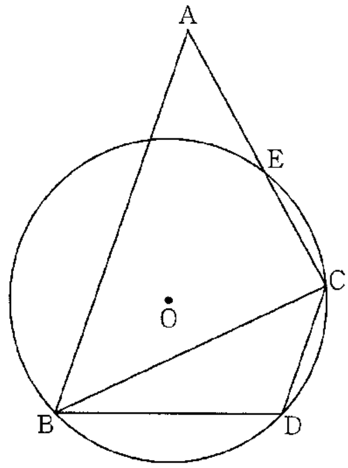
4. 相似の証明と長さ･求積などの複合問題 【2009 年度出題】

【問 1】

図のように, 辺 BC が共通な△ABC と△CBD があります。AB∥CD とします。
3 点 C, B, D を通る円 O と, 辺 AC の交点を E とします。
次の問いに答えなさい。

（北海道 2009 年度）



問1. ∠BCD＝46° のとき, ∠ODB の大きさを求めなさい。

問2. △ABC∽△BED を証明しなさい。

解答欄

問1	度
問2	証明

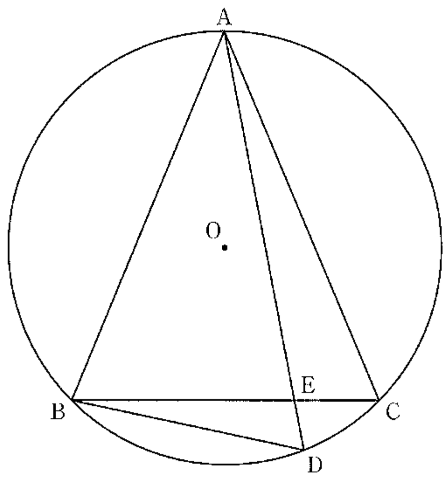
解答
問1　44 度
問2
証明
△ABC と△BED において
∠ACB＝∠BDE (円周角)…①
AB∥CD より，∠ABC＝∠BCD (錯角)…②
∠BCD＝∠BED (円周角)…③
②，③より
∠ABC＝∠BED…④
①，④から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△BED
解説
問1
OB，OD を結ぶと
弧 BD に対する円周角と中心角の関係より
∠BOD＝2∠BCD＝2×46°＝92°
△OBD は OB＝OD の二等辺三角形だから
∠ODB＝(180°－92°)÷2＝44°

【問 2】

図のように，円 O の周上に 3 点 A，B，C があり，AB＝AC となっています。また，A をふくまない $\overset{\frown}{BC}$ 上に，B，C と異なる点 D をとり，2 つの線分 AD と BC の交点を E とします。

このとき，△ABD∽△AEB であることを証明しなさい。

（岩手県　2009 年度）



解答欄

証明

解答

証明

△ABD と△AEB において

共通な角であるから

∠BAD＝∠EAB…①

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから

∠ABC＝∠ACB

したがって

∠ABE＝∠ACB…②

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから

∠ADB＝∠ACB…③

②, ③から

∠ADB＝∠ABE…④

①, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABD∽△AEB

解説

△ABD と△AEB において

共通なので

∠BAD＝∠EAB…①

弧 AB に対する円周角より,

∠ADB＝∠ACB…②

AB＝AC より

∠ABE＝∠ACB…③

②, ③より

∠ADB＝∠ABE…④

①, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいので

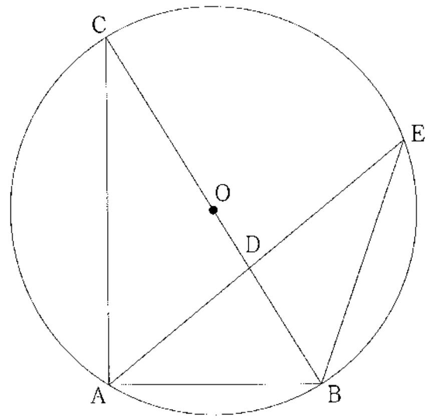
△ABD∽△AEB

【問 3】

図のような，半径 9 cm の円 O があります。弦 AB の長さを 9 cm とし，直径 BC 上に点 D を BD:DC＝1:2 となるようにとります。また，線分 AD を D の方へ延長した直線と，円 O との交点を E とします。さらに，点 A と点 C，点 B と点 E をそれぞれ結ぶ線分をひきます。

あとの(1)～(3)の問いに答えなさい。

（宮城県 2009 年度）



(1)△ADC∽△BDE であることを証明しなさい。

(2)点 D から線分 AB に垂線をひきその交点を H とします。線分 DH の長さを求めなさい。

(3)線分 AE の長さを求めなさい。

解答欄

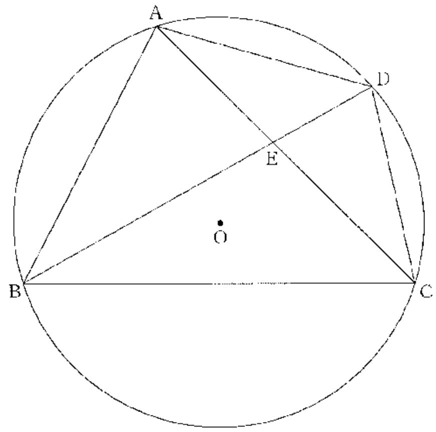
(1)	証明
(2)	cm
(3)	cm

解答
(1)
△ADC と△BDE において
対頂角は等しいから
∠ADC＝∠BDE…①
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから
∠ACB＝∠AEB
よって∠ACD＝∠BED…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ADC∽△BDE
(2)　$3\sqrt{3}$ cm
(3)　$\dfrac{45}{7}\sqrt{7}$ cm
解説
問2
(2)
BC は直径だから∠CAB＝90°
△ABC において
AB : BC＝9 : 18＝1 : 2 より
CA＝$\sqrt{3}$ AB＝$9\sqrt{3}$ cm
∠CAB＝∠DHB＝90° より
同位角が等しいので DH∥CA
よって DH : CA＝BD : BC
DH : $9\sqrt{3}$ ＝1 : 3
DH＝$3\sqrt{3}$ cm
(3)
BD : DC＝1 : 2 より
DB＝$18\times\dfrac{1}{3}$ ＝6 cm
CD＝$18\times\dfrac{2}{3}$ ＝12 cm
BH : HA＝BD : DC＝1 : 2 より
BH＝$\dfrac{1}{3}\times 9$＝3cm
△DAH において
AH＝9－3＝6cm より
AD＝$\sqrt{(3\sqrt{3})^2+6^2}$ ＝$3\sqrt{7}$ cm
△ADC∽△BDE より
CD : ED＝AD : BD
12 : ED＝$3\sqrt{7}$: 6
ED＝$12\times\dfrac{6}{3\sqrt{7}}=\dfrac{24\sqrt{7}}{7}$ cm
よって AE＝AD＋DE＝$3\sqrt{7}+\dfrac{24\sqrt{7}}{7}=\dfrac{45\sqrt{7}}{7}$ cm

【問 4】

図のように，円 O の周上にある 4 点 A, B, C, D を頂点とする四角形 ABCD がある。線分 AC と線分 BD の交点を E とするとき，次の問1，問2に答えなさい。

（秋田県 2009 年度）



問1．△ABE∽△DCE となることを証明しなさい。

問2．AB＝4 cm，∠ABD＝∠DBC＝30°，∠ACB＝45° とする。

(1) ∠BDC の大きさを求めなさい。

(2) △ACD の面積を求めなさい。

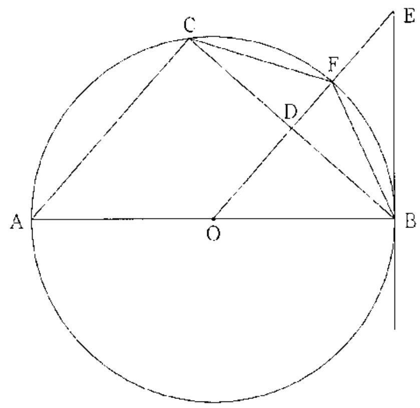
解答欄

問1	証明	
問2	(1)	°
	(2)	cm^2

解答
問1
証明
△ABEと△DCEで
弧BCに対する円周角は等しいから
∠BAE＝∠CDE…①
対頂角は等しいから
∠AEB＝∠DEC…②
①②より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ABE∽△DCE
問2
(1)　75°
(2)　$2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
解説
問2
(2)
AからBCに垂線AHをひく。
△ABHは∠ABH＝60°の直角三角形なので
AB:AH＝$2:\sqrt{3}$
4:AH＝$2:\sqrt{3}$
2AH＝$4\sqrt{3}$
AH＝$2\sqrt{3}$ cm
△ACHは∠ACH＝45°の直角二等辺三角形だから
AH:AC＝$1:\sqrt{2}$
よって，$2\sqrt{3}$:AC＝$1:\sqrt{2}$
AC＝$2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=2\sqrt{6}$ cm
∠DAC＝∠DCA＝30°より
△DACはDA＝DCの二等辺三角形
DからACに垂線DKをひくとAK＝$\dfrac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$ cm
△ADKは∠DAK＝30°の直角三角形なので
DK:AK＝$1:\sqrt{3}$
DK:$\sqrt{6}=1:\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$DK＝$\sqrt{6}$
DK＝$\sqrt{2}$ cm
よって△ACD＝$\dfrac{1}{2}$×AC×DK＝$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{2}=2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

【問 5】

図のように，点 O を中心とし，線分 AB を直径とする円 O がある。円 O の周上に，2 点 A，B と異なる点 C をとり，線分 BC の中点を D とする。線分 OD を D のほうへ延長した線と，点 B を通る円 O の接線との交点を E とする。また，線分 OE と円 O との交点を F とする。AB＝12 cm，AC＝8 cm であるとき，あとの問いに答えなさい。



