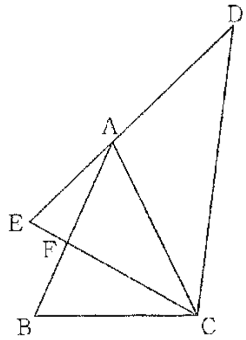
4．相似の証明と長さ･求積などの複合問題 【2011 年度出題】

【問 1】

図のように，辺 AC が共通な 2 つの二等辺三角形 ABC と ACD があり，AB＝AC＝AD とします。∠ACB の二等分線と辺 DA の延長との交点を E とし，辺 AB と CE との交点を F とします。

次の問いに答えなさい。

（北海道　2011 年度）



問1　∠BCF＝35° のとき，∠BAC の大きさを求めなさい。

問2　∠ACE＝∠ADC のとき，△ACE∽△BCF を証明しなさい。

解答欄

問1	度
問2	〔証　明〕

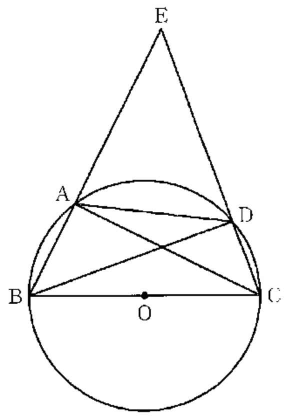
解答
問1　40 度
問2
△ACE と△BCF において
∠ACE＝∠BCF (仮定)…①
∠CAE＝∠ADC＋∠ACD＝2∠ADC…②
∠CBF＝∠ACE＋∠BCF＝2∠ACE…③
∠ACE＝∠ADC (仮定)…④
②, ③, ④より
∠CAE＝∠CBF…⑤
①, ⑤から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ACE∽△BCF
解説
問1
AB＝AC より
∠ABC＝∠ACB＝2∠BCF＝2×35°＝70°
∠BAC＝180°－2×70°＝180°－140°＝40°

【問 2】

図で，点 A，B，C，D は円 O の円周上にあり，BC は円 O の中心を通る。BA，CD を延長し交わった点を E とする。

次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県 2011 年度 前期）



(1) △EBD と△ECA が相似になることを証明しなさい。

(2) ∠BED＝45°，BC＝6 cm のとき，AD の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔証明〕
(2)	cm

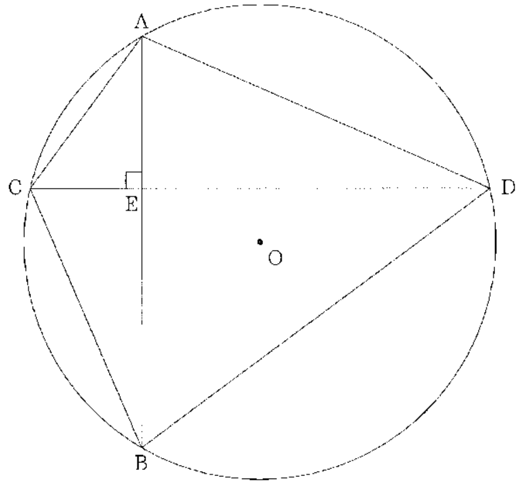
解答
(1)
〔証明〕
△EBDと△ECAで
∠Eは共通だから
∠BED＝∠CEA…①
$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角から
∠EBD＝∠ECA…②
①, ②から
2つの角がそれぞれ等しいので
△EBD∽△ECA
(2)　$3\sqrt{2}$ cm
解説
問2
(2)
BCは直径だから∠BDC＝90°
よって, ∠EDB＝90°
∠EBD＝180°−90°−45°＝45°
∠AOD＝2∠ABD＝2×45°＝90°
よって△AODはAO＝DOの直角二等辺三角形になるので
$AD=\sqrt{2}\,AO=\sqrt{2}\times\frac{6}{2}=3\sqrt{2}$ cm

【問 3】

図のように，円 O に 2 本の弦 AB，CD を AB⊥CD となるようにひき，弦 AB と弦 CD との交点を E とします。また，点 A と点 C，点 C と点 B，点 B と点 D，点 D と点 A をそれぞれ結びます。

あとの(1)，(2)の問いに答えなさい。

（宮城県　2011 年度）



(1)　△ACE∽△DBE であることを証明しなさい。

(2)　AE＝3 cm，CD＝8 cm，CE＝2 cm とします。

次の①，②の問いに答えなさい。

①　線分 BE の長さを求めなさい。

②　円 O の半径を求めなさい。

解答欄

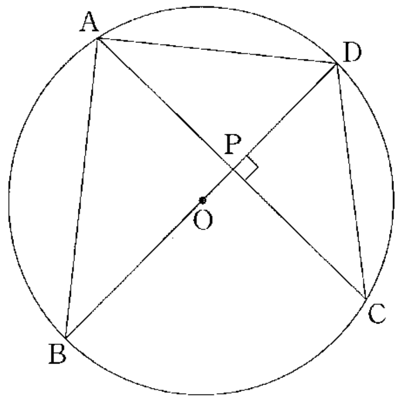
<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>①</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>②</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
(1)
〔証明〕
△ACEと△DBEにおいて
仮定から
∠AEC＝∠DEB＝90°…①
同じ弧$\overset{\frown}{\mathrm{CB}}$に対する円周角は等しいから
∠CAB＝∠CDB
つまり∠CAB＝∠BDE…②
①，②より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ACE∽△DBE
(2)
① 4 cm
② $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ cm
解説
問2
(2)
②
DOを延長し円Oの周との交点をFとする。
AFを結ぶ。
△AFDと△EBDにおいて
円周角の定理より
∠AFD＝∠ABD…①
FDは円Oの直径より
∠FAD＝90°
仮定より
∠BED＝90°
∠FAD＝∠BED…②
①，②より
2組の角がそれぞれ等しいので
△AFD∽△EBD
FD : BD＝AD : ED
三平方の定理より
$\mathrm{BD}=\sqrt{4^2+8^2}=2\sqrt{13}$ cm
$\mathrm{AD}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$ cm
$\mathrm{FD}:2\sqrt{13}=3\sqrt{5}:6$
$6\mathrm{FD}=2\sqrt{13}\times3\sqrt{5}$
$\mathrm{FD}=\sqrt{65}$ cm
よって円Oの半径は$\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ cm

【問 4】

図のように, 円 O の周上に点 A, B, C, D があり, 線分 BD は直径である。線分 AC と線分 BD は垂直に交わっていて, その交点を P とする。

（秋田県　2011 年度）



(1) △ABD∽△PCD となることを証明しなさい。

(2) 円 O の半径を 4 cm, AB＝6 cm とするとき, 線分 PC の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔証明〕
(2)	cm

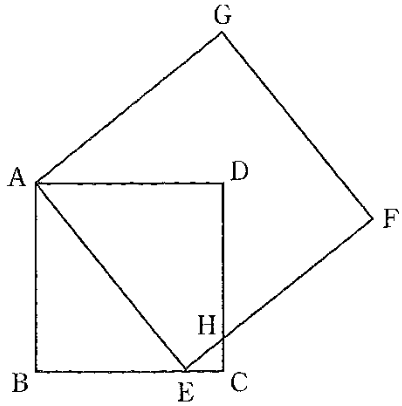
解答
(1)
〔証明〕
△ABDと△PCDで
線分BDは円Oの直径だから
$\angle BAD = 90^\circ$
仮定より
$\angle CPD = 90^\circ$
よって
$\angle BAD = \angle CPD$…①
弧ADに対する円周角は等しいから
$\angle ABD = \angle PCD$…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABD \backsim \triangle PCD$
(2) $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ cm
解説
(2)
$\angle BAD = 90^\circ$ より $AD = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ cm
△APDと△CPDにおいて
$\triangle ABD \backsim \triangle PCD$ より
$\angle ADB = \angle PDC$
$PD = PD$
$\angle APD = \angle CPD = 90^\circ$
よって1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
$\triangle APD \equiv \triangle CPD$
よって $CD = AD = 2\sqrt{7}$ cm
$AB : PC = BD : CD$ より
$6 : PC = 8 : 2\sqrt{7}$
$PC = 6 \times \dfrac{2\sqrt{7}}{8} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ cm

【問 5】

図のように，正方形 ABCD の辺 BC 上に点 E をとり，AE を 1 辺とする正方形 AEFG をつくる。辺 CD と辺 EF の交点を H とすると，△ABE∽△ECH である。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（栃木県　2011 年度）



