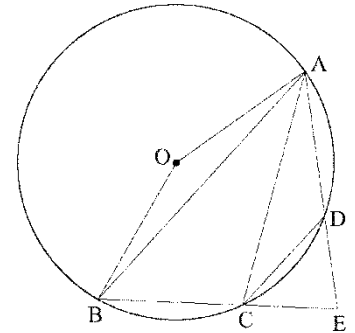


4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2014 年度出題】

【問 1】

図で、点 A, B, C, D は円 O の円周上にあり、AD, BC を延長して交わった点を E とする。 $\angle ABC = 52^\circ$, $\angle AOB = 158^\circ$, $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ のとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

(青森県 2014 年度 後期)



(1) $\angle BCA$ の大きさを求めなさい。

(2) $\angle ACD$ の大きさを求めなさい。

(3) $\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ が相似になることを証明しなさい。

解答欄

(1)	度
(2)	度
(3)	〔証明〕

解答

(1) 101 度

(2) 27 度

(3)

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ において

$\widehat{AD} = \widehat{BC}$ より

$\angle ACD = \angle CAB$

錯角が等しいから

$AB \parallel DC$

同位角が等しいから

$\angle ABE = \angle DCE \cdots \textcircled{1}$

$\angle E$ は共通だから

$\angle BEA = \angle CED \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$

解説

(1)

点 C を含まない弧 AB の中心角 $\angle AOB = 360^\circ - 158^\circ = 202^\circ$

よって円周角の定理より $\angle BCA = \frac{1}{2} \times 202^\circ = 101^\circ$

(2)

$\widehat{AD} = \widehat{BC}$ より

$\angle ACD = \angle BAC = 180^\circ - 101^\circ - 52^\circ = 27^\circ$

(3)

$\triangle ABE$ と $\triangle DCB$ において

2 組の角がそれぞれ等しいことを示して相似を導く。

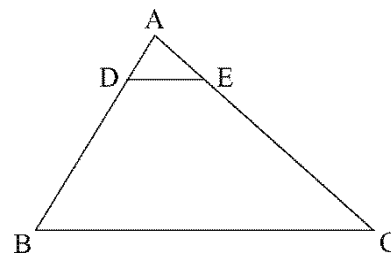
【問 2】

図1のような、 $AB=8\text{ cm}$ 、 $BC=12\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ があり、辺 AB 上に $AD=2\text{ cm}$ となる点 D をとります。点 D を通り、辺 BC と平行な直線と辺 AC との交点を E とするとき、次の問1、問2に答えなさい。

(宮城県 2014 年度 前期)

問1 線分 DE の長さを求めなさい。

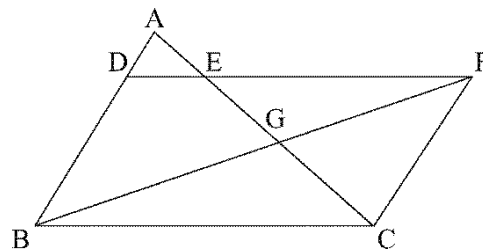
図1



問2 図2は、図1において、線分 DE を E の方に延長した直線上

図2

に、 $DE:EF=1:3$ となる点 F をとり、点 B と点 F 、点 C と点 F をそれぞれ結んだものです。辺 AC と線分 BF との交点を G とするとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。



(1) $\triangle ADE \sim \triangle CFE$ であることを証明しなさい。

(2) 線分 BF を F の方に延長した直線上に、 $BF:FH=3:1$ となる点 H をとり、点 C と点 H を結びます。 $\triangle ADE$ と $\triangle CHG$ の面積の比を求めなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	(1)	〔証明〕
	(2)	$\triangle ADE : \triangle CHG =$:

解答

問1 3cm

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle ADE$ と $\triangle CFE$ において

対頂角が等しいから

$$\angle AED = \angle CEF \cdots \textcircled{1}$$

$DE \parallel BC$ だから

$$AE:EC = AD:DB = 2:6 = 1:3$$

条件より, $DE:EF = 1:3$ だから

$$AE:CE = DE:FE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADE \sim \triangle CFE$$

$$\textcircled{2} \triangle ADE : \triangle CHG = 7:64$$

解説

問1

$DE \parallel BC$ より

$$DE:BC = AD:AB$$

$$DE:12 = 2:8$$

$$8DE = 24$$

$$DE = 3\text{cm}$$

問2

(1)

$\triangle ADE$ と $\triangle CFE$ において

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいことを示し, 相似を導く。

(2)

四角形 $DBCF$ において

$DF \parallel BC$

また $\triangle ADE \sim \triangle CFE$ より

$$\angle EAD = \angle ECF$$

よって $DB \parallel FC$

したがって 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行なので

四角形 $DBCF$ は平行四辺形。

$\triangle ADE \sim \triangle CFE$ で

$$DE:FE = 1:3 \text{ より}$$

$$\triangle ADE : \triangle CFE = 1:9$$

$$\triangle ADE = \frac{1}{9} \triangle CFE \cdots \textcircled{1}$$

$EF \parallel BC$ より

$$FG:GB = EG:GC = EF:BC = 3:4$$

$$BF:FH = 3:1$$

$$\text{よって } BG:GF:FH = 12:9:7$$

$$\triangle CHG = \frac{16}{9} \triangle CGF = \frac{16}{9} \times \frac{4}{7} \triangle CFE = \frac{64}{63} \triangle CFE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\triangle ADE : \triangle CHG = \frac{1}{9} : \frac{64}{63} = 7:64$$

【問 3】

図のように、正方形 ABCD があり、辺 DC の中点を E、線分 AE と線分 DB の交点を F とする。次の問1、問2に答えなさい。

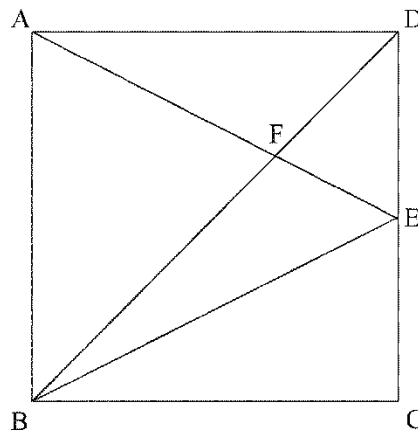
(秋田県 2014 年度)

問1 $\triangle ABF \sim \triangle EDF$ となることを証明しなさい。

問2 $AB = 4 \text{ cm}$ とするとき、

(1) 線分 BE の長さを求めなさい。求める過程も書きなさい。

(2) $\triangle FBE$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	〔過程〕 答 cm
	(2)	cm²

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle EDF$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AFB = \angle EFD \cdots \textcircled{1}$$

$AB \parallel DC$ より錯角は等しいから

$$\angle ABF = \angle EDF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \sim \triangle EDF$$

問2

(1)

〔過程〕

$BE = x$ cm とすると

$\triangle BCE$ は直角三角形であるので

三平方の定理から

$$x^2 = 4^2 + 2^2$$

$$x^2 = 20$$

$x > 0$ であるから

$$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

よって $BE = 2\sqrt{5}$ cm

答 $2\sqrt{5}$ cm

$$(2) \frac{8}{3} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle ABF$ と $\triangle EDF$ において

2組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

問2

(1)

$\triangle BCE$ において

$BC = 4$ cm, $CE = 2$ cm だから

三平方の定理より $BE = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ cm

(2)

$AB \parallel DC$ より

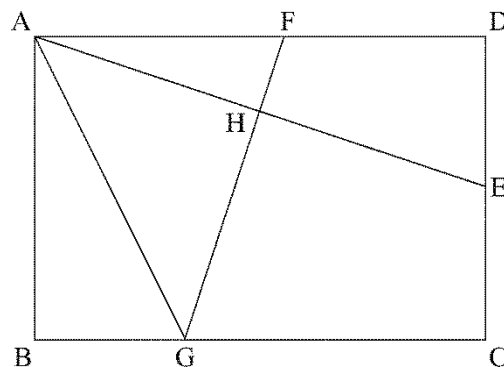
$$BF:FD = AB:DE = 4:2 = 2:1$$

$$\triangle FBE = \frac{2}{3} \triangle BDE = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{8}{3} \text{ cm}^2$$

【問 4】

図のように、長方形 $ABCD$ があり、辺 DC の中点を E とする。線分 AE の垂直二等分線と辺 AD 、辺 BC との交点をそれぞれ F 、 G とし、線分 AE と線分 FG の交点を H とする。次の問1、問2に答えなさい。

(秋田県 2014 年度)



問1 $\triangle AED \sim \triangle AFH$ となることを証明しなさい。

問2 $AB=8\text{ cm}$, $AD=12\text{ cm}$ とするとき、

(1) $\triangle AGF$ の面積を求めなさい。求める過程も書きなさい。

(2) 線分 AG の長さを求めなさい。

問1	〔証明〕	
問2	(1)	〔過程〕
	答 cm²	
	(2)	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AED$ と $\triangle AFH$ において

共通な角だから

$$\angle DAE = \angle HAF \cdots \textcircled{1}$$

長方形の4つの角はすべて直角だから

$$\angle ADE = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

線分 FG は線分 AE を垂直に2等分するから

$$\angle AHF = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle ADE = \angle AHF \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AED \sim \triangle AFH$$

問2

(1)

〔過程〕

$AE = x$ cm とすると

$\triangle AED$ は直角三角形であるので

三平方の定理から

$$x^2 = 12^2 + 4^2$$

$$x^2 = 160$$

$x > 0$ であるから

$$x = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

よって $AH = 2\sqrt{10}$ cm

$\triangle AED \sim \triangle AFH$ より

$$AD : AH = AE : AF$$

$AF = y$ cm とすると

$$12 : 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10} : y$$

$$12 \times y = 2\sqrt{10} \times 4\sqrt{10}$$

$$y = \frac{20}{3}$$

よって AF を底辺, AB を高さにとみると

$$\triangle AGF \text{ の面積は } \frac{20}{3} \times 8 \times \frac{1}{2} = \frac{80}{3}$$

$$\text{答 } \frac{80}{3} \text{ cm}^2$$

$$(2) \ 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

解説

問1

$\triangle AED$ と $\triangle AFH$ において

2組の角がそれぞれ等しいことより相似を導く。

問2

(1)

$\triangle AED$ において

$$AE = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10} \text{ cm}$$

$$AH = \frac{1}{2} AE = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

$\triangle AED \sim \triangle AFH$ より

$$AE : AF = AD : AH$$

$$4\sqrt{10} : AF = 12 : 2\sqrt{10}$$

$$12AF = 80$$

$$AF = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle AGF = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times 8 = \frac{80}{3} \text{ cm}^2$$

(2)

AE と BC の延長線の交点を I とする。

AD // BI より

$$AD : IC = DE : CE$$

$$12 : IC = 1 : 1$$

$$IC = 12 \text{ cm}$$

$$AE : IE = DE : CE = 1 : 1$$

$$AH : HE = 1 : 1$$

$$\text{よって } AH : IH = 1 : 3$$

$$AF : IG = AH : IH$$

$$\frac{20}{3} : IG = 1 : 3$$

$$IG = 20 \text{ cm}$$

$$BG = 12 + 12 - 20 = 4 \text{ cm}$$

$\triangle ABG$ において

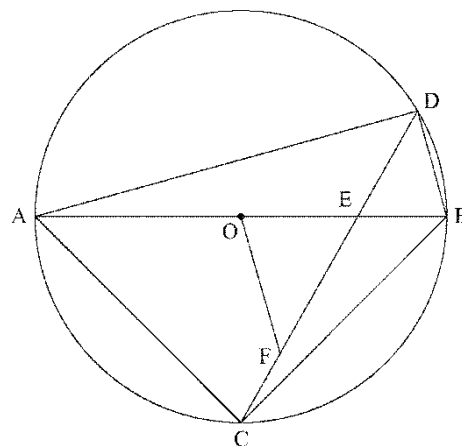
$$\text{三平方の定理より } AG = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

【問 5】

図 1 のように、点 O を中心とし、線分 AB を直径とする円 O がある。

図1

円 O の周上に、 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ となるように点 C をとり、点 A と C 、点 B と C をそれぞれ結ぶ。点 C をふくむ弧 AB を除いた円周上に、弧 AD の長さと弧 BD の長さが等しくなるように点 D をとり、点 A と D 、点 B と D をそれぞれ結び、線分 AB と線分 CD との交点を E とする。点 O を通り線分 BD に平行な直線と線分 CD との交点を F とする。このとき、次の問いに答えなさい。



(山形県 2014 年度)

問1 $\angle ABD = 75^\circ$ であるとき、 $\angle BAD$ の大きさを求めなさい。

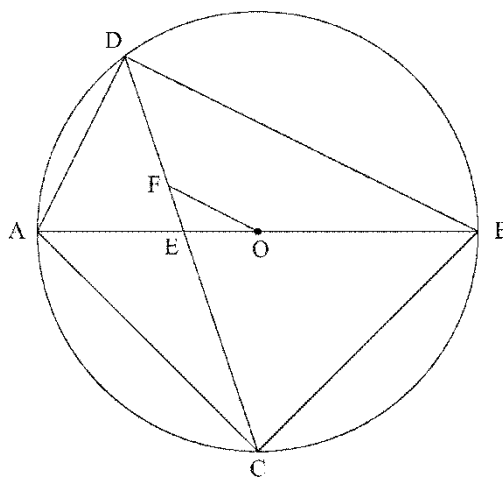
問2 $\triangle OEF \sim \triangle CEA$ であることを証明しなさい。