（山形県 2009 年度）

問1．BD の長さを求めなさい。

問2．△ABC と△OEB が相似であることを証明しなさい。

問3．EF の長さを求めなさい。

問4．四角形 ABFC の面積は△BEF の面積の何倍になるか，求めなさい。

解答欄

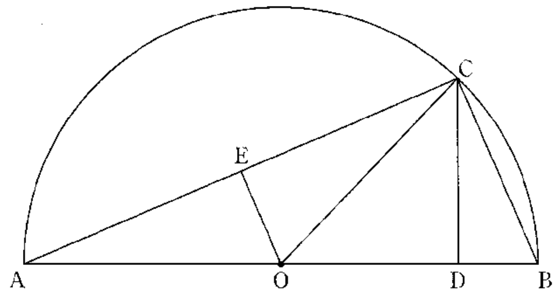
問1	cm
問2	証明
問3	cm
問4	倍

解答
問1　$2\sqrt{5}$ cm
問2
証明
△ABC と△OEB において
円周角と中心角の関係より
$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ$　…①
円の接線の性質より
$\angle OBE = 90^\circ$　…②
①, ②より
$\angle ACB = \angle OBE$…③
△ABC において, 点 O, D はそれぞれ, 辺 AB, BC の中点だから
AC∥OD
よって, 同位角が等しいから
$\angle BAC = \angle EOB$　…④
③, ④より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△OEB
問3　3 cm
問4　$\frac{20}{3}$ 倍
解説
問3
△ABC∽△OEB より
AB:OE＝AC:OB
12:OE＝8:6
OE＝9
よって EF＝OE－OF＝9－6＝3cm
問4
△BCA において中点連結定理より $OD = \frac{1}{2}AC = 4$cm　FD＝6－4＝2cm
△BOF:△BDF:△BDO＝3:2:4
よって $\triangle BDF = \frac{2}{3}\triangle BEF$
$\triangle BOD = \frac{4}{3}\triangle BEF$
$\triangle CDF = \triangle BDF = \frac{2}{3}\triangle BEF$
$\triangle COD = \triangle BOD = \frac{4}{3}\triangle BEF$
$\triangle CAO = \triangle CBO = \triangle COD + \triangle BOD = \frac{4}{3}\triangle BEF + \frac{4}{3}\triangle BEF = \frac{8}{3}\triangle BEF$
よって四角形 ABFC＝△CAO＋△CBO＋△BDF＋△CDF
$= \frac{8}{3}\triangle BEF + \frac{8}{3}\triangle BEF + \frac{2}{3}\triangle BEF + \frac{2}{3}$
$\triangle BEF = \frac{20}{3}\triangle BEF$
よって $\frac{20}{3}$ 倍

【問 6】

線分 AB を直径とする半円 O がある。図のように，弧 AB 上に AC＞BC となるように点 C をとり，C から AB にひいた垂線と AB との交点を D とする。また，∠AOC の二等分線と AC との交点を E とする。このとき，△OCE∽△BCD となることを証明しなさい。

（福島県 2009 年度）



解答欄

証明

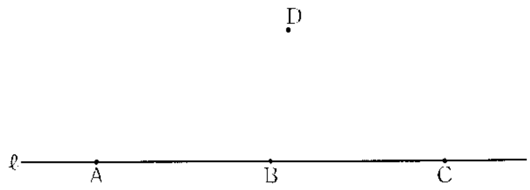
解答
証明
$\triangle$OCE と$\triangle$BCD において
$\triangle$OCA は二等辺三角形で
OE は頂角の二等分線であるから
$\angle$OEC＝$\angle$OEA＝90° …①
仮定より
$\angle$BDC＝90° …②
①，②から
$\angle$OEC＝$\angle$BDC…③
また OE は$\angle$AOC の二等分線であるから
$\angle$COE＝$\angle$AOE…④
$\angle$ACB は半円の弧に対する円周角であるから
$\angle$ACB＝90° …⑤
①，⑤から
同位角が等しいので OE$/\!/$BC となり
平行線の同位角が等しいから
$\angle$AOE＝$\angle$CBD…⑥
④，⑥から
$\angle$COE＝$\angle$CBD…⑦
③，⑦より
2 組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle$OCE∽$\triangle$BCD
解説
$\triangle$OCE と$\triangle$BCD において
$\angle$BDC＝90°
$\triangle$OAC は OA＝OC の二等辺三角形で
OE は$\angle$AOC の二等分線だから
$\angle$OEC＝90°
よって$\angle$OEC＝$\angle$BDC…①
また$\angle$COE＝$\dfrac{1}{2}\angle$COA …②
弧 AC において円周角の定理より
$\angle$CBD＝$\angle$CBA＝$\dfrac{1}{2}\angle$COA …③
②，③より
$\angle$COE＝$\angle$CBD…④
①，④より
2 組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle$OCE∽$\triangle$BCD

【問 7】

図において，3 点 A，B，C は直線ℓ 上の点であり，点 D はℓ 上にない点である。

次の問1，問2に答えなさい。

（群馬県 2009 年度）



問1．3 点 A，B，D を通る円を，コンパスと定規を用いて作図しなさい。

ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。

問2．問1で作図した円と直線 CD との 2 つの交点のうち，D 以外の点を E とするとき，

(1) 三角形 ACE と三角形 DCB が相似であることを次のように証明した。$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に適する記号をそれぞれ入れなさい。

証 明

△ACE と△DCB において

∠C は共通 …①

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいから，∠ADB＝∠$\boxed{\text{ア}}$

$\overset{\frown}{AE}$ に対する円周角は等しいから，∠$\boxed{\text{イ}}$＝∠$\boxed{\text{ウ}}$

三角形の内角の和は180°だから，∠CAE＝∠BAE＝180°－(∠$\boxed{\text{ア}}$＋∠$\boxed{\text{イ}}$)

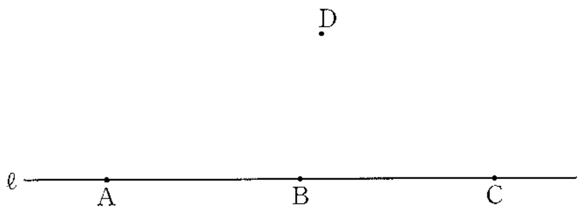
また，∠$\boxed{\text{エ}}$＝180°－(∠ADB＋∠$\boxed{\text{ウ}}$)

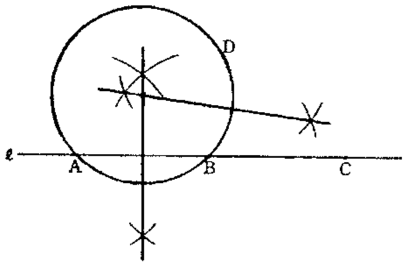
よって，∠CAE＝∠$\boxed{\text{エ}}$ …②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△ACE∽△DCB

(2) AB＝BC＝5 cm，CD＝6 cm，BD＝4 cm のとき，AE の長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">問2</td><td rowspan="4">(1)</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>ウ</td><td></td></tr>
<tr><td>エ</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
</table>

解答
問1


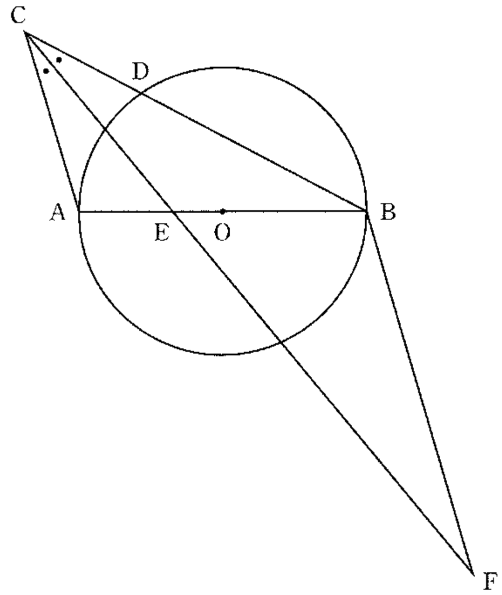
問2
(1) ア AEB　イ ABE　ウ ADE　エ CDB
(2) $\frac{20}{3}$ cm
解説
問2
(2)
△ACE∽△DCB において
AC:DC＝AE:DB
10:6＝AE:4
6AE＝40
AE＝$\frac{20}{3}$ cm

【問 8】

図のように，AB を直径とする円 O と△ABC がある。辺 BC と円 O との交点を D，∠C の二等分線と辺 AB との交点を E とする。さらに，直線 CE 上に，BC＝BF となるように点 F をとる。

このとき，次の問いに答えよ。

（福井県 2009 年度）



問1．△AEC∽△BEF であることを証明せよ。

問2．BD＝9 cm，DC＝3 cm，AC＝4 cm のとき，

(1) DE と BF が平行であることを証明せよ。

(2) △BCF の面積を求めよ。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="1">問1</td><td colspan="2">(証明)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>(証明)</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1
証明
$\triangle$AEC と$\triangle$BEF で，対頂角は等しいから
$\angle$AEC＝$\angle$BEF…①
仮定から
$\angle$ACE＝$\angle$BCE…②
$\triangle$BCF は二等辺三角形だから
$\angle$BFE＝$\angle$BCE…③
②，③から
$\angle$ACE＝$\angle$BFE…④
①，④から
2 組の角が，それぞれ等しいので
$\triangle$AEC∽$\triangle$BEF
問2
(1)
証明
$\triangle$BCF で
CD : DB＝3 : 9＝1 : 3…①
$\triangle$AEC∽$\triangle$BEF から
CE : EF＝AC : BF＝4 : 12＝1 : 3…②
①，②から
CD : DB＝CE : EF
したがって
DE と BF は平行である。
(2)　$18\sqrt{7}$ cm^2
解説
問2
(2)
AD を結ぶ。
AB は直径より$\angle$ADB＝90°
したがって$\angle$ADC＝90° なので$\triangle$ACD において
三平方の定理より
AD＝$\sqrt{4^2-3^2}$ ＝$\sqrt{7}$ cm
よって$\triangle$ABC＝$\dfrac{1}{2}$ ×BC×AD＝$\dfrac{1}{2}$ ×12× $\sqrt{7}$ ＝$6\sqrt{7}$ cm^2
ここで$\angle$ACE＝$\angle$BFE より
錯角が等しいので CA∥BF
よって$\triangle$ABC : $\triangle$BCF＝AC : BF＝4 : 12＝1 : 3
$\triangle$BCF＝3$\triangle$ABC＝3× $6\sqrt{7}$ ＝$18\sqrt{7}$ cm^2