(1)　△ABE∽△ECH であることを証明しなさい。

(2)　AB＝5 cm，BE＝4 cm のとき，DH の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔証明〕
(2)	cm

解答
(1)
△ABEと△ECHにおいて
仮定より
∠ABE＝∠ECH＝90°…①
∠BAE＝180°－(90°＋∠AEB)
＝90°－∠AEB…②
∠AEF＝90°より
∠CEH＝180°－∠BEF
＝180°－(90°＋∠AEB)
＝90°－∠AEB…③
②，③より
∠BAE＝∠CEH…④
①，④より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ABE∽△ECH
(2) $\dfrac{21}{5}$ cm
解説
(2)
EC＝BC－BE＝5－4＝1 cm
△ABE∽△ECHより
AB：EC＝BE：CH
5：1＝4：CH
5CH＝4
CH＝$\dfrac{4}{5}$ cm
DH＝5－$\dfrac{4}{5}$＝$\dfrac{21}{5}$ cm

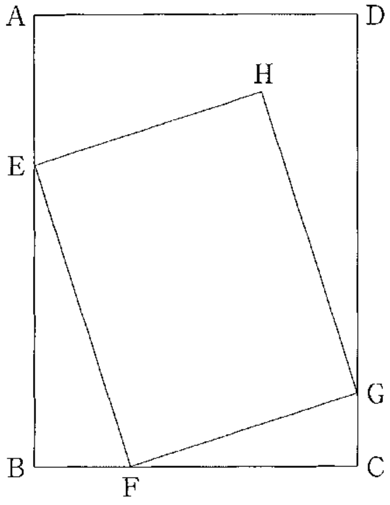
【問 6】

AD＝12 cm で，横と縦の長さの比が $1:\sqrt{2}$ の長方形 ABCD があります。また，この長方形 ABCD と相似で，面積が半分の長方形 EFGH があります。これらの長方形を，次の図1のように，点 E，F，G がそれぞれ辺 AB，BC，CD 上にくるように重ね，長方形 ABCD 上に，長方形 EFGH の各辺をかきます。

このとき，次の各問に答えなさい。なお，考えるときに，別紙を点線にそって切り取って利用してもさしつかえありません。切り取ったそれぞれの用紙の辺の比は，$1:\sqrt{2}$ です。

（埼玉県 2011 年度 前期）

図1

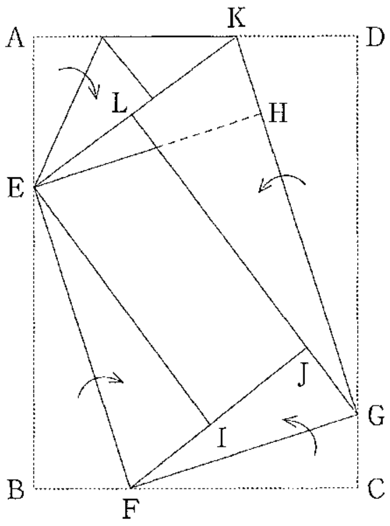


問1 △EBF と△FCG が相似であることを証明しなさい。

問2 線分 BF の長さを求めなさい。

問3 図2のように，線分 EF，FG を折り目として折ったとき，点 B，C の移った点をそれぞれ I，J とします。同様に，線分 GH を延長した線分を折り目として折ったとき，折り目の線を GK，点 D の移った点を L とします。また，点 E を通る線分を折り目として，線分 EA が線分 EL 上に重なるように折ります。このとき，四角形 EIJL の面積を求めなさい。

図2



解答欄

問1	〔証明〕
問2	BF＝ cm
問3	cm^2

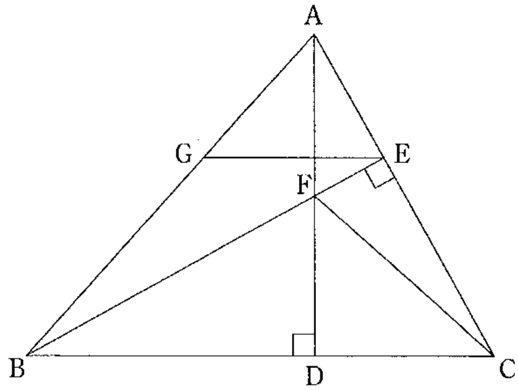
解答
問1
〔証明〕
△EBFと△FCGにおいて
∠B＝∠C＝90°…①
長方形EFGHにおいて∠EFG＝90°だから
∠BFE＋∠CFG＝90°
また△EBFで∠B＝90°だから
∠BFE＋∠BEF＝90°
よって∠BEF＝∠CFG…②
①, ②から
2組の角がそれぞれ等しいので
△EBF∽△FCG
問2 BF＝4 cm
問3 $32\sqrt{2}$ cm^2
解説
問2
面積比は 四角形ABCD:四角形EFGH＝2:1より
その相似比はBC:FG＝$\sqrt{2}$:1
よって12:FG＝$\sqrt{2}$:1
FG＝$6\sqrt{2}$ cm
またAD:AB＝FG:EFより
1: $\sqrt{2}$ ＝$6\sqrt{2}$:EF
EF＝12 cm
BF＝x cmとおくと
FC＝12－x cm
△EBF∽△FCGより
EB:FC＝FF:FG
EB:(12－x)＝$\sqrt{2}$:1
EB＝$\sqrt{2}$ (12－x) cm
△EBFで三平方の定理より$x^2+\{\sqrt{2}(12-x)\}^2=12^2$
整理して$3x^2-48x+144=0$
$x^2-16x+48=0$
$(x-4)(x-12)=0$
$0<x<12$より
$x=4$ cm
問3
AB＝$\sqrt{2}$ AD＝$12\sqrt{2}$ cm
BF＝4 cmのとき
FC＝12－4＝8 cm
EB＝$\sqrt{2}$ FC＝$8\sqrt{2}$ cm
AE＝$12\sqrt{2}-8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ cm
CG＝$\dfrac{BF}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ cm
DG＝$12\sqrt{2}-2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ cm
ここで△FCG∽△GDKだから
FC:GD＝CG:DK 8: $10\sqrt{2}$ ＝$2\sqrt{2}$:DK DK＝5 cm AK＝12－5＝7 cm
四角形EIJL＝長方形ABCD－2△EBF－2△FCG－2△GDK－△AEK
$=12\times12\sqrt{2}-2\times\dfrac{1}{2}\times4\times8\sqrt{2}-2\times\dfrac{1}{2}\times8\times2\sqrt{2}-2\times\dfrac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times5-\dfrac{1}{2}\times7\times4\sqrt{2}$
$=144\sqrt{2}-32\sqrt{2}-16\sqrt{2}-50\sqrt{2}-14\sqrt{2}$
$=32\sqrt{2}$ cm^2

【問 7】

図のような，鋭角三角形 ABC がある。頂点 A，B から，それぞれ辺 BC，AC に垂線 AD，BE をひき，その交点を F とする。また，点 E を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB との交点を G とするとき，△GBE∽△FCA となる。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（千葉県 2011 年度 前期）



問1 次の ▭ の中は，△GBE∽△FCA の証明を途中まで示してある。(a) に入る最も適当なものを，次ページの選択肢のア～エのうちから一つ選び，符号で答えなさい。また，(b) には適当な 4 点を，(c) には証明の続きを書き，証明を完成させなさい。

ただし，▭ の中の①に示されている関係を使う場合，番号の①を用いてもかまわないものとする。

証明

2 点 D，E を結ぶ。

仮定から，∠FDC＝∠FEC＝90° なので，2 点 D，E は CF を直径とする円の円周上にある。したがって，4 点 E，F，D，C は一つの円周上にある。

よって，同じ弧に対する円周角は等しいので，

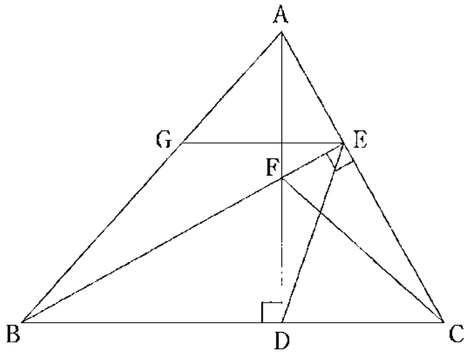
∠FCE＝ (a) …①

また，∠ADB＝∠AEB＝90° なので，同様にして，

4 点 (b) も一つの円周上にある。

(c)