問3 図2は、図1で、 $OE:EA = 1:2$ となるように点 D をとったとき

図2

のものである。円 O の半径が 9 cm であるとき、次の問いに答えなさい。

(1) $\triangle ABD$ の面積は $\triangle OEF$ の面積の何倍になるか、求めなさい。



(2) EF の長さを求めなさい。

解答欄

問1		
問2	〔証明〕	
問3	(1)	倍
	(2)	cm

解答

問1 15°

問2

〔証明〕

$\triangle OEF$ と $\triangle CEA$ において

共通だから

$$\angle OEF = \angle CEA \cdots \textcircled{1}$$

弧 BC に対する円周角は等しいから

$$\angle EAC = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$$

また仮定より

$BD \parallel FO$ で, 錯角は等しいから

$$\angle BDC = \angle EFO \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle EFO = \angle EAC$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle OEF \sim \triangle CEA$$

問3

(1) 24 倍

$$(2) \frac{3\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

解説

問1

AB は直径より

円周角の定理から $\angle ADB = 90^\circ$

$\triangle ABD$ において $\angle BAD = 180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$

問2

$\triangle OEF$ と $\triangle CEA$ において

共通だから

$\angle OEF = \angle CEA \cdots \textcircled{1}$

円周角の定理より $\angle EAC = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$

BD // FO より

錯角は等しいので $\angle BDC = \angle EFO \cdots \textcircled{3}$

②, ③より

$\angle EFO = \angle EAC \cdots \textcircled{4}$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OEF \sim \triangle CEA$

問3

(1)

OF // BD より

$\triangle OEF \sim \triangle BED$ だから

$\triangle OEF : \triangle BED = OE^2 : BE^2 = 1^2 : 4^2 = 1 : 16$

また $\triangle ABD : \triangle BED = AB : BE = 6 : 4 = 3 : 2$

よって $\triangle ABD = \frac{3}{2} \triangle BED = \frac{3}{2} \times 16 \triangle OEF = 24 \triangle OEF$

よって 24 倍

(2)

$\triangle ABC$ において

円周角の定理より $\angle ACB = 90^\circ$

$\angle ABC = \angle BAC$ より

$\triangle ABC$ は $AC = BC$ の直角二等辺三角形

AB = 18 cm だから $AC = 9\sqrt{2}$ cm

OC を結ぶと $\angle COE = 90^\circ$ だから

$\triangle COE$ において $CE = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ cm

$\triangle BDE \sim \triangle CAE$ だから

BE : CE = DE : AE

12 : $3\sqrt{10}$ = DE : 6

DE = $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ cm

$\triangle EBD$ において

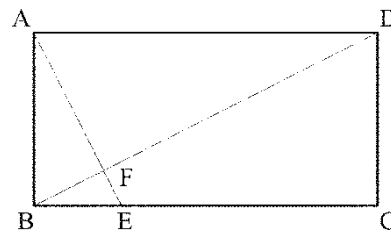
FO // DB より

EF : ED = EO : EB = 1 : 4

よって $EF = \frac{1}{4} \times \frac{12\sqrt{10}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$ cm

【問 6】

AB=2 cm, AD=4 cm の長方形 ABCD がある。下の図のように、辺 BC 上に 2 点 B, C と異なる点 E を, BE=1 cm となるようにとる。また, 線分 AE と線分 BD との交点を F とする。



このとき, 次の問1, 問2に答えなさい。

(千葉県 2014 年度 前期)

問1 $\triangle ABF \sim \triangle BEF$ となることを次の の中に途中まで示してある。 (a) , (b) に入る最も適当なものを次の選択肢のア～カのうちからそれぞれ一つずつ選び, 符号で答えなさい。また, (c) には証明の続きを書き, 証明を完成させなさい。ただし, の中の①～④に示されている関係を使う場合, 番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

証明

$\triangle ABE$ と $\triangle BCD$ において,

仮定から, $AB:BC=1:2 \cdots \textcircled{1}$

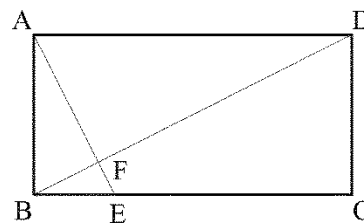
BE: (a) $=1:2 \cdots \textcircled{2}$

$\angle ABE = \angle BCD = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より,

(b) が, それぞれ等しいので,

$\triangle ABE \sim \triangle BCD \cdots \textcircled{4}$



(c)

選択肢

ア BD

イ AE

ウ CD

エ 3 組の辺の比

オ 2 組の辺の比とその間の角

カ 2 組の角

問2 線分 BD 上に 2 点 B, D と異なる点 G を, $AG=2$ cm となるようにとる。また, 2 点 A, G を通る直線と辺 BC との交点を H とする。

このとき, 線分 BH の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2	cm	

解答

問1

(a) ウ

(b) オ

(c)

④より

$$\angle BAE = \angle CBD \cdots \textcircled{5}$$

$$\angle AEB = \angle BDC \cdots \textcircled{6}$$

$\triangle ABF$ と $\triangle BEF$ において

⑤より

$$\angle BAF = \angle EBF \cdots \textcircled{7}$$

$AB \parallel DC$ で

平行線の錯角は等しいので

$$\angle ABF = \angle BDC \cdots \textcircled{8}$$

⑥, ⑧より

$$\angle ABF = \angle BEF \cdots \textcircled{9}$$

⑦, ⑨より

2組の角が,それぞれ等しいので

$$\triangle ABF \sim \triangle BEF$$

問2 $\frac{8}{3} \text{ cm}$

解説

問1

$\triangle ABE$ と $\triangle BCD$ において

$$AB:BC=2:4=1:2\cdots\textcircled{1}$$

$$BE:CD=1:2\cdots\textcircled{2}$$

$$\angle ABE=\angle BCD=90^\circ \cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABE\sim\triangle BCD\cdots\textcircled{4}$$

$$\textcircled{4}\text{より}, \angle BAE=\angle CBD\cdots\textcircled{5}$$

$$\angle AEB=\angle BDC\cdots\textcircled{6}$$

$\triangle ABF$ と $\triangle BEF$ において

$$\textcircled{5}\text{より}\angle BAF=\angle EBF\cdots\textcircled{7}$$

$AB\parallel DC$ より

$$\text{平行線の錯角は等しいので}\angle ABF=\angle BDC\cdots\textcircled{8}$$

⑥, ⑧より

$$\angle ABF=\angle BEF\cdots\textcircled{9}$$

⑦, ⑨より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABF\sim\triangle BEF$$

問2

$\triangle ABD$ において

$$BD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}\text{ cm}$$

$\triangle ABF\sim\triangle BEF$ より

$$\angle AFB=\angle BFE$$

$$\angle AFE=180^\circ\text{より}\angle AFB=90^\circ$$

$$AG=AB=2\text{ cm}\text{より}BF=GF=x\text{ cm}\text{とおくと}AF=2x\text{ cm}$$

$\triangle ABF$ において

三平方の定理より

$$x^2+(2x)^2=2^2$$

$$5x^2=4$$

$x>0$ より

$$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\text{ cm}$$

$$BG=\frac{4\sqrt{5}}{5}\text{ cm}$$

$$DG=2\sqrt{5}-\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}\text{ cm}$$

$$DG:BG=\frac{6\sqrt{5}}{5}:\frac{4\sqrt{5}}{5}=3:2$$

$AD\parallel BH$ より

$$AD:BH=DG:BG$$

$$4:BH=3:2$$

$$3BH=8$$

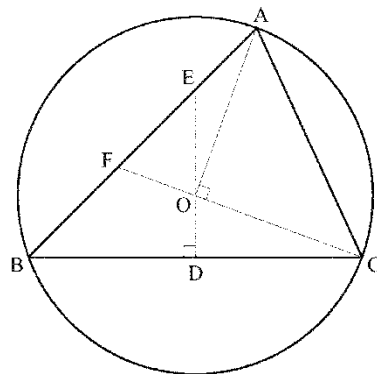
$$BH=\frac{8}{3}\text{ cm}$$

【問 7】

図のように、円 O の円周上の 3 点 A, B, C を頂点とする鋭角三角形 ABC があり、 $OA \perp OC$ である。点 O から辺 BC に垂線をひき、辺 BC との交点を D とする。線分 DO の延長と辺 AB との交点を E 、線分 CO の延長と辺 AB との交点を F とする。このとき、 $\triangle FOE \sim \triangle FAC$ となる。

次の問1, 問2に答えなさい。

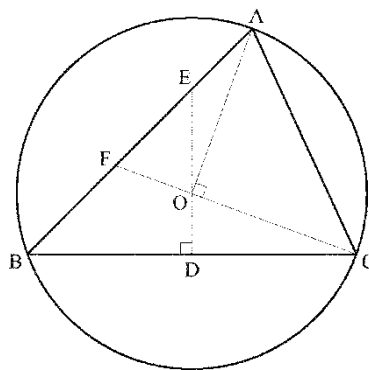
(千葉県 2014 年度 後期)



- 問1 次の の中は、 $\triangle FOE \sim \triangle FAC$ の証明を途中まで示したものである。(a) , (b) に入る最も適当なものを、次の選択肢のア～カのうちからそれぞれ一つずつ選び、符合で答えなさい。また、(c) には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。
- ただし、 の中の①～④に示されている関係を使う場合、番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

証明

$\triangle FOE$ と $\triangle FAC$ において、
 $\angle OFE = \angle AFC$ (共通) …①
 $\triangle OAC$ において、
 $OA =$ (a) …②
 仮定より、 $\angle AOC = 90^\circ$ …③
 ②, ③より、
 $\angle OAC =$ (b) …④
 (続く)



(c)

— 選択肢 —

ア AC

イ OC

ウ OF

エ $\angle OCA = 45^\circ$

オ $\angle OCA = 60^\circ$

カ $\angle OFA = 45^\circ$

問2 円 O の半径が 2 cm 、 $FO = 1\text{ cm}$ のとき、 $\triangle FOE$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2	cm ²	

解答

問1

(a) イ

(b) エ

(c)

△BDE において

円周角の定理より

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = 45^\circ \cdots \textcircled{5}$$

仮定より

$$\angle BDE = 90^\circ \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より

$$\angle DEB = 45^\circ \cdots \textcircled{7}$$

④, ⑦より

$$\angle FEO = \angle FCA \cdots \textcircled{8}$$

①, ⑧より

2組の角が, それぞれ等しいので

△FOE ∽ △FAC

$$\text{問2 } \frac{3}{5} \text{ cm}^2$$

解説

問1

△FOE と △FAC において

共通なので

$$\angle OFE = \angle AFC \cdots \textcircled{1}$$

△OAC において, 円の半径より

$$OA = OC \cdots \textcircled{2}$$

仮定より

$$\angle AOC = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle OAC = \angle OCA = 45^\circ \cdots \textcircled{4}$$

△BDE において

円周角の定理より

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = 45^\circ \cdots \textcircled{5}$$

仮定より

$$\angle BDE = 90^\circ \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より

$$\angle DEB = 45^\circ \cdots \textcircled{7}$$

④, ⑦より

$$\angle FEO = \angle FCA \cdots \textcircled{8}$$

①, ⑧より

2組の角がそれぞれ等しいので

△FOE ∽ △FAC

問2

△FOA において

$$FA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

△FOE ∽ △FAC より

$$FO : FA = 1 : \sqrt{5}$$

よって, △FOE : △FAC = 1 : 5

$$\triangle FOE = \frac{1}{5} \triangle FAC = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 = \frac{3}{5} \text{ cm}^2$$

【問 8】

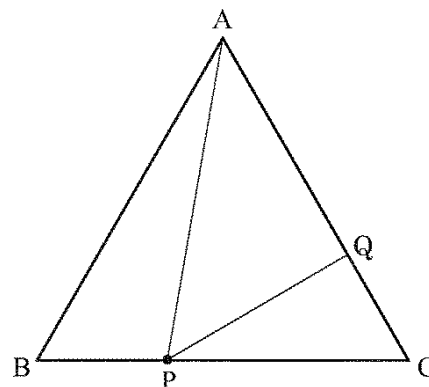
右の図1で、 $\triangle ABC$ は正三角形である。点 P は、辺 BC 上にある点で、頂点 B 、頂点 C のいずれにも一致しない。頂点 A と点 P を結ぶ。点 P から辺 AC に引いた垂線と、辺 AC との交点を Q とする。

次の各問に答えよ。

(東京都 2014 年度)

問1 図1において、 $\angle BAP$ の大きさを α° とするとき、 $\angle APQ$ の大きさを α を用いた式で表せ。

図1

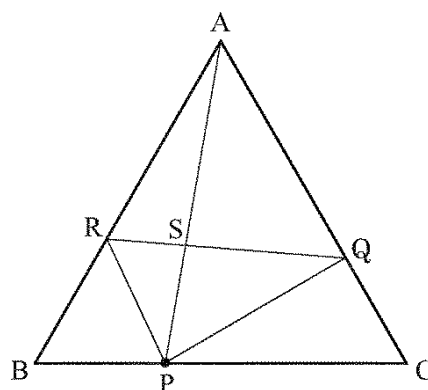


問2 右の図2は、図1において、点 P を通り辺 AC に平行な直線を引き、辺 AB との交点を R とし、点 Q と点 R を結び、線分 AP と線分 QR との交点を S とした場合を表している。

次の(1), (2)に答えよ。

(1) $\triangle PSR \sim \triangle ASQ$ であることを証明せよ。

(2) 図2において、 $BP:PC=1:2$ のとき、 $\triangle PQS$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何分のいくつか。



解答欄

問1	() 度	
問2	(1)	[証明] $\triangle PSR$ と $\triangle ASQ$ において、 $\triangle PSR \sim \triangle ASQ$
	(2)	

解答

問1 $(a+30)$ 度

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle PSR$ と $\triangle ASQ$ において

