5.空間図形の複合問題 （長さ・面積・体積・角度ほか）【2003 年度出題】

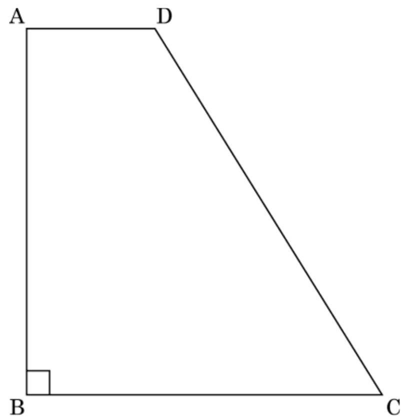
【問 1】

図1のように，AB＝BC＝4 cm，AD＝a cm($0<a<4$)，AD∥BC，∠ABC＝90° の台形 ABCD があります。

次の問いに答えなさい。

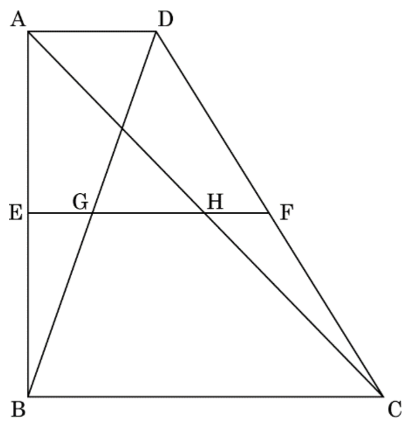
（北海道 2003 年度）

図1



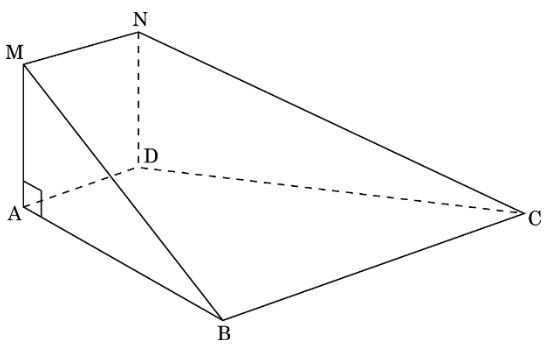
問1 点 B を通り，辺 CD と垂直に交わる直線を，定規とコンパスを使って作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さないこと。

図2



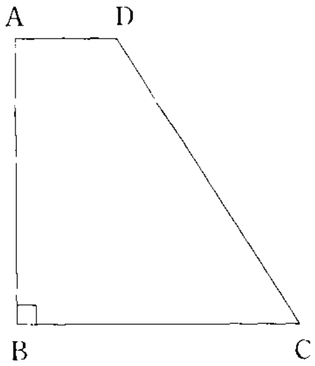
問2 図2のように，辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，F とし，線分 EF と線分 BD，AC との交点をそれぞれ G，H とします。AD＝GH のとき，a の値を求めなさい。

図3



問3 図3のように，台形 ABCD を底面とする立体があります。面 MADN は正方形で，∠MAB=90° です。この立体の体積が 4 cm^3 のとき，a の値を求めなさい。

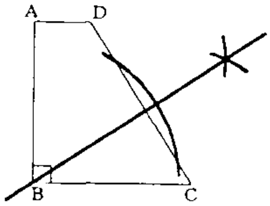
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>$a=$</td></tr>
<tr><td>問3</td><td>（計算）

答　$a=$</td></tr>
</table>

解答

問1



問2　$a=\frac{4}{3}$

問3

三角錐NBCDと四角錐BMADNの体積の和が4だから

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4^2\times a+\frac{1}{3}\times a^2\times4=4$

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

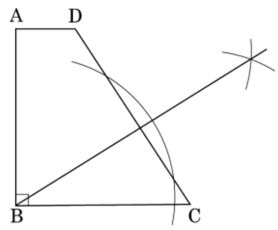
$0<a<4$ より

$a=1$

答　$a=1$

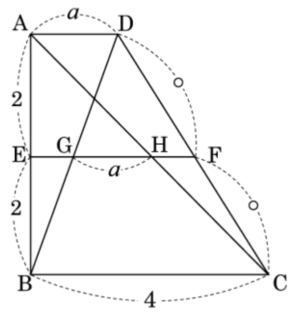
解説

問1



点 B を中心として円をかく。
その円と DC との2つの交点を中心に等しい半径の円をかいて
その交点と B を結べばよい。

問2



AD∥BC, AE:EB＝DF:FC＝1:1 より

AD∥EF∥BC

△BAD で

EG∥AD, DG:GB＝AE:EB＝1:1 だから

中点連結定理により

$EG=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}a$

$GH=AD=a$だから

$EH=EG+GH=\frac{1}{2}a+a=\frac{3}{2}a$

また△ABC で

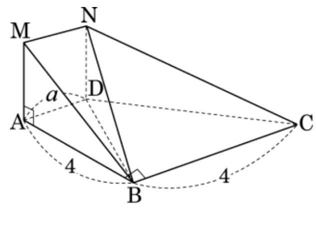
EH∥BC, AH:HC＝AE:EB＝1:1 だから中点連結定理により

$EH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times4=2$

よって$\frac{3}{2}a=2$

$a=\frac{4}{3}$

問3



図のように, この立体を3点 N, B, D を通る平面で2つに分けて考える。

三角錐 N－BCD と四角錐 B－MADN の体積の和が 4 だから

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4^2\times a+\frac{1}{3}\times a^2\times4=4$

これを解く。

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

$0<a<4$ より

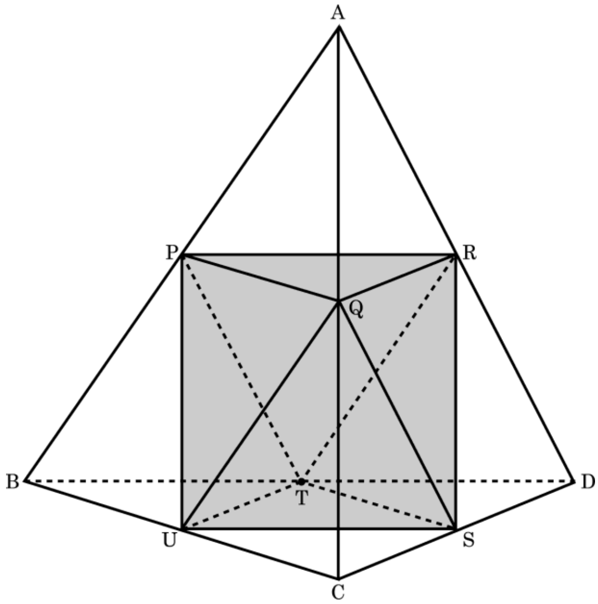
$a=1$

【問 2】

図は，正四面体 ABCD の各辺 AB，AC，AD，CD，DB，BC の中点を，それぞれ P，Q，R，S，T，U とし，正八面体 PQRSTU をつくったものです。

このとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

（岩手県 2003 年度）



⑴ 正八面体 PQRSTU の辺のうち，BC に平行な辺をすべて答えなさい。

⑵ 正四面体 ABCD の1辺の長さが 6 cm のとき，正八面体 PQRSTU の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

(1)　PQ, ST

(2)　$9\sqrt{2}$ cm^3

解説

⑴

△ABC において

P, Q はそれぞれ AB, AC の中点だから

中点連結定理より PQ∥BC

また△DBC において T, S はそれぞれ DB, DC の中点だから

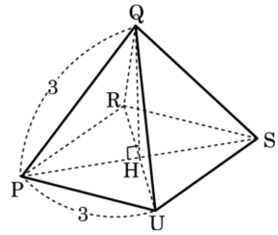
中点連結定理により TS∥BC

よって BC に平行な辺は PQ, TS

⑵

正八面体 PQRSTU を面 PUSR で切ると右の図のような四角すい2つになる。

Q から面 PUSR におろした垂線を QH とする。



中点連結定理により

$\mathrm{PU}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=3$

四角形 PUSR は正方形だから

$\mathrm{PS}=3\sqrt{2}$, $\mathrm{PH}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

△QPH で

$\mathrm{QP}=\mathrm{PU}=3$

三平方の定理により

$\mathrm{QH}=\sqrt{\mathrm{QP}^2-\mathrm{PH}^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

求める正八面体の体積は

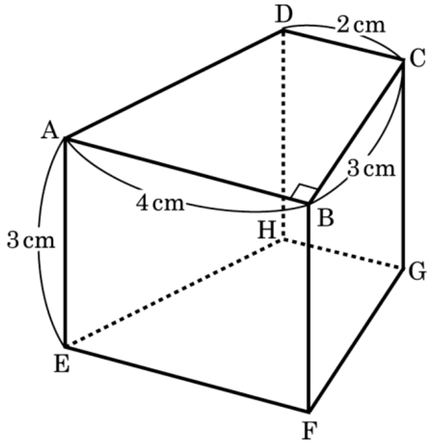
正四角すい Q－PUSR の2倍だから

$\dfrac{1}{3}\times 3^2\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times 2=9\sqrt{2}$ cm^3

【問 3】

図の立体は面 ABCD と面 EFGH が台形でほかの面がすべて長方形の四角柱である。AB∥DC で∠ABC＝90°，AB＝4 cm，BC＝3 cm，CD＝2 cm，AE＝3 cm である。

（秋田県 2003 年度）



① 辺 AD の長さを求めなさい。

② この四角柱をいくつか組み合わせて，もっとも小さな立方体をつくる。このときに使う四角柱の個数を求めなさい。

解答欄

①	cm
②	個

解答
① $\sqrt{13}$ cm
② 8 個
解説
①
台形 ABCD において D から AB に垂線を引き交点を I とし
△ADI において三平方の定理を用いると AD＝$\sqrt{13}$
②
この四角柱を2つ組み合わせてできる直方体の3つの辺の長さ(3，3，6)の最小公倍数の 6 cm が
最小の立法体の一辺の長さである。

【問 4】

図1は，4つの面がすべて合同な三角形でできている立体で，AC＝BC である。点 E は辺 AB 上にあって AE＝2 cm であり，点 F は辺 CD の中点である。また，図2は，この立体の展開図を1目盛り 1 cm の方眼紙にかいたものである。あとの問いに答えなさい。