【問 9】

桃子さんは，一辺の長さが 8 cm の正方形の紙 ABCD を折ってできる図形について調べた。
このとき，次の問1，問2に答えなさい。

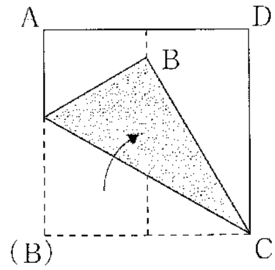
（山梨県 2009 年度）

> 辺 BC を底辺とする正三角形の頂点の決め方
>
> ① 最初に，正方形の紙の辺 AB を辺 DC に重なるように折り，折り目の線分をつける。
>
> ② 次に図 1 のように，頂点 C を通る線分を折り目として，頂点 B が①でつけた折り目の線分上にくるように折る。このとき，頂点 B の位置にある点を正三角形の頂点とする。

問1．桃子さんは，正方形の紙を折って正三角形を作る方法が，本に紹介されているのを見つけた。作り方は，まず頂点の位置を決めるようになっていた。
このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

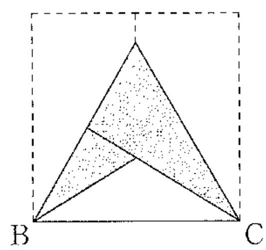
(1) 上の頂点の決め方にしたがって，①でつけた折り目の線分と，②で求めた正三角形の頂点となる点をそれぞれ作図しなさい。ただし，作図には定規とコンパスを用い，作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

図 1



(2) 折ってできた正三角形は，図 2 のようになった。この正三角形の面積を求めなさい。

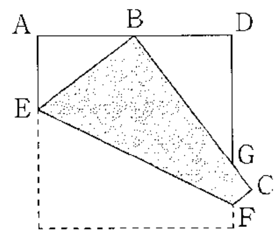
図 2



問2．次に桃子さんは折った紙を正方形にもどしてから，図 3 のように，頂点 B が辺 AD の中点にくるように折り，折り目の線を EF，辺 BC が辺 DF と交わる点を G とした。
このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1) 桃子さんは，折ったときにできた三角形 AEB と三角形 DBG は相似であることに気づいた。△AEB∽△DBG となることを証明しなさい。

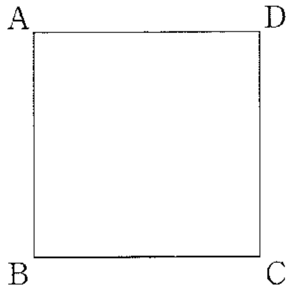
図 3

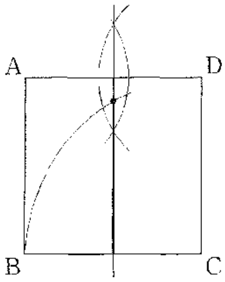


(2) さらに，桃子さんは，三平方の定理を利用して方程式をつくると，AE の長さが求められることに気づいた。次の文は，桃子さんの気づいた求め方である。文中の（ ア ）～（ ウ ）に当てはまる式や値を求めなさい。

> AE の長さを x cm とすると，EB の長さは x を用いて（　ア　）cm と表すことができる。これらから，直角三角形 AEB において，（　イ　）という方程式をつくることができ，これを解いて x の値は（　ウ　）となる。

解答欄

問1	(1)		
	(2)	cm^2	
問2	(1)	証明	
	(2)	ア	
		イ	
		ウ	

解答
問1
(1)


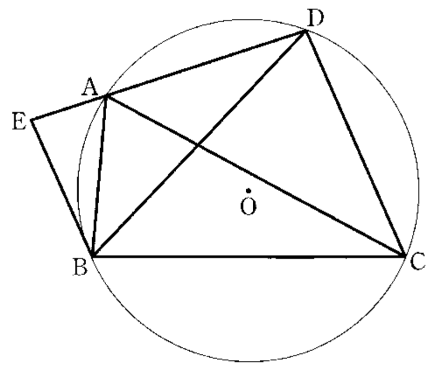
(2) $16\sqrt{3}$ cm^2
問2
(1)
証明
△AEBと△DBGにおいて
∠BAE＝∠GDB＝90°…①
また△AEBにおいて
∠AEB ＝180°－∠BAE－∠EBA
＝90°－∠EBA
また点Bにおいて
∠DBG ＝180°－∠GBE－∠EBA
＝180°－90°－∠EBA
＝90°－∠EBA
したがって
∠AEB ＝∠DBG…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいから
△AEB∽△DBG
(2)
ア $8-x$
イ $x^2+4^2=(8-x)^2$
ウ 3
解説
問1
(2)
BCの中点をHとしてできた三角形のB, Cと異なる頂点をKとする。
△KBCにおいて
BH＝CH＝$\dfrac{8}{2}$＝4cm
KH＝$\sqrt{3}$ BH＝$4\sqrt{3}$ cmより
△KBC＝$\dfrac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ cm^2
問2
(2)
AE＝x cmのとき正方形の1辺は8 cmだからEB＝$8-x$ cm…アとおける。
AB＝$\dfrac{8}{2}$＝4cm で△AEBは直角三角形だから
$AE^2+AB^2=EB^2$
$x^2+4^2=(8-x)^2$…イ
$x^2+16=64-16x+x^2$
$16x=48$
$x=3$…ウ

【問 10】

図で，4 点 A, B, C, D は円 O の円周上の点である。また，点 B を通り CD に平行な直線と，DA を延長した直線との交点を E とする。

次の問1，問2に答えなさい。

（岐阜県 2009 年度）



問1．△ABC∽△BED であることを証明しなさい。

問2．AE＝2 cm，BE＝3 cm，CD＝5 cm，BC＝2AB のとき，

(1) AD の長さを求めなさい。

(2) △BCD の面積は△ABD の面積の何倍であるかを求めなさい。

解答欄

問1	証明	
問2	(1)	cm
	(2)	倍

解答
問1
△ABC と△BED で
$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角だから
∠ACB＝∠BDE…①
$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角だから
∠BAC＝∠CDB…②
BE // CD より，平行線の錯角だから
∠EBD＝∠CDB…③
②，③から
∠BAC＝∠EBD…④
①，④から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△BED
問2
(1)　4
(2)　$\frac{5}{2}$
解説
問2
(1)
△ABC∽△BED より
BE : ED＝AB : BC＝1 : 2
3 : ED＝1 : 2
ED＝6cm
AD＝ED－AE＝6－2＝4cm
(2)
EA : AD＝2 : 4＝1 : 2 より
△BED＝$\frac{3}{2}$△ABD…①
EB // DC より
△BED : △BCD＝EB : CD＝3 : 5
よって△BCD＝$\frac{5}{3}$△BED…②
①，②より
△BCD＝$\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}$△ABD＝$\frac{5}{2}$△ABD
よって$\frac{5}{2}$倍

【問 11】

図 1 は，正方形の紙 ABCD を，頂点 A が辺 CD 上にくるように折り，折り目を線分 PQ，辺 AB と線分 QC の交点を E としたものである。

このとき，あとの各問いに答えなさい。ただし，頂点 A が頂点 C，D にくることはないものとする。

（三重県 2009 年度）

図 1

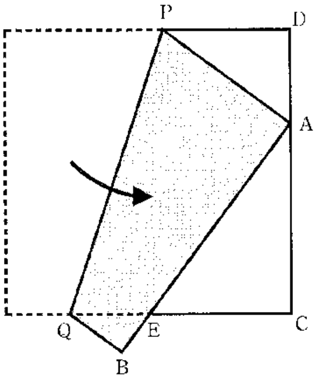
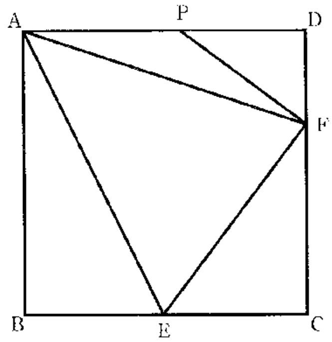


図 2



問1. 図 2 は，図 1 の折った部分をもとにもどして，頂点 A と重なっていた辺 CD 上の点を F とし，線分 AE, AF, EF, PF をひいたものである。下の【2 人の会話】は，ゆみさんとお兄さんが，図 2 について話している内容の一部である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

2 人の会話

(お兄さん) ∠FAE の大きさは 45° になるんだよ。

(ゆみさん) どうしてなの。

(お兄さん) 点 A から線分 EF に垂線をひいて，線分 EF との交点を G としてごらん。
△ADF と△AGF は直角三角形で，AF＝AF，<u>∠DAF＝∠GAF</u> だから，
△ADF≡△AGF となるよ。

(ゆみさん) <u>△AGE≡△ABE</u> もいえそうだね。

(お兄さん) よく気がついたね。
だから，∠DAF＝∠GAF，∠GAE＝∠BAE なので，∠FAE の大きさは，∠DAB の大きさの半分になり，45° になるんだ。

(1) お兄さんが示した，<u>∠DAF＝∠GAF</u> であることの証明を，次の $\boxed{}$ にあてはまる適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

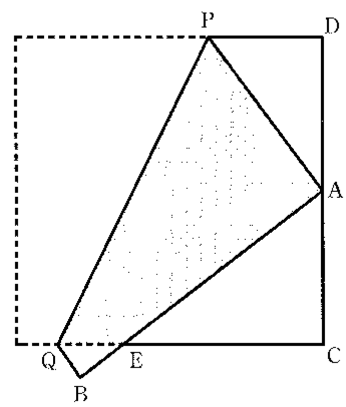
証明
△PAF は二等辺三角形なので，
∠PAF＝∠PFA
∠PFE＝∠AGE＝90° だから PF // AG より，$\boxed{}$ は等しいので，
∠PFA＝∠GAF
よって，∠PAF＝∠GAF
すなわち，∠DAF＝∠GAF

