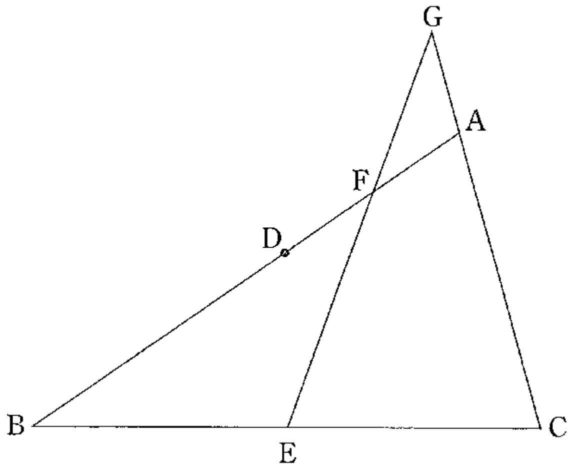
<table>
<tr><td rowspan="6">問1</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>ウ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓐ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓘ</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">〔∠EAH と∠EBC が等しいことの説明〕</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td colspan="2">線分 HD の長さ　　　　cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">三角形 ABC の面積　　　　cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1
ア　∠BEC
イ　45
ウ　BE
㋐　(直角)　二等辺三角形
㋑　1辺とその両端の角がそれぞれ等しい
〔∠EAHと∠EBCが等しいことの説明〕
三角形の内角の和は180°だから
∠EAH＝∠CAD
＝180°－(∠ADC＋∠ACD)
＝180°－(90°＋∠DCE)
＝90°－∠DCE
また
∠EBC＝180°－(∠BEC＋∠BCE)
＝180°－(90°＋∠DCE)
＝90°－∠DCE
問2　△BEC，△AEH，△ADC
問3
答　線分HDの長さ　$-2+\sqrt{7}$ cm
答　三角形ABCの面積　$4+2\sqrt{7}$ cm^2
解説
問3
△AEH≡△BECより
AH＝BC＝3＋1＝4 cm
HD＝x cmとおく。
△BDH∽△ADCより
BD:AD＝DH:DC
$3:(4+x)=x:1$
$x(4+x)=3$
$x^2+4x-3=0$
解の公式にあてはめて
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}=\frac{-4\pm2\sqrt{7}}{2}=-2\pm\sqrt{7}$$
$x>0$より
$x=-2+\sqrt{7}$ cm
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times4\times(4-2+\sqrt{7})=4+2\sqrt{7}\ \mathrm{cm}^2$$

【問 5】

図の△ABC において，辺 AB 上に点 D を，DB＝AC となるようにとる。辺 BC の中点 E と，線分 AD の中点 F を結ぶ直線が，辺 CA の延長と交わる点を G とすると，△AGF は二等辺三角形になる。

次の [ ] の中は，△AGF が二等辺三角形になる証明を，途中まで示してある。



次の問1，問2に答えなさい。

（千葉県 2011 年度 後期）

証明

2 点 C，D を結ぶ。

線分 CD の中点を H とし，点 H と 2 点 E，F をそれぞれ結ぶ。

△DBC において，2 点 E，H はそれぞれ 2 辺 CB，CD の中点なので，中点連結定理により，

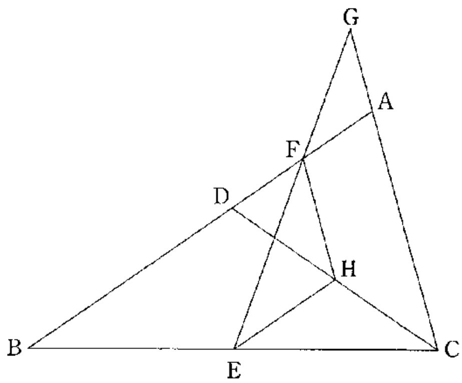
EH [(a)] BD …①

EH＝ [(b)] BD …②

△ADC において，同様に，

[(c)]