したがって，△GBE∽△FCA となる。



選択肢	ア ∠CFD	イ ∠FDE	ウ ∠EAF	エ ∠DEF

問2 AB＝7 cm，AC＝5 cm，BC＝8 cm のとき，△GBE と△FCA の面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>(a)</td><td></td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>, , ,</td></tr>
<tr><td>(c)</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">:</td></tr>
</table>

解答
問1
(a) イ
(b) A, B, D, E
(c)
よって同じ弧に対する円周角は等しいので
∠ABE＝∠ADE…②
∠DBE＝∠DAE…③
△GBEと△FCAにおいて
①, ②より
∠GBE＝∠FCA…④
仮定より
GE // BCで, 平行線の錯角は等しいので
∠DBE＝∠GEB…⑤
③, ⑤より
∠GEB＝∠FAC…⑥
④, ⑥より
2組の角がそれぞれ等しい。
問2 48:25
解説
問2
AE＝x cmとするとCE＝5－x cmと表せる。
三平方の定理より
$AB^2-AE^2=BC^2-CE^2$
$7^2-x^2=8^2-(5-x)^2$
$49-x^2=64-25+10x-x^2$
$10x=10$
$x=1$ cm
よって$BE^2=7^2-1^2=48$
△GBE∽△FCAより
△GBE:△FCA＝$BE^2:CA^2=48:5^2=48:25$

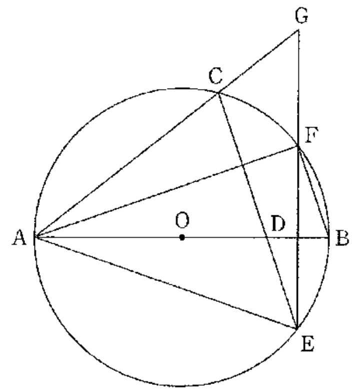
【問 8】

図のように，線分 AB を直径とする円 O の周上に，2 点 A，B とは異なる点 C をとる。線分 AB 上に点 D を AC＝AD となるようにとり，線分 CD の延長と円 O との交点で点 C とは異なる点を E とする。

また，点 A をふくまない $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上に点 F を EC // BF となるようにとり，線分 AC の延長と線分 EF の延長との交点を G とする。

このとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県　2011 年度）



問1　三角形 ADE と三角形 AFG が相似であることを次のように証明した。空欄にあてはまるものとして，$\boxed{\text{(a)}}$ には最も適する角を記号∠を用いて書き，$\boxed{\text{(b)}}$ には最も適する弧を記号⌒を用いて書き，$\boxed{\text{(あ)}}$ ，$\boxed{\text{(い)}}$ には【A 群】から，$\boxed{\text{(c)}}$ には【B 群】から最も適するものをそれぞれ 1 つずつ選び，その番号を書きなさい。

〔証明〕

△ADE と△AFG において，
まず，$\overset{\frown}{\mathrm{BE}}$ に対する円周角は等しいから，
∠BAE＝ $\boxed{\text{(a)}}$ …①
また，$\boxed{\text{(あ)}}$ から，
∠BFE＝∠CEF …②
さらに，$\overset{\frown}{\mathrm{CF}}$ に対する円周角は等しいから，
∠CEF＝∠CAF …③
①，②，③より，∠BAE＝∠CAF
よって，∠DAE＝∠FAG …④
次に，△ACD は AC＝AD の二等辺三角形だから，
∠ADC＝∠ACD
よって，∠ADC＝∠ACE …⑤
また，$\boxed{\text{(b)}}$ に対する円周角は等しいから，
∠ACE＝∠AFE …⑥
⑤，⑥より，∠ADC＝∠AFE …⑦
さらに，3 点 C，D，E と 3 点 E，F，G は，
それぞれ 1 直線上にあるから，
∠ADE＝180°－∠ADC …⑧
∠AFG＝180°－∠AFE …⑨
⑦，⑧，⑨より，∠ADE＝∠AFG …⑩
④，⑩より，$\boxed{\text{(い)}}$ から，
△ADE $\boxed{\text{(c)}}$ △AFG

【A 群】

1　対頂角は等しい
2　平行線の同位角は等しい
3　平行線の錯角は等しい
4　3 組の辺の比が等しい
5　2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しい
6　2 組の角がそれぞれ等しい

【B 群】

1　＝
2　≡
3　∽

問2　∠BAF＝19° のとき，∠CGF の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(あ)	
	(b)	
	(い)	
	(c)	
問2	∠CGF＝　　　　　°	

解答

問1

(a)　∠BFE

(あ)　3

(b)　$\overset{\frown}{AE}$

(い)　6

(c)　3

問2　∠CGF＝52°

解説

問2

AB は直径だから∠AFB＝90°

EC // BF より

∠ADC＝∠ABF＝180°－90°－19°＝71°

AC＝AD より

∠ACD＝∠ADC＝71°　∠CAF＝180°－71°×2－19°＝19°

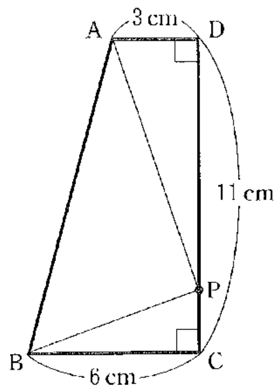
△ADE∽△AFG より

∠DAE＝∠FAC＝19°

∠CGF＝∠AGF＝∠AED＝71°－19°＝52°

【問 9】

図のように，∠C＝90°，∠D＝90°，AD＝3 cm，BC＝6 cm，CD＝11 cm の台形 ABCD がある。辺 CD 上を，頂点 C から頂点 D まで移動する点を P とする。頂点 A と点 P，頂点 B と点 P をそれぞれ線分で結ぶとき，次の問1～問3に答えなさい。



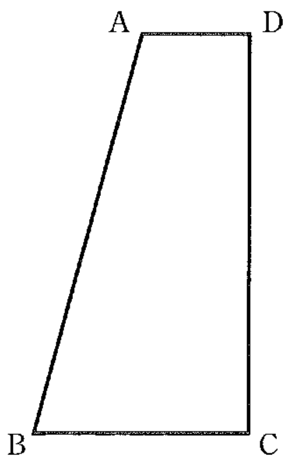
（新潟県　2011 年度）

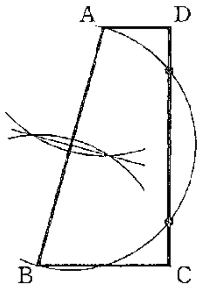
問1　∠APB＝90°となるとき，△APD∽△PBC であることを証明しなさい。

問2　∠APB＝90°となる点 P を，定規とコンパスを用いて，作図によってすべて求め，それらの点に●をつけなさい。作図は解答用紙に行い，作図に使った線は消さないで残しておくこと。

問3　CP の長さを x cm とするとき，∠APB≧90°となる x の値の範囲を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>問3</td><td></td></tr>
</table>

解答
問1
〔証明〕
△APDと△PBCにおいて
∠PDA＝∠BCP＝90°…①
∠APB＝90°だから
∠APD＋∠CPB＝90°…②
∠BCP＝90°だから
∠CPB＋∠PBC＝90°…③
②，③より∠APD＝∠PBC…④
①，④より
2組の角がそれぞれ等しいから
△APD∽△PBC
問2


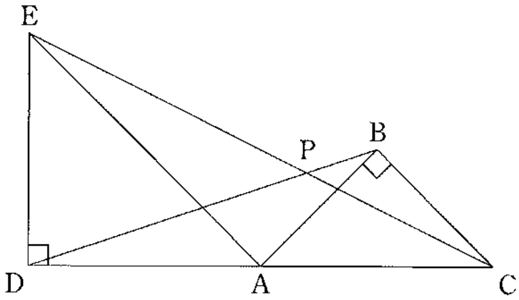
問3　$2 \leqq x \leqq 9$
解説
問3
∠APB＝90°より
ABの中点をMとおくと
PはMを中心とする半径AMの円とCDとの交点となる。
このとき△APD∽△PBCより
PD : BC＝AD : PC
$(11-x) : 6 = 3 : x$
$x(11-x) = 6 \times 3$
$x^2 - 11x + 18 = 0$
$(x-2)(x-9) = 0$
$x = 2,\ 9$
点Pが円の内部にあるとき
∠ABP≧90°となるので
$2 \leqq x \leqq 9$