（山形県 2003 年度）

図1

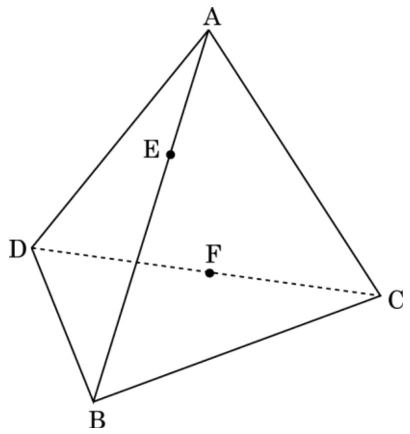
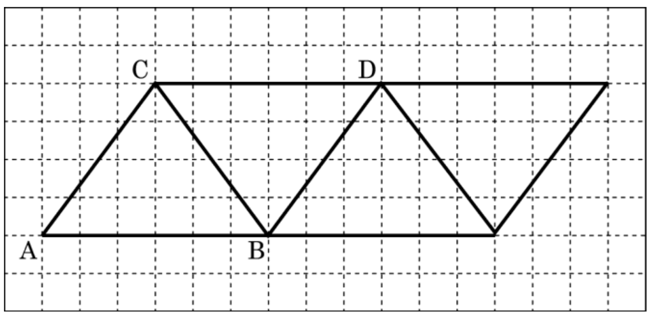


図2

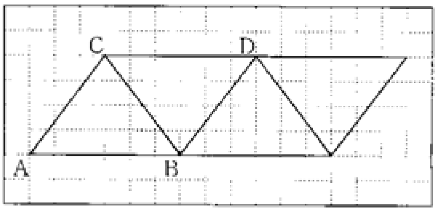


⑴ 図1における線分 CE と線分 DE を，図2にそれぞれ実線でかきなさい。

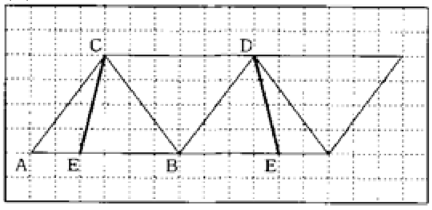
⑵ 図1の立体の表面に，点 E から点 F まで，辺 BC に交わるようにして糸をゆるめないでかける。点 E から点 F までの糸の長さが最も短くなるとき，その長さを求めなさい。

⑶ 図1の立体において，点 E と点 F とを結ぶ線分 EF の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm
(3)	cm

解答
(1)



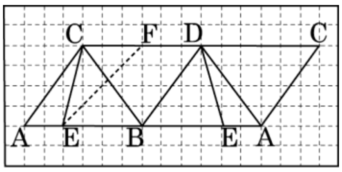
(2) $4\sqrt{2}$ cm

(3) $2\sqrt{2}$ cm

解説

⑴

図①



図①のように展開図の頂点の右上は C 右下は A である。
よって線分 CE と線分 DE は図の実線である。

⑵

点 E から点 F までの糸の長さが最も短くなるのは図①の点線部分である。
その長さは$\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ cm

⑶

⑴の図より CE＝DE＝$\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$
図1の△EDC は二等辺三角形で F は DC の中点だから EF⊥DC である。
よって EF＝$\sqrt{EC^2-CF^2}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-3^2}=2\sqrt{2}$ cm

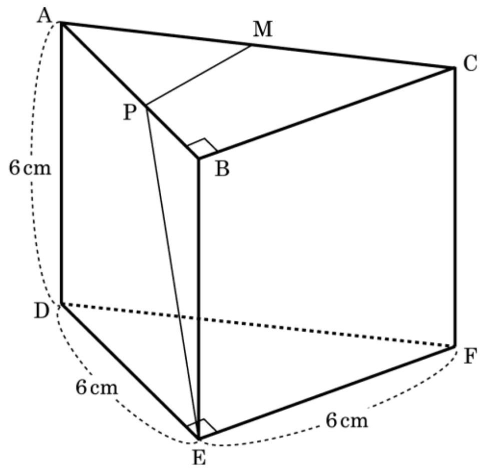
【問 5】

図1のような，底面が DE＝EF＝6 cm の直角二等辺三角形で，高さが 6 cm の三角柱がある。辺 AC の中点を M とし，辺 AB 上に，MP＋PE がもっとも短くなるように点 P をとる。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（福島県 2003 年度）

図1



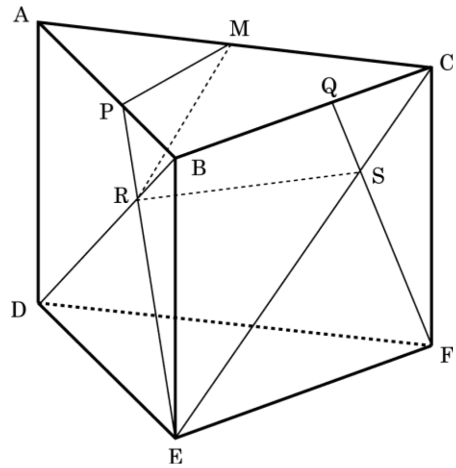
(1) MP＋PE の長さを求めなさい。

(2) 図2のように，この三角柱の辺 BC 上に AP＝BQ となる点 Q をとる。PE と BD の交点を R，QF と CE の交点を S とするとき，次の線分の長さを求めなさい。

① 線分 RS

② 線分 MR

図2



解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>①</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>②</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答

(1)　$3\sqrt{10}$ cm

(2)

①　$\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ cm

②　$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ cm

解説

(1)

MP＋PE を最短にすると点 P は図のようになる。

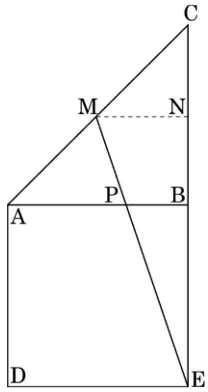
また BC の中点を N とすると中点連結定理より

MN ∥AB となり∠BNM は 90°

△ENM は直角三角形となり

$ME^2=MN^2+EN^2=3^2+9^2=90$

$ME=3\sqrt{10}$



(2)

①

△EMN で PB : MN＝EB : EN より

PB : 3＝6 : 9　PB＝2

よって△PBC で $PC=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

△EPC において

ER : RP＝6 : 2＝ES : SC より

RS ∥PC

$RS=\dfrac{3}{4}PC=\dfrac{3}{4}\times 2\sqrt{10}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

②

AB の中点を L とすると中点連結定理より

LM＝3

LB＝3

$BR=6\sqrt{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

∠LBR＝45° より

∠LRB＝90°，$LR=BR=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

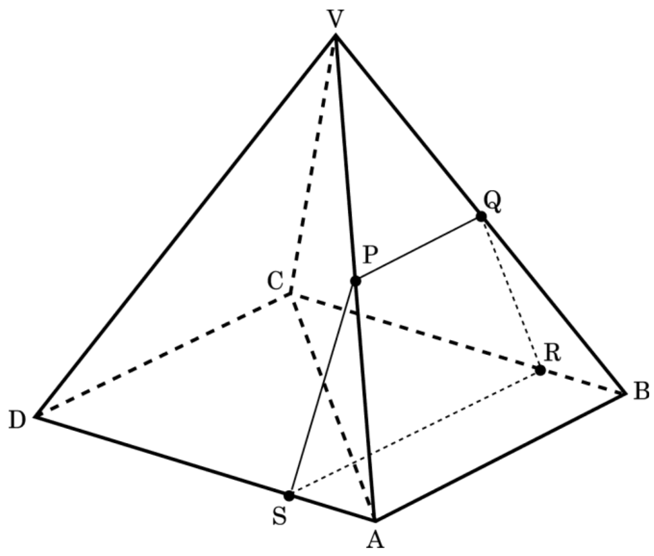
よって三平方の定理より $MR=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+3^2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

【問 6】

図のような四角すい VABCD がある。その底面 ABCD は1辺の長さが 4 cm の正方形であり，4つの側面はすべて正三角形である。2辺 VA, VB の中点をそれぞれ P, Q とし，点 P から辺 AD に垂線をひき，辺 AD との交点を S とする。また，点 Q から辺 BC に垂線をひき，辺 BC との交点を R とする。

このとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

（茨城県 2003 年度）



⑴ ∠VAC の大きさを求めなさい。

⑵ 6点 P, Q, R, S, A, B を頂点とする立体の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	度
(2)	cm^3

解答

(1)　45 度

(2)　$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ cm^3

解説

⑴

VC：VA：AC＝4：4：4$\sqrt{2}$ ＝1：1：$\sqrt{2}$ より

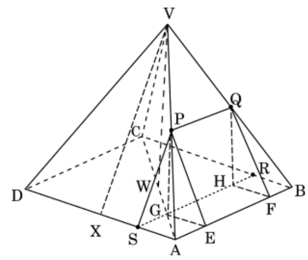
△VAC は直角二等辺三角形なので∠VAC＝45°

⑵

右図のように2点 P，Q から AB，SR にそれぞれ垂線 PE，QF，PG，QH をひき

面 PEG と面 QFH で切って3つの立体に分けて考える。

もとの四角すいの高さを VW とすると



VW＝AW＝$\dfrac{1}{2}$ AC＝2$\sqrt{2}$ cm

PG＝$\dfrac{1}{2}$ VW＝$\sqrt{2}$ cm

また V から AD に垂線 VX をひくと

AS＝$\dfrac{1}{2}$ AX＝$\dfrac{1}{2}$ ×2＝1 cm

同様に AE＝1 cm

よって四角すい P－AEGS の体積は $\dfrac{1}{3}$ ×1×1×$\sqrt{2}$ ＝$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ cm^3

中点連結定理より PQ＝$\dfrac{1}{2}$ AB＝2 cm だから

三角柱 PEG－QFH の体積は$\dfrac{1}{2}$ ×1×$\sqrt{2}$ ×2＝$\sqrt{2}$ cm^3

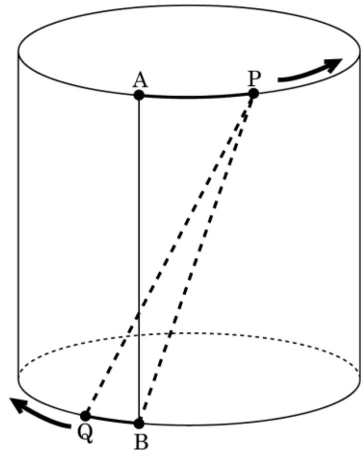
したがって求める立体の体積は$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ×2＋$\sqrt{2}$ ＝$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ cm^3