(2) ゆみさんが示した，<u>△AGE≡△ABE</u> であることの証明を，次の $\boxed{(ア)}$ ，$\boxed{(イ)}$ のそれぞれにあてはまる適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

証明
△AGE と△ABE において，
∠AGE＝∠ABE＝90° …(1)
AE＝AE…(2)
△ADF≡△AGF より，$\boxed{(ア)}$ ＝AG
また，四角形 ABCD は正方形より，$\boxed{(ア)}$ ＝AB なので，
AG＝AB…(3)
(1)，(2)，(3)より，直角三角形で，$\boxed{(イ)}$ がそれぞれ等しいので，
△AGE≡△ABE

問2. 図 3 は，図 1 において，点 A が辺 CD の中点である場合を表している。
正方形の紙 ABCD の 1 辺の長さが 6 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

図 3



(1) 線分 PD の長さを求めなさい。

(2) △PAD∽△QEB であることを証明しなさい。

(3) 線分 PQ の長さを求めなさい。なお，答えに√がふくまれるときは，√の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

解答欄

問1	(1)		
	(2)	(ア)	
		(イ)	
問2	(1)	PD＝　　　　　cm	
	(2)	証明	
	(3)	PQ＝　　　　　cm	

解答
問1
(1) 錯角
(2)
(ア) AD　(イ) 斜辺と他の1辺
問2
(1) PD＝$\frac{9}{4}$ cm
(2)
証明
△PADと△AECにおいて
ABCDは正方形だから∠PDA＝∠ACE…①
辺CD上で∠PAE＝90°だから
∠PAD＝90°－∠CAE…②
△AECの内角の和が180°で
∠ACE＝90°だから∠AEC＝90°－∠CAE…③
②, ③より∠PAD＝∠AEC…④
①, ④より, 2組の角がそれぞれ等しいので
△PAD∽△AEC…⑤
一方, △AECと△QEBにおいて
ABCDは正方形だから∠ACE＝∠QBE…⑥
対頂角は等しいことから∠AEC＝∠QEB…⑦
⑥, ⑦より
2組の角がそれぞれ等しいので
△AEC∽△QEB…⑧
したがって, ⑤, ⑧より
△PAD∽△QEB

証明
△PADと△QEBにおいて
紙ABCDは正方形だから
∠PDA＝∠QBE…①
△AECの内角の和が180°で
∠ACE＝90°だから
∠AEC＝90°－∠CAE…②
辺CD上で∠PAE＝90°だから
∠PAD＝90°－∠CAE…③
②, ③より∠AEC＝∠PAD…④
また, 対頂角は等しいことから
∠AEC＝∠QEB…⑤
④, ⑤より∠PAD＝∠QEB…⑥
①, ⑥より
2組の角がそれぞれ等しいので
△PAD∽△QEB

(3) PQ＝$3\sqrt{5}$ cm
解説
問2
(1)
点AはCDの中点よりDA＝$\frac{6}{2}$＝3cm
PD＝x cmとするとPA＝6－x cm とおける。
△PDAにおいて∠ADP＝90°より, 三平方の定理を利用して
$PA^2=PD^2+DA^2$
$(6-x)^2=x^2+3^2$
$36-12x+x^2=x^2+9$
$12x=27$
$x=\frac{9}{4}$ cm
(3)
△PADにおいてPD:DA:PA＝$\frac{9}{4}:3:\left(6-\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{4}:3:\frac{15}{4}=3:4:5$
△PAD∽△AECだから
AC:CE:AE＝3:4:5　AC＝3 cmより, CE＝4 cm, AE＝5 cm
同様に△QEB∽△AECだから
QB:BE:QE＝3:4:5　BE＝6－5＝1cmよりQB＝$\frac{3}{4}$ cm
点Bのもとの位置をB′とするとQB′＝QB＝$\frac{3}{4}$ cm
QからPDの延長上に垂線QHをひくとQH＝6 cm, PH＝$6-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}$＝3cm
三平方の定理よりPQ＝$\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$ cm

【問 12】

円筒の形をしたトイレットペーパーの芯を，側面にある線で切って開くと，平行四辺形になった。円筒と平行四辺形について，後の問1，問2に答えなさい。ただし，円周率はπとする。

（滋賀県　2009 年度）

図 1

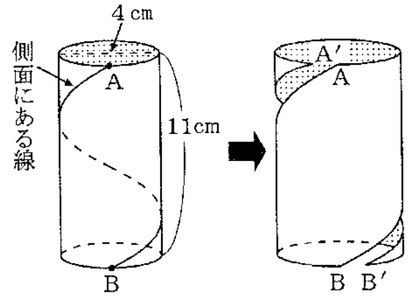
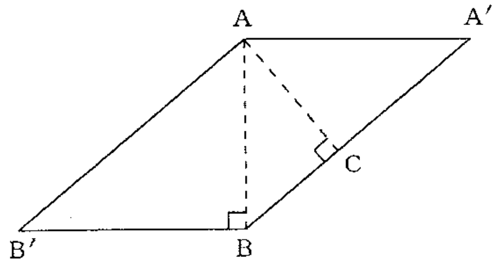


図 2



問1. 底面の形が直径 4 cm の円で，高さ 11 cm の円筒がある。図 1 のように点 A から点 B までの線で切って開くと，図 2 のような AB⊥B′B の平行四辺形 AB′BA′ になった。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，点 A とA′，点 B とB′ はそれぞれ重なっていた点である。

(1) 図 2 の平行四辺形 AB′BA′ の面積を求めなさい。

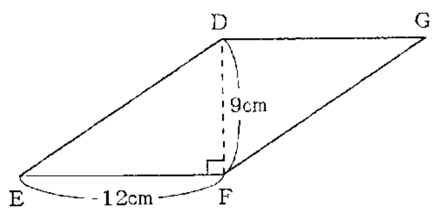
(2) 図 2 において，AC⊥BA′ となる辺 BA′ 上の点を C とする。このとき，△AB′B∽△BAC であることを証明しなさい。

問2. 図 3 のような，DF＝9 cm，EF＝12 cm，DF⊥EF の平行四辺形 DEFG がある。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

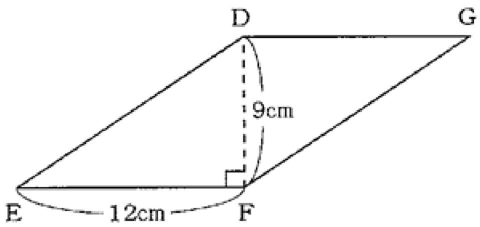
(1) DH⊥FG となる辺 FG 上の点 H を，コンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図に使った線は消さないこと。

図 3

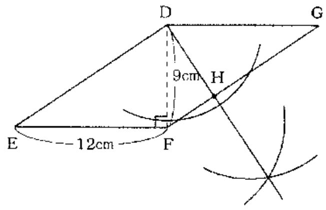


(2) 平行四辺形 DEFG を側面にした円柱を 2 種類作る。辺 EF が底面の円周になる円柱の体積を V cm^3，辺 FG が底面の円周になる円柱の体積を V′ cm^3 とするとき，$\dfrac{V}{V'}$ を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(1)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>証明</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td></td></tr>
</table>

解答
問1
(1) $44\pi \mathrm{cm}^2$
(2)
証明
$\triangle AB'B$ と $\triangle BAC$ で
仮定から
$\angle ABB' = \angle BCA\ (=90^\circ)$…①
また $AB' \parallel A'B$ で，平行線の錯角より
$\angle B'AB = \angle ABC$…②
①，②から
2 組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle AB'B \backsim \triangle BAC$
問2
(1)



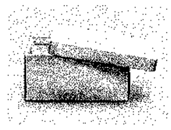
(2) $\dfrac{4}{5}$

【問 13】

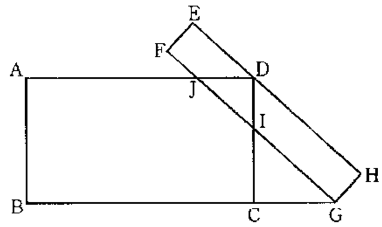
写真のように箱のふたを移動させたときのようすをモデルにした問題である。図Ⅰ～図Ⅲにおいて，四角形 ABCD は AB＝10 cm，AD＝18 cm の長方形であり，四角形 EFGH は EF＝3 cm，EH＝18 cm の長方形である。D は辺 EH 上にあり，E は直線 AD について C と反対側にある。辺 FG と辺 DC は，C，G と異なる点で交わっている。I は，辺 FG と辺 DC との交点である。

次の問いに答えなさい。

（大阪府 2009 年度 後期）



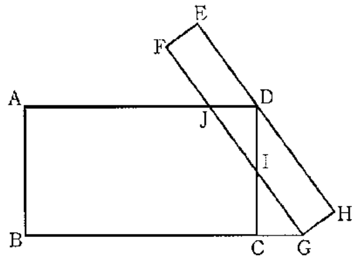
図Ⅰ



問1. 図Ⅰ，図Ⅱにおいて，G は直線 BC 上にあって C について B と反対側にある。F は，直線 AD について C と反対側にある。このとき，辺 FG と辺 AD は交わる。J は，辺 FG と辺 AD との交点である。

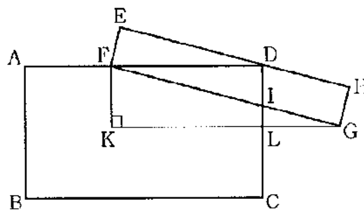
(1) 図Ⅰにおいて，五角形 ABCIJ の内角∠IJA の大きさを $a°$ とするとき，△ICG の内角∠GIC の大きさを a を用いて表しなさい。