【問 10】

図の△ABC と△ADE は，AB＝BC，∠ABC＝90°，AD＝DE，∠ADE＝90°の直角二等辺三角形である。また，3 つの頂点 D, A, C は一直線上に並んでおり，線分 BD と CE の交点を P とする。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（石川県　2011 年度）



問1　∠BAE の大きさを求めなさい。

問2　△ABD∽△ACE であることを証明しなさい。

問3　△ABD∽△ACE であることを用いて，∠DPA の大きさが 45°であることを証明したい。$\boxed{}$ に証明の続きを書きなさい。

〔証明〕

△ABD∽△ACE であるから

∠ADB＝∠AEC

よって

∠ADP＝∠AEP

2 点 D，E は直線 AP の同じ側にあって

∠ADP＝∠AEP であるから

〔証明の続き〕

したがって，∠DPA＝45°である。

解答欄

問1	度
問2	〔証明〕
問3	〔証明の続き〕

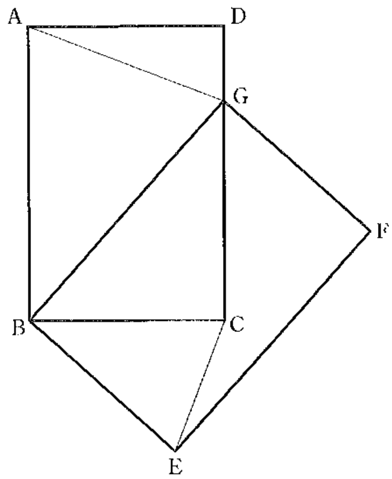
解答
問1　90 度
問2
〔証明〕
△ABD と△ACE において
∠DAB＝∠DAE＋∠EAB…①
∠EAC＝∠BAC＋∠EAB…②
△ABC と△ADE は直角二等辺三角形だから
∠BAC＝∠DAE…③
AB : AC＝1 : $\sqrt{2}$ …④
AD : AE＝1 : $\sqrt{2}$ …⑤
①, ②, ③より
∠DAB＝∠EAC…⑥
④, ⑤より
AB : AC＝AD : AE…⑦
よって⑥, ⑦より
2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABD∽△ACE
問3
〔証明の続き〕
4 点 A, D, E, P は 1 つの円周上にある。
よって$\overset{\frown}{DA}$に対する円周角は等しいから
∠DPA＝∠DEA
また△ADE は直角二等辺三角形であるから
∠DEA＝45°
解説
問3
A, D, E, P は同一円周上にある。
よって弧 DA に対する円周角より
∠DPA＝∠DEA＝45°

【問 11】

図で，長方形 ABCD≡長方形 GBEF であり，点 G は辺 CD 上の点である。

次の問1，問2に答えなさい。

（岐阜県　2011 年度）



問1　△ABG∽△CBE であることを証明しなさい。

問2　AB＝5 cm，CG＝4 cm のとき，△CBE の面積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

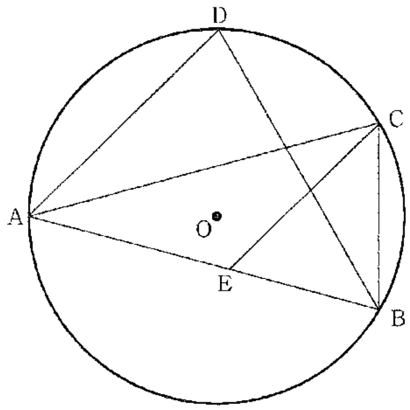
解答
問1
〔証明〕
△ABG と△CBE で
仮定から BA＝BG, BC＝BE より
BA : BC＝BG : BE…①
また∠ABG＝90°－∠GBC
∠CBE＝90°－∠GBC
だから∠ABG＝∠CBE…②
①, ②から
2 組の辺の比が等しくそのはさむ角が等しいので
△ABG∽△CBE
問2 $\frac{27}{10}$ cm^2
解説
問2
長方形 ABCD≡長方形 GBEF より BG＝BA＝5 cm
△GBC において
三平方の定理より BC＝$\sqrt{5^2-4^2}$ ＝3 cm
△ABG＝$\frac{1}{2}$ ×5×3＝$\frac{15}{2}$ cm^2
△ABG∽△CBE より
△ABG : △CBE＝BA^2 : BC^2＝5^2 : 3^2＝25 : 9
$\frac{15}{2}$: △CBE＝25 : 9
25△CBE＝$\frac{15}{2}$ ×9
△CBE＝$\frac{27}{10}$ cm^2

【問 12】

図において，4 点 A，B，C，D は円 O の円周上の点であり，AB＝AC である。また，AC は∠DAB の二等分線である。AB 上に AE＝CE となる点 E をとる。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（静岡県　2011 年度）



問1　△ABD∽△ECB であることを証明しなさい。

問2　円 O の半径が 15 cm，$\overset{\frown}{AD}$の長さが 8 π cm であるとき，∠ADB の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	度

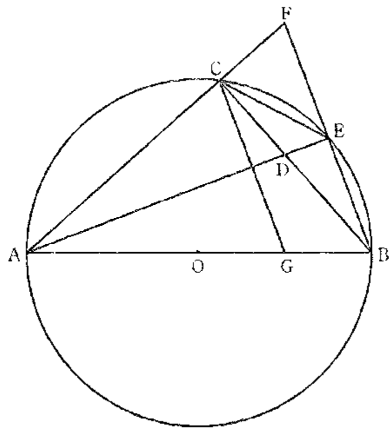
解答
問1
〔証明〕
△ABDと△ECBにおいて
ACは∠DABの二等分線より
∠DAB＝2∠EAC…①
AE＝CEより
∠EAC＝∠ECA
よって∠BEC＝∠EAC＋∠ECA＝2∠EAC…②
①, ②より∠DAB＝∠BEC…③
AB＝ACより
∠EBC＝∠ACB…④
弧ABに対する円周角より
∠ADB＝∠ACB…⑤
④, ⑤より
∠ADB＝∠EBC…⑥
③, ⑥より
2組の角がそれぞれ等しいので
△ABD∽△ECB
問2 76度
解説
問2
おうぎ形OADにおいて
∠AOD＝$x°$とおくと$2\pi \times 15 \times \dfrac{x}{360} = 8\pi \quad x = 96°$
ここで∠CAB＝$y°$とおくと
∠CBD＝∠CAD＝∠CAB＝$y°$
∠ABD＝$\dfrac{1}{2}$∠AOD＝$\dfrac{1}{2} \times 96° = 48°$
∠ACB＝∠ABC＝$y° + 48°$
△ABCの内角の和が180°だから
$y + (y + 48) + (y + 48) = 180$
これを解いて
$y = 28°$
よって∠ADB＝∠EBC＝∠ABC＝$48° + 28° = 76°$

【問 13】

図のように，線分 AB を直径とする円 O の円周上に点 C をとり，△ABC をつくる。∠CAB の二等分線と線分 BC，円 O との交点をそれぞれ D，E とする。線分 BE を延長した直線と線分 AC を延長した直線の交点を F とする。点 C を通り，線分 BE に平行な直線と線分 AB の交点を G とする。

このとき，あとの各問いに答えなさい。ただし，点 E は点 A と異なる点とする。

（三重県 2011 年度）



問1 △ABE≡△AFE であることの証明を，次の $\boxed{(ア)}$ ～ $\boxed{(ウ)}$ のそれぞれにあてはまる適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

〔証 明〕
△ABE と△AFE において，
共通だから，AE ＝AE …①
線分 AE は∠CAB の二等分線だから，$\boxed{(ア)}$ ＝∠FAE …②
∠AEB は半円の弧に対する円周角だから，∠AEB ＝$\boxed{(イ)}$° …③
3 点 B，E，F は一直線上にあるから，∠BEF ＝180° …④
③，④より，∠AEF ＝$\boxed{(イ)}$° …⑤
③，⑤より，∠AEB ＝∠AEF …⑥
①，②，⑥より，$\boxed{(ウ)}$ がそれぞれ等しいので，
△ABE ≡△AFE

問2 △BCG∽△ECD であることを証明しなさい。

問3 AB＝8 cm，AC＝6 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 線分 BF の長さを求めなさい。なお，答えに $\sqrt{\ }$ がふくまれるときは，$\sqrt{\ }$ の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。

(2) 線分 AG 上に点 H をとり，△CHG をつくる。△CHG の面積と四角形 CDEF の面積が等しくなるとき，線分 HG の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問2	〔証　明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	cm