【問 7】

図のように，底面の半径が 5 cm，母線 AB の長さが 10 cm の円柱がある。点 P は点 A を出発し，円周上を一定の速さで動き，1周するのに 24 秒かかる。点 Q は点 B を出発し，円周上を一定の速さで点 P と逆回りに動き，1周するのに 72 秒かかる。2点 P，Q は，それぞれ2点 A，B を同時に出発する。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（茨城県 2003 年度）



(1) 出発してから4秒後の線分 PB の長さを求めなさい。

(2) 点 P が点 A を出発してから1周する間に，線分 PQ の長さが最大となるのは，出発してから何秒後か求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	秒後

解答

(1) $5\sqrt{5}$ cm

(2) 9 秒後

解説

(1)

点 P が動く円の中心を O とすると∠AOP＝$360^\circ \times \frac{4}{24} = 60^\circ$ だから

△AOP は正三角形となり AP＝OA＝5 cm

△APB に三平方の定理を用いて PB＝$\sqrt{5^2+10^2} = 5\sqrt{5}$ cm

(2)

Q を通る母線を Q′Q とすると PQ′ が円の直径となるときに PQ の長さは最大になる。

よって x 秒後に PQ′ が円の直径になるとすると

∠AOP＋∠AOQ′＝180° より

$360 \times \frac{x}{24} + 360 \times \frac{x}{72} = 180$

これを解くと

x＝9 秒後

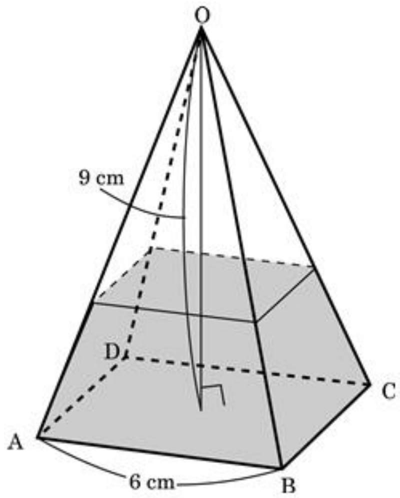
【問 8】

図1のような，1辺 6 cm の正方形 ABCD を底面とし，高さが 9 cm の正四角錐 OABCD の容器がある。この容器に 70 cm^3 の水を入れて密閉し，水平な台の上に置いた。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（栃木県 2003 年度）

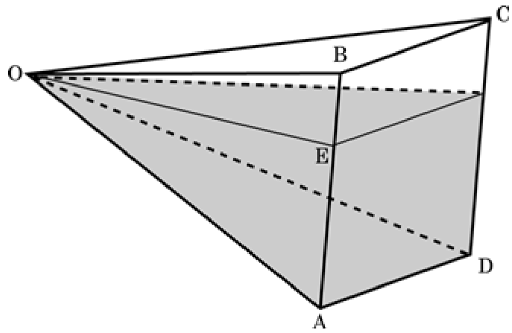
図1



(1) OA の長さを求めなさい。

(2) この容器を，辺 AD を台につけたままゆっくり傾け，図2のように水面が三角形になったところで止めた。辺 AB と水面との交点を E とするとき，AE の長さを求めなさい。

図2



解答欄

(1)	OA＝ cm
(2)	AE＝ cm

解答

(1)　OA＝$3\sqrt{11}$ cm

(2)　AE＝$\dfrac{35}{9}$ cm

解説

⑴

ACとBDの交点をPとする。

△ABCにおいて

三平方の定理より$AC^2＝AB^2＋BC^2＝36＋36＝72$

$AC＝\sqrt{72}＝6\sqrt{2}$

$AP＝\dfrac{1}{2}AC＝3\sqrt{2}$

△OAPにおいて

三平方の定理より$OA^2＝OP^2＋PA^2＝81＋18＝99$

$OA＝\sqrt{99}＝3\sqrt{11}$

⑵

水の入っている四角柱の体積は

$AE\times6\times9\times\dfrac{1}{3}＝18AE$

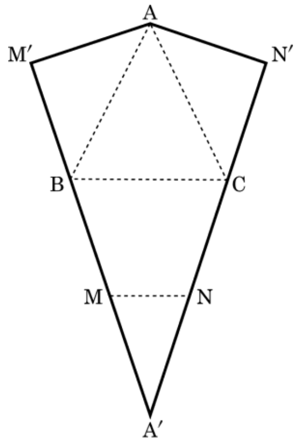
水の量は70なので

$18AE＝70$

$AE＝\dfrac{35}{9}$

【問 9】

図は，ある立体の展開図である。この図において，AB＝AC＝2$\sqrt{5}$ cm，BC＝4 cm，BA′＝CA′＝2$\sqrt{10}$ cm であり，点 M，N はそれぞれ辺 BA′，CA′ の中点である。

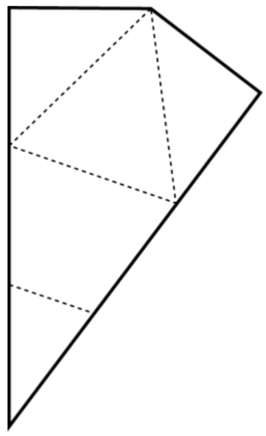


次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（群馬県　2003 年度）

(1) 四角形 BMNC の面積を求めなさい。

(2) この展開図を点線にそって折り曲げ，組み立てたときにできる立体について，



① MN とねじれの位置にある辺を，すべて書きなさい。

② MN の中点から三角形 ABC に垂線を下ろしたときの垂線の長さを求めなさい。

③ この立体の体積を求めなさい。

解答欄

(1)		cm^2
(2)	①	
	②	cm
	③	cm^3

解答

(1)　$9cm^2$

(2)

①　AB，AC

②　$\sqrt{5}$ cm

③　$4\sqrt{5}$ cm^3

解説

(1)

中点連結定理より

$MN=\frac{1}{2}BC=2$，BC の中点を D とすると

$A'D \perp BC$ となるから三平方の定理より

$A'D=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$

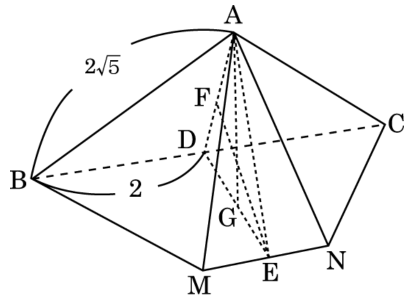
よって台形 BMNC の高さは 3 だから

面積は $\frac{1}{2}\times(4+2)\times3=9$ cm^2

(2)

①

右図のような四角すいができるから AB と AC。



②

MN の中点を E とする。

$AD \perp BC$ より

△ABD に三平方の定理を用いて

$AD=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

E から△ABC に垂線 EF をひくと $EA=ED=3$ より

F は AD の中点になるから $DF=2$

△EDF に三平方の定理を用いて

$EF=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ cm

③

A から DE に垂線 AG をひくと

$\triangle EAD=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ より

$\frac{1}{2}\times3\times AG=2\sqrt{5}$

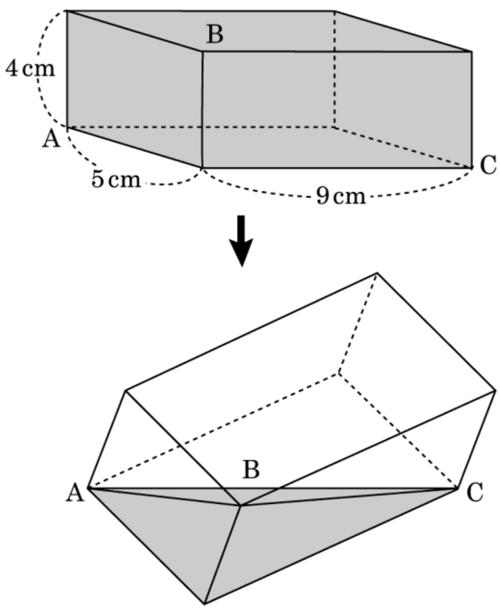
$AG=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

よって $\frac{1}{3}\times9\times\frac{4\sqrt{5}}{3}=4\sqrt{5}$ cm^3

【問 10】

底面が，縦 5 cm，横 9 cm の長方形で，深さが 4 cm の直方体の容器に水が満たしてあります。図のように，この容器を傾けて，水面が頂点 A，B，C を通る平面になるように，水をこぼしました。このとき，容器に残った水の体積を求めなさい。ただし，容器の厚さは考えないものとします。

（埼玉県 2003 年度）



解答欄

cm³

解答
30 cm³
解説
容器に残った水の水面に対する頂点を D とすると
その体積は三角錐 ABCD の体積に等しいから
三角錐 ABCD$=\frac{1}{3}\times\triangle$ABD$\times$DC$=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times4\times5)\times9=30$ cm^3

【問 11】

図1に示した立体 ABCD－EFGH は，1辺の長さが 6 cm の立方体である。点 I，点 J，点 K，点 L は，それぞれ辺 EF，辺 FG，辺 GH，辺 HE 上にある点で，FI＝GJ＝HK＝EL である。底面 ABCD の2つの対角線の交点を M とし，底面 EFGH の2つの対角線の交点を N とする。点 M と点 N を結び，線分 MN 上を動く点を P とする。点 I と点 J，点 J と点 K，点 K と点 L，点 L と点 I，点 P と点 I，点 P と点 J，点 P と点 K，点 P と点 L をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

（東京都 2003 年度）

図1

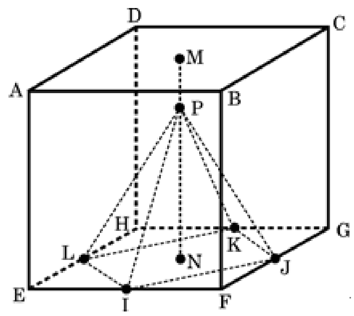
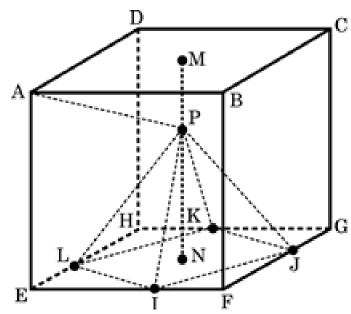