対頂角は等しいから

$$\angle PSR = \angle ASQ \cdots (1)$$

$RP \parallel AQ$ より

平行線の錯角は等しいから

$$\angle RPS = \angle QAS \cdots (2)$$

(1), (2)より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PSR \sim \triangle ASQ$

$$(2) \quad \frac{4}{27}$$

解説

問1

$\triangle ABC$ は正三角形より $\angle BAC = 60^\circ$

よって $\angle PAQ = 60^\circ - a^\circ$

$$\angle APQ = 180^\circ - (60^\circ - a^\circ) - 90^\circ = a^\circ + 30^\circ$$

問2

(1)

$\triangle PSR$ と $\triangle ASQ$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

(2)

$BP = a$ とすると $PC = 2a$

$\triangle ABC$ において $PR \parallel CA$ より

$$PR:AC = BP:BC = 1:3$$

$$BC = AC = 3a$$

$\triangle PCQ$ において

$\angle PCQ = 60^\circ$, $\angle PQC = 90^\circ$ より

$$CQ:PC = 1:2 \text{ より}$$

$$CQ = a$$

$BC = AC$ だから $AQ = 2a$

$PR \parallel QA$ より

$$PS:AS = PR:AQ = 1:2$$

$$\text{よって } \triangle PQS = \frac{1}{3} \triangle AQP = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \triangle APC = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{4}{27} \triangle ABC$$

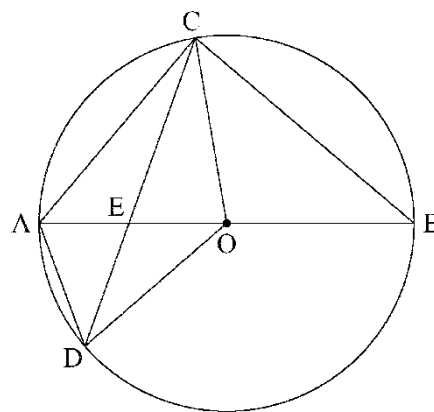
【問 9】

右の図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に、2 点 A, B とは異なる点 C を $AC < BC$ となるようにとり、点 C をふくまない $\widehat{AB}$ 上に点 D を $\angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOC$ となるようにとる。

また、線分 AB と線分 CD との交点を E とする。

このとき、三角形 OAD と三角形 BCE が相似であることを証明しなさい。

(神奈川県 2014 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

△OAD と△BCE において

まず $\widehat{BD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAD = \angle BCD$$

$$\text{よって } \angle OAD = \angle BCE \cdots \textcircled{1}$$

仮定から

$$\angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOC \cdots \textcircled{2}$$

また $\widehat{AC}$ に対する中心角と円周角の関係から

$$\frac{1}{2} \angle AOC = \angle ABC$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} \angle AOC = \angle CBE \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle AOD = \angle CBE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle OAD \sim \triangle BCE$$

解説

△OAD と△BCE において

円周角の定理を利用して2組の角が等しいことを示し相似を導く。

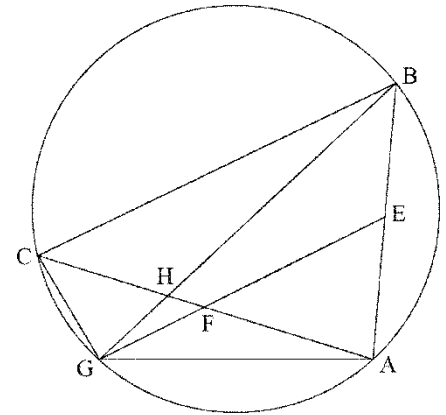
【問 10】

右の図のように、3 点 A, B, C は円周上にある。 $\triangle ABC$ の辺 AB, AC の中点をそれぞれ E, F とし、線分 EF を点 F の方向に延ばした直線と円との交点を G とする。G と B を直線で結び、辺 AC との交点を H とする。

次の問いに答えなさい。

(富山県 2014 年度)

問1 $\triangle GHF \sim \triangle AHG$ の証明を完成させなさい。ア, エにはあてはまる記号を, イ, ウにはあてはまる言葉を, オにはあてはまる条件を, それぞれ答えなさい。



証明

$\triangle GHF$ と $\triangle AHG$ において

点 E, F はそれぞれ辺 AB, AC の中点なので

ア // BC

平行線の イ は等しいので

$$\angle CBG = \angle BGE \cdots ①$$

また、 $\widehat{GC}$ に対する ウ は等しいので

$$\angle CBG = \angle CAG \cdots ②$$

①, ②より

$$\angle BGE = \text{ エ }$$

よって

$$\angle HGF = \angle HAG \cdots ③$$

共通な角であるから,

$$\angle GHF = \angle AHG \cdots ④$$

③, ④より,

オ から

$\triangle GHF \sim \triangle AHG$

問2 $AF = 6 \text{ cm}$, $HG = 3 \text{ cm}$ のとき, HC の長さを求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
	オ	
問2	cm	

解答

問1

ア EF

イ 錯角

ウ 円周角

エ $\angle CAG$

オ 2組の角がそれぞれ等しい

問2 $9-3\sqrt{2}$ cm

解説

問1

$\triangle GHF$ と $\triangle AHG$ において

2組の角がそれぞれ等しくなることを導く。

$\triangle ABC$ において

中点連結定理から $EF \parallel BC$ がいえる。

問2

$HF = x$ cm とする。

$\triangle GHF \sim \triangle AHG$ より

$GH:AH = HF:HG$

$3:(6+x) = x:3$

$x(6+x) = 9$

$x^2 + 6x - 9 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times (-9)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-6 \pm 6\sqrt{2}}{2}$$

$$= -3 \pm 3\sqrt{2}$$

$x > 0$ より

$$x = -3 + 3\sqrt{2}$$

よって $HC = 6 - x = 6 - (-3 + 3\sqrt{2}) = 9 - 3\sqrt{2}$ cm

【問 11】

図1のように、 $\triangle ABC$ の辺 AC 上に点 O があり、 O を中心とし、辺 AB に接する半円をかく。この半円と辺 AB との接点を D 、辺 AC との交点を E, F とする。 D から辺 AC に垂線 DG をひく。

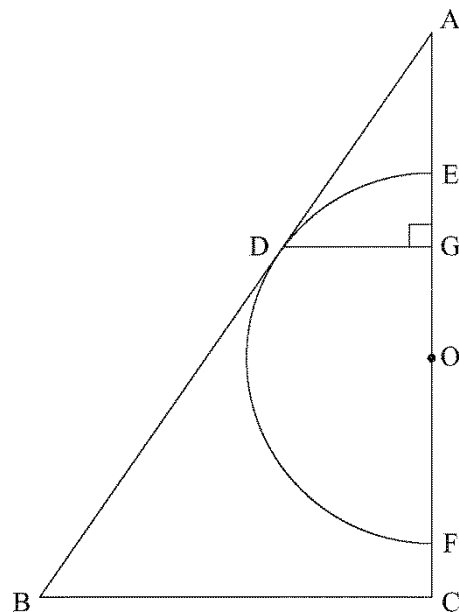
このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2014 年度)

問1 $\triangle ADG \sim \triangle DOG$ を証明せよ。

問2 $EF=5\text{ cm}$, $DG=2\text{ cm}$ とする。 $\triangle ADG$ を辺 AG を軸として 1 回転させてできる立体 P の体積を求めよ。

図1



解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm³

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ADG$ と $\triangle DOG$ で

$$\angle AGD = \angle DGO = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ADG$ は直角三角形であるから

$$\angle ADG + \angle GAD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

辺 AB は半円 O の接線であるから

$$\angle ADG + \angle GDO = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle GAD = \angle GDO \cdots \textcircled{4}$$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADG \sim \triangle DOG$

$$\text{問2 } \frac{32}{9} \pi \text{ cm}^3$$

解説

問1

$\triangle ADG$ と $\triangle DOG$ において

$$\angle AGD = \angle DGO = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ADG$ は直角三角形より

$$\angle ADG + \angle GAD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

AB は半円 O の接線より

$$\angle ADG + \angle GDO = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle GAD = \angle GDO \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADG \sim \triangle DOG$

問2

円 O の半径より

$$DO = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

$\triangle DOG$ において

$$\text{三平方の定理より, } OG = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$\triangle ADG \sim \triangle DOG$ より

$$AG : DG = DG : OG$$

$$AG : 2 = 2 : \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} AG = 4$$

$$AG = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

立体 P は底面の半径 2 cm , 高さ $\frac{8}{3} \text{ cm}$ の円錐になるから

$$\text{求める体積は } \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times \frac{8}{3} = \frac{32}{9} \pi \text{ cm}^3$$

【問 12】

図1のように、円 O に直径 AC をひく。 $\angle AOB = 120^\circ$ となるように円周上に点 B をとり、直径 BE をひく。また、 $AD = BD$ となるように、円周上に点 D をとり、点 A と E 、点 B と C 、点 E と C 、点 E と D を直線で結ぶ。 AD と BE の交点を P 、 AD と CE の交点を Q とする。

ただし、点 D は直径 BE について点 C と同じ側にあるものとする。

次の各問いに答えなさい。

(長野県 2014 年度)

問1 $\angle AEB$ の大きさを求めなさい。

問2 ともさんは $\triangle AEC \equiv \triangle BCE$ を証明しようと考えた。 $\triangle AEC$ と $\triangle BCE$ について調べたところ、次の 4 つのことがわかった。

[わかったこと]

$\angle AEC = \angle BCE = 90^\circ$ …ア

$\angle EAC = \angle CBE$ …イ

$CE = EC$ …ウ

$AC = BE$ …エ

$\triangle AEC \equiv \triangle BCE$ を証明するために必要なものをア～エから 3 つ選び、記号を書きなさい。また、そこで選んだ 3 つを使う合同条件を書きなさい。

問3 $\triangle AQE \sim \triangle BED$ であることを証明しなさい。

問4 図1の図形について、正しくないものを次のア～エから 1 つ選び、記号を書きなさい。

- (

 ア $\triangle AOP$ は、直角三角形である。

 イ $\triangle ABD$ は、正三角形である。

 ウ $\triangle OAE$ と $\triangle OBC$ は、合同である。

 エ $\triangle BPD$ と $\triangle AQC$ の面積は等しい。

)

問5 図2は、図1の図形で円の半径を 5 cm としたものとする。

(1) 線分 AQ の長さを求めなさい。

(2) 色のついた部分の面積を求めなさい。

図1

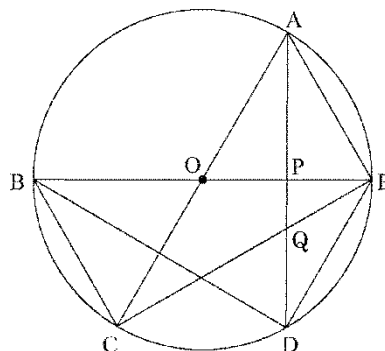
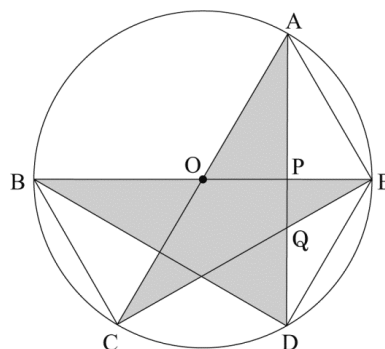


図2



解答欄

問1	$\angle AEB =$ °			
問2	記号			
	合同条件			
問3				
問4				
問5	(1)	cm		
	(2)	cm ²		

解答

問1 $\angle AEB = 60$

問2

記号 ア,ウ,エ

合同条件

直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。

問3

$\triangle AQE$ と $\triangle BED$ で

1つの円で等しい弧に対する円周角の大きさは等しいので

$$\angle AEQ = \angle BDE \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{DE}$ に対する円周角は等しいので

$$\angle QAE = \angle EBD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AQE \sim \triangle BED$$

問4 エ

問5

$$(1) \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{175\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$$\text{円周角の定理より } \angle AEB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

問2

$\triangle AEC$ と $\triangle BCE$ において

ア, イ, エより

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。

またはア, ウ, エより

直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。

問3

$\triangle AQE$ と $\triangle BED$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問4

$$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle ADE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle ACE = \angle ADE = 30^\circ$$

$$\angle QAE = \angle EBD = \angle ACE = 30^\circ$$

$$\text{よって } \angle APE = 90^\circ$$

これよりアについて $\triangle AOP$ は直角三角形

イについて $\triangle ABD$ は $AD = BD$, $\angle ADB = 60^\circ$ より正三角形

ウについて $\triangle OAE$ と $\triangle OBC$ は1辺を半径とする正三角形より合同

エについて $\triangle BPD = \triangle ACQ + \triangle PQE$

よって間違いはエ

問5

(1)

$AE = OA = 5 \text{ cm}$ $\triangle AQE$ は $\angle AEQ = 90^\circ$, $\angle EAQ = 30^\circ$ の直角三角形だから

$$AQ : AE = 2 : \sqrt{3}$$

$$AQ : 5 = 2 : \sqrt{3}$$

$$AQ = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

(2)

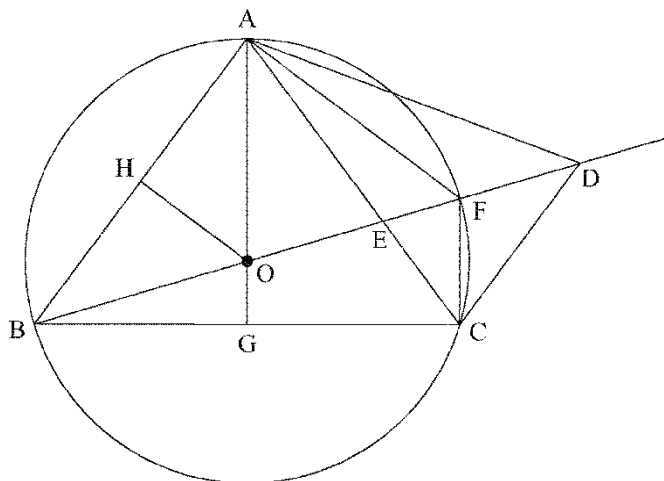
$$OP = \frac{5}{2} \text{ cm} \quad AP = \sqrt{3} \quad OP = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