図Ⅱ



(2) 図Ⅱは I が辺 DC の中点であるときの状態を示している。図Ⅱにおいて，線分 AJ の長さを求めなさい。

図Ⅲ



問2. 図Ⅲにおいて，F は辺 AD 上にある。K は，F を通り辺 AB に平行な直線と G を通り辺 AD に平行な直線との交点である。このとき，FK⊥KG である。L は，線分 KG と辺 DC との交点である。

(1) △EFD∽△KFG であることを証明しなさい。

(2) 長方形 FKLD の面積を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

解答欄

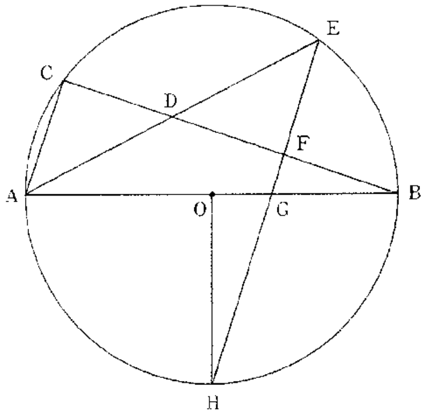
問1	(1)	度
	(2)	cm
問2	(1)	証明
	(2)	求め方 答　　　　　　　　cm^2

解答
問1
(1) $a-90$ 度
(2) $\dfrac{57}{4}$ cm
問2
(1)
証明
△EFDと△KFGにおいて
四角形EFGHは長方形だから
∠DEF＝90°
FK⊥KGだから∠GKF＝90°
よって
∠DEF＝∠GKF…①
EH∥FGだから
∠EDF＝∠DFG (錯角)
AD∥KGだから
∠DFG＝∠KGF (錯角)
よって
∠EDF＝∠KGF (錯角)…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいから
△EFD∽△KFG
(2)
求め方
△EFD∽△KFGだから
EF : KF＝FD : FG
FD＝x cm, KF＝y cmとすると
$3 : y = x : 18$
よって
$xy = 54$
したがって長方形FKLDの面積は
FD×FK＝$xy = 54\text{cm}^2$
答 54
解説
問1
(2)
DからFGに垂線DPをひく。
△DIPにおいて
DI＝$\dfrac{10}{2}$＝5cm, DP＝EF＝3cm だから
三平方の定理よりPI＝$\sqrt{5^2-3^2}$＝4cm
△DIPと△JIDは
∠DPI＝∠JDI＝90°, ∠DIP＝∠JID (共通) より
2組の角がそれぞれ等しいので
△DIP∽△JID
したがってPD : DJ＝IP : ID
3 : DJ＝4 : 5
DJ＝$\dfrac{15}{4}$
よってAJ＝$18-\dfrac{15}{4}=\dfrac{57}{4}$ cm

【問 14】

図のような，中心が点 O で，線分 AB を直径とする円 O があり，円 O の円周上にある 3 点 A，B，C を頂点とする△ABC がある。ただし，AC＜BC とする。線分 BC 上に点 D を，AC＝CD となるようにとる。点 A と点 D を通る直線をひき，円 O との交点のうち点 A と異なる点を E とする。また，点 E を通り線分 AC に平行な直線をひき，線分 BC との交点を F，線分 AB との交点を G，円 O との交点のうち点 E と異なる点を H とする。点 H と点 O を結ぶ。

このとき次の問1では指示に従って答え，問2では $\boxed{\quad}$ に適当な数を書き入れなさい。



（岡山県　2009 年度）

問1. △ABC∽△GHO を証明しなさい。

問2. AC＝2 cm，BC＝6 cm であるとき，円 O の半径は $\boxed{(ア)}$ cm である。

OG＝ $\boxed{(イ)}$ cm であり，AG : GB＝ $\boxed{(ウ)}$: 1 である。

また，EG＝ $\boxed{(エ)}$ cm であり，△AEG の面積は $\boxed{(オ)}$ cm^2 である。

解答欄

問1	証明	
問2	(ア)	cm
	(イ)	cm
	(ウ)	
	(エ)	cm
	(オ)	cm^2

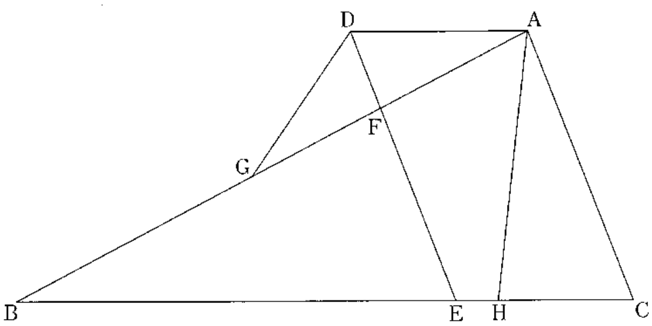
解答
問1
証明
△ABC と△GHO において
AC∥HE で，錯角は等しいから∠BAC＝∠HGO…①
線分 AB は円 O の直径だから，∠ACB＝90°…②
また②と仮定から△ACD は直角二等辺三角形なので∠CAD＝45°…③
AC∥HE で錯角は等しいから∠CAD＝∠AEH…④
③，④から∠AEH＝45°…⑤
1 つの弧に対する中心角の大きさは，その弧に対する円周角の大きさの 2 倍なので
⑤から∠AOH＝2∠AEH＝90°…⑥
⑥から∠GOH＝90°…⑦
②，⑦から∠ACB＝∠GOH…⑧
①，⑧から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△GHO
問2
(ア) $\sqrt{10}$ cm　(イ) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ cm　(ウ) 2　(エ) $\dfrac{8}{3}$ cm　(オ) $\dfrac{16}{3}$ cm^2
解説
問2
△ABC において
∠ACB＝90°より三平方の定理を利用して $AB=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$ cm
よって円 O の半径は $\dfrac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$ cm
△ABC∽△GHO より
$CA:OG=BC:HO$
$2:OG=6:\sqrt{10}$
$6OG=2\sqrt{10}$
$OG=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ cm
$AG:GB=\left(\sqrt{10}+\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right):\left(\sqrt{10}-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}:\dfrac{2\sqrt{10}}{3}=2:1$
△BCA で FG∥CA だから
$BF:FC=BG:GA=1:2$
$BF=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{1}{3}\times6=2$cm
$CD=CA=2$cm
よって $DF=6-2-2=2$cm
EF∥AC だから∠EFD＝∠ACD＝90°，∠DEF＝∠DAC＝45°より，EF＝DF＝2cm
$FG:CA=BG:BA$ より $FG:2=1:3$　$FG=\dfrac{2}{3}$ cm
よって $EG=EF+FG=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$ cm　BE を結ぶと AB は直径より∠AEB＝90°
△ACD は CA＝CD の直角二等辺三角形だから $AD=\sqrt{2}CA=2\sqrt{2}$ cm
同様に $DE=2\sqrt{2}$ cm　$AE=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$ cm
△ABE において三平方の定理より $BE=\sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$ cm
よって $\triangle ABE=\dfrac{1}{2}\times AE\times BE=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8\mathrm{cm}^2$
$AG:GB=2:1$ より $\triangle AEG=\dfrac{2}{3}\triangle ABE=\dfrac{2}{3}\times8=\dfrac{16}{3}\mathrm{cm}^2$

【問 15】

図のように，三角形 ABC と平行四辺形 ADEC があり，点 E は辺 BC 上の点です。辺 AB と辺 DE との交点を F とします。また，線分 BF 上に点 G，辺 CE 上に点 H があり，DG＝DA，∠CAH＝∠BAD です。

これについて，次の問1・問2に答えなさい。

（広島県 2009 年度）



問1．△ABH∽△DGF であることを証明しなさい。

問2．AF＝FG，BG＝16 cm，BE＝27 cm，AD＝9 cm のとき，辺 DE の長さは何 cm ですか。

解答欄

問1	〔仮　定〕図において，四角形 ADEC は平行四辺形， DG＝DA，∠CAH＝∠BAD 〔結　論〕△ABH∽△DGF 〔証　明〕
問2	cm

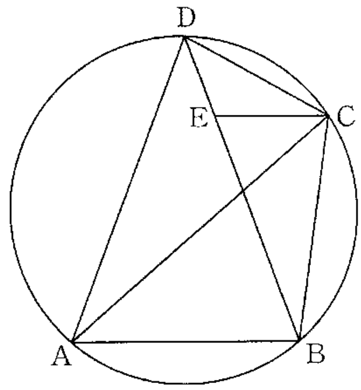
解答
問1
証明
△ABHと△DGFにおいて
平行線の錯角は等しいから
∠ABH＝∠DAG…①
DG＝DAであるから
∠DGF＝∠DAG…②
①，②より
∠ABH＝∠DGF…③
また
∠AHB＝∠ACE＋∠CAH…④
∠DFG＝∠ADE＋∠BAD…⑤
平行四辺形の向かい合う角は等しいから
∠ACE＝∠ADE…⑥
∠CAH＝∠BADであることと④，⑤，⑥より
∠AHB＝∠DFG…⑦
③，⑦より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ABH∽△DGF
問2　$4\sqrt{17}$ cm
解説
問2
△DGAはDG＝DAの二等辺三角形で
AF＝FGより，∠DFG＝90°
△ABH∽△DGFだから∠AHB＝90°
△DGFと△EBFは
2組の角がそれぞれ等しいので
△DGF∽△EBF
FG＝x cmとおくと
DG : EB＝GF : BF
$9:27=x:(16+x)$
$x=8$ cm
△DGFで三平方の定理より
DF＝$\sqrt{9^2-8^2}=\sqrt{17}$ cm
DF : EF＝9 : 27
$\sqrt{17}$: EF＝1 : 3
EF＝$3\sqrt{17}$ cm
よってDE＝DF＋EF＝$\sqrt{17}+3\sqrt{17}=4\sqrt{17}$ cm