解答
問1
(ア) $\angle BAE$
(イ) 90
(ウ) 1 辺とその両端の角
問2
〔証明〕
$\triangle BCG$ と $\triangle ECD$ において
弧 AC に対する円周角は等しいから
$\angle CBG = \angle CED$…①
$BE \mathbin{/\!/} CG$ より錯角は等しいから
$\angle BCG = \angle CBE$…②
弧 CE に対する円周角は等しいから
$\angle CBE = \angle CAE$…③
線分 AE は $\angle CAB$ の二等分線だから
$\angle CAE = \angle BAE$…④
弧 BE に対する円周角は等しいから
$\angle BAE = \angle ECD$…⑤
②, ③, ④, ⑤より
$\angle BCG = \angle ECD$…⑥
①, ⑥より
2 組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle BCG \backsim \triangle ECD$
問3
(1) $4\sqrt{2}$ cm
(2) $\dfrac{40}{21}$ cm
解説
問3
(1)
AB は直径だから $\angle ABC = 90^\circ$
よって $\triangle ACB$ において三平方の定理より $BC = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm
$\triangle ABE \equiv \triangle AFE$ より $AF = AB = 8$ cm
よって $CF = 8 - 6 = 2$ cm
$\triangle BCF$ で三平方の定理より $BF = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm
(3)
$BE = FE = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm
$\triangle AEF$ で三平方の定理より $AE = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{14}$ cm
$CG \mathbin{/\!/} FB$ より $CG : BF = AC : AF$
$CG : 4\sqrt{2} = 6 : 8$　$CG = 3\sqrt{2}$ cm
$\triangle BDE \backsim \triangle BFC$ になるので $BE : BC = DE : FC$　$2\sqrt{2} : 2\sqrt{7} = DE : 2$　$DE = \dfrac{2\sqrt{14}}{7}$ cm
四角形 $CDEF = \triangle BCF - \triangle BED = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{7} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2\sqrt{14}}{7} \times 2\sqrt{2} = \dfrac{10\sqrt{7}}{7}$ cm^2
AE と CG の交点を P とし四角形 $CDEF = \triangle CQG$ となる点 Q を AD 上にとる。
$\dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times PQ = \dfrac{10\sqrt{7}}{7}$　$PQ = \dfrac{10\sqrt{14}}{21}$ cm
$QH \mathbin{/\!/} CG$ のとき $\triangle CQG = \triangle CHG$ となるから
$AP : PQ = AG : GH$
$AP = \dfrac{6}{8} AE = \dfrac{3\sqrt{14}}{2}$ cm　$\dfrac{3\sqrt{14}}{2} : \dfrac{10\sqrt{14}}{21} = 6 : HG$　$HG = \dfrac{40}{21}$ cm

【問 14】

図1，図2において，四角形 ABCD は AB // DC の台形であり，∠ABC＝∠BCD＝90°，AD＝4 cm，AB＜DC である。E は，A から辺 DC にひいた垂線と辺 DC との交点である。このとき，AE // BC である。F は，辺 BC 上にあって，∠FAE＝∠DAE となる点である。A と F とを結ぶ。AF＝3 cm である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 2011 年度 前期）

図1

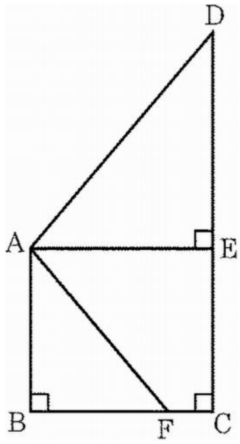
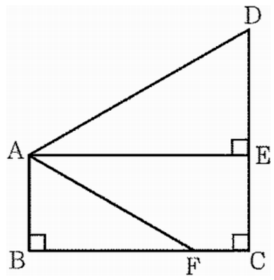


図2



問1 図1において，

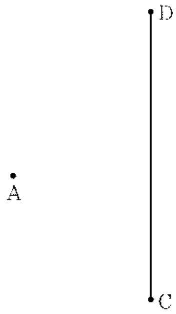
(1) 解答欄の図は，図1中の点 A と線分 DC のみを示したものである。A を通り線分 DC に垂直な直線を，定規とコンパスを使って解答欄の図中に作図しなさい。作図の方法がわかるように，作図に用いた線は残しておくこと。

(2) △DAE∽△AFB であることを証明しなさい。

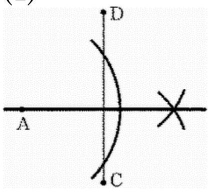
(3) 四角形 AFCE の面積は△ABF の面積の何倍ですか。

問2 図2は，AE＝DC であるときの状態を示している。図2において，線分 AE の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>(1)</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>倍</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="3">〔求め方〕

答え　　　　　　cm</td></tr>
</table>

解答
問1
(1)


(2)
〔証明〕
△DAE と△AFB において
∠DEA＝∠ABF＝90° (仮定)…㋐
∠DAE＝∠FAE (仮定)…㋑
AE // BC だから
∠AFB＝∠FAE (錯角)…㋒
㋑, ㋒より∠DAE＝∠AFB…㋓
㋐, ㋓より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△DAE∽△AFB
(3) $\frac{5}{3}$ 倍
問2
〔求め方〕
AE＝x cm とすると DC＝x cm
△DAE∽△AFBだから
DE : AB＝AD : FA＝4 : 3…㋐
四角形 ABCE は長方形だから
EC＝AB…㋑
㋐, ㋑より DE : EC＝4 : 3 だから
DE＝$\frac{4}{7}$ DC＝$\frac{4}{7}x$ cm
∠DEA＝90° より $AE^2+DE^2=AD^2$ だから
$x^2+\left(\frac{4}{7}x\right)^2=4^2$
これを解くと
$x>0$ より $x=\frac{28}{65}\sqrt{65}$
答 $\frac{28}{65}\sqrt{65}$ cm

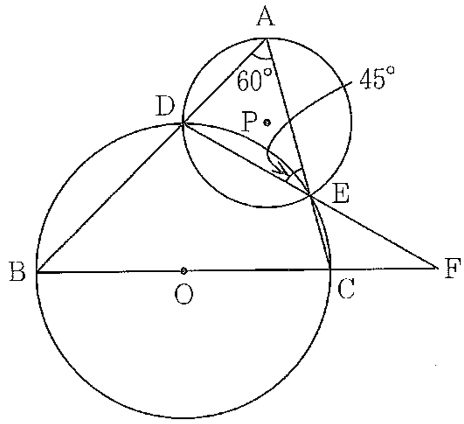
解説
問1
(3)
$\triangle$DAE$\backsim\triangle$AFB より
$\triangle$DAE:$\triangle$AFB＝DA^2:AF^2＝4^2:3^2＝16:9
$\triangle\text{DAE}=\dfrac{16}{9}\triangle\text{AFB}$
AF と DC を延長し交点を G とおく。
$\triangle$AGE と$\triangle$ADE において
AE は共通
$\angle$DAE＝$\angle$GAE
$\angle$AED＝$\angle$AEG より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
$\triangle$AGE$\equiv\triangle$ADE
よって$\triangle\text{AGE}=\dfrac{16}{9}\triangle\text{AFB}$
また AG＝AD＝4 cm より FG＝4－3＝1 cm
$\triangle$ABF と$\triangle$GCF において
$\angle$ABF＝$\angle$GCF＝90°
$\angle$AFB＝$\angle$GFC だから
2 組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle$ABF$\backsim\triangle$GCF
よって$\triangle$ABF:$\triangle$GCF＝AF^2:GF^2＝3^2:1^2＝9:1
$\triangle\text{GCF}=\dfrac{1}{9}\triangle\text{ABF}$
したがって四角形 AFCE の面積は
$\triangle\text{AGE}-\triangle\text{GCF}=\dfrac{16}{9}\triangle\text{ABF}-\dfrac{1}{9}\triangle\text{ABF}=\dfrac{15}{9}\triangle\text{ABF}=\dfrac{5}{3}\triangle\text{ABF}$
問2
AE＝DC＝x cm とする。
$\triangle$DAE$\backsim\triangle$AFB より
DE:AB＝DA:AF＝4:3
EC＝AB より
DE:EC＝DE:AB＝4:3
$\text{DE}=\dfrac{4}{7}x$ cm
$\triangle$DAE において三平方の定理より
DE^2＋AE^2＝DA^2
$\left(\dfrac{4}{7}x\right)^2+x^2=4^2$
$\dfrac{16}{49}x^2+x^2=16$
$\dfrac{65}{49}x^2=16$
$x^2=16\times\dfrac{49}{65}$
$x>0$ より
$x=4\times\dfrac{7}{\sqrt{65}}$
$=\dfrac{28\sqrt{65}}{65}$ cm