よって色のついた部分の面積は

$$2\triangle OAD + 2\triangle PQE = 2 \times \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times \frac{5}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{5}{2} = \frac{175\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2$$

【問 13】

次の図のように、 $AB=AC$ となる鋭角三角形 ABC と、3 点 A, B, C を通る円 O がある。線分 BO を延長した直線上に、 $AB=AD$ となる点 D をとり、線分 CD をひく。線分 BD と辺 AC 、弧 AC との交点をそれぞれ E, F とする。線分 AO を延長した直線と辺 BC の交点を G とし、 $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を H とする。



このとき、あとの各問いに答えなさい。

ただし、点 F は点 B と異なる点とする。

(三重県 2014 年度)

問1 次の は、 $\triangle AOH \sim \triangle ABG$ であることを証明したものである。(ア) ～ (ウ) に、それぞれあてはまる適切なことがらを書き入れなさい。

〔証 明〕

$\triangle AOH$ と $\triangle ABG$ において、

共通な角だから、(ア) …①

仮定から、 $\angle AOH = \frac{1}{2} \angle AOB$ …②

1 つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分だから、

(イ) $= \frac{1}{2} \angle AOB$ …③

②、③より、 $\angle AOH =$ (イ) …④

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから、 $\angle ABG =$ (イ) …⑤

④、⑤より、 $\angle AOH = \angle ABG$ …⑥

①、⑥より、(ウ) がそれぞれ等しいので、

$\triangle AOH \sim \triangle ABG$

問2 $\triangle ACF \equiv \triangle ADF$ であることを証明しなさい。

問3 $AB=10$ cm, $BC=12$ cm のとき、次の各問いに答えなさい。

(1) 線分 OG の長さを求めなさい。

(2) $\triangle AEF$ と $\triangle ADF$ の面積の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	$\triangle AEF : \triangle ADF =$:

解答

問1

ア $\angle OAH = \angle BAG$

イ $\angle ACB$

ウ 2組の角

問2

〔証明〕

$\triangle ACF$ と $\triangle ADF$ において

共通な辺だから

$AF = AF \cdots ①$

仮定から

$AB = AC \cdots ②$

$AB = AD \cdots ③$

②, ③より

$AC = AD \cdots ④$

④より $\triangle ACD$ は二等辺三角形だから

$\angle ACD = \angle ADC \cdots ⑤$

③より, $\triangle ABD$ は二等辺三角形だから

$\angle ABD = \angle ADB \cdots ⑥$

弧 AF に対する円周角の大きさは等しいから

$\angle ABF = \angle ACF \cdots ⑦$

⑥, ⑦より

$\angle ACF = \angle ADB \cdots ⑧$

⑤, ⑧より

$\angle FCD = \angle FDC \cdots ⑨$

⑨より, $\triangle FCD$ は二等辺三角形だから

$FC = FD \cdots ⑩$

①, ④, ⑩より

3組の辺がそれぞれ等しいので

$\triangle ACF \equiv \triangle ADF$

問3

(1) $\frac{7}{4}$ cm

(2) $\triangle AEF : \triangle ADF = 25 : 39$

解説

問1

$\triangle AOH$ と $\triangle ABG$ について

2組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

問2

$\triangle ACF$ と $\triangle ADF$ について

3組の辺がそれぞれ等しいことから合同を導く。

問3

(1)

$\angle AGB = 90^\circ$ だから $\triangle ABG$ において

三平方の定理より $AG = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{cm}$

$AH = BH = 5\text{ cm}$ だから

$\triangle AOH \sim \triangle ABG$ より

$AO : 10 = 5 : 8$

$AO = \frac{25}{4}\text{ cm}$

$OG = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}\text{ cm}$

(2)

円周角の定理より $\angle BCF = 90^\circ$

よって $OG \parallel CF$ より

$OG : FC = BO : BF$

$\frac{7}{4} : FC = 1 : 2$

$FC = \frac{7}{2}\text{ cm}$

また $AO \parallel FC$ より

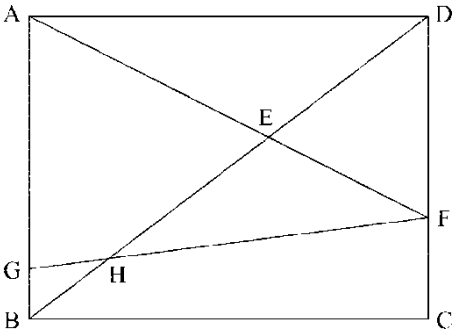
$OE : FE = AO : CF = \frac{25}{4} : \frac{7}{2} = 25 : 14$

$EF = \frac{14}{39} \times \frac{25}{4} = \frac{175}{78}\text{ cm}$

$\triangle AEF : \triangle ADF = EF : FD = EF : FC = \frac{175}{78} : \frac{7}{2} = 25 : 39$

【問 14】

右の図のように、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $AD=8\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ がある。対角線 BD 上に $DE=4\text{ cm}$ となるように点 E をとる。2 点 A 、 E を通る直線と辺 CD との交点を F とする。また、辺 AB 上に $AG=5\text{ cm}$ となるように点 G をとり、線分 FG と対角線 BD との交点を H とする。



このとき、次の問1～問4に答えよ。
(京都府 2014 年度 前期)

問1 線分 BD の長さを求めよ。

問2 $BH:HD$ を最も簡単な整数の比で表せ。

問3 点 F から対角線 BD にひいた垂線と対角線 BD との交点を I とする。このとき、 $\triangle BCD \sim \triangle FID$ であることを証明せよ。

問4 $\triangle EHF$ の面積を求めよ。

解答欄

問1	cm
問2	$BH:HD=$:
問3	
問4	cm ²

解答

問1 10 cm

問2 $BH:HD=1:4$

問3

$\triangle BCD$ と $\triangle FID$ で

仮定より

$$\angle BCD = \angle FID = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$\angle D$ は共通の角だから

$$\angle BDC = \angle FDI \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BCD \sim \triangle FID$$

$$\text{問4 } \frac{32}{5} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle ABD$ において

$$\text{三平方の定理より } BD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$$

問2

$AB \parallel DC$ より

$$AB:FD = BE:DE = (10-4):4 = 6:4$$

$$AB=6 \text{ より } FD=4$$

$$BH:HD = GB:FD = (6-5):4 = 1:4$$

問3

$\triangle BCD$ と $\triangle FID$ において

2組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

問4

$AB \parallel DC$ より

$$AE:FE = AB:FD = 6:4 = 3:2$$

$$\triangle EGF = \frac{2}{5} \triangle AGF = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 8 = 8 \text{ cm}^2$$

$$\text{また } GH:FH = BG:DF = 1:4$$

$$\triangle EHF = \frac{4}{5} \triangle EGF = \frac{4}{5} \times 8 = \frac{32}{5} \text{ cm}^2$$

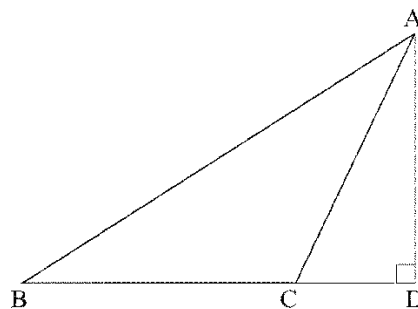
【問 15】

図1, 図2において, $\triangle ABC$ は, $AC=BC=10\text{ cm}$ の二等辺三角形であり, 頂角 $\angle ACB$ は鈍角である。D は, A から直線 BC にひいた垂線と直線 BC との交点である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 2014 年度 後期)

図1



問1 図1において,

- (1) $\triangle ABC$ の内角 $\angle ABC$ の大きさを α° とするとき, $\triangle ACD$ の内角 $\angle CAD$ の大きさを α を用いて表しなさい。

- (2) $AB=17\text{ cm}$ であるときの線分 CD の長さを下の の中に示したような方法で求めた。

(a) , (b) には入れるのに適している辺を表す文字を, (c) には入れるのに適している式を, (d) には入れるのに適している数を, それぞれ書きなさい。

$\triangle ABD$ は $\angle ADB=90^\circ$ の直角三角形だから $AD^2 = \text{ (a)}^2 - \text{ (b)}^2 \dots \text{㉞}$

$\triangle ACD$ は $\angle ADC=90^\circ$ の直角三角形だから $AD^2 = AC^2 - CD^2 \dots \text{㉟}$

㉞, ㉟より, $\text{ (a)}^2 - \text{ (b)}^2 = AC^2 - CD^2$

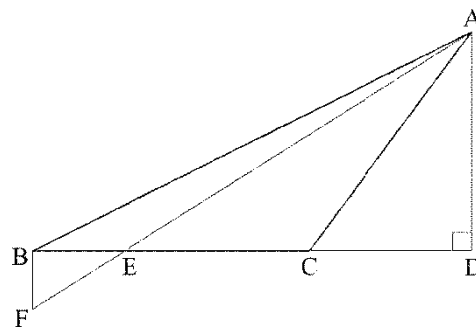
ここで, $CD=x\text{ cm}$ とすると, 線分 BD の長さは x を用いて (c) (cm) と表せる。

よって $CD = \text{ (d)}$ (cm)

問2 図2において, E は, 辺 BC 上にあって B, C と異なる点であ 図2

る。F は, B を通り直線 AD に平行な直線と直線 AE との交点であり, $BF=2\text{ cm}$ である。

- (1) $\triangle BFE \sim \triangle DAE$ であることを証明しなさい。



- (2) 線分 CD の長さが 6 cm であるときの線分 EC の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	度				
	(2)	㉑		㉒		
		㉓				
		㉔				
問2	(1)	〔証明〕				
	(2)	cm				

解答

問1

(1) $90-2a$ 度

(2)

③ AB

④ BD

⑤ $10+x$

⑥ $\frac{89}{20}$

問2

(1)

[証明]

$\triangle BFE$ と $\triangle DAE$ において

$\angle BEF = \angle DEA$ (対頂角) $\cdots \textcircled{7}$

$BF \parallel AD$ だから

$\angle BFE = \angle DAE$ (錯角) $\cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BFE \sim \triangle DAE$

(2) $\frac{34}{5}$ cm

解説

問1

(1)

$\triangle ABC$ において

$AC=BC$ より $\angle CAB = \angle CBA = a^\circ$

$\triangle ABC$ において

$\angle CAD = 180^\circ - a^\circ \times 2 - 90^\circ = 90^\circ - 2a^\circ$

(2)

$\triangle ABD$ において

三平方の定理より $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$\triangle ACD$ において

三平方の定理より $AD^2 = AC^2 - CD^2$

よって $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

$CD = x$ cm のとき $BD = 10 + x$ cm

よって $17^2 - (10+x)^2 = 10^2 - x^2$

これを解いて $x = \frac{89}{20}$ cm

問2

(1)

$\triangle BFE$ と $\triangle DAE$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

(2)

$\triangle ACD$ において

三平方の定理より $AD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$BE:DE = BF:DA = 2:8 = 1:4$

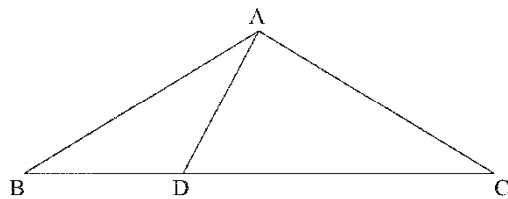
よって $ED = \frac{4}{5} BD = \frac{4}{5} \times 16 = \frac{64}{5}$ cm

$EC = \frac{64}{5} - 6 = \frac{34}{5}$ cm

【問 16】

図1, 図2において, $\triangle ABC$ は, $AB=AC=7$ cm, $BC=12$ cm 図1
の二等辺三角形である。D は, 辺 BC 上にあつて B, C と異なる点
である。BD= x cm とし, $0 < x < 6$ とする。A と D とを結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, そ
の形のままでよい。



(大阪府 2014 年度 後期)

問1 図1において,

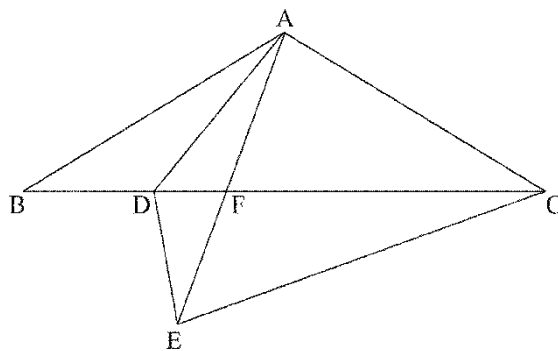
- (1) $\triangle ADC$ の内角 $\angle ADC$ の大きさを a° , 内角 $\angle ACD$ の大きさを b° とするとき, $\triangle ABD$ の内角 $\angle BAD$ の大きさを a, b を用いて表しなさい。

- (2) $\triangle DBA \sim \triangle ABC$ であるときの x の値を求めなさい。

問2 図2において, E は直線 AD について B と反対側にあ 図2

る点であり, $\triangle AED \equiv \triangle ABD$ である。E と C とを結
ぶ。F は, 線分 AE と辺 BC との交点である。

- (1) $\triangle ADF \sim \triangle CEF$ であることを証明しなさい。



- (2) $x=3$ であるとき,

① 線分 FC の長さを求めなさい。

② 線分 EC の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	度	
	(2)		
問2	(1)	〔証 明〕	
	(2)	①	cm
		②	cm

解答

問1

(1) $a-b$ 度

(2) $\frac{49}{12}$

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle ADF$ と $\triangle CEF$ において