したがって，△AGF は二等辺三角形になる。



問1 [(a)] に入る最も適当な記号と，[(b)] に入る数をそれぞれ書きなさい。

問2 [(c)] に証明の続きを書き，証明を完成させなさい。ただし，[ ] の中の①，②に示されている関係を使う場合，番号の①，②を用いてもかまわないものとする。

解答欄

問1	(a)	
	(b)	
問2	(c)	

解答
問1
(a)　//
(b)　$\frac{1}{2}$
問2
(c)
FH // AC…③
FH＝$\frac{1}{2}$AC…④
仮定から
BD＝AC…⑤
②, ④, ⑤より
EH＝FH となり
△HFE は二等辺三角形となるので
∠HEF＝∠HFE…⑥
△AGF において
①より
EH // BA となり
平行線の同位角は等しいので
∠AFG＝∠HEF…⑦
③より, 同様に
∠AGF＝∠HFE…⑧
⑥, ⑦, ⑧より
∠AFG＝∠AGF で
2 角が等しくなる。
解説
問1・問2
△DBC において
2 点 E, H はそれぞれ 2 辺 CB, CD の中点なので
中点連結定理より
EF // BD…①
EH＝$\frac{1}{2}$BD…②
△ADC において
同様に F, H はそれぞれ 2 辺 DA, DC の中点だから中点連結定理より
FH // AC…③
FH＝$\frac{1}{2}$AC…④
仮定より
DB＝AC…⑤
②, ④, ⑤より
EH＝FH
したがって∠HEF＝∠HFE…⑥
①より∠AFG＝∠HEF…⑦
③より∠AGF＝∠HFE…⑧
⑥, ⑦, ⑧より∠AFG＝∠AGF
これより△AGF の 2 つの角が等しい。
したがって△AGF は二等辺三角形になる。

【問 6】

図1のような長方形 ABCD がある。図2のように，頂点 D が B と重なるように折ったときの折り目の線分を PQ，頂点 C が移った点を E とする。

図1

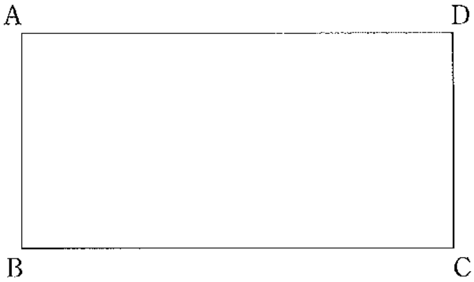
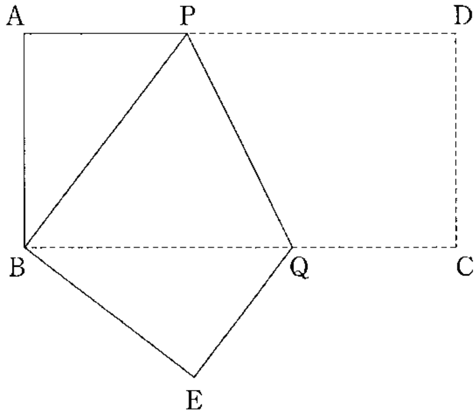


図2



このとき，次の問いに答えなさい。

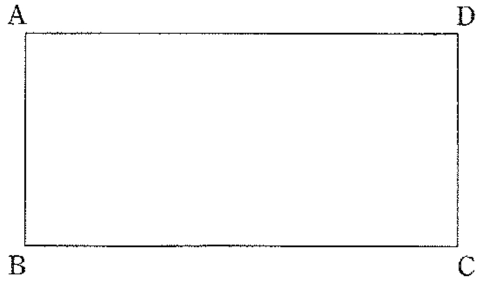
（富山県　2011 年度）

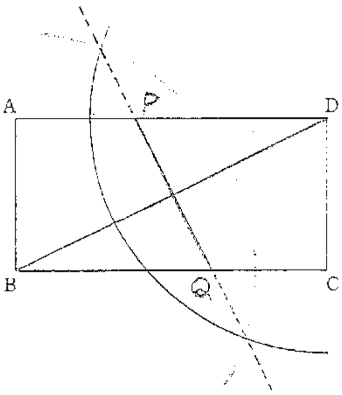
問1　折り目の線分 PQ を図1に作図し，P，Q の記号をつけなさい。ただし，作図に用いた線は残しておくこと。