【問 15】

図のように，△ABC がある。BC を直径とする円 O と AB, AC との交点をそれぞれ D, E とし，3 点 A, D, E を通る円 P をかく。また，DE の延長と BC の延長との交点を F とする。

∠BAC＝60°，∠AED＝45°，円 O の半径を 8 cm とするとき，次の問いに答えなさい。

（兵庫県 2011 年度）



問1 △ABE と△ACD が相似であることを，次のように証明した。 a と b にあてはまるものの組み合わせを，下の語群ア～エから選んで記号を書き，この証明を完成させなさい。

〔証明〕
△ABE と△ACD において
∠A は共通 …①
円 O で，弧 DE に対する円周角は等しいから
a …②
①，②より，b から
△ABE∽△ACD

語群

ア	a :∠BCD＝∠BED	b :2 組の角が，それぞれ等しい
イ	a :∠ABE＝∠ACD	b :2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しい
ウ	a :∠BCD＝∠BED	b :2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しい
エ	a :∠ABE＝∠ACD	b :2 組の角が，それぞれ等しい

問2 円 P の半径は何 cm か，求めなさい。

問3 △ADE の面積は何 cm^2 か，求めなさい。

問4 △CEF の面積は何 cm^2 か，求めなさい。

解答欄

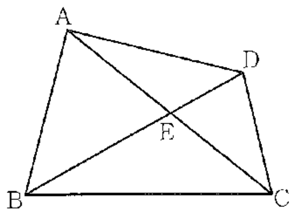
問1	
問2	cm
問3	cm^2
問4	cm^2

解答
問1　エ
問2　$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm
問3　$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}+16$ cm^2
問4　$16\sqrt{3}-16$ cm^2
解説
問3
D から AE に垂線 DH をひく。
$AH=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{6}}{3}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ cm
$DH=\sqrt{3}\,AH=\sqrt{3}\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=4\sqrt{2}$ cm
$EH=DH=4\sqrt{2}$ cm
よって$\triangle ADE=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}+4\sqrt{2}\right)\times4\sqrt{2}=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}+16$ cm^2
問4
$AC=2AD=\dfrac{16\sqrt{6}}{3}$ cm
$CE=\dfrac{16\sqrt{6}}{3}-\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}+4\sqrt{2}\right)=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$ cm
C から EF に垂線をひき交点を K とする。
$\angle CEK=45^\circ$ より
$CK=EK=\dfrac{1}{\sqrt{2}}CE=4\sqrt{3}-4$ cm
$\angle CFK=30^\circ$ だから
$FK=\sqrt{3}\,CK=12-4\sqrt{3}$ cm
$\triangle CEF=\dfrac{1}{2}\times(4\sqrt{3}-4+12-4\sqrt{3})\times(4\sqrt{3}-4)=16\sqrt{3}-16$ cm^2

【問 16】

図の対角線の交点を E とする四角形 ABCD において，∠BCA＝∠DCA, BA＝BE ならば，△ABC∽△EDC である。このことを証明しなさい。

（鳥取県　2011 年度）



解答欄

〔証明〕

△ABC と△EDC において

△ABC∽△EDC

解答

〔証明〕

△ABC と△EDC において

∠ACB＝∠ECD (条件より)…①

また条件より BA＝BE だから

∠BAE＝∠BEA…②

対頂角は等しいので

∠BEA＝∠CED…③

②③より

∠CAB＝∠CED…④

①④より

2 組の角がそれぞれ等しいので

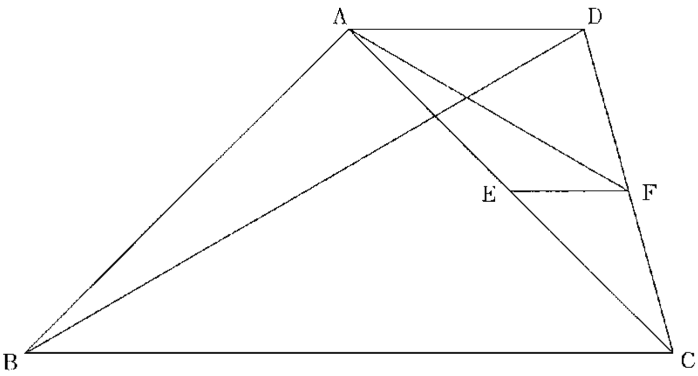
△ABC∽△EDC

【問 17】

図のように，AD // BC の台形 ABCD があり，AB＝AC，∠BAC＝90° です。対角線 AC の中点を E とします。また，点 E を通り辺 AD に平行な直線と辺 CD との交点を F とします。

これについて，次の問1･問2に答えなさい。

（広島県 2011 年度）



問1 △ABD∽△EAF であることを証明しなさい。

問2 △BCE の面積が 9 cm^2 のとき，線分 BE の長さは何 cm ですか。

解答欄

問1	〔仮定〕図において，AD // BC，AB＝AC，∠BAC＝90°，AE＝CE，AD // EF 〔結論〕△ABD∽△EAF 〔証明〕
問2	cm

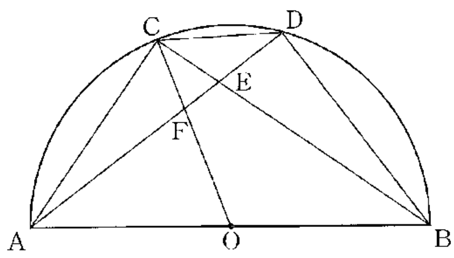
解答
問1
△ABDと△EAFにおいて
AB：EA＝AC：EA＝2：1…①
AD // EFであるから
AD：EF＝AC：CE＝2：1…②
①，②よりAB：EA＝AD：EF…③
平行線の錯角は等しいから
∠CAD＝∠ACB＝45°…④
④より
∠BAD＝90°＋∠CAD＝135°…⑤
平行線の同位角は等しいから
∠CEF＝∠CAD＝45°…⑥
⑥より
∠AEF＝180°－∠CEF＝135°…⑦
⑤，⑦より∠BAD＝∠AEF…⑧
③，⑧より
2組の辺の比が等しく，その間の角が等しいから
△ABD∽△EAF
問2　$3\sqrt{5}$ cm
解説
問2
CE＝AEより△ABE＝△CBE＝9 cm^2
よって△ABC＝9＋9＝18 cm^2
AB＝AC，∠BAC＝90°より
$\frac{1}{2}\times AB^2=18$
$AB^2=36$
AB＞0より
AB＝6 cm
EC＝$\frac{6}{2}$＝3 cm
EからBCに垂線をひき，交点をHとすると
∠ECH＝45°なので△ECHはEH＝CHの直角二等辺三角形になる。
よってEH＝CH＝$\frac{EC}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm
BC＝$\sqrt{2}$ AB＝$6\sqrt{2}$ cm
BH＝$6\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm
△DBCで三平方の定理より
BE＝$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3\sqrt{5}$ cm

【問 18】

図で，点 O は線分 AB を直径とする半円の中心であり，2 点 C，D は半円の周上の点である。線分 AD と線分 BC の交点を E，線分 AD と線分 OC の交点を F とする。

次の問1，問2に答えなさい。

（山口県　2011 年度）



問1　△CDF∽△ECF であることを証明しなさい。

問2　AC＝9 cm，BC＝13 cm，CD＝5 cm のとき，線分 BD の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