$\angle AFD = \angle CFE$ (対頂角) $\cdots \textcircled{ア}$

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから

$\angle ABD = \angle ACD \cdots \textcircled{イ}$

$\triangle AED \equiv \triangle ABD$ だから

$\angle AED = \angle ABD \cdots \textcircled{ウ}$

$\textcircled{イ}$, $\textcircled{ウ}$ より

$\angle ACD = \angle AED$

2 点 C, E が直線 AD について同じ側にあつて

$\angle ACD = \angle AED$ だから

4 点 A, D, E, C は一つの円周上にある。

よつて同じ弧に対する円周角は等しいから

$\angle DAF = \angle ECF \cdots \textcircled{エ}$

$\textcircled{ア}$, $\textcircled{エ}$ より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ADF \sim \triangle CEF$

(2)

① $\frac{147}{20}$ cm

② $\frac{21\sqrt{22}}{11}$ cm

解説

問1

(1)

$\triangle ABC$ において $AB=AC$ より $\angle ABC=\angle ACB=b^\circ$

$\triangle ABD$ において内角と外角の関係より $\angle BAD=a^\circ-b^\circ$

(2)

$\triangle DBA \sim \triangle ABC$ のとき

$DB:AB=AB:CB$

$$x:7=7:12$$

$$12x=49$$

$$x=\frac{49}{12}\text{ cm}$$

問2

(1)

$\triangle ADF$ と $\triangle CEF$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

円周角の定理の逆より

4点 A, D, E, C は同一円周上にある。

(2)

①

$FC=y\text{ cm}$ とする。

$$DF=12-3-y=9-y\text{ cm}$$

$\triangle ACF \sim \triangle DEF$ だから

$$FC:FE=CA:ED$$

$$y:FE=7:3$$

$$FE=\frac{3}{7}y\text{ cm}$$

$$AF:DF=CA:ED$$

$$AF:(9-y)=7:3$$

$$AF=\frac{7(9-y)}{3}\text{ cm}$$

$$AE=7\text{ cm より}$$

$$\frac{3}{7}y + \frac{7(9-y)}{3} = 7$$

$$\text{これを解いて } y = \frac{147}{20}\text{ cm}$$

②

A から BC に垂線をひき交点を H とすると

$$AB=AC \text{ より } CH=BH=12 \div 2=6\text{ cm}$$

$\triangle ACH$ において

$$\text{三平方の定理より } AH=\sqrt{7^2-6^2}=\sqrt{13}\text{ cm}$$

$$\triangle ADH \text{ において } DH=6-3=3\text{ cm}$$

$$\text{三平方の定理より } AD=\sqrt{3^2+(\sqrt{13})^2}=\sqrt{22}\text{ cm}$$

$\triangle ADF \sim \triangle CEF$ より

$$DA:EC=DF:EF$$

$$\sqrt{22}:EC=\left(9-\frac{147}{20}\right):\frac{3}{7} \times \frac{147}{20}$$

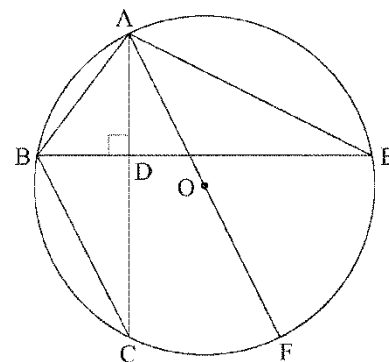
$$\sqrt{22}:EC=11:21$$

$$EC=\frac{21\sqrt{22}}{11}\text{ cm}$$

【問 17】

図1のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C があり、 $AB=5\text{ cm}$ 、 $AC=10\text{ cm}$ である。 B を通り AC に垂直な直線が AC および円 O と交わる点をそれぞれ D, E とすると、 $AD=4\text{ cm}$ となる。また、 A, O を通る直線が円 O と交わる点を F とする。

図1



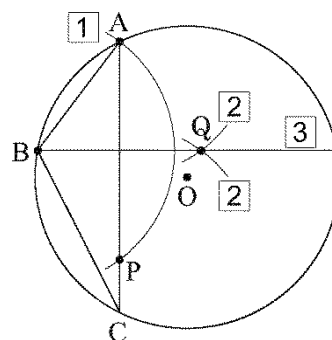
次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2014 年度)

問1 B を通り AC に垂直な直線は次の方法で作図した。 $\boxed{2}$ でかいた円の半径がどんな大きさでも、直線 BQ が直線 AC と垂直になる理由として、正しいものをあとのア～オから 1 つ選んで、その記号を書きなさい。

<作図の方法>

- $\boxed{1}$ B を中心として、 BA を半径とする円をかき、その円と AC が交わる点を P とする。
- $\boxed{2}$ 2 点 A, P を中心として、互いに交わるように等しい半径の円をかき、その交点の 1 つを Q とする。
- $\boxed{3}$ B と Q を通る直線をひく。



- ア 四角形 $ABPQ$ がひし形で、 BQ が対称の軸だから
- イ 四角形 $ABPQ$ が平行四辺形で、 AP, BQ の交点が対称の中心だから
- ウ 四角形 $ABPQ$ が線対称な図形で、 BQ が対称の軸だから
- エ 四角形 $ABPQ$ が線対称な図形で、 AP が対称の軸だから
- オ 四角形 $ABPQ$ が点対称な図形で、 AP, BQ の交点が対称の中心だから

問2 線分 BD の長さは何 cm か、求めなさい。

問3 $\triangle BCD \sim \triangle AED$ を次のように証明した。(i) ~ (v) にあてはまるものをあとのア～サからそれぞれ選んでその記号を書き, この証明を完成させなさい。

<証明>

$\triangle BCD$ と $\triangle AED$ において,

同じ弧に対する (i) は等しいから, $\angle BCD = \angle$ (ii) $\dots \textcircled{1}$

(iii) は等しいから, $\angle BDC = \angle$ (iv) $\dots \textcircled{2}$

①, ②より (v) から, $\triangle BCD \sim \triangle AED$

ア 対頂角 イ 同位角 ウ 錯角 エ 中心角 オ 円周角 カ AED キ ADE ク DAE

ケ 3組の辺の比がすべて等しい

コ 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

サ 2組の角がそれぞれ等しい

問4 線分 EF の長さは何 cm か、求めなさい。

問5 3点 A, B, D を通る円の中心を G, 3点 A, D, E を通る円の中心を H とするとき, $\triangle OGH$ の面積は何 cm^2 か, 求めなさい。

解答欄

問1										
問2	cm									
問3	(i)		(ii)		(iii)		(iv)		(v)	
問4	cm									
問5	cm ²									

解答

問1 ウ

問2 3 cm

問3

(i) オ

(ii) カ

(iii) ア

(iv) キ

(v) サ

問4 $3\sqrt{5}$ cm

問5 $\frac{33}{4}\text{cm}^2$

解説

問1

②の円の半径が①の半径とは違うので四角形 ABPQ はひし形にはならない。
 $\triangle BAQ \equiv \triangle PBQ$ になっているので BQ が対称の軸となる。

よってウ

問2

$\triangle ABD$ において

三平方の定理より $BD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$

問3

$\triangle BCD$ と $\triangle AED$ は 2 組の角がそれぞれ等しいので相似である。

問4

$\triangle BCD \sim \triangle AED$ より

$BD:AD = CD:ED$

$3:4 = 6:ED$

$3ED = 24 \quad ED = 8\text{cm}$

$\triangle ADE$ で三平方の定理より $AE = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$

$\triangle ADB$ と $\triangle AEF$ において AF は直径より $\angle AEF = 90^\circ$

よって $\angle ADB = \angle AEF = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

弧 AE の円周角より

$\angle ABD = \angle AFE \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいので

$DB:EF = AD:AE$

$3:EF = 4:4\sqrt{5}$

$EF = 3\sqrt{5} \text{ cm}$

問5

$\angle ADB = 90^\circ$ より AB は円 G の直径になる。

$\angle ADE = 90^\circ$ より AE は円 H の直径になる。

$AB:AF = AD:AE$

$5:AF = 4:4\sqrt{5}$

$AF = 5\sqrt{5} \text{ cm}$

$\triangle ABF$ で AF は直径より $\angle ABF = 90^\circ$, $BF = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 5^2} = 10\text{cm}$

$\triangle ABF$ において

G は AB の中点, O は AF の中点より

中点連結定理から $GO \parallel BF$ だから $\angle AGO = 90^\circ$, $GO = \frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} \times 10 = 5\text{cm}$

よって $\triangle AGO = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4} \text{ cm}^2$

同様に $\triangle AOH = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} \times 2\sqrt{5} = \frac{15}{2} \text{ cm}^2$

$\triangle AGH \sim \triangle ABE$ で

相似比は 1:2 より

面積比は 1:4

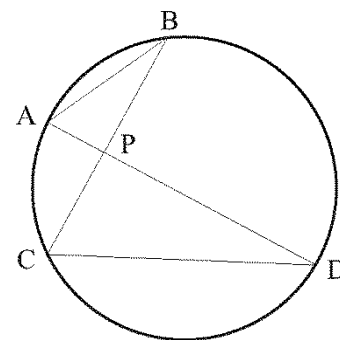
$\triangle AGH: \frac{1}{2} \times 11 \times 4 = 1:4 \quad \triangle AGH = \frac{11}{2} \text{ cm}^2$

したがって $\triangle OGH = \frac{25}{4} + \frac{15}{2} - \frac{11}{2} = \frac{33}{4} \text{ cm}^2$

【問 18】

右の図において、2 つの直線 AD と BC は、円の内部にある点 P で交わっている。このとき、次の各問いに答えなさい。

(鳥取県 2014 年度)



(1) $\triangle PAB \sim \triangle PCD$ であることを証明しなさい。

(2) $PA=4\text{ cm}$, $PB=7\text{ cm}$, $PC=6\text{ cm}$ のとき、 PD の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔証明〕 $\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ において、 $\triangle PAB \sim \triangle PCD$	
	(2)	cm

解答

(1)

〔証明〕

$\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ において

$\widehat{BD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle PAB = \angle PCD \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ABP = \angle CDP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PAB \sim \triangle PCD$$

$$(2) \quad \frac{21}{2} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ において

$$\text{対頂角より } \angle APB = \angle CPD \cdots \textcircled{1}$$

弧 AC の円周角より

$$\angle ABP = \angle CDP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PAB \sim \triangle PCD$$

(2)

$$PA:PC = PB:PD$$

$$4:6 = 7:PD$$

$$4PD = 42$$

$$PD = \frac{21}{2} \text{ cm}$$

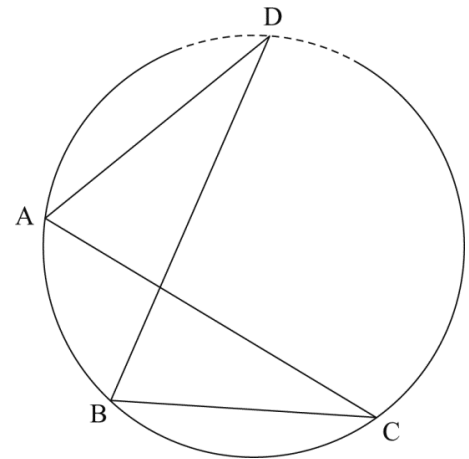
【問 19】

次の問いに答えなさい。

(島根県 2014 年度)

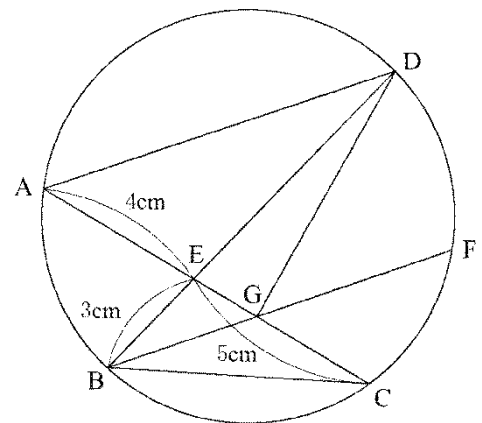
問1 図1のように3点 A, B, C を通る円がある。点 D が $\widehat{ACB}$ 上にあるためには、どんなことがいえればよいか、図1の点をあらわす記号 A～D を使って答えなさい。

図1



問2 図2のように4点 A, B, C, D が同じ円周上にあり、線分 AC と線分 BD の交点を E とする。また、 $BE=3\text{ cm}$, $AE=4\text{ cm}$, $EC=5\text{ cm}$ とする。さらに点 B から $AD \parallel BF$ となるように、円周上に点 F をとり、線分 AC と線分 BF の交点を G とする。次の(1)～(3)に答えなさい。

図2



(1) $\triangle EBG \sim \triangle ECB$ であることを証明しなさい。

(2) 線分 EG の長さを求めなさい。

(3) $\triangle DEG$ と $\triangle BCE$ の面積比を最も簡単な整数比で答えなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	〔証明〕
	(2)	cm
	(3)	$\triangle DEG:\triangle BCE=$:

解答

問1 $\angle ADB = \angle ACB$

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle EBG$ と $\triangle ECB$ において

$\angle BEG = \angle CEB$ (共通) …①

また, 円周角の定理より

$\angle ADE = \angle ECB$ …②

平行線の錯角は等しいから

$\angle ADE = \angle EBG$ …③

②, ③より

$\angle EBG = \angle ECB$ …④

よって①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle EBG \sim \triangle ECB$

(2) $\frac{9}{5}$ cm

(3) $\triangle DEG : \triangle BCE = 4 : 5$

解説

問1

円周角の定理の逆より

点 C, D が直線 AB の同じ側にあり

$\angle ADB = \angle ACB$ であることがいえればよい。

問2

(1)

$\triangle EBG$ と $\triangle ECB$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

(2)

$\triangle EBG \sim \triangle ECB$ より

$EG : EB = EB : EC$

$EG : 3 = 3 : 5$

$5EG = 9$

$EG = \frac{9}{5}$ cm

(3)