図2



問1 FI＝3 cm，PL＝6 cm のとき，∠LPJ の大きさは何度か。

問2 図2は，図1において，点 P と頂点 A を結んだ場合を表している。FI＝2 cm，∠API＝90° とする。四角すい P－IJKL の高さを求めるために，線分 PN の長さを x cm とし，線分の長さの関係を二次方程式で表したとき，次の $\boxed{}$ に当てはまる数を書け。

$$x^2-6x+\boxed{}=0$$

解答欄

問1	度
問2	

解答
問1　60度
問2　6
解説
問1
FI＝3 cmのときJ，Lはそれぞれ辺FG，EHの中点となりJ，N，Lは一直線上にある。
△PJNと△PLNにおいて
PN共通，JN＝LN，∠PNJ＝∠PNL＝90°だから
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△PJN≡△PLN
よってPJ＝PL
したがってPJ＝PL＝JLとなるから
△PJLは正三角形で∠LPJ＝60°
問2
Nから辺EFに垂線NQをひくとNQ＝3，QI＝3－2＝1
△NQIで
三平方の定理を用いて$NI^2=NQ^2+QI^2=10$
△PNIで
三平方の定理を用いて$PI^2=PN^2+NI^2=x^2+10$…①
また$AM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}AB=3\sqrt{2}$，$MP=6-x$
△AMPで三平方の定理を用いて
$AP^2=AM^2+MP^2=(3\sqrt{2})^2+(6-x)^2=54-12x+x^2$…②
さらにEI＝6－2＝4だから
△AEIで
三平方の定理を用いて$AI^2=AE^2+EI^2=6^2+4^2=52$…③
したがって∠API＝90°だから
①～③より
$AI^2=AP^2+PI^2$
$52=(54-12x+x^2)+(x^2+10)$
$2x^2-12x+12=0$
よって$x^2-6x+6=0$

【問 12】

図1のように，AB＝6 cm，BC＝10 cm の△ABC がある。辺 AC の中点をDとし，A と D から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点をそれぞれ E，F とすると，△ABE の面積は，△ABC の面積の $\frac{1}{5}$ であった。次に，△ABC をBとCが重なるように，線分 AE と線分 DF をそれぞれ折り目として折り，図2のように，△BDA と△BFE の各面を平面でおおって，四角すい B－AEFD をつくる。このとき，次の⑴～⑶の問いに答えなさい。

（新潟県 2003 年度）

図1

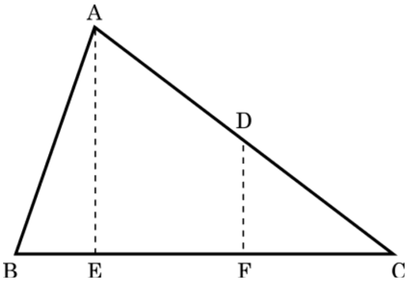
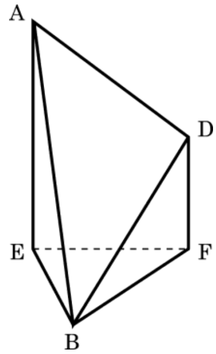


図2



⑴ 線分 BE と線分 AE の長さをそれぞれ求めなさい。

⑵ 四角形 AEFD の面積を求めなさい。

⑶ 四角すい B－AEFD の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	BE＝	cm
	AE＝	cm
(2)		cm^2
(3)		cm^3

解答

(1)　BE＝2 cm，AE＝$4\sqrt{2}$ cm

(2)　$12\sqrt{2}$ cm^2

(3)　$2\sqrt{30}$ cm^3

解説

⑴

BE：BC＝1：5　BC＝10 cm だから BE：10＝1：5 より BE＝2cm

△ABE において

三平方の定理により $AE^2=6^2-2^2=36-4=32$

AE＞0 だから

AE＝$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ cm

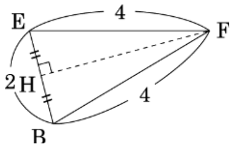
⑵

AE∥DF で点 D は辺 AC の中点だから中点連結定理により

EF＝FC＝(10－2)÷2＝4

また DF＝$\frac{1}{2}$AE＝$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

よって四角形 AEFD の面積は$\frac{(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 4}{2}=12\sqrt{2}$ cm^2



⑶

△EBF は FE＝FB の二等辺三角形である。

頂点 F から底辺 EB に垂線 FH を引くと EH＝HB＝1 cm

ここで三平方の定理により

$FH^2=FE^2-EH^2=4^2-1^2=16-1=15$

FH＞0 だから

FH＝$\sqrt{15}$

いま辺 EF を底辺，高さを x cm とすると

$\frac{1}{2}\times 4\times x=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{15}$ より

$x=\frac{\sqrt{15}}{2}$

この高さは四角すい B―AEFD で四角形 AEFD を底面とみたときの高さに等しい。

よって求める体積は$\frac{1}{3}\times 12\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}=2\sqrt{30}$ cm^3

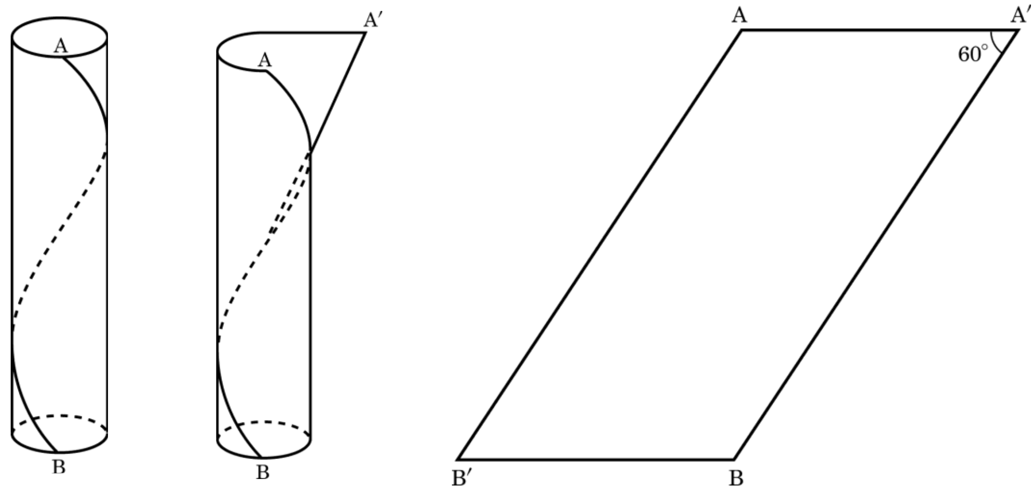
【問 13】

Sさんは，下の図1のように，底面の直径が 4cm の円柱の側面を一回りして，母線の両端の点AとBを結ぶ線があることに気が付いた。図2のように，この線に沿って側面を切り開いていったところ，図3のような，∠A′ =60° の平行四辺形 AB′ BA′ になった。

このとき，次の問いに答えなさい。

（山梨県 2003 年度）

図1　　図2　　図3

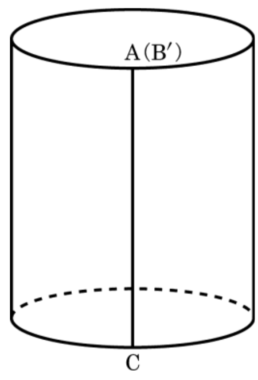


1 図1の円柱の高さを求めなさい。

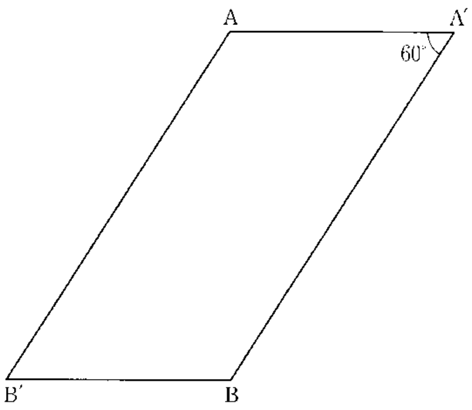
2 平行四辺形 AB′ BA′ の辺 AA′ とB′ B が重なるように丸めたところ，右の図4のような別の円柱ができた。図4の中の母線 AC を，図3に定規とコンパスを用いて作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さずに残しておき，C も書き入れること。

3 図1の円柱と図4の円柱の底面積の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

図4



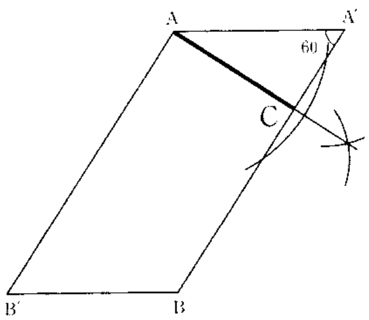
解答欄

1	cm
2	 (作図に用いた線は消さないこと。)
3	

解答

1　$4\sqrt{3}\pi$　cm

2



(作図に用いた線は消さないこと。)