問2　図2で，△BPQ は二等辺三角形であることを証明しなさい。ただし，証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

問3　AP＝3 cm，PD＝5 cm のとき，線分 PQ の長さを求めなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	cm

解答
問1


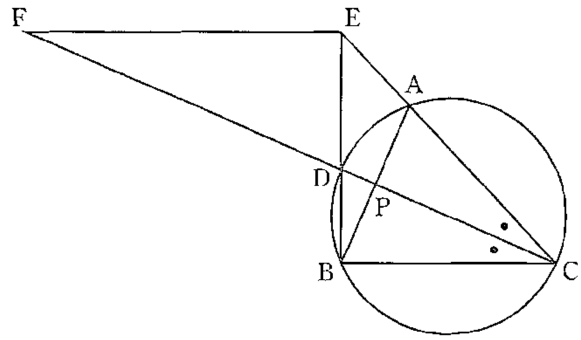
問2
折って重なり合う角だから
∠DPQ＝∠BPQ…(1)
AD // BC より平行線の錯角は等しいから
∠DPQ＝∠BQP…(2)
(1), (2)より
∠BPQ＝∠BQP
したがって
△BPQ は 2 つの角が等しいから二等辺三角形である。
問3　$2\sqrt{5}$ cm
解説
問3
PB＝PD＝5 cm, AP＝3 cm より
△ABP において三平方の定理より
AB＝$\sqrt{5^2-3^2}$ ＝4 cm
P から BQ に垂線 PH をひく。
PH＝AB＝4 cm　BQ＝BP＝5 cm より
QH＝5－3＝2 cm
△PQH で三平方の定理より
PQ＝$\sqrt{4^2+2^2}$ ＝$\sqrt{20}$ ＝$2\sqrt{5}$ cm

【問 7】

図のように，円周上に 3 点 A，B，C がある。∠ACB の二等分線と円周との交点を D，BD を延長した直線と CA を延長した直線との交点を E とおき，点 E を通り BC に平行な直線と CD を延長した直線との交点を F とする。

このとき，次の問いに答えよ。

（福井県　2011 年度）



問1　線分 AB と線分 CD の交点を P とするとき，△DEF ∽△APC であることを証明せよ。

問2　CA＝CB＝3 cm，AB＝2 cm とする。点 A から線分 BC に垂線をひき，線分 BC との交点を H とするとき，線分 CH の長さを求めよ。

問3　問2のとき，△DBC と△DEF の面積の比を求めよ。

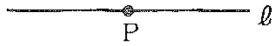
解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm
問3	(△DBC の面積)：(△DEF の面積)＝　　：

解答
問1
〔証明〕
△DEFと△APCで
対頂角は等しいから∠FDE＝∠CDB…①
$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角は等しいから
∠CDB＝∠CAP…②
①, ②から∠FDE＝∠CAP…③
FE // BCより錯角は等しいから
∠EFD＝∠PCB…④
CPは∠ACBの二等分線だから
∠PCB＝∠PCA…⑤
④, ⑤から∠EFD＝∠PCA…⑥
③, ⑥から
2組の角がそれぞれ等しいので
△DEF∽△APC
問2　$\frac{7}{3}$ cm
問3　△DBCの面積:△DEFの面積＝49:81
解説
問2
CA＝CB, ∠ACP＝∠BCPより
二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に2等分するので
CP⊥AB, AP＝BP＝$\frac{2}{2}$＝1 cm
△CAPで三平方の定理よりCP＝$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ cm
△ABCの面積の関係より
$\frac{1}{2}\times AB\times CP=\frac{1}{2}\times BC\times AH$　$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times 3\times AH$　$AH=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm
△ACHで三平方の定理よりCH＝$\sqrt{3^2-\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{7}{3}$ cm
問3
△CAPと△CDBにおいて
∠ACP＝∠DCB, ∠PAC＝∠BAC＝∠BDCより
△CAP∽△CDB
よって, ∠DBC＝∠APC＝90°
これより, AH // EB
AH:EB＝CH:CB
$\frac{4\sqrt{2}}{3}:EB=\frac{7}{3}:3$
$EB=\frac{12\sqrt{2}}{7}$ cm
AP:DB＝CP:CB
$1:DB=2\sqrt{2}:3$
$DB=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ cm
$DE=\frac{12\sqrt{2}}{7}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{27\sqrt{2}}{28}$ cm
$DB:DE=\frac{3\sqrt{2}}{4}:\frac{27\sqrt{2}}{8}=7:9$
△DBC∽△DEFなので
$\triangle DBC:\triangle DEF=DB^2:DE^2=7^2:9^2=49:81$