$\triangle ECB$ と $\triangle EDA$ も

2組の角がそれぞれ等しいので相似だから

面積比は $\triangle ECB : \triangle EDA = EB^2 : EA^2 = 3^2 : 4^2 = 9 : 16$

$\triangle ECB = \frac{9}{16} \triangle EDA$

また $\triangle DEG : \triangle EDA = EG : AE = \frac{9}{5} : 4 = 9 : 20$

$\triangle EDA = \frac{20}{9} \triangle DEG$

よって $\triangle DEG : \triangle BCE = \triangle DEG : \frac{9}{16} \times \frac{20}{9} \triangle DEG = 4 : 5$

【問 20】

誠さんは水たまりに映る校舎を見て、三角形の相似を利用して校舎の高さを求めることができないかと考えた。次の＜誠さんが考えた方法＞を読み、問1、問2に答えなさい。

(岡山県 2014 年度 特別)

＜誠さんが考えた方法＞

- 図1のように、水平な地面上で、水たまりに校舎の先端が映って見える位置にまっすぐ立つ。
- 図1での位置関係を、模式図で図2のように表す。ただし、各点はそれぞれ次の位置を示す。
 点 A 校舎の先端
 点 B 点 A の位置を通り地面に垂直な直線と地面との交点
 点 C 誠さんから見た水たまりに映った校舎の先端
 点 D 点 C の位置を通り地面に垂直な直線上の点
 点 E 誠さんの目
 点 F 誠さんが立っている地点
 また、3 点 B, C, F は同じ直線上にあり、直線 AB, DC, EF はいずれも直線 BF と垂直である。
- 光の入射角と反射角が等しいことを使って三角形の相似を示し、相似比から校舎の高さ AB を求める。

図1

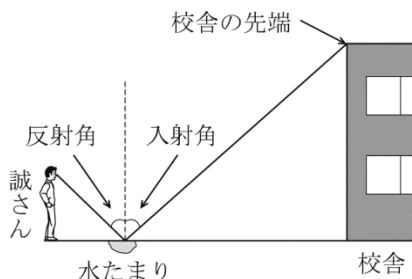
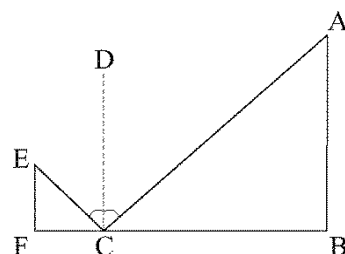


図2



- 問1 図2において△ABCと△EFCが相似であることを、次のように証明した。□(ア)□ ～ □(イ)□ に適当な数、記号またはことばを書き入れなさい。

【証明】

△ABCと△EFCにおいて

$$\angle ACB = 90^\circ - \angle \boxed{\text{ア}}, \angle ECF = 90^\circ - \angle \boxed{\text{イ}}$$

光の入射角と反射角は等しいので $\angle \boxed{\text{ア}} = \angle \boxed{\text{イ}}$

よって、 $\angle ACB = \angle ECF$ (1)

また、 $\angle ABC = \angle EFC = \boxed{\text{ウ}}^\circ$ (2)

(1), (2)から、□(エ)□ がそれぞれ等しいので、△ABC ∽ △EFC

- 問2 EF=1.5 m, FC=2 m, BC=16 m のとき、校舎の高さ AB を求めなさい。

解答欄

問1	(ア)	∠
	(イ)	∠
	(ウ)	°
	(エ)	
問2	AB＝ m	

解答

問1

(ア) ∠ACD

(イ) ∠ECD

(ウ) 90°

(エ) 2組の角

問2 AB＝12 m

解説

問1

△ABC と△EFC において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問2

△ABC ∽ △EFC において

AB:EF＝BC:FC

AB:1.5＝16:2

2AB＝24

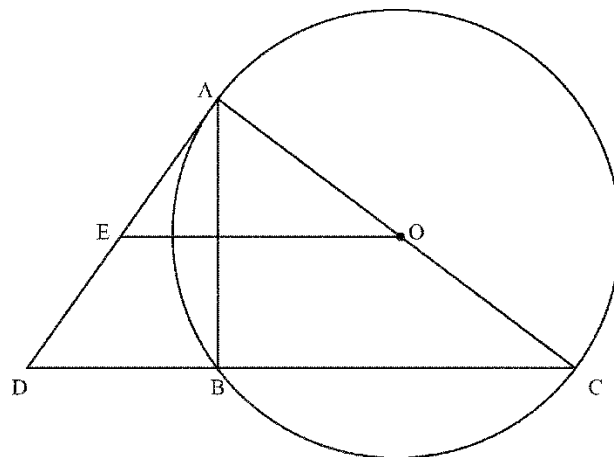
AB＝12m

【問 21】

下の図のように、円 O の円周上に 3 点 A , B , C があり、 AC は円 O の直径です。点 A における円 O の接線と線分 CB の延長との交点を D とします。また、線分 AD の中点を E とします。

このとき、 $\triangle ABC \sim \triangle EAO$ であることを証明しなさい。

(広島県 2014 年度)



解答欄

〔仮定〕 図において、 AC は円 O の直径、 AD は点 A における円 O の接線、点 E は線分 AD の中点

〔結論〕 $\triangle ABC \sim \triangle EAO$

〔証明〕

解答

〔仮定〕 図において, AC は円 O の直径, AD は点 A における円 O の接線, 点 E は線分 AD の中点

〔結論〕 $\triangle ABC \sim \triangle EAO$

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle EAO$ において

半円の弧に対する円周角は直角であるから

$$\angle ABC = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

AE は円 O の接線であるから

$$\angle EAO = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle ABC = \angle EAO \cdots \textcircled{3}$$

また $\triangle ADC$ において

点 O は線分 AC の中点, 点 E は線分 AD の中点であるから

中点連結定理より $EO \parallel DC \cdots \textcircled{4}$

④より

平行線の同位角は等しいから

$$\angle ACB = \angle EOA \cdots \textcircled{5}$$

③, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle EAO$$

解説

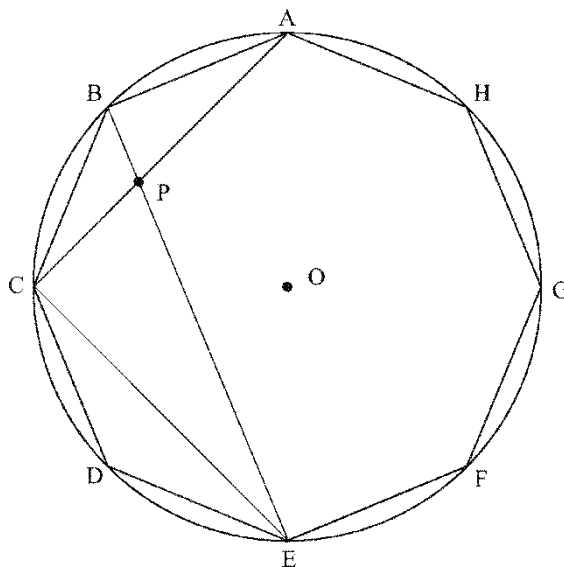
$\triangle ABC$ と $\triangle EAO$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

【問 22】

図のように、円 O の円周を 8 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H をとり、正八角形をつくる。線分 AC と線分 BE との交点を点 P とし、線分 CE をひく。問1～問4に答えなさい。

(徳島県 2014 年度)



問1 正八角形 $ABCDEFGH$ の内角の和を求めなさい。

問2 $\triangle ABP \sim \triangle ECP$ を証明しなさい。

問3 円周上の 8 個の点 A, B, C, D, E, F, G, H から 3 個の点を結んでできる直角三角形は何個あるか、求めなさい。

問4 円 O の半径が 5 のとき、正八角形 $ABCDEFGH$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	度	
問2	〔証明〕	
問3	個	
問4		

解答

問1 1080 度

問2

〔証明〕

$\triangle ABP$ と $\triangle ECP$ で

対頂角は等しいから

$$\angle APB = \angle EPC \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAP = \angle CEP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABP \sim \triangle ECP$$

問3 24 個

問4 $50\sqrt{2}$

解説

問1

正八角形の内角の和は $180^\circ \times (8 - 2) = 1080^\circ$

問2

$\triangle ABP$ と $\triangle ECP$ において

2 組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

問3

円周角の定理より AE は直径なので

$$\angle ABE = \angle ACE = \angle ADE = \angle AFE = \angle AGE = \angle AHE = 90^\circ$$

これを利用して直角三角形を見つけると

斜辺を AE, BF, CG, DH とする直角三角形がそれぞれ 6 個あるので

全部で $6 \times 4 = 24$ 個

問4

$\triangle AOB$ において

B から AO に垂線をひき交点を K とおくと

$$\angle AOB = 45^\circ \text{ だから}$$

$\triangle BOK$ において

$$BK = \frac{1}{\sqrt{2}} OB = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 5 = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$$

よって正八角形 $ABCDEFGH$ の面積は $\frac{25\sqrt{2}}{4} \times 8 = 50\sqrt{2}$

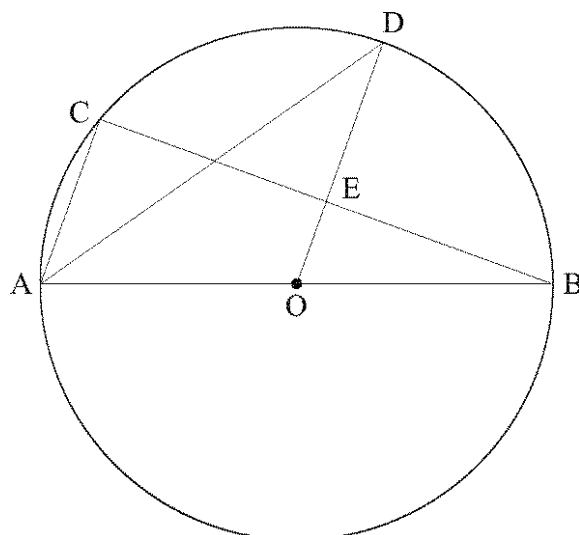
【問 23】

右の図のような、線分 AB を直径とする円 O があり、円周上に 2 点 A, B と異なる点 C をとる。 $\angle BAC$ の二等分線をひき、円 O との交点のうち、点 A と異なる点を D とし、点 D と点 O を結ぶ。また、線分 BC と線分 OD との交点を E とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(香川県 2014 年度)

問1 $\triangle ABC \sim \triangle OBE$ であることを証明せよ。



問2 線分 OA 上に、 $OE=OF$ となる点 F をとる。点 F を通り、線分 OA に垂直な直線をひき、円 O との交点のうち、直線 AB について点 C と反対側にある点を G とする。点 A と点 G 、点 C と点 D をそれぞれ結ぶとき、 $\triangle AGF \equiv \triangle DCE$ であることを証明せよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	〔証明〕

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle OBE$ において

$\angle B$ は共通

仮定より

$\angle DAB = \angle CAD$ だから

$\angle CAB = 2\angle DAB$

円周角の定理より

$\angle DOB = 2\angle DAB$

$\angle DOB = \angle EOB$ だから

$\angle CAB = \angle EOB$

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \sim \triangle OBE$

問2

〔証明〕

点 O と点 G を結ぶ。

$\triangle OBE$ と $\triangle OGF$ において

仮定より

$OE = OF$

円 O の半径だから

$OB = OG$

AB は直径だから

$\angle ACB = 90^\circ$ であり

問1より, $\triangle ABC \sim \triangle OBE$ だから

$\angle ACB = \angle OEB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

仮定より

$\angle OFG = 90^\circ$ だから

$\angle OEB = \angle OFG = 90^\circ$

直角三角形において

斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから

$\triangle OBE \cong \triangle OGF$

よって $BE = GF \cdots \textcircled{2}$

また問1より, $\triangle ABC \sim \triangle OBE$ だから

$BA : BO = BC : BE$

$BA = 2BO$ だから, $BC = 2BE$

よって $BE = CE$

$\textcircled{2}$ より $GF = CE \cdots \textcircled{3}$

$\triangle AGF$ と $\triangle DCE$ において

仮定より $\angle AFG = 90^\circ$

対頂角は等しいから $\angle OEB = \angle DEC$

$\textcircled{1}$ より $\angle DEC = 90^\circ$

よって $\angle AFG = \angle DEC \cdots \textcircled{4}$

また $AF = OA - OF$, $DE = OD - OE$, $OA = OD$, $OF = OE$ だから $AF = DE \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AGF \cong \triangle DCE$

解説

問1

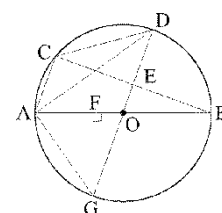
$\triangle ABC$ と $\triangle OBE$ において

2組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

問2

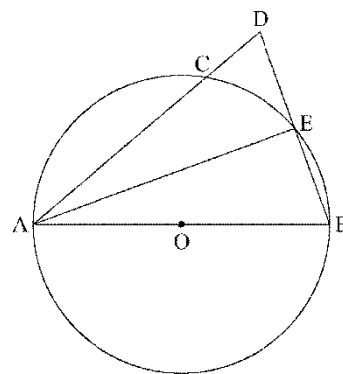
$\triangle OBE$ と $\triangle OGF$ が合同であることを導き

それを利用して $\triangle AGF$ と $\triangle DCE$ が合同になることを導く。



【問 24】

図のように、線分 AB を直径とする円 O がある。円 O の周上に点 A, B と異なる点 C をとり、線分 AC を点 C の方向へ延長し、その延長線上に $AD=AB$ となるように点 D をとる。線分 BD と円 O の交点のうち、点 B 以外の交点を E とし、点 A と点 E を結ぶ。このとき、次の問1・問2に答えなさい。



(高知県 2014 年度 前期)