3　1:4

解説

1

円柱の高さは平行四辺形 AB′BA′ の高さに等しい。

また AA′ の長さは円柱の底面の周の長さと等しいので AA′ $=4\pi$

△ABA′ は∠A′ $=60°$ の直角三角形で AA′ :AB:BA′ $=1:\sqrt{3}:2$　である。

よって円柱の高さは $4\sqrt{3}\pi$　cm

2

AC⊥BA′ なので点 A を通り BA′ に垂直に交わる線を作図する。

BA′ との交点が C である。

3

図1の円柱の底面の円の半径は 2cm

図4の円柱の底面の円の半径を r とすると $2\pi r=$AB′ $=4\pi\times2=8\pi$

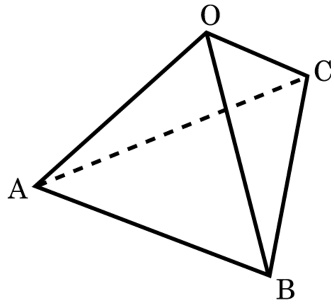
よって $r=4$

底面積の比は $2^2\times\pi:4^2\times\pi=1:4$

【問 14】

図の四面体 OABC は，OA＝OB＝OC＝1，AB＝BC＝CA＝$\sqrt{2}$ である。

（長野県 2003 年度）



① ∠AOB の大きさを求めなさい。

② 四面体 OABC の体積を求めなさい。

解答欄

①	°
②	

解答

① 90°

② $\frac{1}{6}$

解説

①

△OAB は，3辺の長さが OA＝OB＝1，AB＝$\sqrt{2}$ だから
∠AOB＝90° の直角二等辺三角形である。

②

∠BOC＝∠AOC＝90° だから辺 CO は△OAB に垂直である。

△OAB を底面とみると$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{6}$

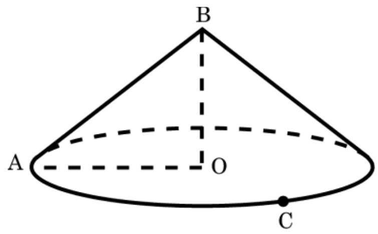
【問 15】

図１の立体は，AB＝10cm，AO＝8cm，∠AOB＝90°の直角三角形 AOB を，辺 OB を軸として一回転させてできた立体である。また，点 C は円 O の円周上の点であり，∠AOC＝120°である。

このとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。ただし，円周率はπとする。

（静岡県 2003 年度）

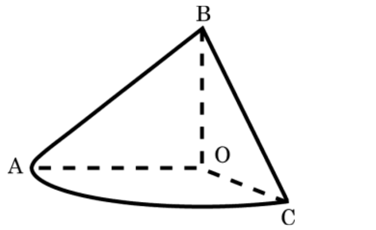
図1



⑴ 円 O を底面とするときの，図1の立体の高さを求めなさい。また，この立体の体積を求めなさい。

⑵ 図2の立体は，図1の立体を3等分してできた，中心角 120°のおうぎ形 AOC を底面とする立体であり，側面の2つの三角形 AOB と COB は合同である。また，図3は，図2の立体の展開図の一部を示したものである。

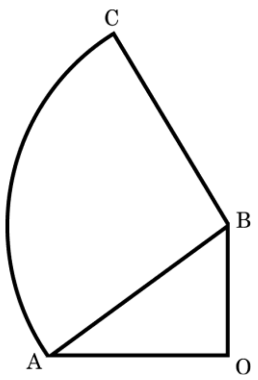
図2



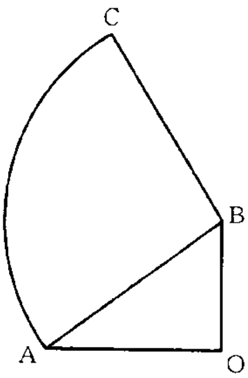
ア 図8に線をかき加えて，展開図を完成しなさい。ただし，作図には定規とコンパスを使用し，作図に用いた線は残しておくこと。

イ 図3において，おうぎ形 ABC の中心角∠ABC の大きさを求めなさい。求める過程も書きなさい。

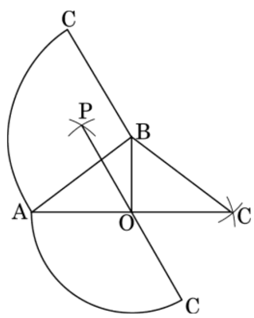
図3



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td colspan="2">高さ　　　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">体積　　　　　　　　cm^3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>ア</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>求める過程

答　　　　　　度</td></tr>
</table>

解答
(1)
高さ 6 cm
体積 128π cm^3
(2)
ア 解説欄参照
イ 解説欄参照
答 96 度
解説
⑴
AB＝10, AO＝8
三平方の定理より $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$
よって立体の高さは 6cm
また立体の体積は $\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times6=128\pi$ cm^3
⑵
ア


点 A, O を中心として OA を半径とする円をそれぞれかきその交点を P とする。
点 P と O を結ぶ直線と点 O を中心とし半径 OA の円との交点を C とすればよい。
(∠POA＝60° より∠AOC＝120° となる。)
また点 B を中心とし BA と等しい半径の円をかき
点 O を中心とし OA と等しい半径の円をかきその交点を C とする。
イ
∠ABC＝x とすると
おうぎ形 BCA とおうぎ形 OAC の弧の長さは等しいから
$$2\pi\times10\times\frac{x}{360}=2\pi\times8\times\frac{120}{360}$$
これを解いて $x=96$

【問 16】

図1のように，2つの円すい A，B がある。円すい A の底面の半径は 2 cm で，円すい B の底面の半径は 4 cm である。

それぞれの円すいの側面の展開図を，同じ平面上で重ならないようにして合わせると，図2のように半径 r cm の円ができる。

このとき，次の各問いに答えなさい。なお，答えに√ がふくまれるときは，√ を用いて最も簡単な形で書きなさい。

（三重県 2003 年度）

図1

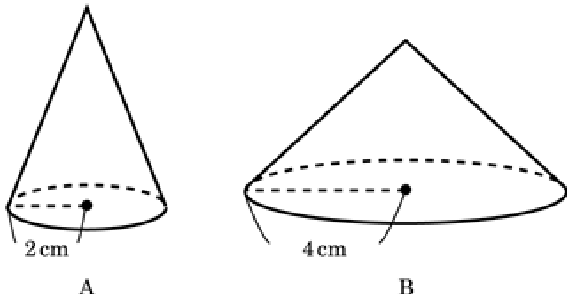
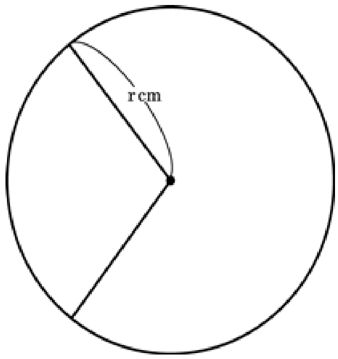


図2



① 円の半径 r の値を求めなさい。

② 円すい A の高さは，円すい B の高さの何倍になるか，求めなさい。

解答欄

①	r＝　　　　　cm
②	倍

解答

① r＝6 cm

② $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 倍

解説

①

円すいの側面の展開図をあわせてできた円の周の長さは

A，B の2つの円すいの底面の円周の和に等しいから

$2\pi \times r = 2\pi \times 2 + 2\pi \times 4$ より

$2\pi r = 12\pi$

$r = 6$ cm

②

円すい A の高さは $\sqrt{6^2-2^2} = 4\sqrt{2}$

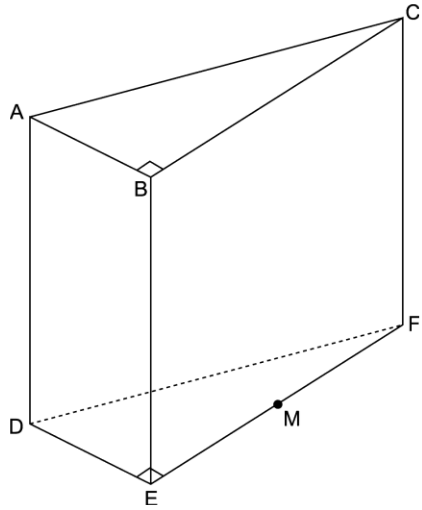
円すい B の高さは $\sqrt{6^2-4^2} = 2\sqrt{5}$

よって $\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ 倍である。

【問 17】

図のような三角柱 ABC－DEF があり，∠ABC＝90°，AD＝6 cm，DE＝3 cm，EF＝6 cm である。いま，辺 EF の中点を M とし，点 M と点 A，点 M と点 C，点 M と点 D をそれぞれ結ぶ。このときできる四角すい M－ADFC を考えるとき，次の問い⑴・⑵に答えよ。

（京都府 2003 年度）



⑴ MA の長さを求めよ。

⑵ 四角すい M－ADFC の体積を求めよ。

解答欄

(1)	MA＝　　　　　cm
(2)	cm^3

解答

(1) MA＝$3\sqrt{6}$ cm

(2) 18 cm^3

解説

⑴

三平方の定理より

$DM^2＝DE^2＋EM^2＝3^2＋3^2＝18$

よって DM＝$\sqrt{18}＝3\sqrt{2}$ cm

$MA^2＝AD^2＋DM^2＝36＋18＝54$

よって MA＝$\sqrt{54}＝3\sqrt{6}$ cm

⑵

BC の中点を N とすると △ACN＝$\frac{1}{2}$×△ABC＝$\frac{1}{2}$×9＝4.5

よって三角柱 ANC－DMF の体積は 4.5×6＝27 cm^3

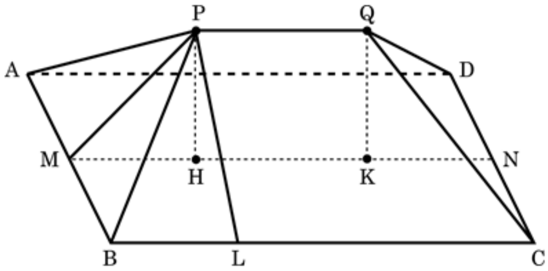
また三角すい M－ANC の体積は 4.5×6×$\frac{1}{3}$＝9 cm^3

よって求める体積は 27－9＝18 cm^3

【問 18】

図の立体 PQ－ABCD は，写真に示した「寄棟屋根」と呼ばれる屋根の形をモデルにしてつくったものである。図 I において，四角形 ABCD は AB＝6 m，BC＝10 m の長方形である。M, N は，それぞれ辺 AB，CD の中点である。H, K は M と N とを結ぶ線分上にあって MH＝NK となる点であり，4点 M，H，K，N はこの順に並んでいる。P，Q は平面 ABCD について同じ側にある点であり，PH，QK はともに平面 ABCD に垂直であって PH＝QK である。このとき，PA＝PB＝QC＝QD となる。L は P から BC にひいた垂線と BC との交点である。P と M とを結ぶ。PH＝3 m として，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になるときは，根号の中の数をできるだけ小さい自然数で表すこと。