【問 16】

図のように，円の周上に 4 点 A，B，C，D があり，線分 BD 上に AB∥EC となる点 E をとる。

次の問1，問2に答えなさい。

（山口県 2009 年度）



問1．△ACD∽△BEC であることを証明しなさい。

問2．AB＝BC＝7 cm，CD＝5 cm，BD＝10 cm のとき，線分 AD の長さを求めなさい。

解答欄

問1	証明
問2	cm

解答
問1
証明
△ACD と△BEC で
弧 CD に対する円周角は等しいから
∠CAD＝∠CBD
よって∠CAD＝∠EBC…①
また弧 AD に対する円周角は等しいから
∠ABD＝∠ACD…②
AB∥EC より錯角は等しいので
∠ABE＝∠CEB
よって∠ABD＝∠BEC…③
②, ③から
∠ACD＝∠BEC…④
①, ④から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ACD∽△BEC
問2　$\frac{51}{5}$ cm
解説
問2
AC と BD の交点を P とする。
△BPC と△BCD において
共通なので∠PBC＝∠CBD…①
弧 BC の円周角だから
∠BDC＝∠BAC
BA＝BC より
∠BAC＝∠BCA
よって∠BCA＝∠BDC
つまり∠BCP＝∠BDC…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△BPC∽△BCD
したがって BP : BC＝PC : CD＝BC : BD
BP : 7＝7 : 10
BP＝$\frac{49}{10}$
DP＝10－$\frac{49}{10}$＝$\frac{51}{10}$
△BCD と△APD においても
同様に△BCD∽△APD
BD : AD＝DC : DP
10 : AD＝5 : $\frac{51}{10}$
AD＝$\frac{51}{5}$ cm

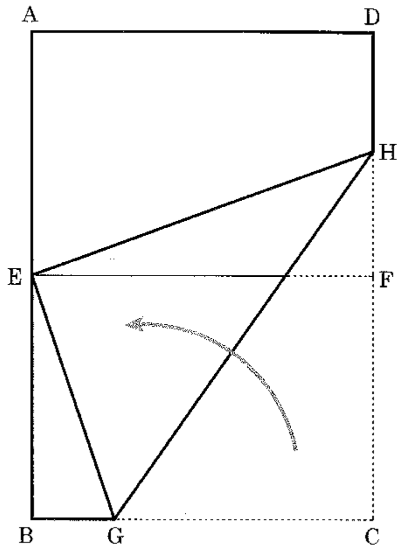
【問 17】

図 1 のように, AB:AD＝$\sqrt{2}$:1 の長方形 ABCD がある。辺 AD が辺 BC に重なるように折り, その折り目を EF とする。折った部分をもとにもどし, 次に, 点 C が点 E に重なるように折り, その折り目を GH とする。折った部分をもとにもどし, 点 E と点 G, H をそれぞれ結ぶ。次の問1～問3に答えなさい。

(徳島県 2009 年度)

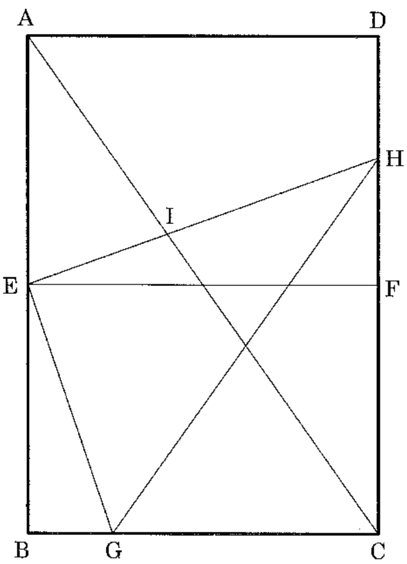
問1. ∠HEF＝a°, ∠EHG＝b° とするとき, a を b を用いて表しなさい。

図 1



問2. △EBG∽△EFH を証明しなさい。

図 2



問3. 図 1 の長方形 ABCD が, AB＝20$\sqrt{2}$ cm, AD＝20 cm のとき, 次の(1),(2)に答えなさい。

(1) 線分 BG の長さを求めなさい。

(2) 図 2 のように, 長方形 ABCD の対角線 AC と線分 EH との交点を I とする。点 I を通り△EGH の面積を 2 等分する直線が線分 GH と交わる点を P とする。線分 GP の長さを求めなさい。

解答欄

問1	$a=$		
問2	証明		
問3	(1)		cm
	(2)		cm

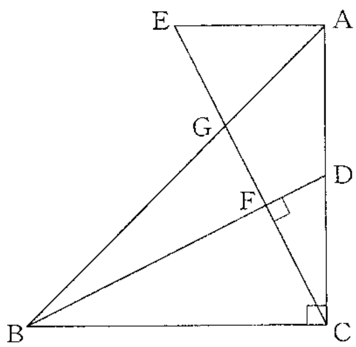
解答
問1　$a=90-2b$
問2
証明
△EBGと△EFHで
∠EBG＝∠EFH＝90°　…①
また
∠BEG＝∠FEB－∠FEG
∠FEH＝∠HEG－∠FEG
∠FEB＝∠HEG＝90°　だから
∠BEG＝∠FEH…②
①, ②から
2組の角が, それぞれ等しいので
△EBG∽△EFH
問3
(1)　5 cm
(2)　$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
解説
問1
GHとEFの交点をKとする。
折った部分の角だから∠GHC＝∠GHE＝b°
△EHKにおいて
∠HKF＝∠HEK＋∠EHK＝a°＋b°
よって△HKFで, ∠KHF＋∠HKF＋∠HFK＝180°だから
$b°+a°+b°+90°=180°$
$a°=90°-2b°$
$a=90-2b$
問3
(1)
BG＝x cmとおくとEG＝CG＝20－x cmと表せる。
△EBGにおいて
三平方の定理より$(10\sqrt{2})^2+x^2=(20-x)^2$
$200+x^2=400-40x+x^2$
$40x=200$
$x=5$ cm
(2)
△EBG∽△EFHより
EB：EF＝BG：FH
$10\sqrt{2}:20=5:$HF
HF＝$\frac{20\times5}{10\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$ cm
AE∥CHより
EI：IH＝AE：CH＝$10\sqrt{2}:(10\sqrt{2}+5\sqrt{2})=10\sqrt{2}:15\sqrt{2}=2:3$
よってIGを結ぶと△GEI：△GHI＝2：3
△GIH＝$\frac{3}{5}$△GEH
また△PHI＝$\frac{1}{2}$△GEHより$\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}=\frac{5}{6}$だからGP：PH＝1：5
△HGCにおいて
三平方の定理よりGH＝$\sqrt{15^2+(15\sqrt{2})^2}=15\sqrt{3}$ cm
よってGP＝$\frac{1}{6}$GH＝$\frac{15\sqrt{3}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

【問 18】

図のように，∠ACB＝90°，AC＝BC の直角二等辺三角形 ABC がある。辺 AC の中点を D とし，点 B と点 D を結ぶ。点 C を通り線分 BD に垂直な直線と，点 A を通り辺 BC に平行な直線との交点を E とする。また，線分 CE と線分 BD との交点を F，線分 CE と辺 AB との交点を G とする。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（香川県 2009 年度）



問1．△AEG∽△BCG であることを証明せよ。

問2．EA:BC＝1:2 であることを証明せよ。

解答欄

問1	証明
問2	証明

解答
問1
証明
$\triangle$AEG と$\triangle$BCG において
対頂角は等しいから
$\angle$AGE＝$\angle$BGC…①
EA$/\!/$BC より，錯角は等しいから
$\angle$EAG＝$\angle$CBG…②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle$AEG∽$\triangle$BCG
問2
証明
CA の延長上に点 H をとる。$\triangle$AEC と$\triangle$CDB において
仮定より$\triangle$ABC は直角二等辺三角形だから
AC＝CB …①
$\angle$BCD＝$\angle$BCA＝90°
EA$/\!/$BC より同位角は等しいから
$\angle$BCA＝$\angle$EAH＝90°　$\angle$CAE＝180°－$\angle$EAH＝90°
よって$\angle$CAE＝$\angle$BCD…②
$\angle$DCF＝180°－$\angle$CFD－$\angle$CDF＝90°－$\angle$CDF
$\angle$CBD＝180°－$\angle$BCD－$\angle$CDB＝90°－$\angle$CDB
$\angle$CDF＝$\angle$CDB だから$\angle$DCF＝$\angle$CBD
$\angle$DCF＝$\angle$ACE だから$\angle$ACE＝$\angle$CBD…③
①，②，③より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
$\triangle$AEC≡$\triangle$CDB
よって EA＝DC…④
また仮定より，点 D は辺 AC の中点だから
AD＝DC…⑤
①，④，⑤より
BC＝AC＝AD＋DC＝2DC＝2EA
したがって EA : BC＝1 : 2
解説
問2
$\triangle$ACE と$\triangle$CDB が合同であることを証明することにより
EA＝DC＝$\frac{1}{2}$AC＝$\frac{1}{2}$BC であることを導く。

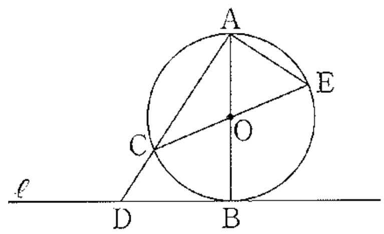
【問 19】

図 1 のように，線分 AB を直径とする円 O と直線ℓ が点 B で接している。円 O の周上に点 A, B と異なる位置に点 C をとり，直線 AC と直線ℓ との交点を D とし，直線 CO と円 O との点 C 以外の交点を E とする。また，点 A と点 E を結び，△CAE をつくる。