【問 8】

直線 ℓ 上にある点 P を通る ℓ の垂線をひくために，次のように作図をした。



Ⅰ　点 P を中心とする円をかき，直線 ℓ との交点を A，B とする。

Ⅱ　点 A，B を，それぞれ中心として，等しい半径の 2 つの円を交わるようにかき，その交点の 1 つを Q とする。

Ⅲ　直線 PQ をひく。

この直線 PQ が直線 ℓ と垂直であることを次のように証明した。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ をうめて証明を完成しなさい。

（愛知県　2011 年度　A）

〔証明〕

△QAP と△QBP で，

PA＝PB　…①

PQ＝PQ　…②

AQ＝ $\boxed{\text{ア}}$ …③

①，②，③から，3 辺が，それぞれ等しいので，

△QAP≡△QBP

よって，∠QPA＝∠ $\boxed{\text{イ}}$ …④

④と，∠QPA＋∠ $\boxed{\text{イ}}$ ＝ $\boxed{\text{ウ}}$ °から，∠QPA＝90°

つまり，PQ⊥ ℓ

解答欄

ア（　　　　　　），イ（　　　　　　），ウ（　　　　　　）

解答

ア　BQ

イ　QPB

ウ　180

【問 9】

平行四辺形 ABCD で，2 点 E，F が対角線 BD 上にあり，BE＝DF である。ただし，線分 BE の長さは線分 BF の長さより短いものとする。このとき，四角形 AECF は平行四辺形であることを次のように証明したい。

（ Ⅰ ），（ Ⅱ ），（ Ⅲ ）にあてはまる最も適当なものを，下のアからカまでの中からそれぞれ選んで，そのかな符号を書きなさい。

（愛知県 2011 年度 B）

〔証明〕
△AED と△CFB で，
四角形 ABCD は平行四辺形だから，AD＝CB …①
BE＝DF だから，ED＝FB …②
AD // BC で，（ Ⅰ ）は等しいから，（ Ⅱ ） …③
①，②，③から，2 辺とその間の角が，それぞれ等しいので，
△AED≡△CFB
合同な三角形では，対応する辺の長さと角の大きさは等しいので，
AE＝CF …④
（ Ⅲ ）…⑤
⑤から，（ Ⅰ ）が等しいので，AE // CF …⑥
④，⑥から，1 組の向かいあう辺が，等しくて平行であるので，
四角形 AECF は平行四辺形である。