図



（大阪府 2003 年度 前期）

(1) PQ＝4 m のとき，

① 線分 BL の長さを求めなさい。

② 線分 PM の長さを求めなさい。

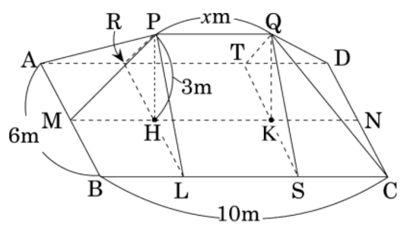
③ 立体 PQ－ABCD の底面 ABCD を除いた四つの面の面積の和を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

(2) PQ＝x m のときの立体 PQ－ABCD の体積を y m^3 とする。$0<x<10$ として，y を x の式で表しなさい。

解答欄

(1)	①	m
	②	m
	③	求め方 m^2
(2)	$y=$	

解答
⑴
① 3
② $3\sqrt{2}$
③
求め方
AB＝CD＝6m, PM＝QN＝$3\sqrt{2}$ mだから
△PAB＋△QDC＝$\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{2}\times 2=18\sqrt{2}$ m^2
P からAD にひいた垂線とAD との交点をR とする。
PQ＝4m, BC＝AD＝10m, PL＝PR＝$3\sqrt{2}$ m
だから台形PBCQ＋台形PADQ
$=\frac{1}{2}\times(4+10)\times 3\sqrt{2}\times 2=42\sqrt{2}$ m^2
したがって求める面積は
$18\sqrt{2}+42\sqrt{2}=60\sqrt{2}$ m^2
答 $60\sqrt{2}$
(2) $y=3x+60$
解説
⑴
①
$(10-4)\div 2=6\div 2=3$m
②
MH＝BL＝3m, PH＝3m, ∠PHM＝90° だから
△PMH は直角二等辺三角形である。
三平方の定理によりPM^2＝$3^2+3^2=9+9=18$
PM＞0 より
PM＝$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ m
③
AB＝CD＝6m, PM＝QN＝$3\sqrt{2}$ m だから
△PAB＋△QDC＝$\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{2}\times 2=18\sqrt{2}$ m^2
P から AD にひいた垂線と AD との交点を R とする。
PQ＝4m, BC＝AD＝10m, PL＝PR＝$3\sqrt{2}$ m だから
台形 PBCQ＋台形 PADQ＝$\frac{(4+10)\times 3\sqrt{2}}{2}\times 2=42\sqrt{2}$ m^2
したがって求める面積は $18\sqrt{2}+42\sqrt{2}=60\sqrt{2}$ m^2
⑵
点 S, T を Q からそれぞれ BC, AD にひいた垂線と
BC, AD との交点とする。
立体 PQ−ABCD の体積は
四角すい P−ABLR, Q−TSCD と三角柱 PRL−QTS の体積の和として
求めればよい。



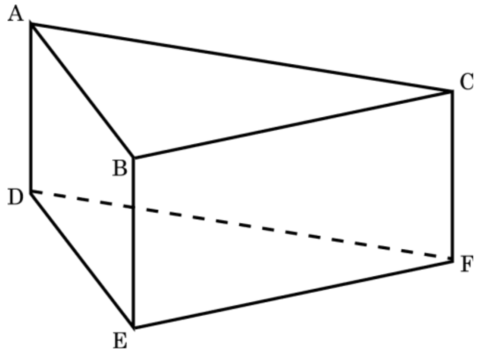
$y=\frac{1}{3}\times 6\times\frac{10-x}{2}\times 3\times 2+\frac{1}{2}\times 6\times 3\times x=60-6x+9x=3x+60$

【問 19】

図において，立体 ABC－DEF は三角柱である。四角形 ADEB, BEFC, ADFC は長方形であり，AD＝BE＝CF＝2 cm である。△ABC, △DEF は直角三角形であり，∠ABC＝∠DEF＝90° である。

BC＝2AB として，次の問いに答えなさい。

（大阪府 2003 年度 後期）



(1) 次の文中の $\boxed{①}$ ～ $\boxed{③}$ に入れるのに適している辺を下のア～オから一つずつ選び，記号を書きなさい。

辺 AC と平行な辺は $\boxed{①}$, 辺 AC と垂直な辺は $\boxed{②}$, 辺 AC とねじれの位置にある辺は $\boxed{③}$ である。

ア 辺 AB	イ 辺 AD	ウ 辺 BC	エ 辺 DE	オ 辺 DF

(2) 長方形 BEFC の面積は，長方形 ADEB の面積の何倍ですか。

(3) AB＝x cm とするとき，

① 三角柱 ABC－DEF の体積は何 cm^3 ですか。x を用いて表しなさい。

② 三角柱 ABC－DEF の体積が 200 cm^3 となるときの x の値を求めなさい。

(4) AB＝3 cm のとき，A と F とを結んでできる線分 AF の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

解答欄

(1)	①	
	②	
	③	
(2)	倍	
(3)	①	cm^3
	②	
(4)	求め方 cm	

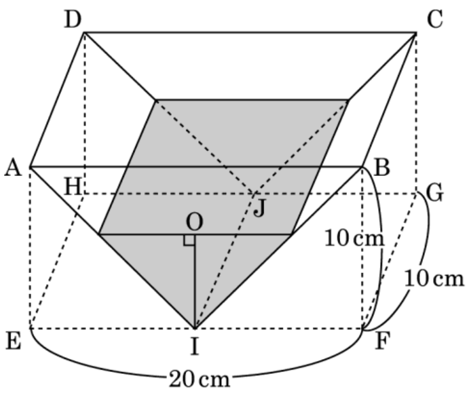
解答
(1)
① オ
② イ
③ エ
(2) 2倍
(3)
① $2x^2$ cm^3
② 10
(4)
求め方
BC＝2AB, AB＝3 cmだからBC＝6 cm
△ABC は AB＝3 cm, BC＝6 cm, ∠ABC＝90° の直角三角形だから
AC＝a cm とすると
$a^2=3^2+6^2=45$
四角形ADFC は長方形だから
∠ACF＝90°
A とF とを結んでできる△ACF は
AC＝a cm, CF＝2 cm, ∠ACF＝90° の直角三角形だから
AF＝b cm とすると
$b^2=a^2+2^2=49$
$b>0$ だから
$b=7$
解説
(1)
辺 AC と垂直な辺は辺 AD, 辺 CF である。
また辺 AC とねじれの位置にある辺は辺 BE, 辺 DE, 辺 EF である。
(2)
縦の長さは等しいので面積の比は横の長さの比に等しい。
長方形 BEFC:長方形 ADEB＝BC:AB＝2:1
(3)
①
BC＝$2x$ cm となるから体積は
$\frac{1}{2}\times x\times 2x\times 2=2x^2$ cm^2
②
$2x^2=200$
両辺を 2 でわると
$x^2=100$
$x>0$ だから
$x=10$
(4)
BC＝2AB, AB＝3 cm だから BC＝6 cm
△ABC は AB＝3 cm, BC＝6 cm, ∠ABC＝90° の直角三角形だから
AC＝a cm とすると
$a^2=3^2+6^2=45$
四角形 ADFC は長方形だから∠ACF＝90°
A と F を結んでできる△ACF は
AC＝a cm, CF＝2 cm, ∠ACF＝90° の直角三角形だから
AF＝b cm とすると
$b^2=a^2+2^2=49$
$b>0$ だから
$b=7$

【問 20】

縦 10 cm，横 20 cm，高さ 10 cm の直方体 ABCD－EFGH があり，EF，GH の中点をそれぞれ I，J とする。この直方体を4点 A，I，J，D を通る平面と4点 B，I，J，C を通る平面で切って図のような容器を作り，水を入れたときに水面が面 ABCD と平行になるように容器を固定しておく。

点 I から水面に垂直にひいた線分 IO の長さを水の深さとし，次の問いに答えなさい。ただし，容器の厚さは考えないものとする。

（兵庫県 2003 年度）



⑴ この容器の容積を求めなさい。

⑵ 水の深さが x cm になったときの水の体積を y cm³ として，y を x の式で表しなさい。ただし，$0 \leqq x \leqq 10$ である。

⑶ 水の体積が 500 cm³ になったときの水の深さを求めなさい。ただし，答えが無理数になるときは，根号を含んだ数で答えなさい。

解答欄

(1)	cm³
(2)	$y=$
(3)	cm

解答

(1)　1000 cm^3

(2)　$y=10x^2$

(3)　$5\sqrt{2}$ cm

解説

⑴

容器は三角柱の形である。

$\frac{1}{2}\times20\times10\times10=1000$ cm^3

⑵

三角柱の底面は直角二等辺三角形である。

$y=\frac{1}{2}\times2x\times x\times10=10x^2$　cm^3

⑶

⑵で求めた式に $y=500$ を代入すると

$500=10x^2$

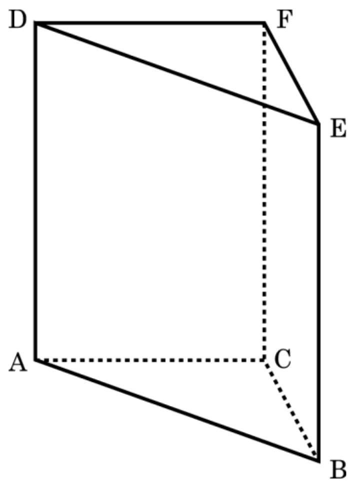
$x^2=50$

$x>0$ の範囲で解を求めると

$x=5\sqrt{2}$

【問 21】

図は，底面 ABC が AC＝BC＝5 cm，AB＝8 cm の二等辺三角形で，側面がすべて長方形の三角柱 ABCDEF を表しており，AD＝9 cm である。



次の⑴～⑶の $\boxed{}$ の中にあてはまる最も簡単な数，または記号を記入せよ。ただし，根号を使う場合は $\sqrt{}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県 2003 年度）

⑴ 図に示す立体で，辺 DF とねじれの位置にある辺は，

辺 AB, $\boxed{辺}$, $\boxed{辺}$ の，全部で3本である。

⑵ 図に示す立体の体積は $\boxed{\text{cm}^3}$ である。

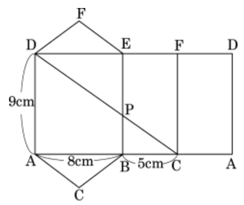
⑶ 図に示す立体において辺 BE 上に点 P を，DP＋PC の長さが最も短くなるようにとる。このとき，DP＋PC の