このとき，次の問いに答えなさい。

（愛媛県　2009 年度）

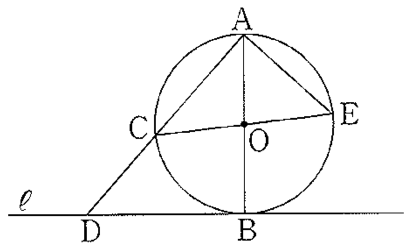
図 1



問1．△ABD∽△CAE であることを証明せよ。

問2．図 2 において，OA＝2 cm，AC＝3 cm であるとき，

図 2



(1)　線分 CD の長さを求めよ。

(2)　2 点 D，O を結んでできる△OCD の面積を求めよ。

解答欄

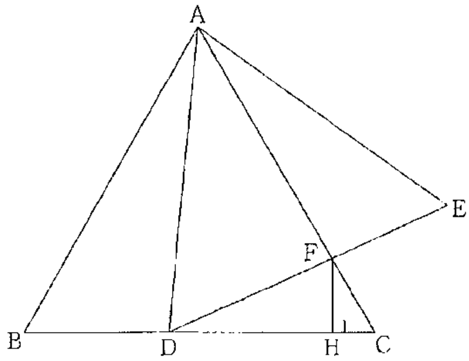
<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1
証明
△ABDと△CAEにおいて
直線BDは線分ABを直径とする円と接するから
$\angle ABD = 90^\circ$ …①
線分CEは円Oの直径だから
$\angle CAE = 90^\circ$ …②
①，②より
$\angle ABD = \angle CAE$…③
OA，OCは円Oの半径だから，OA＝OCから
$\angle BAD = \angle ACE$…④
③，④で
2組の角がそれぞれ等しいことがいえたから
$\triangle ABD \backsim \triangle CAE$
問2
(1)　$\dfrac{7}{3}$ cm
(2)　$\dfrac{7\sqrt{7}}{12}$ cm^2
解説
問2
(1)
円Oの直径だから$AB = CE = 2 \times 2 = 4$cm
$\triangle ABD \backsim \triangle CAE$より
$AD : CE = AB : CA$
$AD : 4 = 4 : 3$
$AD = \dfrac{16}{3}$ cm
よって$CD = \dfrac{16}{3} - 3 = \dfrac{7}{3}$ cm
(2)
△ADBにおいて
三平方の定理より$BD = \sqrt{\left(\dfrac{16}{3}\right)^2 - 4^2} = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}$ cm
よって$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{7}}{3} \times 4 = \dfrac{8\sqrt{7}}{3}$ cm^2
AO＝BOより$\triangle OAD = \dfrac{1}{2}\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8\sqrt{7}}{3} = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}$ cm^2
また$AC : CD = 3 : \dfrac{7}{3} = 9 : 7$より
$\triangle OCD = \dfrac{7}{16}\triangle OAD = \dfrac{7}{16} \times \dfrac{4\sqrt{7}}{3} = \dfrac{7\sqrt{7}}{12}$ cm^2

【問 20】

図のように，正三角形ABCがある。この正三角形の辺BC上に点Dをとり，辺ADを1辺とする正三角形ADEをつくる。また，辺ACと辺DEの交点をFとし，点Fから線分DCに垂線をひき，線分DCとの交点をHとする。このとき，次の問1・問2に答えなさい。

（高知県 2009年度）



問1．△ABD∽△AEFを証明せよ。

問2．AB＝8 cm，AD＝7 cm のとき，FHの長さを求めよ。

解答欄

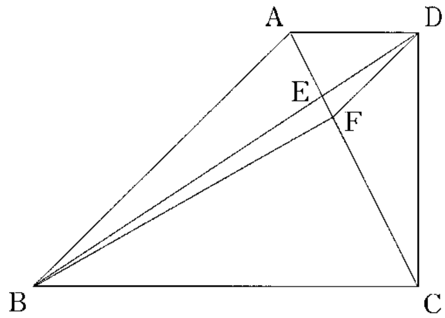
問1	【証明】 △ABDと△AEFにおいて したがって　△ABD∽△AEF
問2	cm

解答
問1
証明
△ABDと△AEFにおいて
△ABCと△ADEはともに正三角形であるから
$\angle ABD = \angle AEF$…①
また
$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 60^\circ - \angle DAC$
$\angle EAF = \angle DAE - \angle DAC = 60^\circ - \angle DAC$
よって
$\angle BAD = \angle EAF$…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle ABD \backsim \triangle AEF$
問2 $\dfrac{15\sqrt{3}}{16}$ cm
解説
問2
$\triangle ABD \backsim \triangle AEF$より
$AB : AE = AD : AF$
$8 : 7 = 7 : AF$
$AF = \dfrac{49}{8}$ cm
よって $FC = 8 - \dfrac{49}{8} = \dfrac{15}{8}$ cm
△FCHは$\angle FHC = 90^\circ$, $\angle FCH = 60^\circ$の直角三角形だから
$FH : FC = \sqrt{3} : 2$
よって $FH : \dfrac{15}{8} = \sqrt{3} : 2$
$2FH = \dfrac{15\sqrt{3}}{8}$
$FH = \dfrac{15\sqrt{3}}{16}$ cm

【問 21】

AD＝4 cm，BC＝12 cm，CD＝8 cm，AD∥BC，∠ADC＝90°の四角形 ABCD がある。図のように，対角線 AC，BD をひき，その交点を E とする。点 D を通り辺 AB に平行な直線と対角線 AC の交点を F とする。点 B と点 F，点 D と点 F をそれぞれ結ぶ。

次の問1は指示にしたがって答え，問2，問3は □ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし，根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。



（福岡県 2009 年度）

問1．図において，相似な三角形を 1 組選び，その 2 つの三角形が相似であることを， □ の中に証明せよ。

証明

問2．線分 AB 上に点 P を，線分 CP の長さが最も短くなるようにとる。このとき，線分 AP の長さは □ cm である。

問3．△FBC の面積は □ cm^2 である。

解答欄

問1	
問2	
問3	

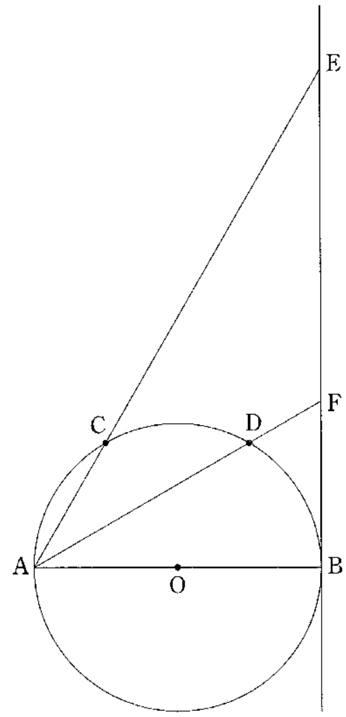
解答
問1
証明
△AED と△CEB において
平行線の錯角は等しいから
∠DAE＝∠BCE…①
∠ADE＝∠CBE…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△AED∽△CEB
問2　$2\sqrt{2}$
問3　32
解説
問2
A から BC に垂線 AG をひく。
AG＝DC＝8cm, BG＝12－4＝8cm
△ABG は直角二等辺三角形で AB＝$8\sqrt{2}$ cm
CP の長さが最も短くなるとき CP⊥AB より
△BCP も BP＝CP の直角二等辺三角形となる。
よって BP＝$\frac{12}{\sqrt{2}}$＝$6\sqrt{2}$ cm
AP＝$8\sqrt{2}-6\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ cm
問3
△FAD∽△ACB だから
FA:AC＝AD:CB＝4:12＝1:3
F から BC に垂線 FH をひくと FH∥AG より
FH:AG＝CF:CA＝2:3
よって FH＝$\frac{2}{3}$AG＝$\frac{2}{3}\times 8=\frac{16}{3}$ cm
したがって△FBC＝$\frac{1}{2}\times 12\times\frac{16}{3}=32$ cm^2

【問 22】

図のように，長さ 2cm の線分 AB を直径とする円 O の周上に，弧 AB を 3 等分する点をとり，A に近い方から C，D とする。また，点 B を接点とする円 O の接線と直線 AC，直線 AD との交点をそれぞれ E，F とする。

このとき，次の問1～問5に答えなさい。

（佐賀県 2009 年度 後期）



問1．∠BOD の大きさを求めなさい。

問2．BF の長さを求めなさい。

問3．△ABF∽△EBA であることを証明しなさい。

問4．△AFE の面積は△ABE の面積の何倍か。

問5．△BCF の面積を求めなさい。

解答欄

問1	度
問2	cm
問3	証明
問4	倍
問5	cm^2

解答

問1　60 度

問2　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm

問3

証明

△ABF と△EBA において

∠ABF＝∠EBA＝90°（共通)…①

C，D は弧 AB を 3 等分しているので

∠AOD＝120°

OA＝OD より∠FAB＝30°　だから

∠AFB＝60°

また OA＝OC，∠AOC＝60°　だから

∠EAB＝60°

よって

∠AFB＝∠EAB…②

①，②から

2 組の角がそれぞれ等しいので

△ABF∽△EBA

問4　$\dfrac{2}{3}$ 倍

問5　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2

解説

問5

△ABC で∠ABC＝30°

AB は直径だから∠ACB＝90°

これより $AC=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{2}{2}=1\text{cm}$, $BC=\sqrt{3}\,AC=\sqrt{3}$ cm

△EAB で∠AEB＝30° ∠EBA＝90°より EA＝2AB＝2×2＝4cm，$EB=\sqrt{3}\,AB=2\sqrt{3}$ cm

$BF:EB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}:2\sqrt{3}=1:3$

よって$\triangle BCF=\dfrac{1}{3}\triangle BCE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times CE\times BC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(4-1)\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2

【問 23】

図 1, 図 2 のように, 点 O を中心とする半径 $\sqrt{5}$ cm の円の周上に 4 点 A, B, C, D があり, 線分 BD は∠ABC を 2 等分している。また, 線分 AC は円 O の直径で, 線分 AC と線分 BD の交点を E とする。AB＝2cm であるとき, 次の問いに答えなさい。