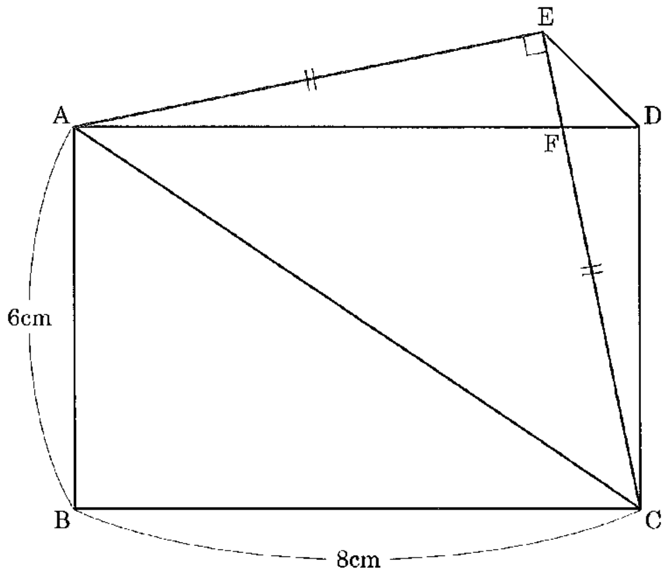
解答
問1
〔証明〕
△CDFと△ECFで
共通な角だから
∠CFD＝∠EFC…①
弧ACに対する円周角は等しいから
∠ABC＝∠ADC
よって∠OBC＝∠CDF…②
△OBCはOB＝OCの二等辺三角形だから，2つの底角は等しいので
∠OBC＝∠OCB
よって∠OBC＝∠ECF…③
②，③から
∠CDF＝∠ECF…④
①，④から
2組の角がそれぞれ等しいので
△CDF∽△ECF
問2　$3\sqrt{10}$ cm
解説
問2
円周角の定理より∠ACB＝∠ADB＝90°
△ACBで三平方の定理より
$\mathrm{AB}=\sqrt{9^2+13^2}=5\sqrt{10}$ cm
△CEDと△AEBは
2組の角がそれぞれ等しいので相似である。
CE＝x cmとすると
CE：AE＝CD：ABより
$x:\mathrm{AE}=5:5\sqrt{10}$
$\mathrm{AE}=\sqrt{10}\,x$ cm
△ACEにおいて
三平方の定理より
$9^2+x^2=(\sqrt{10}\,x)^2$
$81+x^2=10x^2$
$9x^2=81$
$x^2=9$
$x>0$だから
$x=3$
よって，BE＝13－3＝10 cm
DE：BE＝CD：BA
$\mathrm{DE}:10=5:5\sqrt{10}$
$\mathrm{DE}=\sqrt{10}$ cm
よって
$\mathrm{BD}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}$
$=3\sqrt{10}$ cm

【問 19】

図のように，AB＝6 cm，BC＝8 cm の長方形 ABCD と, 長方形 ABCD の対角線 AC を斜辺とする直角二等辺三角形 EAC がある。辺 EC と辺 AD の交点を F とし, 線分 ED をひく。

問1～問4に答えなさい。

（徳島県 2011 年度）



問1 △EAF∽△DCF を証明しなさい。

問2 辺 EC の長さを求めなさい。

問3 △FAC の面積を求めなさい。

問4 線分 ED の長さを求めなさい。

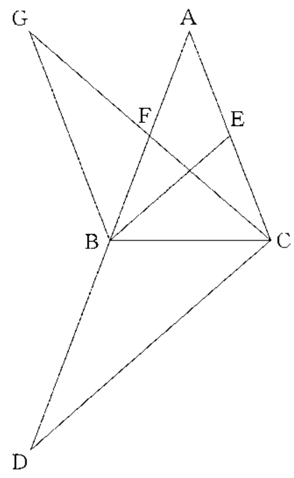
解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm
問3	cm^2
問4	cm

解答
問1
〔証明〕
△EAFと△DCFで
直角二等辺三角形の頂角と長方形の内角だから
∠AEF＝∠CDF＝90°…①
対頂角は等しいから
∠AFE＝∠CFD…②
①, ②から
2組の角が, それぞれ等しいので
△EAF∽△DCF
問2 $5\sqrt{2}$ cm
問3 $\dfrac{150}{7}\,\mathrm{cm}^2$
問4 $\sqrt{2}$ cm
解説
問3
FからACに垂線をひき交点をHとする。
△AFH∽△ACDだから
FH:AH:AF＝CD:AD:AC＝6:8:10＝3:4:5
また△CFH∽△CAEだから
CH:FH:CF＝CE:AE:CA＝1:1: $\sqrt{2}$ ＝3:3: $3\sqrt{2}$
FH:AC＝3:7
FH:10＝3:7
FH＝$\dfrac{30}{7}$ cm
よって△FAC＝$\dfrac{1}{2}\times10\times\dfrac{30}{7}=\dfrac{150}{7}\,\mathrm{cm}^2$
問4
AF:AC＝5:7より
AF:10＝5:7
AF＝$\dfrac{50}{7}$ cm
FD＝$8-\dfrac{50}{7}=\dfrac{6}{7}$ cm
△AFCと△EFDにおいて
△EAF∽△DCFだから
AE:CF＝EF:DF…①
対頂角より
∠AFC∽∠EFD…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいので
△AFC∽△EFD
よってED:FD＝AC:FC
ED: $\dfrac{6}{7}$ ＝7: $3\sqrt{2}$
$3\sqrt{2}$ ED＝6
ED＝$\sqrt{2}$ cm

【問 20】

図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC がある。辺 AB の延長上に，AB＝BD となる点 D をとり，点 D と点 C を結ぶ。点 B を通り線分 DC に平行な直線と，辺 AC との交点を E とする。また，辺 AB の中点を F とし，点 B を通り辺 CA に平行な直線と，直線 CF との交点を G とする。



このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（香川県　2011 年度）

問1　△ABE∽△ADC　であることを証明せよ。

問2　GC＝DC　であることを証明せよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	〔証明〕

解答
問1
〔証明〕
△ABEと△ADCにおいて
∠Aは共通
BE // DCより，同位角は等しいから
∠ABE＝∠ADC
2組の角がそれぞれ等しいから
△ABE∽△ADC
問2
〔証明〕
△ACFと△BGFにおいて
点Fは辺ABの中点だから
AF＝BF
対頂角は等しいから
∠AFC＝∠BFG
CA // BGより錯角は等しいから
∠CAF＝∠GBF
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ACF≡△BGF
よってAC＝BG…①
△GBCと△DBCにおいてBCは共通…②
仮定よりAB＝AC，AB＝BD
よって①よりBG＝BD…③
BCの延長上に点Hをとる。
CA // BGより同位角は等しいから
∠GBC＝∠ACH＝180°－∠ACB
∠DBC＝180°－∠ABC
仮定より∠ACB＝∠ABCだから
∠GBC＝∠DBC…④
②，③，④より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△GBC≡△DBC
したがってGC＝DC
解説
問2
△FACと△FBGにおいて
仮定よりAF＝BF…①
対頂角より∠AFC＝∠BFG…②
BG // CAより錯角が等しいので∠FAC＝∠FBG…③
①，②，③より
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△FAC≡△FBG
よってAC＝BG…④
△BGCと△BDCにおいて共通なのでBC＝BC…⑤
仮定より，AB＝AC…⑥　AB＝BD…⑦
④，⑥，⑦よりBG＝BD…⑧
AB＝ACより∠ABC＝∠ACB…⑨
∠DBC＝180°－∠ABC…⑩
GB // ACより∠GBC＝180°－∠ACB…⑪
⑨，⑩，⑪より∠GBC＝∠DBC…⑫
⑤，⑧，⑫より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△BGC≡△BDC
よってGC＝DC

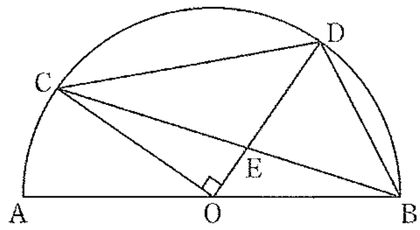
【問 21】

図1のように，線分 AB を直径とする半円 O の $\overset{\frown}{AB}$ 上に，2 点 C，D を，$\angle$COD＝90° となるようにとり，線分 OD と線分 BC の交点を E とする。また，点 B と点 D，点 C と点 D をそれぞれ結び，△BCD をつくる。

このとき，次の問いに答えなさい。(円周率は π を用いること。)

（愛媛県　2011 年度）

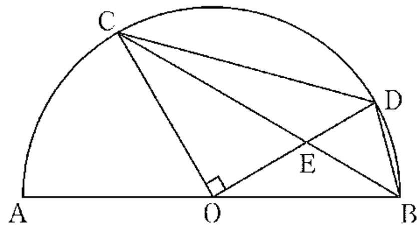
図1



問1　△BCD∽△DCE であることを証明せよ。

問2　図2のように，AB＝14 cm，BC＝12 cm であるとき，

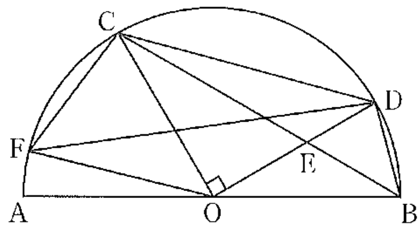
図2



(1)　線分 CE の長さを求めよ。

(2)　下の図3のように，$\overset{\frown}{AC}$ 上に点 F を $\angle$COF＝45° となるようにとるとき，線分 CF と線分 DF と $\overset{\frown}{CD}$ とで囲まれた部分の面積を求めよ。