問1 $\triangle ABE \sim \triangle BDC$ を証明せよ。

問2 円 O の半径が 3 cm, BE=2 cm であるとき, 三角形 ABC の面積を求めよ。

解答欄

問1	[証明] $\triangle ABE$ と $\triangle BDC$ において したがって $\triangle ABE \sim \triangle BDC$
問2	cm^2

解答

問1

〔証明〕

△ABE と△BDC において

AB=AD より△ABD は二等辺三角形なので

$$\angle ABE = \angle BDC \cdots \textcircled{1}$$

∠AEB, ∠ACB はそれぞれ直径 AB に対する円周角なので

$$\angle AEB = \angle ACB = 90^\circ$$

また

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$$

よって

$$\angle AEB = \angle BCD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しい。

したがって△ABE ∽ △BDC

$$\text{問2 } \frac{56}{9} \sqrt{2} \text{ cm}^2$$

解説

問1

△ABE と△BDC において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問2

△ABE と△ADE は

直角三角形で斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので合同である。

よって DE=BE=2 cm

△ABE で三平方の定理より

$$AE = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

△ABE ∽ △BDC より

$$AB:BD = AE:BC$$

$$6:4 = 4\sqrt{2}:BC$$

$$BC = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

$$AB:BD = BE:DC$$

$$6:4 = 2:DC$$

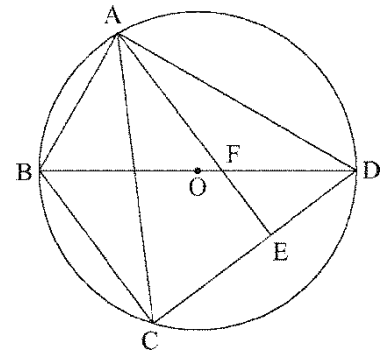
$$DC = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

$$AC = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3} \text{ cm}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{56\sqrt{2}}{9} \text{ cm}^2$$

【問 25】

半径 5 cm の円 O がある。下の図のように、円 O の周上に 4 点 A, B, C, D を、線分 BD が直径、 $AB=5$ cm, $BC=6$ cm となるようにとり、四角形 ABCD をつくる。対角線 AC をひき、点 A を通り線分 BC に平行な直線と線分 CD との交点を E、線分 AE と対角線 BD との交点を F とする。



(福岡県 2014 年度)

問1 上の図において、

「 $\triangle ACD \sim \triangle FBA$ である」ことを、の中に証明せよ。

問2 上の図において、

点 D から直線 AC までの距離は cm である。

〔証明〕

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ACD$ と $\triangle FBA$ において

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ACD = \angle FBA \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{CD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle CAD = \angle CBD \cdots \textcircled{2}$$

平行線の錯角は等しいから

$BC \parallel AE$ より

$$\angle CBD = \angle BFA \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle CAD = \angle BFA \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACD \sim \triangle FBA$$

問2 $4\sqrt{3}$ cm

解説

問1

$\triangle ACD$ と $\triangle FBA$ において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問2

BD は直径より $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$

$$CD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}$$

点 D から AC に垂線をひき交点を H とする。

$\triangle ABD$ において $\angle BAD = 90^\circ$

$AB : BD = 1 : 2$ より

$$\angle ABD = 60^\circ$$

弧 AD の円周角より

$$\angle ACD = \angle ABD = 60^\circ$$

$\triangle DCH$ において

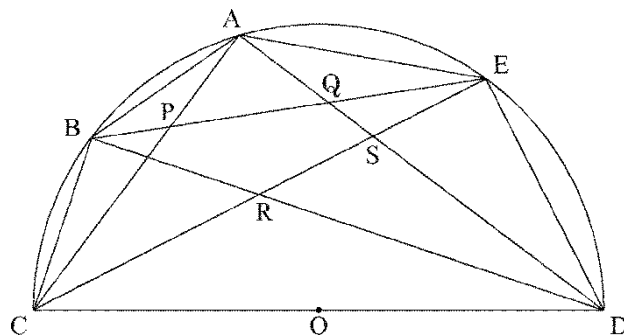
$$DH : DC = \sqrt{3} : 2$$

$$DH : 8 = \sqrt{3} : 2$$

$$DH = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

【問 26】

長さが 20 cm の線分 CD を直径とし、点 O を中心とする半円がある。下の図のように、 $\widehat{CD}$ 上に点 A をとり、 $\widehat{AC}$ 上に $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ となるように点 B を、 $\widehat{AD}$ 上に $\widehat{AE} = \widehat{ED}$ となるように点 E をとり、五角形 $ABCDE$ をつくる。対角線 BE と対角線 AC , AD との交点をそれぞれ P , Q とし、対角線 CE と対角線 BD , AD との交点をそれぞれ R , S とする。



次の問1, 問3は の中にあてはまる最も簡単な数を記入し、問2は指示にしたがって答えよ。

ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2014 年度)

問1 対角線 BE の長さは cm である。

問2 図において、「 $\triangle APE \sim \triangle SRD$ である」ことを、 の中に証明せよ。

〔証明〕

問3 図において、 $BC = 2\sqrt{10}$ cm のとき、 $\triangle APQ$ の面積は cm^2 である。

解答欄

問1	cm
問2	〔証明〕
問3	cm ²

解答

問1 $10\sqrt{2}$ cm

問2

〔証明〕

$\triangle APE$ と $\triangle SRD$ において

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle AEP = \angle SDR \cdots \textcircled{1}$$

また $\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAC = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$$

$\widehat{AE} = \widehat{ED}$ から

$$\angle ABE = \angle ECD \cdots \textcircled{3}$$

$\triangle ABP$ の外角より

$$\angle APE = \angle BAC + \angle ABE \cdots \textcircled{4}$$

$\triangle RCD$ の外角より

$$\angle SRD = \angle BDC + \angle ECD \cdots \textcircled{5}$$

よって $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ より

$$\angle APE = \angle SRD \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{6}$ より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle APE \sim \triangle SRD$$

問3 8 cm^2

解説

問1

△OBE において

$$\angle BOE = \angle AOB + \angle AOE = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle AOD) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

$$OB = OE = 10 \text{ cm}$$

$$\text{よって } BE = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

問2

△APE と △SRD において

2組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問3

△BCR において

$$CD \text{ は直径より } \angle CBR = \angle CBD = 90^\circ$$

$$\angle BCR = \angle BCE = \frac{1}{2} \angle BOE = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$

よって△BCR は

BR = BC = $2\sqrt{10}$ cm の直角二等辺三角形である。

△ERD も同様に ER = ED の直角二等辺三角形である。

△BCD において

三平方の定理より

$$BD = \sqrt{20^2 - (2\sqrt{10})^2} = 6\sqrt{10} \text{ cm}$$

$$RD = 6\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10} \text{ cm}$$

$$ED = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4\sqrt{10} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

△ABQ と △EBD も

2組の角がそれぞれ等しいので相似になる。

$$\text{よって } AQ : ED = AB : EB = 2\sqrt{10} : 10\sqrt{2} = \sqrt{10} : 5\sqrt{2}$$

△APQ と △ERD において

$$\angle PAQ = \angle RED = 90^\circ$$

△APE ∽ △SRD より

$$\angle APQ = \angle ERD$$

よって 2組の角がそれぞれ等しいので

△APQ ∽ △ERD

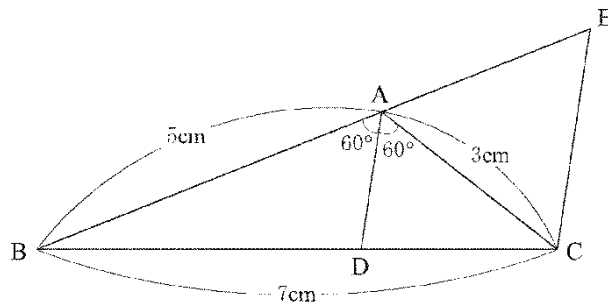
$$\text{よって } \triangle APQ : \triangle ERD = AQ^2 : ED^2 = 10 : 50 = 1 : 5$$

$$\triangle APQ = \frac{1}{5} \triangle ERD = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 8 \text{ cm}^2$$

【問 27】

図1のように、 $AB=5\text{ cm}$ 、 $BC=7\text{ cm}$ 、 $CA=3\text{ cm}$ の△
 ABC がある。辺 BC 上に $\angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$ となる点
 D をとる。また、点 C を通り AD に平行な直線と、直線 AB
 の交点を E とする。

図1



このとき、問1～問4に答えなさい。

(佐賀県 2014 年度 特色)

問1 △ BAD の △ BEC であることを証明しなさい。

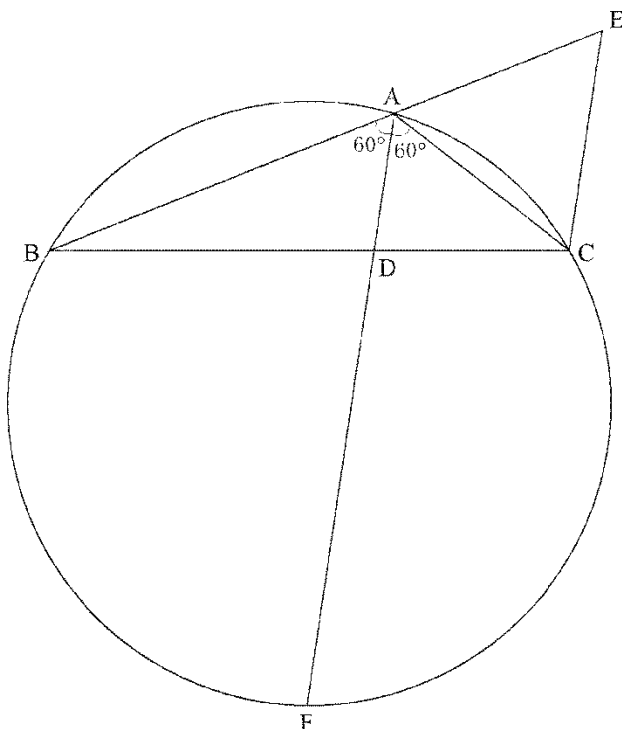
問2 AE の長さを求めなさい。

問3 BD の長さを求めなさい。

問4 下の図2は、図1において 3 点 A 、 B 、 C を通る円と直線 AD の交点のうち、点 A と異なる点を F としたもの
 である。

このとき、(1)、(2)の問いに答えなさい。

図2



(1) DF の長さを求めなさい。

(2) △ ACF の面積を S_1 、△ ACE の面積を S_2 とするとき、 $S_1:S_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

問1		
問2	cm	
問3	cm	
問4	(1)	cm
	(2)	$S_1:S_2=$:

解答

問1

$\triangle BAD$ と $\triangle BEC$ において

共通な角だから

$$\angle ABD = \angle EBC \cdots \textcircled{1}$$

$AD \parallel EC$ で

同位角は等しいから

$$\angle BAD = \angle BEC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BAD \sim \triangle BEC$$

問2 3cm

$$\text{問3 } \frac{35}{8} \text{ cm}$$

問4

$$(1) \frac{49}{8} \text{ cm}$$

$$(2) S_1 : S_2 = 8 : 3$$

解説

問1

$\triangle BAD$ と $\triangle BEC$ で

2組の角がそれぞれ等しいことより相似を導く。

問2

$\triangle AEC$ において

$$\angle AEC = \angle BAD = 60^\circ$$

$$\angle EAC = 180^\circ - 60^\circ \times 2 = 60^\circ \text{ より, } \triangle AEC \text{ は正三角形。}$$

$$\text{よって } AE = AC = 3 \text{ cm}$$

問3

$\triangle BAD \sim \triangle BEC$ だから

$$BA : BE = BD : BC$$

$$5 : 8 = BD : 7$$

$$BD = \frac{35}{8} \text{ cm}$$

問4

(1)

$$DC = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8} \text{ cm}$$

$$AD : EC = BA : BE$$

$$AD : 3 = 5 : 8$$

$$AD = \frac{15}{8} \text{ cm}$$

$\triangle BDF \sim \triangle ADC$ だから

$$BD : AD = DF : DC$$

$$\frac{35}{8} : \frac{15}{8} = DF : \frac{21}{8}$$

$$DF = \frac{49}{8} \text{ cm}$$

(2)

C から AF に垂線をひき交点を H とする。

$\triangle ACF$ と $\triangle ACE$ は

どちらも高さが CH となるので

$$S_1 : S_2 = AF : CE$$

$$AF = \frac{15}{8} + \frac{49}{8} = 8$$

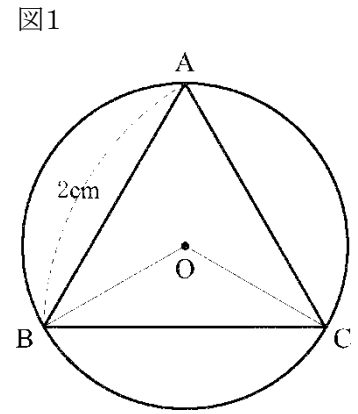
$$CE = 3 \text{ より } S_1 : S_2 = 8 : 3$$

【問 28】

図1, 図2のように, 円 O の周上に 3 点 A, B, C があり, $\triangle ABC$ は 1 辺が 2 cm の正三角形である。このとき, 次の問いに答えなさい。

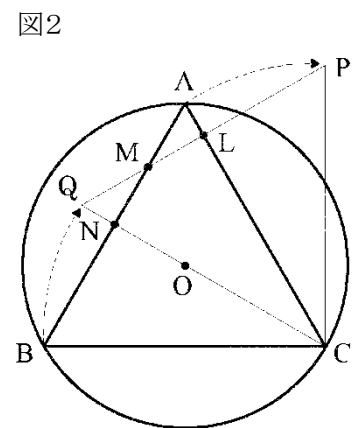
(長崎県 2014 年度)