ア 対頂角
イ 同位角
ウ 錯角
エ ∠DAE＝∠BCF
オ ∠AED＝∠CFB
カ ∠ADE＝∠CBF

解答欄

Ⅰ（　　　　），Ⅱ（　　　　），Ⅲ（　　　　）

解答
Ⅰ ウ
Ⅱ カ
Ⅲ オ

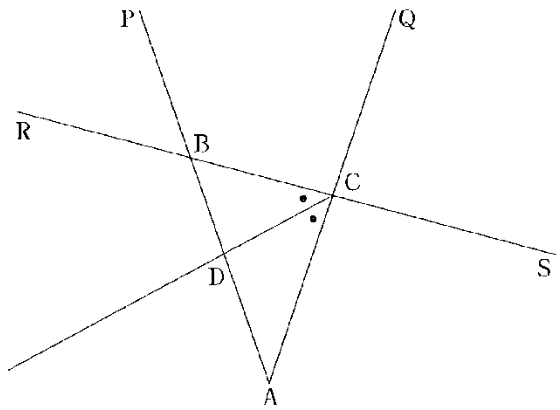
【問 10】

図1のように，直線 AP，AQ があり，AP 上に点 B がある。B を通る直線 RS をひき，AQ との交点を C とする。また，∠ACB の二等分線をひき，AP との交点を D とする。

次の問1～問3に答えなさい。

（和歌山県　2011 年度）

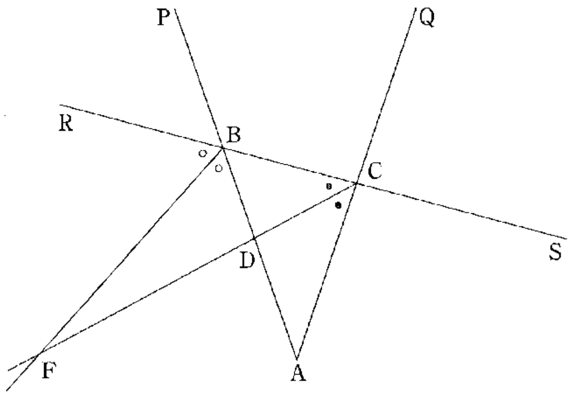
図1



問1　点 A を通り，直線 CD に平行な直線をひき，直線 RS との交点を E とする。∠ACB＝86° のとき，∠CAE の大きさを求めなさい。

問2　AC＝9 cm，BC＝6 cm，AD＝6 cm のとき，BD の長さを求めなさい。

図2



問3　図2のように，∠ABR の二等分線をひき，直線 CD との交点を F とする。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1)　$\angle \mathrm{BFC} = \dfrac{1}{2} \angle \mathrm{BAC}$ であることを，$\angle \mathrm{ACB} = \angle a$，$\angle \mathrm{ABR} = \angle b$ として，証明しなさい。

(2)　∠ABC の二等分線上に点 G をとり，4 点 B，F，G，C が同じ円周上にあるようにしたい。G の位置をどのように決めればよいか，説明しなさい。ただし，作図の手順はかかなくてもよい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">∠CAE＝　　　　　　度</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">BD＝　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>〔説明〕</td></tr>
</table>

解答
問1　$\angle$CAE＝43 度
問2　BD＝4cm
問3
(1)
△ABC において
$\angle$ABR は頂点 B における外角なので
$\angle$BAC＝$\angle b-\angle a$…①
また△BCF において
$\angle$FBR は頂点 B における外角で
直線 BF, CF はそれぞれ$\angle$ABR, $\angle$ACR の二等分線だから
$\angle$BFC＝$\frac{1}{2}\angle b-\frac{1}{2}\angle a=\frac{1}{2}(\angle b-\angle a)$…②
①, ②から$\angle$BFC＝$\frac{1}{2}\angle$BAC
(2)
$\angle$ABC の二等分線と$\angle$ACS の二等分線の交点を点 G とする。
解説
問1
DC // AE より錯角は等しいので
$\angle$CAE＝$\angle$ACD＝$\frac{1}{2}\angle$ACB＝$\frac{1}{2}\times 86^\circ=43^\circ$
問2
問1の E を使う。
DC // AE より
同位角は等しいので
$\angle$CEA＝$\angle$BCD
$\angle$BCD＝$\angle$ACD
$\angle$ACD＝$\angle$CAE より
$\angle$CEA＝$\angle$CAE
よって CE＝CA＝9 cm
平行線と線分の比より
BD:DA＝BC:CE
BD:6＝6:9
9BD＝6×6
BD＝4 cm
問3
(2)
$\angle$FCG＝$\angle$FBG＝$180^\circ\div 2=90^\circ$
よって CG は$\angle$ACS の二等分線になる。