図3



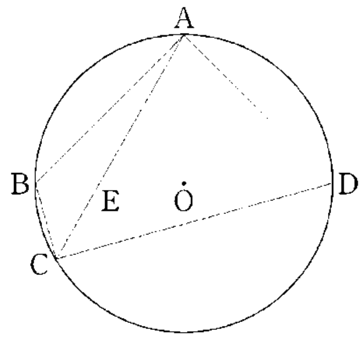
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1
〔証明〕
△BCDと△DCEにおいて
∠BCDと∠DCEは共通だから
∠BCD＝∠DCE…①
$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角と中心角の関係から
$\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{COD}=45^\circ$…②
△OCDはOC＝ODの直角二等辺三角形だから
∠CDE＝45°…③
②, ③から∠CBD＝∠CDE…④
①, ④で
2組の角がそれぞれ等しいので
△BCD∽△DCE
問2
(1) $\dfrac{49}{6}$ cm
(2) $\dfrac{49}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$
解説
問2
(1)
△CODにおいて
$\mathrm{CO}=\mathrm{DO}=\dfrac{14}{2}=7\mathrm{cm}$
∠COD＝90°より
$\mathrm{CD}=\sqrt{2}\,\mathrm{CO}=\sqrt{2}\times7=7\sqrt{2}$ cm
△BCD∽△DCEより
BC:DC＝CD:CE
$12:7\sqrt{2}=7\sqrt{2}:\mathrm{CE}$
$12\mathrm{CE}=7\sqrt{2}\times7\sqrt{2}$
$\mathrm{CE}=\dfrac{49}{6}$ cm
(2)
∠COF＝45°のとき
$\angle\mathrm{CDF}=\dfrac{45}{2}^\circ$
$\angle\mathrm{ODF}=45^\circ-\dfrac{45}{2}^\circ=\dfrac{45}{2}^\circ$
OD＝OFより$\angle\mathrm{OFD}=\angle\mathrm{ODF}=\dfrac{45}{2}^\circ$
よって∠CDF＝∠OFDよりOF // DC
したがって△CFD＝△COD
これより求める面積はおうぎ形OCDの面積と一致するので
$\pi\times7^2\times\dfrac{90}{360}=\dfrac{49}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$

【問 22】

半径 3 cm の円 O がある。下の図のように，円 O の周上に 4 点 A，B，C，D を，線分 BD が直径，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$，∠ADC＝60° となるようにとり，四角形 ABCD をつくる。対角線 AC，BD をひき，その交点を E とする。



次の問1，問3は □ の中にあてはまる最も簡単な数を記入し，問2は指示にしたがって答えよ。

（福岡県　2011 年度）

問1　∠CBD＝ □ °

問2　上の図において，△ABC と相似な三角形を 1 つ選び，その三角形と△ABC が相似であることを，右の の中に証明せよ。

〔証明〕

問3　△ACD と△ADE の面積の比は，△ACD：△ADE＝ □ ： □ である。

解答欄

問1	°
問2	〔証明〕
問3	:

解答
問1　75°
問2
〔証明〕
(△DEC と△ABC においての例)
△DEC と△ABC において
$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角は等しいから
$\angle EDC = \angle BAC$…①
$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB}$から
$\angle ECD = \angle BCA$…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle DEC \backsim \triangle ABC$
問3　3 : 2

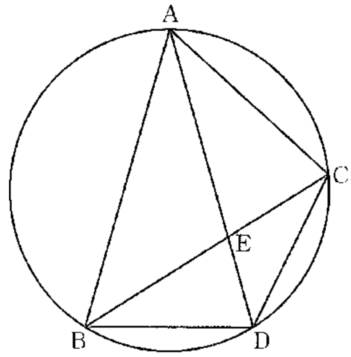
解説
問3
$\angle AEO = \angle BDC + \angle ACD = \angle BDC + \angle ABD = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$
AB＝AD より$\angle AOB = 90^\circ$
よって $EO = \dfrac{AO}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ cm
$AE = 2EO = 2\sqrt{3}$ cm
$AD = AB = \dfrac{BD}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$
A から CD に垂線をひき交点を H とする。
$\angle ADH = 60^\circ$ より $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ cm
△ACH は$\angle AHC = 90^\circ$, $\angle ACH = 45^\circ$ より
$AC = \sqrt{2}\,AH = \sqrt{2} \times \dfrac{3\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm
よって$\triangle ACD : \triangle ADE = AC : AE = 3\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 3 : 2$

【問 23】

図は，△ABC と 3 つの頂点 A，B，C を通る円において，点 A をふくまない$\overset{\frown}{BC}$上に$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$となるように点 D をとったものである。また，線分 AD と線分 BC の交点を E とし，点 B と点 D，点 C と点 D をそれぞれ結んだものである。

このとき，次の問1～問4に答えなさい。

（鹿児島県　2011 年度）



問1　∠BAC＝62° のとき，∠CBD の大きさは何度か。

問2　AB // CD のとき，面積がつねに等しくなる 2 つの三角形の組がいくつかある。そのうちの 1 組をあげよ。

問3　△ABD∽△AEC であることを証明せよ。

問4　AB＝7 cm，AC＝5 cm，BD＝3 cm のとき，線分 AD の長さは何 cm か。

解答欄

問1	度
問2	△　　　と △
問3	〔証明〕
問4	cm

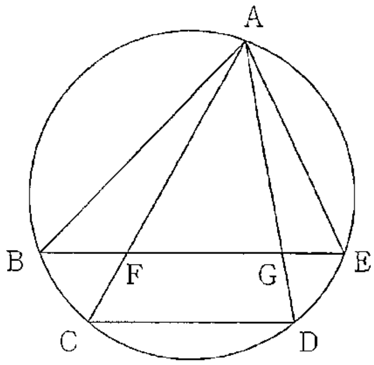
解答
問1　31 度
問2　△CAB と△DAB
問3
〔証明〕
△ABD と△AEC において
$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$であるから
∠BAD＝∠EAC…①
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから
∠ADB＝∠ACE…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABD∽△AEC
問4　$2\sqrt{11}$ cm
解説
問4
AE＝x cm とする。
△ABD∽△AEC より
AB : AE＝BD : EC
$7 : x=3 :$ EC
7EC＝$3x$
EC＝$\frac{3}{7}x$ cm
△AEC と△BED において
対頂角より∠AEC＝∠BED
弧 AB の円周角より∠ACE＝∠ADE
よって 2 組の角がそれぞれ等しいので
△AEC∽△BED
したがって EC : ED＝AC : BD
$\frac{3}{7}x :$ ED＝5 : 3
5ED＝$\frac{9}{7}x$
ED＝$\frac{9}{35}x$ cm
AD＝$x+\frac{9}{35}x=\frac{44}{35}x$ cm
△ABD∽△AEC より
AD : AC＝BD : EC
$\frac{44}{35}x : 5=3 : \frac{3}{7}x$
$\frac{44}{35}x\times\frac{3}{7}x=5\times3$　$x^2=\frac{5^2\times7^2}{2^2\times11}$
$x>0$ より $x=\frac{35\sqrt{11}}{22}$
よって AD＝$\frac{44}{35}x=\frac{44}{35}\times\frac{35\sqrt{11}}{22}=2\sqrt{11}$ cm

【問 24】

図のように，円周上に 5 つの点 A, B, C, D, E がある。BE // CD で，BE と AC との交点を F, BE と AD との交点を G とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（沖縄県　2011 年度）



問1　△ABG∽△EDG　であることを証明しなさい。ただし，証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

問2　∠BAC＝17°，∠AEB＝67° のとき，∠AGE の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	
問2	°

解答
問1
△ABG と△EDG において
対頂角は等しいから
∠AGB＝∠EGD…①
弧 BD に対する円周角は等しいから
∠BAG＝∠DEG…②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABG∽△EDG
問2　96°
解説
問2
C, E を結ぶ。
円周角の定理より∠BEC＝∠BAC＝17°　∠ADC＝∠AEC＝67°＋17°＝84°
BE // CD より∠AGB＝∠ADC＝84°
よって∠AGE＝180°－∠ABB＝180°－84°＝96°