長さは $\boxed{\text{cm}}$ である。

解答欄

⑴	
⑵	
⑶	

解答
⑴ BC または CB, BE または EB
⑵ 108
⑶ $5\sqrt{10}$
解説
⑴
空間における2直線の位置関係には
交わる
平行
ねじれ
の位置の3つの場合がある。
辺 DF と交わっている辺は辺 DA, 辺 DE, 辺 FC, 辺 FE である。
また辺 DF と平行な辺は辺 AC のみである。
残る辺 AB, 辺 BC, 辺 BE が, 辺 DF とねじれの位置にある辺になる。
⑵
△ABC において
C から AB におろした垂線と AB の交点を T とする。
△TBC は直角三角形であるから
$BC^2=TB^2+TC^2$ より
$TC=\sqrt{BC^2-TB^2}$ となる。
△ABC は AC＝BC の二等辺三角形だから
頂点 C から底辺にひいた垂線は底辺 AB を2等分するので
AT＝BT＝4 cm となる。
したがって△ABC の高さである TC の長さは
$TC=\sqrt{5^2-4^2}=3$
よって三角柱の底面の面積は
$\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$ cm^2
三角柱の体積は底面積×高さで
高さは AD＝9 cm なので $9\times 12=108$ cm^3
⑶
図のように DP＋PC が最も短くなるのは
三角柱を展開図にしたときにできる長方形 DACF の対角線上に
点 P があるときである。
そのときの DP＋PC は直角三角形 DAC の斜辺である。
AD＝9, AC＝8＋5＝13
よって $DP+PC=\sqrt{13^2+9^2}=5\sqrt{10}$ cm



【問 22】

図1，図2のように，4つの点 O，A，B，C を頂点とする三角すい OABC があり，AB＝3 cm，OB＝BC＝2 cm，∠ABC＝∠OBA＝∠OBC＝90° である。

このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県 2003 年度）

図1

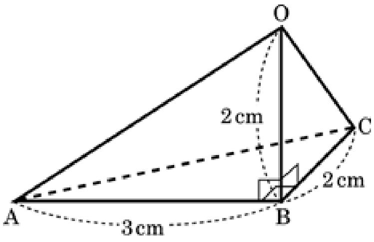
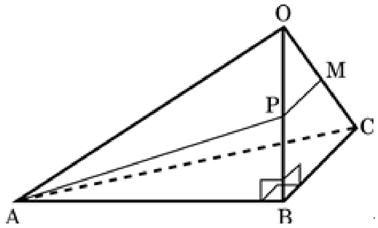


図2



問1．三角すい OABC の体積は何 cm^3 か。

問2．三角形 OAC はどんな形の三角形か。その名称を答えよ。

問3．三角形 OAC の面積は何 cm^2 か。

問4．図2において，辺 OC の中点を M とし，辺 OB 上を動く点を P とする。2つの線分 AP，PM の長さの和 AP＋PM が最小となるとき，線分 PM の長さは何 cm か。

解答欄

問1	cm^3
問2	三角形
問3	cm^2
問4	cm

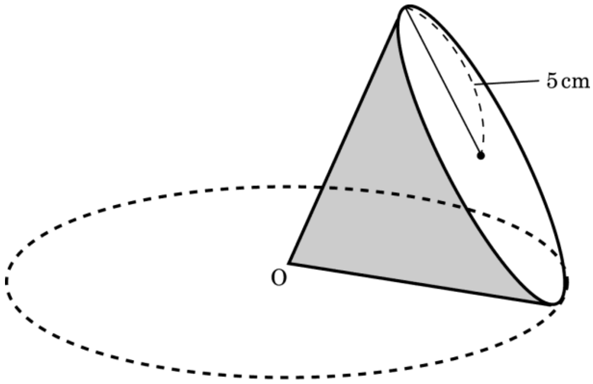
解答
問1　2
問2　二等辺三角形
問3　$\sqrt{22}$
問4　$\dfrac{\sqrt{17}}{4}$
解説
問1
△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\times2\times3=3$
三角すいの体積＝$\dfrac{1}{3}$×底面積×高さより
$\dfrac{1}{3}\times3\times2=2$ cm³
問2
AC＝$\sqrt{13}$，AO＝$\sqrt{13}$，OC＝$2\sqrt{2}$
よって二等辺三角形
問3
$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{13-2}=\sqrt{22}$ cm²
問4
AP＋PM が最小になるのは
三角すいを展開したときの△OAC において，APM が直線になる場合。
△OAC において M から AC に垂線をおろし AC との交点を Q とする。
△MAQ において AM＝$\sqrt{17}$
また BP と QM は平行なので
AP：PM＝3：1
よって $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ cm

【問 23】

図のように，底面の半径が 5 cm の円すいを，水平な平面上におき，頂点 O を中心として転がしたところ，最初の位置に戻るまでに，ちょうど2回転し，点線で示した円の上を1周した。

次の①，②の問いに答えなさい。

（大分県 2003 年度）



① この円すいの母線の長さを求めなさい。

② この円すいの体積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

解答欄

①	cm
②	cm^3

解答

① 10 cm

② $\dfrac{125\sqrt{3}}{3}$ cm^3

解説

①

母線の長さを x cm とすると

点線の円 O の周の長さは半径 5cm の円の周の長さの 2 倍だから

$2\pi x = 2\pi \times 5 \times 2$

よって $x = 10$

②

母線の長さは 10cm 底面の半径は 5cm だから

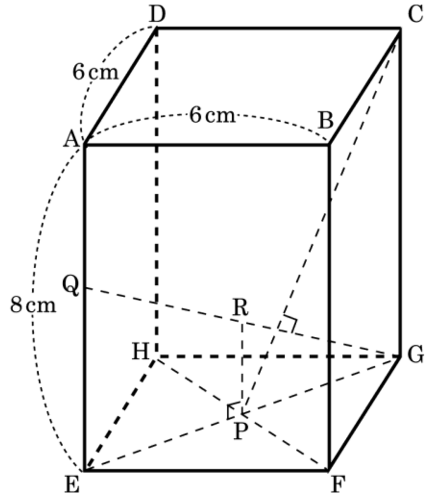
高さは $\sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ cm となり

体積は $\dfrac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 5\sqrt{3} = \dfrac{125\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3

【問 24】

図は，AB＝AD＝6 cm，AE＝8 cm の直方体 ABCD－EFGH であり，点 P は底面 EFGH の2つの対角線 EG，FH の交点である。点 Q は辺 AE 上にあって，線分 QG と線分 CP とは垂直である。また，点 R は線分 QG 上にあって，線分 RP と線分 EG とは垂直である。このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2003 年度）



⑴ 線分 PG の長さを求めなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

⑵ 正四角すい REFGH の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1)　$3\sqrt{2}$ cm

(2)　27 cm^3

解説

⑴

△EFG は直角二等辺三角形だから

$\mathrm{EF}:\mathrm{EG}=1:\sqrt{2}$

$\mathrm{EF}=6$ より

$\mathrm{EG}=6\sqrt{2}$

よって $\mathrm{PG}=\frac{1}{2}\mathrm{EG}=3\sqrt{2}$ cm

⑵

△CPG は直角三角形だから三平方の定理により

$\mathrm{CP}=\sqrt{\mathrm{CG}^2+\mathrm{PG}^2}=\sqrt{8^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{82}$

QG と CP の交点を I とする。

△CGI∽△CPG より

$\mathrm{CG}:\mathrm{IG}=\mathrm{CP}:\mathrm{GP}$

$8:\mathrm{IG}=\sqrt{82}:3\sqrt{2}$

$\mathrm{IG}=\frac{24}{\sqrt{41}}$

また△GPI∽△CPG より

$\mathrm{GP}:\mathrm{PI}=\mathrm{CP}:\mathrm{PG}$

$3\sqrt{2}:\mathrm{PI}=\sqrt{82}:3\sqrt{2}$

$\mathrm{PI}=\frac{18}{\sqrt{82}}$

△RPI∽△PCG より

$\mathrm{RP}:\mathrm{PI}=\mathrm{PC}:\mathrm{CG}$

$\mathrm{RP}:\frac{18}{\sqrt{82}}=\sqrt{82}:8$

$\mathrm{RP}=\frac{9}{4}$

よって求める四角すいの体積は

$\frac{1}{3}\times6\times6\times\frac{9}{4}=27$ cm^3

【問 25】

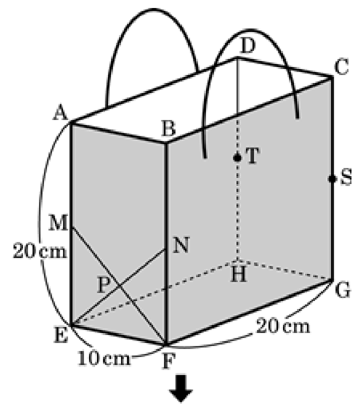
図Ⅰのような直方体の紙袋がある。点 M, N, S, T はそれぞれ，辺 AE, BF, CG, DH の中点であり，点 P は線分 EN, FM の交点である。AE＝20 cm, EF＝10 cm, FG＝20 cm として，次の⑴～⑷の問いに答えなさい。

ただし，紙の厚さは考えないものとする。

（宮崎県 2003 年度）

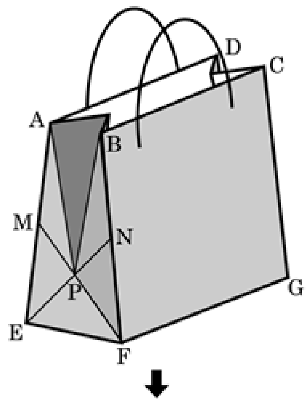
⑴ 図Ⅰにおいて，線分 EN の長さを求めなさい。

図Ⅰ



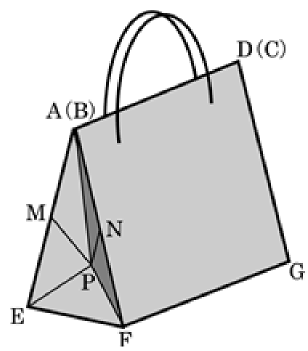
⑵ 図Ⅱのように，辺 AD と BC，線分 AP と BP が重なるように折って，図Ⅲのような立体をつくる。このとき，図Ⅰの長方形 AEFB から，図Ⅲの△AEF を底面とする三角錐 PAEF の側面ができる。この側面の面積を求めなさい。