【問 11】

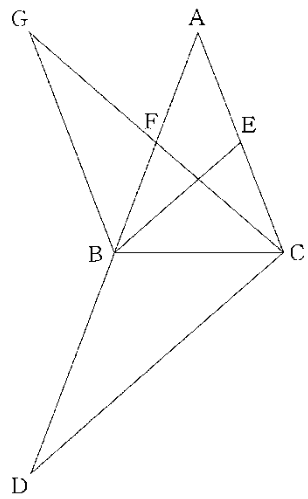
図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC がある。辺 AB の延長上に，AB＝BD となる点 D をとり，点 D と点 C を結ぶ。点 B を通り線分 DC に平行な直線と，辺 AC との交点を E とする。また，辺 AB の中点を F とし，点 B を通り辺 CA に平行な直線と，直線 CF との交点を G とする。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（香川県　2011 年度）

問1　△ABE∽△ADC　であることを証明せよ。

問2　GC＝DC　であることを証明せよ。



解答欄

問1	〔証明〕
問2	〔証明〕

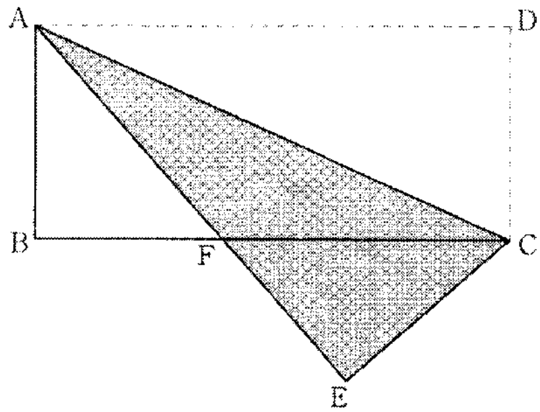
解答
問1
〔証明〕
△ABEと△ADCにおいて
∠Aは共通
BE // DCより同位角は等しいから
∠ABE＝∠ADC
2組の角がそれぞれ等しいから
△ABE∽△ADC
問2
〔証明〕
△ACFと△BGFにおいて
点Fは辺ABの中点だから
AF＝BF
対頂角は等しいから
∠AFC＝∠BFG
CA // BGより錯角は等しいから
∠CAF＝∠GBF
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ACF≡△BGF
よってAC＝BG…①
△GBCと△DBCにおいてBCは共通…②
仮定よりAB＝AC，AB＝BD
よって①より，BG＝BD…③
BCの延長上に点Hをとる。
CA // BGより同位角は等しいから
∠GBC＝∠ACH＝180°－∠ACB
∠DBC＝180°－∠ABC
仮定より∠ACB＝∠ABCだから
∠GBC＝∠DBC…④
②，③，④より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△GBC≡△DBC
したがってGC＝DC
解説
問2
△FACと△FBGにおいて
仮定よりAF＝BF…①
対頂角より∠AFC＝∠BFG…②
BG // CAより錯角が等しいので∠FAC＝∠FBG…③
①，②，③より
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△FAC≡△FBG　よってAC＝BG…④
△BGCと△BDCにおいて共通なのでBC＝BC…⑤
仮定より
AB＝AC…⑥
AB＝BD…⑦
④，⑥，⑦よりBG＝BD…⑧
AB＝ACより∠ABC＝∠ACB…⑨
∠DBC＝180°－∠ABC…⑩
GB // ACより∠GBC＝180°－∠ACB…⑪
⑨，⑩，⑪より∠GBC＝∠DBC…⑫
⑤，⑧，⑫より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△BGC≡△BDC
よってGC＝DC

【問 12】

図は，AB＜BC である長方形 ABCD を，対角線 AC を折り目として折り返し，頂点 D が移った点を E，辺 BC と線分 AE の交点を F としたものである。