（長崎県 2009 年度）

図 1

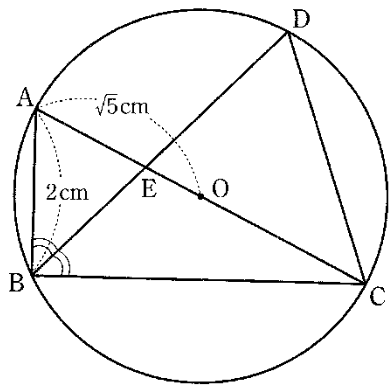
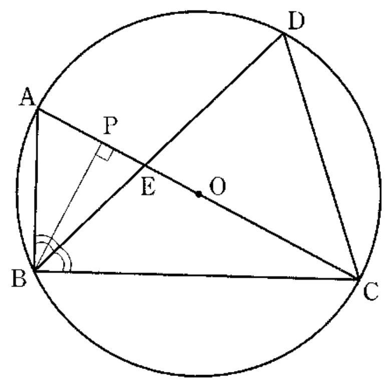


図 2



問1. ∠ABD の大きさは何度か。

問2. △ABE∽△DBC であることを証明せよ。

問3. 三角形 ABC の面積は何 cm^2 か。

問4. 図 2 のように, 点 B から線分 AC にひいた垂線と線分 AC との交点を P とするとき, 線分 BP の長さは何 cm か。

問5. 線分 BD の長さは何 cm か。

解答欄

問1	°
問2	証明
問3	cm^2
問4	cm
問5	cm

解答

問1　45°

問2

$\triangle$ABEと$\triangle$DBCにおいて

$\angle$ABE＝$\angle$DBC (仮定)…①

$\angle$BAE＝$\angle$BDC(弧BCに対する円周角)…②

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle$ABE∽$\triangle$DBC

問3　$4\ \mathrm{cm}^2$

問4　$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ cm

問5　$3\sqrt{2}$ cm

解説

問5

CからBDに垂線CHをひく。

$\triangle$BCHは直角二等辺三角形になるから BH＝CH＝$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ cm

$\triangle$ABPと$\triangle$DCHにおいて

弧BCの円周角なので

$\angle$BAP＝$\angle$CDH

$\angle$APB＝$\angle$DHC＝90° より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle$ABP∽$\triangle$DCH

よって

AB : DC＝BP : CH

$2:\mathrm{CD}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}:2\sqrt{2}$

CD＝$\sqrt{10}$ cm

$\triangle$CDHで三平方の定理より DH＝$\sqrt{(\sqrt{10})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$ cm

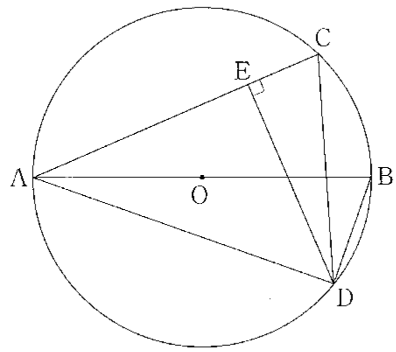
よって BD＝$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ cm

【問 24】

図は，点 O を中心とする円で，線分 AB は円の直径である。2 点 C，D は円 O の周上にあって，線分 CD は線分 OB と交わっている。点 E は D から線分 AC にひいた垂線と AC との交点である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2009 年度）



問1．△ABD∽△DCE であることを証明しなさい。

問2．AB＝9 cm，BD＝3 cm，CD＝6 cm のとき，

(1) 線分 CE の長さを求めなさい。

(2) △ADE の面積を求めなさい。ただし，根号がつくときは根号のついたままで答えること。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

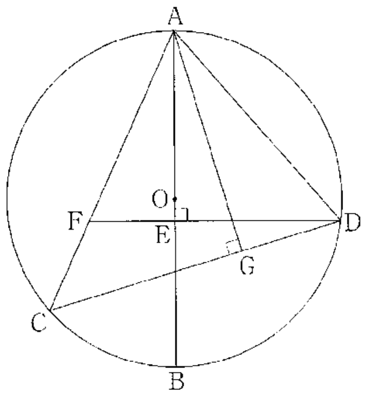
解答
問1
証明
△ABDと△DCEにおいて
∠ABDと∠DCEは$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角だから
∠ABD＝∠DCE …①
ABは円Oの直径だから
∠ADB＝90° …②
AC⊥DEだから
∠DEC＝90° …③
②, ③より
∠ADB＝∠DEC…④
①, ④より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ABD∽△DCE
問2
(1) 2 cm
(2) $8\sqrt{5}$ cm^2
解説
問2
(2)
三平方の定理より△DCEにおいてDE＝$\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ cm
△ABDにおいてAD＝$\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$ cm
△ADEにおいてAE＝$\sqrt{(6\sqrt{2})^2-(4\sqrt{2})^2}=2\sqrt{10}$ cm
△ADE＝$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{5}$ cm^2

【問 25】

図は，点 O を中心とする円で，線分 AB は円の直径である。2 点 C，D は円 O の周上にあって，線分 CD は線分 AB と交わり，AC＞AD である。点 E は D から線分 AB にひいた垂線と AB との交点で，点 F は DE の延長と線分 AC との交点である。また，点 G は A から線分 CD にひいた垂線と CD との交点である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2009 年度）



問1．△ACD∽△ADF であることを証明しなさい。

問2．AB＝8 cm，AC＝7 cm，AD＝6 cm のとき，△AFG の面積を求めなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

解答欄

問1	証明
問2	cm^2

解答

問1

証明

△ACD と△ADF において

2 つの三角形に共通な角だから

∠CAD＝∠DAF…①

B と D を結ぶと∠ACD と∠ABD は$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角だから

∠ACD＝∠ABD…②

また AB は円 O の直径だから

∠ADB＝90°

したがって∠ABD＝90°－∠DAE…③

一方, AB⊥DE より∠AED＝90° だから

∠ADF＝90°－∠DAE…④

③, ④より

∠ABD＝∠ADF…⑤

②, ⑤より

∠ACD＝∠ADF…⑥

①, ⑥より

2 組の角がそれぞれ等しいから

△ACD∽△ADF

問2 $\dfrac{27\sqrt{7}}{8}\,\mathrm{cm}^2$

解説

問2

△ABD において

三平方の定理より BD＝$\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$ cm

△ACG と△ABD は

2 組の角がそれぞれ等しいので相似であるから

AC : AB＝CG : BD＝AG : AD

7 : 8＝CG : $2\sqrt{7}$ より

CG＝$\dfrac{7\sqrt{7}}{4}$ cm

7 : 8＝AG : 6 より AG＝$\dfrac{21}{4}$ cm

△ACG＝$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7\sqrt{7}}{4}\times\dfrac{21}{4}=\dfrac{147\sqrt{7}}{32}\,\mathrm{cm}^2$

また△ACD∽△ADF だから

AD : AF＝AC : AD

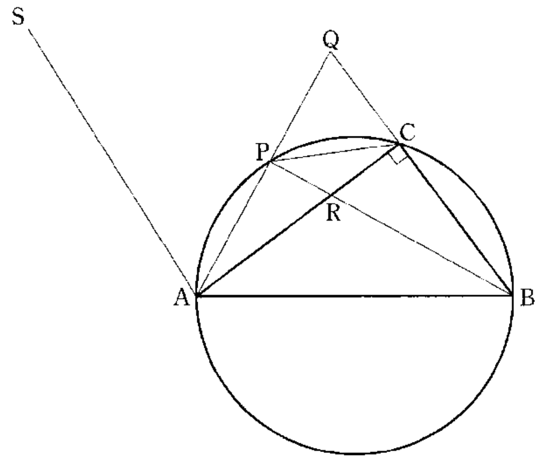
6 : AF＝7 : 6

AF＝$\dfrac{36}{7}$ cm

よって△AFG＝$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}}$×△ACG＝$\dfrac{36}{7}\times\dfrac{1}{7}\times\dfrac{147\sqrt{7}}{32}=\dfrac{27\sqrt{7}}{8}\,\mathrm{cm}^2$

【問 26】

図は，線分 AB を斜辺とする直角三角形 ABC と，3 つの頂点 A，B，C を通る円の点 B を含まない $\overset{\frown}{AC}$ 上に 2 点 A，C と異なる点 P をとり，2 直線 AP，BC の交点を Q とし，点 C と点 P を結んだものである。また，2 つの線分 AC，BP の交点を R とし，線分 AQ を対称軸として線分 AB と線対称となるように線分 AS をとったものである。AC＝4 cm，BC＝3 cm とするとき，次の問1～問4 に答えなさい。



（鹿児島県　2009 年度）

問1．線分 AS の長さは何 cm か。

問2．∠PAB＝63°のとき，∠ACP の大きさは何度か。

問3．△ARP∽△BQP であることを証明せよ。

問4．AS＝BQ のとき，線分 PR と線分 RC の長さの和は何 cm か。

解答欄

問1	cm
問2	度
問3	証明
問4	cm

解答
問1　5cm
問2　27 度
問3
証明
△ARP と△BQP において
$\overset{\frown}{CP}$に対する円周角は等しいから
∠PAR＝∠PBQ…①
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから
∠APR＝∠ACB＝90°　…②
②より
∠BPQ＝180°－∠APR＝90°　…③
②, ③より
∠APR＝∠BPQ…④
①, ④より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ARP∽△BQP
問4　$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ cm
解説
問1
対称なので AS＝AB
三平方の定理より AB＝$\sqrt{3^2+4^2}$ ＝5 cm
問2
円周角の定理より∠APB＝∠ACB＝90°　∠ABP＝180°－90°－63°＝27°
円周角の定理より∠ACP＝∠ABP＝27°
問4
BQ＝AS＝AB より△BAQ は二等辺三角形である。
QC＝5－3＝2 cm
△AQC で三平方の定理より
AQ＝$\sqrt{4^2+2^2}$ ＝$2\sqrt{5}$ cm
∠APB＝90°だから AP＝QP＝$\sqrt{5}$ cm
△ABP で三平方の定理より
BP＝$\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}$ ＝$2\sqrt{5}$ cm
△ARP∽△BQP より
PR:PQ＝AP:BP
PR:$\sqrt{5}$ ＝$\sqrt{5}$:$2\sqrt{5}$
PR＝$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm
△ARP∽△BRC だから
AP:BC＝RP:RC
$\sqrt{5}$:3＝$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$:RC
RC＝$\dfrac{3}{2}$ cm
よって PR＋RC＝$\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ cm