図Ⅱ



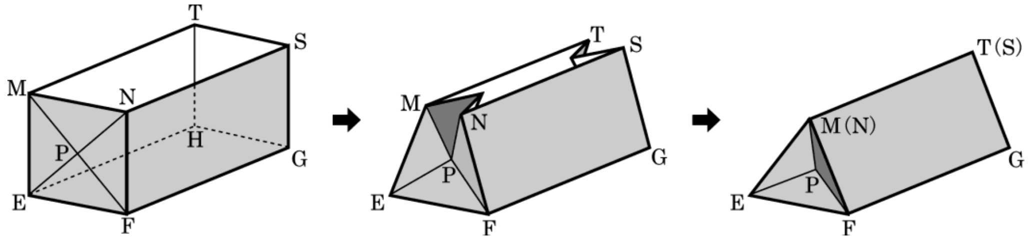
⑶ 図Ⅲにおいて，△AEF の面積を求めなさい。

図Ⅲ



⑷ 図Ⅳは，図Ⅰの紙袋の四角形 MNST より上の部分を切り取ったものである。これを図Ⅴのように辺 MT と NS，線分 MP と NP が重なるように折って，図Ⅵのような立体をつくる。このとき，点 P, M, E, F を頂点とする三角錐の体積を求めなさい。

図Ⅳ　　図Ⅴ　　図Ⅵ



解答欄

(1)	EN＝　　　　　　cm
(2)	cm^2
(3)	cm^2
(4)	cm^3

解答

(1) EN＝$10\sqrt{2}$ cm

(2) 125 cm^2

(3) $25\sqrt{15}$ cm^2

(4) $\frac{125\sqrt{2}}{3}$ cm^3

解説

⑴

N は BF の中点だから NF＝$\frac{1}{2}$BF＝10

△NEF は直角二等辺三角形だから

EN＝$\sqrt{2}$NF＝$10\sqrt{2}$ cm

⑵

求める面積は図 I における長方形 AEFB の面積から△ABP の面積をひいたものである。

P を通って AE に平行な直線をひき AB, EF との交点をそれぞれ Q, R とすると

PQ＝QR－PR＝20－5＝15

よって $10\times20-\frac{1}{2}\times10\times15=125$ cm^2

⑶

△AEF は二等辺三角形だから A から EF に垂線 AS をひくと

ES＝$\frac{1}{2}$EF＝5

△AES に

三平方の定理を用いて AS＝$\sqrt{AE^2-ES^2}=\sqrt{20^2-5^2}=5\sqrt{15}$

よって△AEF＝$\frac{1}{2}\times10\times5\sqrt{15}=25\sqrt{15}$ cm^2

図Ⅵにおいて

∠MPE＝∠MPF＝90°より

MP⊥平面 PEF となるから

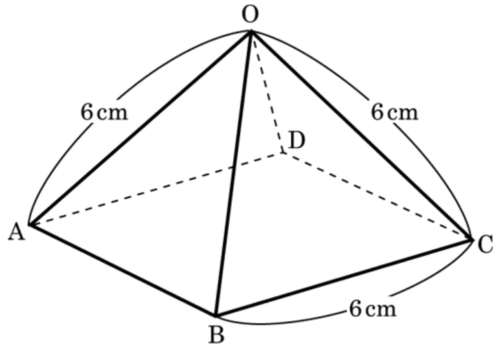
三角錐の体積は$\frac{1}{3}$×△PEF×MP＝$\frac{1}{3}\times(10\times10\div4)\times5\sqrt{2}=\frac{125\sqrt{2}}{3}$ cm^3

【問 26】

図は，底面が1辺 6 cm の正方形で，側面が1辺 6 cm の正三角形である四角すい OABCD を示したものである。

このとき，次の1～4の問いに答えなさい。

（鹿児島県 2003 年度）



1 辺 OA とねじれの位置にある辺をすべてあげよ。

2 四角すい OABCD の表面積は何 cm^2 か。

3 四角すい OABCD の体積は何 cm^3 か。

4 辺 OA の中点を M とする。このとき，2点 C, M を結んだ線分 CM の長さは何 cm か。

解答欄

1	
2	cm^2
3	cm^3
4	cm

解答
1　BC，CD
2　$36+36\sqrt{3}$ cm^2
3　$36\sqrt{2}$ cm^3
4　$3\sqrt{5}$ cm
解説
1
正四角すいには，8つの辺がある。
そのうちOA自身とO，Aを端の点とするOB，OC，OD，AB，ADの6つをのぞいた
BC，CDがOAとねじれの位置にある辺である。
2
正三角形OABの頂点Oから辺ABに垂線OHをひくと
$OH^2=OA^2-AH^2$
$OH>0$ だから
$OH=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ cm
表面積は側面の4つの正三角形の面積と底面積の和だから
$6\times 3\sqrt{3}\div 2\times 4+6^2=36\sqrt{3}+36$ cm^2
3
正四角すいの頂点Oから底面ABCDに垂線OKをひくと
$OK^2=OC^2-\left(\frac{1}{2}AC\right)^2$
$OK>0$ だから
$OK=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$ cm
よって求める体積は
$\frac{1}{3}\times 6^2\times 3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$ cm^3
4
点Mから底面ABCDに垂線MRをひくと
$MR=\frac{1}{2}OK$，$RC=\frac{3}{4}AC$ だから
$CM^2=MR^2+RC^2=\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2=\frac{9}{2}+\frac{81}{2}=45$
$CM>0$ だから
$CM=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ cm

【問 27】

問1 図 I のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とする。このとき，AM⊥BC であることを△ABM と△ACM が合同であることを用いて，次のように証明した。□ をうめて証明を完成させなさい。

（沖縄県 2003 年度）

[証明]

△ABM と△ACM において

□

△ABM≡△ACM
よって，∠AMB＝∠AMC
また，∠AMB＋∠AMC＝180° だから
∠AMB＝90°
ゆえに，AM⊥BC である。

図 I

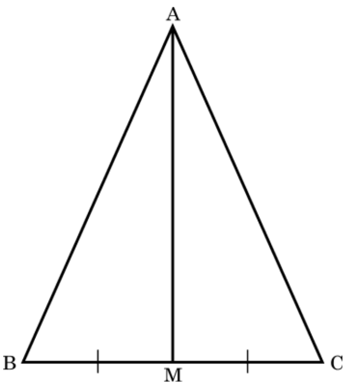


図 II

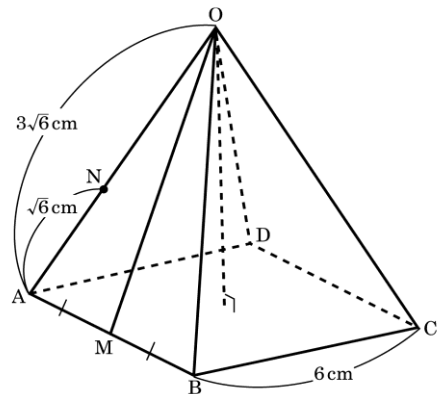
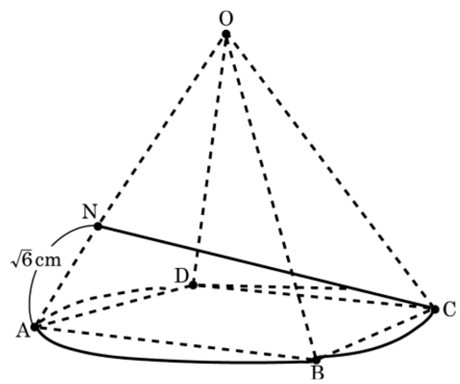


図 III



問2 図 II のように，底面が1辺 6 cm の正方形 ABCD で，OA＝OB＝OC＝OD＝$3\sqrt{6}$ cm である正四角すい OABCD がある。また，AB の中点を M，辺 OA 上に AN＝$\sqrt{6}$ cm となるように点 N をとる。

このとき，次の⑴～⑶に答えなさい。

⑴ 線分 OM の長さを求めなさい。

⑵ 正四角すい OABCD の高さを求めなさい。

⑶ 図 III のように，図 II の4点 A，B，C，D を通る円を底面とし，頂点が N である円すいの体積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

解答欄

問1	△ABM と△ACM において △ABM≡△ACM	
問2	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	cm^3

解答
問1
証明
△ABMと△ACMにおいて
AB＝AC（仮定）…①
BM＝CM（仮定）…②
AM＝AM（共通）…③
①，②，③より
3辺の長さがそれぞれ等しいので
△ABM≡△ACM
証明
△ABMと△ACMにおいて
AB＝AC…①
BM＝CM…②
∠ABM＝∠ACM…③
①，②，③より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABM≡△ACM
問2
(1)　$3\sqrt{5}$ cm
(2)　6 cm
(3)　12π　cm^3
解説
問1
例1
AB＝AC(仮定)…①
BM＝CM(仮定)…②
AM＝AM(共通)…③
①，②，③より
3辺の長さがそれぞれ等しい
例2
AB＝AC…①
BM＝CM…②
∠ABM＝∠ACM…③
①，②，③より
2辺とその間の角がそれぞれ等しい
問2
⑴
∠OMA＝90°なので△OAMにおいて三平方の定理を用いるとOM＝$3\sqrt{5}$ cm
⑵
底面の中心をFとすると，MF＝3 cm
△OMFにおいて三平方の定理を用いるとOF＝6 cm
⑶
底面の円の半径は底面の中心をFとして△ABFにおいて三平方の定理を用いると
半径AF＝$3\sqrt{2}$ cm
点Nから底面に垂線をおろし底面との交点をGとする
△NAG∽△OAFなので
NG：OF＝NA：OA＝$\sqrt{6}$：$3\sqrt{6}$＝1：3
⑵より
OF＝6 cmなのでNG＝2 cm
よって体積は$\pi \times (3\sqrt{2})^2 \times 2 \div 3 = 12\pi$　cm^3