このとき，次の問1・問2に答えなさい。

（高知県 2011 年度 前期）



問1 三角形 AFC は二等辺三角形であることを証明せよ。

問2 AB＝4 cm，BC＝8 cm のとき，点 B と点 E を結んでできる三角形 BEF の面積を求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕 したがって，三角形 AFC は二等辺三角形である。
問2	cm^2

解答
問1
〔証明〕
対角線ACで折り返したものであるから，対応する角は等しいので
∠FAC＝∠DAC…①
平行線の錯角は等しいので
∠FCA＝∠DAC…②
①，②より
∠FAC＝∠FCA…③
③より
三角形AFCは2つの角が等しい。
したがって三角形 AFC は二等辺三角形である。

問2　$\frac{18}{5}$ cm^2

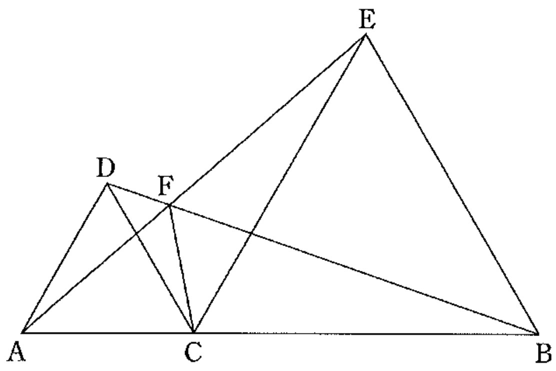
解説
問1
折り返した角より
∠FAC＝∠EAC＝∠DAC…①
AD // BC より
錯角は等しいので
∠DAC＝∠FCA…②
①，②より
∠FAC＝∠FCA
よって 2 つの角が等しいので
△AFC は二等辺三角形である。
問2
FA＝x cm とおくと FC＝FA＝x cm，BF＝8－x cm とおける。
△ABF において
三平方の定理より
$4^2+(8-x)^2=x^2$
$16+64-16x+x^2=x^2$
$16x=80$
$x=5$
よって FE＝8－5＝3 cm
△BEF＝$\frac{3}{5}$△ABF＝$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times$AB×BF＝$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times(8-5)\times4=\frac{18}{5}$ cm^2

【問 13】

図のように，線分 AB 上に AC＝2 cm，CB＝4 cm となる点 C をとり，線分 AC，CB をそれぞれ 1 辺とする正三角形 DAC，ECB を，線分 AB について同じ側につくる。また，線分 AE と DB の交点を F とする。