問1 図1において, $\angle BOC$ の大きさは何度か。



問2 $\triangle ABC$ の面積は何 cm^2 か。

問3 図2のように, $\triangle PQC$ は $\triangle ABC$ を点 C を中心として回転移動した三角形であり, 円の中心 O が辺 QC 上にある。また, 辺 CA と辺 PQ との交点を L , 辺 AB と辺 PQ との交点を M , 辺 AB と辺 QC との交点を N とする。このとき, 次の(1)~(3)に答えよ。



(1) $\triangle PCL \sim \triangle AML$ であることを証明せよ。

(2) 線分 AL の長さは何 cm か。

(3) 四角形 $CLMN$ の面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	$\angle BOC =$ °	
問2	cm ²	
問3	(1)	
	(2)	cm
	(3)	cm ²

解答

問1 $\angle BOC = 120^\circ$

問2 $\sqrt{3} \text{ cm}^2$

問3

(1)

$\triangle PCL$ と $\triangle AML$ において

正三角形の内角から

$\angle CPL = \angle MAL \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいので

$\angle PLC = \angle ALM \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PCL \sim \triangle AML$

(2) $2 - \sqrt{3} \text{ cm}$

(3) $6 - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問1

$\triangle ABC$ は正三角形だから $\angle BAC = 60^\circ$

円周角の定理より

$\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

問2

正三角形 ABC において

$\angle BAC$ の二等分線と BC との交点を H とすると

$AH \perp BC$

$BH = CH = 1 \text{ cm}$

$AH = \sqrt{3} \text{ cm}$

よって $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$

問3

(1)

$\triangle PCL$ と $\triangle AML$ において

2組の角がそれぞれ等しいことから相似を導く。

(2)

CN が円の中心を通るので $AN = BN = 1 \text{ cm}$

$CN \perp AB$ $\angle ACN = 30^\circ$ より $\angle PCA = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

$\angle CPL = 60^\circ$ だから $\angle CLP = 90^\circ$

よって $CL = \sqrt{3} \text{ cm}$

$AL = 2 - \sqrt{3} \text{ cm}$

(3)

$\triangle AML$ において

$\angle MLA = 90^\circ$, $\angle MAL = 60^\circ$ より

$ML = \sqrt{3} AL = \sqrt{3} (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3 \text{ cm}$

四角形 $CLMN$ の面積は

$\triangle CAN - \triangle AML$

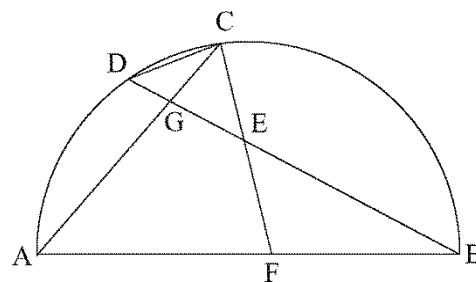
$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} - 3) \times (2 - \sqrt{3})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2} + 6$$

$$= 6 - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 29】

右の図のように、線分 AB を直径とする半円があり、 $\widehat{AB}$ 上に点 C を、 $\widehat{AC}$ の長さが $\widehat{CB}$ の長さより短くなるようにとる。 $\widehat{AC}$ 上に点 D をとり、線分 BD 上に点 E を、 $CE = CD$ となるようにとる。点 F は CE の延長と線分 AB との交点、点 G は線分 AC と線分 BD との交点である。



(熊本県 2014 年度)

問1 $\triangle CAF \sim \triangle CEG$ であることを証明しなさい。

問2 $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$, $CG = 1 \text{ cm}$ のとき、

(1) 線分 BG の長さを求めなさい。

(2) 線分 CF の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle CAF$ と $\triangle CEG$ において

2 つの三角形に共通な角だから

$$\angle ACF = \angle ECG \cdots \textcircled{1}$$

$\angle CAF$ と $\angle CDB$ は $\widehat{BC}$ に対する円周角だから

$$\angle CAF = \angle CDB \cdots \textcircled{2}$$

また $CE = CD$ だから

$$\angle CEG = \angle CDB \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle CAF = \angle CEG \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle CAF \sim \triangle CEG$$

問2

$$(1) \sqrt{21} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$$

解説

問1

$\triangle CAF$ と $\triangle CEG$ において,

2 組の角がそれぞれ等しいことを示し相似を導く。

問2

(1)

BC を結ぶ。

$\triangle ACB$ において

円周角の定理より $\angle ACB = 90^\circ$ だから

$$\text{三平方の定理より } BC = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$\triangle BCG$ において

$$\text{三平方の定理より } BG = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{21} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle GCD \sim \triangle GBA$ だから

$$CD : BA = CG : BG$$

$$CD : 6 = 1 : \sqrt{21}$$

$$CD = \frac{6}{\sqrt{21}} \text{ cm}$$

$\triangle CAF \sim \triangle CEG$ だから

$$CF : CG = CA : CE$$

また $CE = CD$ より

$$CF : 1 = 4 : \frac{6}{\sqrt{21}}$$

$$CF = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$$

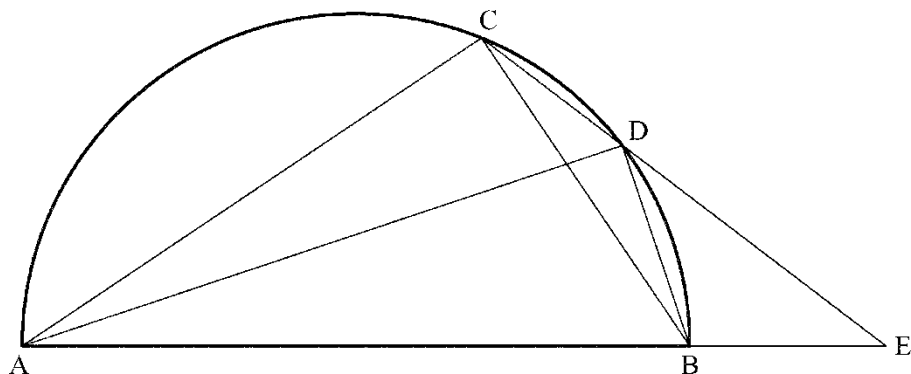
【問 30】

下の図のように、線分 AB を直径とする半円がある。 $\widehat{AB}$ 上に点 C があり、線分 AC の長さは 13 cm 、線分 BC の長さは 9 cm である。 $\widehat{BC}$ 上に点 D があり、線分 AD の長さが線分 BD の長さの 3 倍である。

また、線分 AB の延長と線分 CD の延長の交点を E とする。

次の問1～問3に答えなさい。

(大分県 2014 年度)



問1 次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) $\triangle ADE$ と相似な三角形を答えなさい。

(2) $\triangle ADE$ と(1)で答えた三角形が相似であることを証明しなさい。

問2 線分 BD の長さを求めなさい。

問3 線分 BE の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	△
	(2)	〔証明〕
問2	cm	
問3	cm	

解答

問1

(1) $\triangle CBE$

(2)

〔証明〕

$\triangle ADE$ と $\triangle CBE$ において

$\widehat{BD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle DAE = \angle BCE \cdots \textcircled{1}$$

また共通な角だから

$$\angle AED = \angle CEB \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADE \sim \triangle CBE$$

問2 5 cm

$$\text{問3 } \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$$

解説

問1

(1)

円周角の定理から $\triangle ADE$ の内角と等しい角を見つけると相似な三角形が見つかりやすい。

(2)

$\triangle ADE$ と $\triangle CBE$ において

弧 BD の円周角より $\angle DAE = \angle BCE \cdots \textcircled{1}$

共通なので $\angle AED = \angle CEB \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle CBE$

問2

$\triangle ACB$ において

AB は直径だから $\angle ACB = 90^\circ$ $AB = \sqrt{13^2 + 9^2} = 5\sqrt{10}$ cm

同様に $\triangle ADB$ において

$\angle ADB = 90^\circ$

$BD = x$ cm とすると $AD = 3x$ cm とおけるので

$$x^2 + (3x)^2 = (5\sqrt{10})^2$$

これを解いて

$$x = \pm 5$$

$x > 0$ より

$$x = 5 \text{ cm}$$

問3

D から AE に垂線をひき交点を H とする。

$\triangle HDB \sim \triangle DAB$ だから

$$HB : DB = HD : DA = BD : BA = 5 : 5\sqrt{10} = 1 : \sqrt{10}$$

$DA = 3DB = 15$ cm より

$$HD : 15 = 1 : \sqrt{10}$$

$$HD = \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$$

同様に $DB = 5$ cm より $HB = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$

また C から AE に垂線をひき交点を K とする。

$\triangle KCB \sim \triangle CAB$ だから

$$KC : CA = KB : CB = BC : BA = 9 : 5\sqrt{10}$$

$CA = 13$ cm, $CB = 9$ cm より

$$KC = \frac{117\sqrt{10}}{50} \text{ cm}$$

$$KB = \frac{81\sqrt{10}}{50} \text{ cm}$$

$BE = x$ cm とすると

$\triangle ECK$ について

$DH \parallel CK$ より

$$DH : CK = EH : EK$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{2} : \frac{117\sqrt{10}}{50} = \left(x + \frac{\sqrt{10}}{2}\right) : \left(x + \frac{81\sqrt{10}}{50}\right)$$

$$25 : 39 = \left(x + \frac{\sqrt{10}}{2}\right) : \left(x + \frac{81\sqrt{10}}{50}\right)$$

$$39 \left(x + \frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 25 \left(x + \frac{81\sqrt{10}}{50}\right)$$

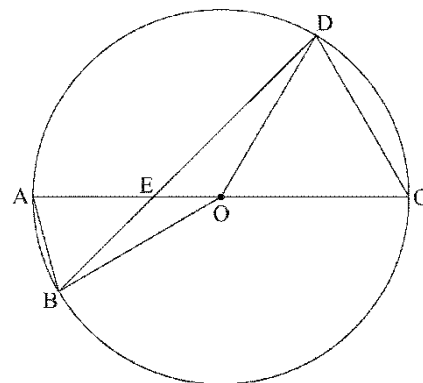
これを解いて $x = \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$

【問 31】

図1のように、円 O の直径 AC と弦 BD が、円内の点 E で交わっている。
 $\angle ACD = 60^\circ$, $AE < CE$ のとき、次の問1～問4に答えなさい。

(宮崎県 2014 年度)

図1



問1 $\angle DEC = 40^\circ$ のとき、 $\angle EBO$ の大きさを求めなさい。

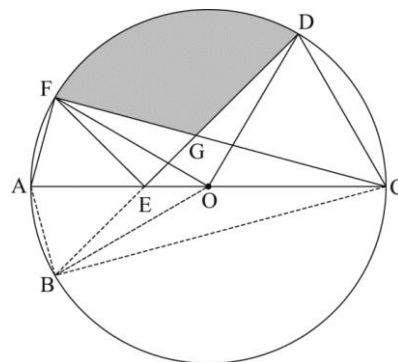
問2 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ であることを証明しなさい。

問3 $OD:OE = 3:1$ のとき、 $\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ の面積の比を求めなさい。

問4 図1の 3 点 A, B, C を結んでできる $\triangle ABC$ を、図2のように、 AC を
 対称の軸として対称移動し、 $\triangle AFC$ をつくる。また、 DE と FC の交
 点を G とする。

図2

$CD = 2 \text{ cm}$, $\angle DEC = 45^\circ$ のとき、 DG, FG と $\widehat{DF}$ で囲まれた部
 分 () の面積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。



解答欄

問1	$\angle EBO =$ 度
問2	〔証明〕
問3	$\triangle ABE : \triangle DCE =$:
問4	cm^2

解答

問1 $\angle EBO = 20^\circ$ 度

問2

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ で

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAE = \angle CDE \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ABE = \angle DCE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABE \sim \triangle DCE$$

問3 $\triangle ABE : \triangle DCE = 4 : 13$

$$\text{問4 } \pi - 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle OCD$ は正三角形になるので $\angle DOC = 60^\circ$

$\triangle DEO$ の内角と外角の関係より $\angle ODE = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$

$\triangle OBD$ は二等辺三角形だから $\angle EBO = \angle OBD = \angle ODB = \angle ODE = 20^\circ$

問2

$\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ において

対頂角が等しいことや円周角の定理から角が等しいことを示す。

2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ がいえる。

問3

D から OC に垂線をひき、交点を H とすると

$$\triangle DOC \text{ は正三角形なので } OE = 1 \text{ とすると } OD = 3, OH = \frac{3}{2}, DH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle DEH \text{ において三平方の定理より } DE = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13}$$

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$ だから

$$\text{相似比は } AE : DE = 2 : \sqrt{13}$$

よって面積比は 4 : 13

問4

D から OC に垂線をひき交点を H とし、FB と AC の交点を K とする。

$$FB \perp AC \text{ 円周角の定理より } \angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

対称な図形の性質より $\angle CFE = \angle CBE = 30^\circ$

$$\text{また } \angle FEA = \angle BEA = \angle DEC = 45^\circ$$

$$\text{よって } \angle FEG = 90^\circ \quad \angle ACB = \angle ECB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

$$\text{円周角の定理より } \angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 15^\circ = 30^\circ \quad \angle DOF = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$$

$$\text{よって } \triangle ODH \text{ において } DH = \frac{\sqrt{3}}{2} DO = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\triangle DHE \text{ において } DE = \sqrt{2} \quad DH = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\triangle OFK \text{ において } FK = \frac{1}{2} FO = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ cm}$$

$$\triangle FEK \text{ において } FE = \sqrt{2} \quad FK = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\triangle FEG \text{ において } EG = \frac{1}{\sqrt{3}} FE = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

求める面積は

おうぎ形 $ODF - \triangle ODF + \triangle DGF$

$$= \pi \times 2^2 \times \frac{90}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \times \sqrt{2} = \pi - 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$