次の問1～問3に答えなさい。

（大分県　2011 年度）



問1　∠BFC＝60°　となることを次のように証明した。ア には，適する式を，イ，ウ には適する記号を書いて，証明を完成させなさい。

〔証明〕

△ACE と△DCB において，

△DAC と△ECB は正三角形だから，

AC＝DC　　　…①

ア	

…②

また，	∠ACE＝∠ACD　＋	イ	∠
	∠DCB＝∠ECB　＋	イ	∠

∠ACD＝∠ECB＝60°　だから，

∠ACE＝∠DCB　…③

①，②，③より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ACE≡△DCB

対応する角がそれぞれ等しいので，∠CEA＝∠CBD

ここで，2 点 E，B が直線 FC について同じ側にあることから，円周角の定理の逆より，

4 点	ウ	□，□，□，□

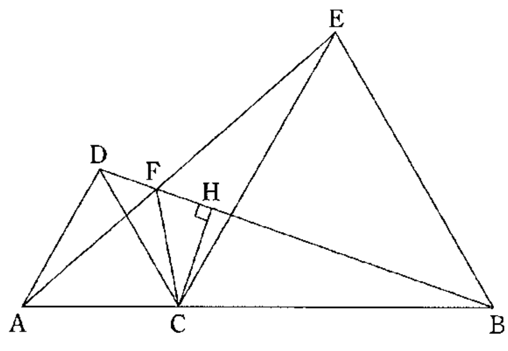
は同一円周上にある。

したがって，円周角の定理より，∠BFC＝∠BEC＝60°

問2　△DCB の面積を求めなさい。

問3　点 C から線分 DB に垂線を引きその交点を H とする。

このとき，線分 FH の長さを求めなさい。



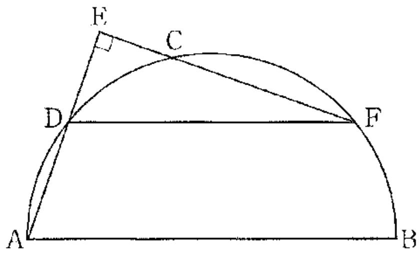
解答欄

問1	ア	
	イ	∠
	ウ	,　　,　　,
問2	cm^2	
問3	cm	

解答
問1
ア　CE＝CB
イ　∠DCE
ウ　F, C,　B, E
問2　$2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
問3　$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ cm
解説
問2
D から AC に垂線をひき交点を K とする。
△DAC は正三角形より $\mathrm{DK}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$ cm
よって $\triangle\mathrm{DCB}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{CB}\times\mathrm{DK}=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
問3
$\mathrm{CK}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\times 2=1$ cm
△DKB で三平方の定理より
$\mathrm{DB}=\sqrt{(1+4)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$ cm
$\triangle\mathrm{DCB}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{DB}\times\mathrm{CH}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\mathrm{CH}=\sqrt{7}\ \mathrm{CH}$
$\triangle\mathrm{DCB}=2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ より
$\sqrt{7}\ \mathrm{CH}=2\sqrt{3}$
$\mathrm{CH}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ cm
△CHF は∠CHF＝90°, ∠CFH＝60° の直角三角形より
$\mathrm{FH}=\dfrac{\mathrm{CH}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\div\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ cm

【問 14】

図のように，線分 AB を直径とする半円があり，$\overset{\frown}{AB}$上に点 C を，$\overset{\frown}{AC}$の長さが$\overset{\frown}{CB}$の長さより短くなるようにとる。また，$\overset{\frown}{AC}$上に点 D を，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$となるようにとり，C から直線 AD にひいた垂線と直線 AD との交点を E，EC の延長と$\overset{\frown}{AB}$との交点を F とする。



このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県　2011 年度）

問1　DF // AB であることを証明しなさい。

問2　AB＝6 cm，AD＝2 cm のとき，線分 EF の長さを求めなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答
問1
〔証明〕
BとDを結ぶ。
△DFEと△ABDにおいて
∠DFEと∠ABDは
それぞれ$\overset{\frown}{DC}$と$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角で$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{AD}$だから
∠DFE＝∠ABD…①
CE⊥AEだから∠DEF＝90°…②
ABは半円の直径だから∠ADB＝90°…③
②, ③より
∠DEF＝∠ADB…④
三角形の内角の和は180°だから
①, ④より
∠EDF＝∠DAB
同位角が等しいから
DF // AB
問2 $\dfrac{28\sqrt{2}}{9}$ cm
解説
問2
△ABDにおいて
三平方の定理より $DB=\sqrt{6^2-2^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ cm
DからABに垂線DHをひく。
△ABDの面積の関係より
$\dfrac{1}{2}\times AB\times DH=\dfrac{1}{2}\times AD\times DB$
$\dfrac{1}{2}\times 6\times DH=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\sqrt{2}$
$DH=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ cm
2組の角がそれぞれ等しいので
△ABD∽△ADHになる。
よって AD:AH＝AB:AD
2:AH＝6:2
$AH=\dfrac{2}{3}$ cm
四角形ABFDはDF // ABの等脚台形だから
$DF=6-2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{14}{3}$ cm
2組の角がそれぞれ等しいので
△ABD∽△DFEだから
DB:EF＝AB:DF
$4\sqrt{2}:EF=6:\dfrac{14}{3}$
$6EF=\dfrac{14}{3}\times 4\sqrt{2}$
$EF=\dfrac{28\sqrt{2}}{9}$ cm